JO. HENRICI LAMBERTI
OBSERVATIONES VARIAE
IN
MATHESIN PURAM.

§. 1.

Tab. VI. Est ea numerorum decimalium indoles, ut non modo instar numerorum naturalium tractari, verum & omnes quantitates utcunque irrationales, seriebus decimalibus exprimi possint. Ut ergo infinita hinc patet serierum decimalium diversitas, sic illas universalissime considerare possumus, ut facta ex multifaria digitorum vel numerorum simplicium combinatione & permutatione enascentia. Nec est quod dubitemus, combinationem istam & permutationem numerorum certis & definitis legibus esse subjectam, quotiescunque formatio seriei decimalis certa lege fuerit innixa. Duo ergo, eaque maxime universalia hinc existunt problemata, ad quae fere omnia ea reducuntur, quae ad cognoscendam quantitatem per seriem quamcunque expressam & ad patefacienda reconditiora serierum symtomata quidquam faciunt.

I°. *Data lege, qua formatur series decimalis, invenire leges, quibus numeri simplices permutari & combinari debent, ut inde series proposita emergat.*

II°. *Data lege, qua numeri simplices in serie proposita sibi invicem subsequentes, combinati & permutati sunt, invenire naturam quantitatis, ex qua series formatur, vel cui aequalis est.*

§. 2. Utriusque hujus Problematis Solutio universalis vix speranda, cum & speciales difficillimae sint. Harum tamen sim-

simplicissimam dabo, ut exempli ergo possit esse ceteras investigaturo. Notum est, seriem emergere decimalem, numeratorem fractionis rationalis per ipsius denominatorem dividendo. Quare divisio numeri rationalis per alium rationalem ipsi incommensurabilem lex est eaque simplicissima, qua infinitae series decimales formantur. Assumta itaque hac lege, problema prius mutatur in specialius sequens. Tab. VI.

PROBLEMA I.

§. 3. Invenire legem, qua numeri in seriebus ex divisione numeri rationalis per rationalem provenientibus, sibi invicem subsequentes combinati & permutati sunt.

SOLUTIO.

Sit Numerus dividendus $= A$, divisor $= B$, dividendo incommensurabilis. Instituatur divisio, sitque quotus, antequam ad partes decimales perveniatur $= C$, residuum $= a$. Continuata concipiatur divisio in partibus decimalibus, sintque successive quoti m, n, p, q, &c. residua b, c, d, e, f, &c. Jam cum nullum residuorum b, c, d, e, f, &c. majus esse possit divisore B, & ex natura divisionis decimalis residuis constanter adponantur cyphrae, necesse est, ut, peractis aliquot divisionibus, residuum primum a revertatur, adeoque ob eandem rationem revertentur eodem ordine quoti m, n, p, q, &c. eademque residua b, c, d, e, f, &c. Usque dum residuum primum denuo revertatur. Quod cum in infinitum eodem ordine procedat, hinc erit lex serierum ex divisione emergentium: *Numeros sibi invicem subsequentes post certum terminum constanter eodemque ordine redire, quo initio sibi invicem subsecuti sunt.*

§. 4. Quodsi ex residuis b, c, d, e, &c. quoddam fuerit cyphra, per se evidens est, divisionem terminari, adeoque quotum esse seriem decimalem finitam, quod accidit, quotiescunque divisor B comprehenditur sub formula $2^n. 5^m$ sive compositus est ex dignitatibus binarii & quinarii, dividendus vero ipsi incommensurabilis.

 §. 5. Non

Tab. VI. §. 9. Plurimae hic sua sponte se offerunt propositiones & problemata, quorum quaedam tantum indicabimus.

I°. *Si numerus integer per alium quemcunque integrum dividatur, quotus erit aut numerus integer, aut series decimalis finita, aut series periodica.*

II°. *Omnis fractio rationalis aequalis est vel numero integro, vel seriei decimali finitae vel periodicae.*

III°. *Nulla series periodo carens aequalis est quantitati rationali*, & contra

IV°. *Omnes quantitates irrationales nonnisi seriebus decimalibus ἀπεριοδικαῖς aequales esse possunt.*

V°. *Si quantitas quaecunque A ad aliam B fuerit ut unitas ad seriem decimalem periodo destitutam, ratio ista per quantitatem rationalem exprimi nequit.*

VI°. *Data longitudine periodi seriei, sive numero membrorum, quibus constat, invenire divisores vel fractiones genetrices serierum, quae periodum hujus longitudinis habeant.*

VII°. *Data fractione quacunque rationali* $\frac{1}{t}$ *invenire formulam longitudinem periodi exhibentem.*

VIII°. *Si series decimalis formetur ex additione continua fractionum rationalium seriei* $A + B + C + D +$ *&c. in series decimales mutatarum, ex lege progressionis propositae seriei invenire, an periodus serierum summas exhibentium continuo major evadat, vel continuo tardius incipiat, nec ne?*

§. 10. Tangentem arcus ipso arcu semper esse majorem, sinum vero minorem, abunde constat. Cum jam tangens *AT*, arcus cujuslibet *AM* (*Fig.* 1.) determinetur, ducta ex centro circuli *C* recta *CT*, sinus vero *AS*, ducta recta *ES* axi *AD* parallela, sive ex puncto axis *AD* a vertice *A* infinite distante, hinc dabitur inter *C* & *D* punctum quoddam *P*, ex quo si

per

per M ducátur recta PMQ, fit AQ arcui AM proxime Tab. VI. omnium aequalis. Sit enim radius $= 1$, arcus $AM = v$, finus $AS = y$, finus verfus $SM = x$. $AP = z$. ponatur $AQ = AM = v$, erit

$$QS : SM = AQ : AP.$$
$$(v - y) : x = v : z$$
$$z = \frac{vx}{v - y}$$

Eft vero

$$y = v - \frac{1}{2.3}v^3 + \frac{1}{2.3.4.5}v^5 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}v^7 + \&c.$$
$$x = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2.3.4}v^4 + \frac{1}{2.3.4.5.6.}v^6 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8}v^8 + \&c.$$

adeoque, facta fubftitutione, & inftituta divifione, erit

$$z = 3 - \frac{1}{10}v^2 - \frac{1}{4200}v^4 + \frac{1}{126000}v^6 + \&c.$$

Quae feries diftantiam AP ita exhibet, ut ducta PMQ fit AQ exacte arcui AM aequalis. At cum feriem arcus vel variabilis v ingrediatur, diftantia AP hoc modo etiam variabilis eft, quam tamen, ut analoga fit diftantiae AC, ex qua tangens, vel diftantiae infinitae, ex qua finum duximus, conftantem ponimus, fiat ergo $v = 0$, & erit $z = 3$. Unde erit $BP = BC =$ radio circuli. Plura funt, quae hinc confequuntur.

I°. *Rectificatio arcuum circularium quantumvis exacta, eaque in praxi omnium facillima.*

II°. *Delineatio mapparum majorum ex opticis exactiffima.*

III°. *Formulae trigonometricae & in minutis fecundis exactae, faltem non continuae.*

 IV°. *Qua*

Tab. VI. §. 14. Formulas trigonometricas pariter hic omittimus, cum id incommodi habeant, ut pro arcubus, qui $22\frac{1}{2}°$ majores, $67\frac{1}{2}°$ minores sunt, aliis opus sit, quam pro ceteris quadrantis arcubus, ceterumque inventu non adeo sint difficiles.

§. 15. Ratio $QS : ST$ est $= (1-x) : (3-x)$

Est enim

$$AT = \frac{y}{1-x}, \quad AS = y,$$

$$AQ = \frac{3y}{3-x}.$$

Unde

$$ST = \frac{y}{1-x} - y = \frac{xy}{1-x}$$

$$SQ = \frac{3y}{3-x} - y = \frac{xy}{3-x}$$

adeoque $SQ : ST = \dfrac{xy}{3-x} : \dfrac{xy}{1-x} = (1-x) : (3-x)$.

Hinc deducuntur sequentia.

I°. Cum AQ proxime sit aequalis arcui AM, idque eo exactius, quo minor fuerit arcus, erit SQ proxime differentia inter arcum & sinum; cumque sit ST differentia inter sinum & tangentem arcus, erit haec ad illam proxime, ut $(3-x)$ ad $(1-x)$; adeoque si arcus continuo ponatur minor, haec ratio tandem accedet ad $3 : 1$. Quare

II°. In arculis valde exiguis pars, qua tangens excedit arcum, dupla est ea, qua arcus excedit sinum.

III°. Cum

III°. Cum tangens possit considerari ut semilatus polygoni circumscripti, sinus vero ut semilatus inscripti, hinc quoque erit proxime differentia peripheriae utriusque polygoni, ad differentiam peripheriae circuli & polygoni inscripti, ut $(3-x)$ ad $(1-x)$, quae ratio tandem erit $= 3 : 1$, si utrumque polygonum infinita habuerit latera. Tab. VI.

IV°. Patet hinc, quomodo, datá peripheria utriusque polygoni, longe exactius determinari possit peripheria circuli, ac fieri solet, si pro hac sumatur medium arithmeticum illarum, quae considerantur ut limites arcuum circularium. Quod ut exemplo illustretur, sumamus illud quod habet *KRAFTIUS* methodum Gregorianam examinaturus, *Inst. Geom. subl.* §. 128. Sumit vero pro limitibus quadrantis, 8. sin. $11\frac{1}{4}$ gr. $= 1,56072$, & 8. tang. $11\frac{1}{4}$ gr. $= 1,59130$, unde medium arithmeticum $= 1,57601$, pro longitudine quadrantis, quare hoc modo esset ratio diametri ad peripheriam $= 1,00000 : 3,15202$ a vera multum recedens. At ex nostro principio debet esse, $(3-x) : (1-x) = (1,59130 - 1,56072)$: diff. arcus & 156072. Est vero $1 - x =$ cos. $11\frac{1}{4}$, $= 0,98078$, unde $3 - x = 2,98078$, adeoque $2,98078 : 98078 = 0,03058 : 0,01006$.
quare arcus proxime $= 1,56072 + 0,01006 = 1,57078$ & diam. ad peripheriam $= 1,00000 : 3,14156$. quae ratio antea inventa longe est tolerabilior.

§. 16. Limites quoque, ex dicto theoremate Gregoriano deducti sic exprimi possunt, ut tandem perveniatur ad seriem arcui exacte aequalem. Sit arcus quicunque $= a$; erunt limites arcu minores successive

$$2 \text{ sin. } \tfrac{1}{2}a = 2 \text{ sin. } \tfrac{1}{2}a.$$

$$4 \text{ sin. } \tfrac{1}{4}a = \frac{(2 \text{ sin. } \frac{1}{2}a).(\text{sec. } \frac{1}{4}a)}{rad.}$$

Tab. VI. $8 \text{ fin. } \frac{1}{8} a = (2 \text{ fin. } \frac{1}{2} a). \frac{(\text{fec. } \frac{1}{4} a)}{rad.} . \frac{(\text{fec. } \frac{1}{8} a)}{rad.}$

$$16 \text{ fin. } \frac{1}{16} a = (2 \text{ fin. } \frac{1}{2} a). \frac{(\text{fec. } \frac{1}{4} a)}{rad.} . \frac{(\text{fec. } \frac{1}{8} a)}{rad.} . \frac{(\text{fec. } \frac{1}{16} a)}{rad.} \&c.$$

Cum hi limites continuo propius ad veram arcus longitudinem accedant, erit tandem arcus ipfe

$$a = (2 \text{ fin. } \frac{1}{2} a). \frac{(\text{fec. } \frac{1}{4} a)}{rad.} . \frac{(\text{fec. } \frac{1}{8} a)}{rad.} . \frac{(\text{fec. } \frac{1}{16} a)}{rad.} . \frac{(\text{fec. } \frac{1}{32} a)}{rad.} \&c.$$

five per cofinus

$$a = (2 \text{ fin. } \frac{1}{2} a) \frac{rad.}{(\text{cof. } \frac{1}{4} a)} . \frac{rad.}{(\text{cof. } \frac{1}{8} a)} . \frac{rad.}{(\text{cof. } \frac{1}{16} a)} . \frac{rad.}{(\text{cof. } \frac{1}{32} a)} . \&c.$$

fimiliter limites arcu majores fucceffive

$$2 (\text{fin. } \frac{1}{2} a). \frac{(\text{fec. } \frac{1}{2} a)}{rad.} . = 2 (\text{fin. } \frac{1}{2} a). \frac{(\text{fec. } \frac{1}{2} a)}{rad.}$$

$$(4 \text{ fin. } \frac{1}{4} a). \frac{(\text{fec. } \frac{1}{4} a)}{rad.} = (2 \text{ fin. } \frac{1}{2} a). \frac{(\text{fec. } \frac{1}{4} a)^2}{rad.^2}$$

$$(8 \text{ fin. } \frac{1}{8} a). \frac{(\text{fec. } \frac{1}{8} a)}{rad.} = (2 \text{ fin. } \frac{1}{2} a). \frac{(\text{fec. } \frac{1}{4} a)}{rad.} . \frac{(\text{fec. } \frac{1}{8} a)^2}{rad.^2}$$

&c.

Qui cum pariter ad arcum continuo propius accedant, arcus tandem erit ut antea

$$a = (2 \text{ fin. } \frac{1}{2} a). \frac{(\text{fec. } \frac{1}{4} a)}{rad.} . \frac{(\text{fec. } \frac{1}{8} a)}{rad.} . \frac{(\text{fec. } \frac{1}{16} a)}{rad.} : \&c.$$

five

$$a = (2 \text{ fin. } \frac{1}{2} a). \frac{(rad.)}{(\text{cof. } \frac{1}{4} a)} . \frac{rad.}{(\text{cof. } \frac{1}{8} a)} . \frac{rad.}{(\text{cof. } \frac{1}{16} a)} . \&c.$$

Cum omnes termini huius feriei fefe multiplicent, feries mutabitur in aliam, adhibendo logarithmos; erit nempe

log.

$\log. a = \log. (2 \sin. \tfrac{1}{2} a) + \log. \left(\frac{rad.}{\cos. \tfrac{1}{4} a}\right) + \log. \left(\frac{rad.}{\cos. \tfrac{1}{8} a}\right)$ Tab. VI.
$+ \log. \left(\frac{rad.}{\cos. \tfrac{1}{16} a}\right) + \&c.$

Haec ſeries ſatis convergens eſt, cum terminus quiſque ſequentis ſit quadruplo maior.

§. 17. Series, quae pro ſinu ex arcu circuli inveniendo datur

$$y = v - \frac{1}{2.3.} v^3 + \frac{1}{2.3.4.5.} v^5 - \&c.$$

artificio ſingulari, absque calculi infiniteſimalis adminiculo eruitur ſequentem in modum. Fiat

$$(A)\ y = a + Av + bv^2 + Bv^3 + cv^4 + Cv^5 + \&c.$$

in qua ſerie y eſt ſinus, v arcus, radius ponatur $= 1$. coefficientes a, A, b, B, c, C &c. conſtantes, utut nondum determinati. Cum per geometriam elementarem ſinus arcui duplo $= 2v$, reſpondens ſit $= 2\sqrt{(y^2 - y^4)}$, ſubſtituatur in propoſita ſerie pro ſinu ſimplo y ſinus arcus dupli $2\sqrt{(y^2 - y^4)}$ & pro arcu v, arcus duplus $2v$, ſic habebitur ſeries altera.

$$(B)\ 2\sqrt{(y^2 - y^4)} = a + 2Av + 4bv^2 + 8Bv^3 + 16cv^4 + \&c.$$

Quodſi iam ſeries B quadretur, & quadratum $BB = 4y^2 - 4y^4$ dividatur per 4, prodibit ſeries $C = BB : 4 = y^2 - y^4$, quae adeo aequalis erit differentiae quadrati & biquadrati ſeriei prioris A. Quare ſi differentia haec actu quaeratur, & a ſerie C ſubtrahatur, remanebit ſeries D, quae erit $= 0$, in qua ergo ſingulorum terminorum coefficientes ponantur $= 0$, ut hoc modo determinentur a, A, b, B &c. coefficientes ſeriei quaeſitae A. Docet vero calculus hunc in finem inſtitutus,

1°. Coefficientes a, b, c, d &c. faciendos eſſe $= 0$.

Tab. VI. 2°. Coefficientem A esse indeterminatum.

3°. Faciendum esse

$$B = -\frac{1}{2.3.}A^3$$

$$C = +\frac{1}{2.3.4.5.}A^5$$

$$D = -\frac{1}{2.3.4.5.6.7.}A^7$$

&c.

adeoque esse

$$Y = Av - \frac{1}{2.3.}A^3v^3 + \frac{1}{2.3.4.5.}A^5v^5 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7.}A^7v^7$$

$+$ &c.

Unde simul patet, ponendum esse $A = 1$.

§. 18. Simili modo inveniri possunt series pro sinu verso, cosinu, tangente &c. nec non series pro numero logarithmi ex dato logarithmo inveniendo, quam solam ob brevitatem adiungemus. Sit numerus $= n$, logarithmus $= l$, Fiat

$$n = A + Bl + Cl^2 + Dl^3 + El^4 + \&c.$$

erit

$$nn = A + 2\,Bl + 4\,Cl^2 + 8\,Dl^3 + 16\,El^4 + \&c.$$

Quodsi ergo series prior quadretur, quadratum a serie altera subtrahatur, remanebit series, quae erit $= 0$, cuiusque singuli termini poni poterunt $= 0$, ut determinentur coefficientes $A, B, C, D,$ &c. qui calculo ipso instituto erunt $A = 1$, $B = 1$, $C = \frac{1}{2}$, $D = \frac{1}{1.\,2.\,3.}$ &c. adeoque series quaesita

$$n = 1 + l + \frac{l^2}{2} + \frac{l^3}{2.3.} + \frac{l^4}{2.3.4.} + \&c.$$

§. 19. Equi-

§. 19. Equidem his nil novi detegitur, cum tamen utile sit, inventionum reserare fontes, licebit adhuc adnectere inventionem seriei LEIBNIZIANÆ ex formulis, quas pro sinibus arcuum multiplorum eruit summus NEWTONUS. Sit sinus arcus simpli $= a$, cosinus $= b$, radius $= r$, sinus anguli vel arcus m tupli $= x$, erit $x = \frac{m}{r^{m-1}} \left(b\, a^{m-1} - \frac{(m-1).\ (m-2)}{2.\quad 3} b^3 a^{m-3} + \frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}.\frac{m-3.}{4}.\frac{m-4}{5} b^5 a^{m-5}\ \&c. \right)$ Tab. VI.

Hinc erit sinus m tupli x pars $\frac{1}{m}$

$$\frac{x}{m} = \frac{1}{r^{m-1}} \left(b\, a^{m-1} - \frac{(m-1).}{2} \frac{(m-2)}{3} b^3 a^{m-3} + \&c. \right)$$

Quodsi iam ponatur m infinite parva, sive $= 0$ erit $\frac{x}{m} = \frac{x}{0}$ arcus sinui b respondens, adeoque $\frac{x}{0} = v = r \cdot$

$$\left(\frac{b}{a} - \frac{b^3}{3\,a^3} + \frac{b^5}{5\,a^5} - \frac{b^7}{7\,a^7} + \&c. \right)$$

Sit tangens huius arcus $= t$, erit $\frac{b}{a} = \frac{t}{r}$, unde $v =$

$$t - \frac{t^3}{3\,r^2} + \frac{t^5}{5\,r^4} - \frac{t^7}{7\,r^5} + \&c.$$

Eadem haec series ex formula tangentium $x = m$

$$\frac{\left(r^m t - \frac{m-1.}{2}\frac{m-2}{3} r^{m-2} t^3 + \frac{m-1.}{2}\frac{m-2.}{3}\frac{m-3.}{4}\frac{m-4.}{5} r^{m-4} t^5 - \&c. \right)}{r^m - \frac{m.\,m-1.}{2} r^{m-2} t + \frac{m.\,m-2.}{2}\frac{m-3}{3} r^{m-4} t^4 - \&c.}$$

$ABaA$, $BcCB$, $CbAC$, cui ergo si addantur spatia triangulorum $DACD$, $EABE$, $FBCF$, nota erit summa sectorum ADC, AEB, BFC, quam ponemus $= \alpha$. Sint iam radii $AD = a$, $AE = b$, $BF = c$, anguli $ADC = e$ grad., $AEB = f$, $BFC = g$, erunt sectores ut $a^2 e$, $b^2 f$, $c^2 g$. Quare

$$\begin{aligned}(a^2 e + b^2 f + c^2 g) : \alpha &= a^2 e \ : \ AbCDA. \\ &= b^2 f \ : \ BaAEB. \\ &= c^2 g \ : \ BcCFB.\end{aligned}$$

Unde dantur singuli Sectores, qui cum sint ad totam circuli aream, ut angulorum gradus ad gradus 360; singulorum circulorum area, his erutis, amplius latere nequit.

§. 28. Inventio radicum aequationum cuiuscunque gradus posteris videtur esse relinquenda. Dabimus interea radicum omnium aequationum summas quadratorum, cuborum &c. in genere omnium dignitatum, etsi ipsae radices nullo modo hinc innotescant.

§. 29. Sit aequationum formula generalissima

$$0 = x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \dots\dots\dots + Hx^2 - Ix + K$$

Sint radices, quarum numerus est m, α, β, γ, δ ε &c. Fiat ipsarum

summa $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ &c $= \int r$

summa quadratotum $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 +$ &c $= \int r^2$

summa cuborum $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 +$ &c $= \int r^3$

&c.

Cum iam in aequatione proposita singulae radices α, β, γ, &c. substitui possint pro x, fiat haec substitutio, sicque aequatio abibit in speciales sequentes

$0 = \alpha^m$

$$0 = \alpha^m - A\alpha^{m-1} + B\alpha^{m-2} - \ldots + H\alpha^2 - I\alpha + K.$$ Tab. VI.

$$0 = \beta^m - A\beta^{m-1} + B\beta^{m-2} - \ldots + H\beta^2 - I\beta + K.$$

$$0 = \gamma^m - A\gamma^{m-1} + B\gamma^{m-2} - \ldots + H\gamma^2 - I\gamma + K.$$

$$0 = \delta^m - A\delta^{m-1} + B\delta^{m-2} - \ldots + H\delta^2 - I\delta + K.$$

&c.

Quarum summa erit

$$0 = \int r^m - A\int r^{m-1} + B\int r^{m-2} - \ldots + H\int r^2 - I\int r + mK$$

adeoque

$$\int r^m = A\int r^{m-1} - B\int r^{m-2} + \ldots - H\int r^2 + I\int r - mK$$

Dependet ergo summatio dignitatum superiorum a summatione omnium inferiorum, quae vero facile inveniuntur substituendo pro m successive 1, 2, 3, 4 &c. sic enim erit

$$\int r = A$$

$$\int r^2 = A\int r - 2B$$

$$\int r^3 = A\int r^2 - B\int r + 3C$$

$$\int r^4 = A\int r^3 - B\int r^2 + C\int r - 4D$$

$$\int r^5 = A\int r^4 - B\int r^3 + C\int r^2 - D\int r + 5E$$

$$\int r^6 = A\int r^5 - B\int r^4 + C\int r^3 - D\int r^2 + E\int r - 6F$$

&c.

Consequitur hinc, quod omnino notabile videtur, summas quarumcunque dignitatum radicum necessario rationales esse, quotiescunque coefficientes A, B, C &c. rationales fuerint, utut radices ipsae maxime fuerint irrationales. Unde deducere licet, qua forma radices sint exprimendae, ut huic conditioni satisfaciant. Porro hinc evidens est summas quadratorum, cuborum &c. radicum aequationum diversi gra-

 dus

Tab. VI. dus esse aequales, si omnes istae aequationes & quatenus coefficientes A, B, C, &c. habuerint aequales. Eaedem formulae ex consideratione coefficientium aequationis eruuntur. Est enim secundi termini coefficiens A summa omnium radicum, unde $\int r = A$. Huius vero quadratum compositum est ex quadratis singularum radicum, quorum summa $= \int r^2$, & productorum ex radicum singulis binis duplo, adeoque est

$$A^2 = \int r^2 + 2\,B, \text{ unde}$$

$$\int r^2 = A^2 - 2\,B = A\int r - 2\,B$$

similique modo reperientur $\int r^3$, $\int r^4$ &c.

Ceterum in aequatione signa $+$ — alternantia assumsimus, ut omnes radices essent positivae; quod si in casu speciali secus fuerit, etiam mutanda erunt signa in contraria, aut radices omnes in veras.

§. 30. Etsi vero hoc modo nulla radicum determinetur, hinc tamen deducere licebit medium cuiuscunque aequationis radicem maximam & minimam approximatione assequendi. Cum enim dignitates quantitatum crescant in ratione ipsarum quantitatum, hinc radicis maximae dignitates altiores tantae evadent, ut summae ceterarum veluti dispareant; Quare $\int r^{n+1}$ per $\int r^n$ dividendo, quotus eo magis ad verum radicis maximae valorem accedet, quo maior fuerit dignitas n. Ex. gr. sit aequatio cubica

$$x^3 - 15\,x^2 + 60\,x - 84 = 0.$$

erit $A = 15$, $B = 60$, $C = 84$, coefficientes D, E, F &c $= 0$.

Unde

$$\int r = 15$$

$$\int r^2 = 225 - 120 = 105$$

$\int r^3 = 1575 - 900 + 252 = 927$ Tab. VI.

$\int r^4 = 14905 - 6300 + 1260 = 8865$

$\int r^5 = 132975 - 55620 + 8820 = 86175$

$\int r^6 = 1292620 - 531900 + 77868 = 838593$

&c.

Hinc valor radicis habetur successive

$$\int r^2 : \int r = \frac{105}{15} = 7{,}00$$

$$\int r^3 : \int r^2 = \frac{927}{105} = 8{,}82$$

$$\int r^4 : \int r^3 = \frac{8865}{927} = 9{,}56$$

$$\int r^5 : \int r^4 = \frac{86175}{8865} = 9{,}71$$

$$\int r^6 : \int r^5 = \frac{838593}{8865} = 9{,}73$$

&c.

Radix vero minor invenitur, si signa secundi, quarti &c. termini aequationis immutentur, hoc enim modo radices verae abeunt in falsas, postea aequatio ita immutetur, ut omnes evadant verae, quod fit, si ipsis addatur numerus radice maxima iam reperta paullo maior.

§. 31. Possunt quoque ex formulis dignitatum series deduci, radicem aequationis maximam exhibentes, quod exemplo aequationum quadraticarum docebimus.

Sit enim aequatio secundi gradus

$$x^2 - ax + b = 0$$

erit

$$\int r = a$$

$$\int r^2 = a^2 - 2b$$

$$\int r^3 = a^3 - 3ab$$

$$\int r^4 = a^4 - 4a^2b + 2b^2$$

Tab. VI.

$$\int r^5 = a^5 - 5a^3b + 5ab^2$$
$$\int r^6 = a^6 - 6a^4b + 9a^2b^2 - 2b^3$$
$$\int r^7 = a^7 - 7a^5b + 14a^3b^2 - 7ab^3$$
$$\int r^8 = a^8 - 8a^6b + 20a^4b^2 - 16a^2b^3 + 2b^4$$

&c.

in genere

$$\int r^m = a^m - ma^{m-2}b + m.\frac{m-3}{2}a^{m-4}b^2 - m.\frac{m-4}{2}.\frac{m-5}{3}a^{m-6}b^3$$
$$- m.\frac{m-5}{2}.\frac{m-6}{3}.\frac{m-7}{4}a^{m-8}b^4 + \&c.$$

Unde valor radicis maioris erit

$$x = \frac{\int r^m}{\int r^{m-1}} = \frac{a^m - ma^{m-2}b + m.\frac{m-3}{2}a^{m-4}b^2 - \&c.}{a^{m-1} - (m-1)a^{m-3}b + \frac{m-1}{1}.\frac{m-4}{2}a^{m-5}b^2 - \&c.}$$

five divisione actu instituta

$$x = a - \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^3} - \frac{2b^3}{a^5} - \frac{5b^4}{a^7} - \frac{14b^5}{a^9} - \&c.$$

Quae series non convergit, nisi fuerit $a^2 > 4b$. quod tamen semper obtinet, si utraque radix fuerit vera.

§. 32. Cum iam in eo simus, ut aequationum radices approximando quaeramus, alias lubet adponere methodos, inter quas sequens plus uno respectu sese commendat.

§. 33. Sit aequatio generalissima

$$o = a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \&c. + px^m.$$

Fiat $x = k + y$. erit

$$o = + a$$
$$- bk - by$$
$$+ ck^2$$

Tab. VI.

$$+ ck^2 + 2cky + cy^2$$
$$- dk^3 - 3dk^2y - 3dky^2 - dy^3$$
$$+ ek^4 + 4ek^3y + 6ek^2y^2 + 4eky^3 + ey^4$$
&c.

Abiiciantur termini secundum sequentes, erit

$$0 = a - bk + ck^2 - dk^3 + ek^4 - \&c.$$
$$- by + 2cky - 3dk^2y + 4ek^3y - \&c.$$

adeoque

$$y = \frac{a - bk + ck^2 - dk^3 + ek^4 - fk^5 + \&c.}{b - 2ck + 3dk^2 - 4ek^3 + 5fk^4 - \&c.}$$

& ob $x = k + y$

$$x = \frac{a - ck^2 + 2dk^3 - 3ek^4 + 4fk^5 - \&c - (m-1)pk^m.}{b - 2ck + 3dk^2 - 4ek^3 + 5fk^4 - \&c - mpk^{m-1}.}$$

Quae est formula quaesita, his insignita proprietatibus.

1°. Si pro k substituatur x, id est quaevis radicum, formula dabit valorem istius radicis substitutae, quod evidens est, sive perpendamus hoc casu fieri $y = 0$, sive cogitemus, substitutione facta formulam abire in aequationem initio propositam.

2°. Si pro k substituatur numerus A quantumvis magnus, sive tantus, ut ceteri termini formulae prae terminis $(m-1)\,pk^m$ & mpk^{m-1} disspareant, erit hoc modo

$$x = \frac{(m-1)\,pA^m}{mpA^{m-1}} = \frac{m-1}{m}A.$$

cum vero sit $m > m-1$, erit $\frac{m-1}{m}A < A$. quare prima hac operatione sic ad valorem radicis acceditur, ut ex assumto ipsius valore A longe nimio, iam ha-

 beatur

Tab. VI. beatur minor $\frac{m-1}{m}A$. quo denuo pro k substituto, iterum pervenietur ad valorem minorem, & radici maximae propiorem.

3°. Quod si contra ponatur $k = 0$, formula erit $x = \frac{a}{b}$; quae quantitas denuo magis ad valorem radicis minoris accedit, quam assumtus o, qui manifesto minor est, ob positas omnes radices veras.

4°. Hinc tandem conficitur, pro k posse assumi numerum quemcumque, & formulam dare valorem ad eam radicem accedentem, quae numero assumto propior est.

5°. Quodsi ergo pro k substituatur coefficiens secundi termini, hoc modo perveniemus ad valorem radici maximae propiorem; quo denuo substituto, novus hinc emergens valor ipsi radici iterum erit propior &c.

6°. Quodsi fiat $k = 0$, eodem modo approximando detegetur radix minor.

7°. Si fiat $k =$ secundo termino per numerum radicum aequationis m diviso, pervenietur ad unam radicum mediarum.

8°. Tribus his radicibus a summa radicum subtractis, & residuo per $m-3$ diviso, quotus pro k substituatur, sic perveniri poterit ad aliam radicum mediarum, si quidem aequatio plures habeat &c. Addamus exemplum.

§. 34. Sit aequatio quarti gradus

$$0 = x^4 - 17x^3 + 104x^2 - 268x + 240$$

erit $m = 4$, $a = 240$, $b = 268$, $c = 104$, $d = 17$.

$e = 1$. adeoque formula

$$x = \frac{3k^4 - 34k^3 + 104k^2 - 240}{4k^3 - 51k^2 + 208k - 268}$$

Quae-

Quaeramus iam radicem maximam; hunc in finem pro k substituendus esset coefficiens secundi termini 17, at cum praevideri possit ex consideratione aequationis, radices non multum inter se differre, ob facilitatem calculi ponemus $k = 10$. sic foret Tab. VI.

$$x = \frac{30000 - 34000 + 10400 - 240}{4000 - 5100 + 2080 - 268} = \frac{6160}{712} = 8\tfrac{2}{3}$$

Esset adeo valor radici propior assumto $= 8\frac{2}{3}$, pro quo iam, cum approximatio satis adhuc notabilis sit, substituemus 7 in locum valoris veri k, eritque

$$x = \frac{7203 - 11662 + 5096 - 240}{1372 - 2499 + 1456 - 268} = \frac{397}{61} = 6\tfrac{1}{2}.$$

Valor itaque radici propior est $6\frac{1}{2}$, pro quo si assumatur 6, fiatque $k = 6$. erit

$$x = \frac{3888 - 7344 + 3744 - 240}{864 - 1836 + 1248 - 268} = \frac{48}{8} = 6$$

Cum itaque valor hac operatione repertus, substituto sit aequalis, id indicio est, verum radicis maximae valorem esse 6. Ut porro inveniatur radix minima, ponatur

$k = 0$, sic prima operatione reperietur

$$x = \frac{240}{268} = \frac{8}{9} \text{ id est fere } = 1.$$

unde fiat $k = 1$, & secunda operatione habetur

$$x = \frac{3 - 34 + 104 - 240}{4 - 51 + 208 - 268} = \frac{167}{107} = 1{,}6$$

Fiat denuo $k = 1{,}6$, reperietur eodem quo antea modo

$$x = \frac{93{,}3632}{49{,}3760} = 1{,}9 \text{ fere } = 2.$$

Quod si denuo fiat $k = 2$, erit

$$x = \frac{48 - 272 + 416 - 240}{32 - 204 + 416 - 268} = \frac{48}{24} = 2.$$

Cum

Tab. VI. Cum igitur denuo valor hac operatione repertus substituto sit aequalis, erit radix minima exacte $= 2$.

Dividatur porro summa radicum 17 per ipsarum numerum 4, quotus $\frac{17}{4} = 4,25$ accedet ad unam mediarum; Ponamus ergo $k = 4,2$ sic habebimus

$$x = \frac{933,5088 - 2518,992 + 1834,56 - 240}{296,352 - 899,64 + 873,6 - 268} = \frac{9,0768}{2,312} = 3,926$$

Fiat igitur denuo $k = 3,9$, erit

$$x = \frac{694,0323 - 2016,846 + 1581,84 - 240}{237,276 - 775,71 + 711,2 - 268} = \frac{19,0263}{4,766} = 3,992$$

Unde si pro hoc valore 3,992 substituatur 4, erit

$$x = \frac{768 - 2176 + 1764 - 240}{256 - 816 + 832 - 268} = \frac{16}{4} = 4.$$

Cum ergo & hic valor inventus substituto sit aequalis, hinc consequitur radicem esse exacte $= 4$.

Quodsi iam summa trium radicum $6 + 2 + 4 = 12$ a summa omnium 17 subtrahatur, relinquetur 5 quarta radix, cum aequatio proposita plures non habeat.

§. 35. Alter modus radices aequationum approximando inveniendi, maxime est naturalis & simplex. Quem ut paucis indicemus, ordiamur ab aequatione primi gradus. Sit nempe

$$x + px = q.$$

erit

I°. $x < q$

unde $px < pq$

$x + px < x + pq > q$

II°. $x > q - pq$

$px > pq - p^2q$

$x + px > x + pq - p^2q < q$

III°. $x < q - pq + p^2q$ ...

I°. $x < q : p$

$x + px < q:p + px > q$

II°. $x > q : p - q : p^2$

$x + px > q:p - q:p^2 + px < q$

III°. $x < q : p - q : p^2 + q : p^3$

&c.

$x < q$

Quare in utroque casu successive limites radicis erunt Tab. VI.

$$x < q \qquad x < q:p$$
$$x > q - pq \qquad x > q:p - q:p^2$$
$$x < q - pq + p^2q \qquad x < q:p - q:p^2 + q:p^3$$
$$x > q - pq + p^2q - p^3q \qquad x > q:p - q:p^2 + q:p^3 - q:p^4$$
&c. &c.

Erit ergo tandem in casu priori, quo nempe $p < 1$

$$x = q - pq + p^2q + p^3q + p^4q + \&c = q:(1+p)$$

in posteriori, quo $p > 1$

$$x = q:p - q:p^2 + q:p^3 - q:p^4 + \&c = q:(p+1)$$

§. 36. Sit aequatio secundi gradus

$$x^2 + px = q.$$

erit

$$q > px$$

1°. $$x < q:p$$
$$xx < q^2:p^2$$
$$x^2 + px < q^2:p^2 + px > q$$

2°. $$x > q:p - q^2:p^3$$
$$xx > q^2:p^2 - 2q^3:p^4 + q^4:p^6$$
$$x^2 + px > q^2:p^2 - 2q^3:p^4 + q^4:p^6 + px < q$$

3°. $$x < q:p - q^2:p^3 + 2q^3:p^5 - q^4:p^7$$

&c.

Unde limites radicis

$$x < q:p$$
$$x > q:p - q^2:p^3$$
$$x < q:p - q^2:p^3 + 2q^3:p^5 - q^4:p^7$$
$$x > q:p - q^2:p^3 + 2q^3:p^5 - 5q^4:p^7 + 6q^5:p^9 - 6q^6:p^{11}$$
$$+ 4q^7:p^{13} - q^8:p^{15}$$

&c.

Tab. VI. semper esse convergentem. Ex his iam patescit, quomodo formula

$$x^m + px = q$$

sive generalior $ax^{\varkappa} + bx^{\lambda} = d$
sit immutanda, ut series inde deducta convergat.

§. 40. Cum, ut series ex formula $x^m + px = q$, directe eruta convergens sit, debeat esse $(m-1)^{m-1} p^m > m^m q^{m-1}$ hinc pro aequatione cubica

$$x^3 + px = q$$

ob $m=3$, oportet sit $4p^3 > 27q^2$ sive $\frac{1}{27} p^3 > \frac{1}{4} q^2$. Qui casus praecise illum complectitur, qui hactenus nullo modo perfecte solvi potuit. V. Cel. *CLAIRAUT Elem. Algebr. P. IV.* §. 8.

§. 41. Quodsi in aequatione secundi gradus

$$x^2 + px = q.$$

fiat $p = a$, $q = -y^2$. erit

$$ax - xx = yy$$

aequatio ad circulum, unde (§. 36.)
$x = y^2 : a + y^4 : a^3 + 2y^6 : a^5 + 5y^8 : a^7 + 14y^{10} : a^9 + \&c.$
adeoque series

$$\int y\,dx = \frac{2y^3}{3a} + \frac{4y^5}{5a^3} + \frac{6.2.y^7}{7a^5} + \frac{8.5.y^9}{9a^7} + \&c.$$

aream segmentorum circuli exhibens, quae plane non convergit, nisi fuerit $y = \frac{1}{2}a$ aut minor. Unde quadrantem circuli exprimet haec series, posita diametro $a = 1$

quadrans $= \frac{1}{12} + \frac{1}{40} + \frac{3}{224} + \frac{5}{576} + \frac{35}{5642} + \frac{63}{13212} + \frac{77}{20480} + \&c.$

§. 42. Plurimas quantitates sive calculo integrali, sive ex aequationibus magis complexis erutas non aliter, quam seriebus infinitis vel in casibus specialibus seriebus decimalibus exprimi posse, Geometris notissimum est. Et molesta licet, tamen toleralerabilis foret eiusmodi serierum tractatio, si omnes ita forent convergentes, ut paucis additis terminis, totius seriei summa quam proxime determinaretur, quod vero longe plurimis casibus secus est. Neque sperandum videtur medium, seriem quamcunque lentius convergentem in aliam permutandi, quae voto magis satisfaciat. Sequeretur enim inde, omnes quantitates, utcunque variabiles, aequatione paucorum terminorum generaliter & quam proxime exhiberi posse. Cum autem in re tam ardua utcunque profecisse juvet, quae circa istam mihi sese obtulerunt, exponam, ansam fortasse ulterius progrediendi aliis daturus. Tab. VI.

§. 43. Attendendum vero est ad legem convergentiae terminorum in serie proposita, quae detegitur, rationem inter terminos proxime sibi invicem subsequentes quaerendo. Haec ratio in omnibus seriebus, solis geometricis exceptis, variabilis est, quare hinc pendet infinita, quoad maiorem minoremve convergentiam, serierum varietas, quas adeo hoc respectu in aliquot classes dispertiamur, ut quales commode magis fieri possint convergentes, a ceteris distinguamus.

§. 44. Loquimur vero potissimum de iis, in quibus, ut plerumque obtinet, quantitas variabilis in progressione geometrica progreditur, coefficientes vero noti sint, & signa aut constanter eadem, aut alternantia. Unde sola respicienda erit ratio inter coefficientes.

§. 45. Ponimus iam, seriem mediocriter esse convergentem, si exponens rationis coefficientium fuerit circiter $\frac{1}{2}$, id est si coefficiens termini cuiuscunque in coefficiente proxime praecedentis bis contineatur, quod fit in progressione geometrica exacte

$$y = x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}x^3 + \tfrac{1}{8}x^4 + \tfrac{1}{16}x^5 + \&c.$$

aut circiter in seriebus parum ab ea diversis, v. gr.

$$y = x + \tfrac{2}{5}x^2 + \tfrac{3}{13}x^3 + \tfrac{4}{33}x^4 + \tfrac{5}{81}x^5 + \&c.$$

Tab. VI. §. 46. Quodsi exponens rationis minor fuerit $\frac{1}{2}$, aut continuo minor fiat, series haberi potest pro satis convergente, praecipue si ratio, qua minor fit, continuo augeatur, v. gr. in serie logarithmi

$$n = 1 + l + \frac{1}{2} l^2 + \frac{1}{2.3} l^3 + \frac{1}{2.3.4.} l^4 + \&c.$$

§. 47. Contra ea, si exponens rationis vel maior sit, vel continuo maior evadat quam $\frac{1}{2}$, series istas inter minus convergentes referemus. v. gr. in serie Leibniziana pro circulo

$$v = t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7 + \&c.$$

In his casibus, ut plurimum exponens rationis, ad numerum quendam constantem, quem ponemus $= a$ continuo magis accedit, nec unquam maior fit, v. gr. in serie Leibniziana innumerisque similibus accedit ad unitatem, in serie secunda §. 45. ad $\frac{1}{2}$, in seriebus §. 36. 37. & in omnibus sub formula §. 38. contentis ad $m^m\ q^{m-1} : (m-1)^{m-1}\ p^m$ &c.

In omnibus his casibus, qui plerumque pessimi sunt, datur medium quoddam, series in alias mutandi, eo magis convergentes, quo citius exponens rationis ad eam quantitatem accedit.

§. 48. Sit iam, ut a serie Leibniziana ordiamur, quae inter lentius convergentes refertur,

$$v = t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 - \frac{1}{11} t^{11} + \frac{1}{13} t^{13} - \&c.$$

In hac serie exponens rationis coefficientium accedit ad 1, sive est $a = 1$, variabilis vero ratio constans est $= t^2$, & signa sunt alternantia; Quare multiplicetur per $1 + tt$. Hoc enim modo efficitur, ut quicunque terminus per tt multiplicatus a sequente subtrahatur, est nempe

$$\frac{(1+tt)}{2} v = t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 - \frac{1}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 - \frac{1}{11} t^{11} + \frac{1}{13} t^{13} - \&c.$$

$$+ t^3 - \frac{1}{3} t^5 + \frac{1}{5} t^7 - \frac{1}{7} t^9 + \frac{1}{9} t^{11} - \frac{1}{11} t^{13} + \&c.$$

adeoque facta reductione

$$(1+tt)\, v = t + \frac{2}{3} t^3 - \frac{2}{15} t^5 + \frac{2}{35} t^7 - \frac{2}{63} t^9 + \frac{2}{99} t^{11} - \frac{2}{143} t^{13} + \&c.$$

Hoc enim modo cuiusque termini coefficiens est differentia coeffi-

coefficientium utriusque seriei, quibus productum ex serie prima in $(tt + a)$ constare potest, si totam seriem respicias, omnium minima. Unde series proposita mutari potest in sequentem magis convergentem Tab. VI.

$$\left(\frac{1+tt}{2}\right)v = \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{3}t^3 - \tfrac{1}{15}t^5 + \tfrac{1}{35}t^7 - \tfrac{1}{63}t^9 + \tfrac{1}{99}t^{11} - \tfrac{1}{143}t^{13} + \&c.$$

Nec vitio erit ducendum, quod iam series habeatur non ipsi v sed $\frac{1+tt}{2}v$ aequalis, cum series vel ideo desideretur magis convergens, ut ex data tangente habeatur arcus v, qui omnino hoc modo facilius citiusque haberi potest.

§. 49. At & in hac serie exponens rationis inter coefficientes ad unitatem accedit. Quare denuo instituatur multiplicatio per $1+tt$, sicque erit

$$\frac{(1+tt^2)}{2.4.}v = \frac{t}{8} + \frac{5t^3}{24} + \frac{t^5}{1.3.5} - \frac{t^7}{3.5.7} + \frac{t^9}{5.7.9} - \frac{t^{11}}{7.9.11} + \frac{t^{13}}{9.11.13} - \&c.$$

Similiter

$$\frac{(1+tt^3)}{2.4.6.}v = \frac{t}{48} + \frac{t^3}{18} + \frac{11t^5}{240} + \frac{t^7}{1.3.5.7} - \frac{t^9}{3.5.7.9} + \frac{t^{11}}{5.7.9.11} - \frac{t^{13}}{7.9.11.13} + \&c.$$

$$\frac{1+tt}{2.4.6.8}v = \frac{t}{384} + \frac{11t^3}{1152} + \frac{73}{5760}t^5 + \frac{31}{13440}t^7 + \frac{t^9}{1.3.5.7.9} - \frac{t^{11}}{3.5.7.9.11} + \frac{t^{13}}{5.7.9.11.13} + \&c.$$

&c.

Ut iam convergentiam harum serierum invicem comparemus, exempli ergo quaeremus octantem peripheriae, ponendo $t = 1$. & erit octans per seriem

I-

Tab. VI. $I^{am} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \&c.$

$$II^{dam} = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} - \frac{1}{7.9} + \frac{1}{9.11} - \frac{1}{11.13} + \&c.$$

$$III^{am} = \frac{1}{4} + \frac{5}{12} + \frac{2}{1.3.5} - \frac{2}{3.5.7} + \frac{2}{5.7.9} - \frac{2}{7.9.11} + \frac{2}{9.11.13} - \&c.$$

$$IV^{am} = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{11}{40} + \frac{6}{1.3.5.7} - \frac{6}{3.5.7.9} + \frac{6}{5.7.9.11} - \frac{6}{7.9.11.13} + \&c.$$

$$V^{am} = \frac{1}{16} + \frac{11}{48} + \frac{73}{240} + \frac{93}{560} + \frac{24}{1.3.5.7.9} - \frac{24}{3.5.7.9.11} + \frac{24}{5.7.9.11.13} - \&c.$$

Quodsi iam primi septem termini harum serierum in summam colligantur, erit octantis longitudo

	vera = 0, 78540...	differentia
ex serie	I^a = 0, 82093	+ 0, 03553
	II^a = 0, 78247	− 0, 00293
	III^a = 0, 78597	+ 0, 00057
	IV^a = 0, 78519	− 0, 00021
	V^a = 0, 78552	+ 0, 00012

§. 50. Si in serie quadam omnia signa fuerint positiva vel omnia negativa, multiplicatio instituenda erit per $1 - a x^m$, intelligendo per x^m exponentem rationis variabilis in progressione geometrica progredientis, per a vero quantitatem illam, ad quam exponens rationis inter coefficientes terminorum continuo accedit. Ex. gr. sit series

$$y = \frac{1}{2} x + \frac{1.3}{2.5} x^2 + \frac{1.3.5}{2.5.8} x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.5.8.11} x^4 + \frac{1.3.5.7.9}{2.5.8.11.13} x^5 + \&c.$$

In

In hac coefficientes terminorum ita decrescunt, ut tandem exponens rationis evadat $=\frac{2}{3}$, unde multiplicanda est series per $1-\frac{2}{3}x$, & erit Tab. VI.

$$(1-\tfrac{2}{3}x)\,y=\tfrac{1}{2}x-\frac{1}{2.15}x^2-\frac{1.3}{2.5.24}x^3-\frac{1.3.5}{2.5.8.33}x^4-\frac{1.3.5.7}{2.5.8.11.42}x^5+\&c.$$

five

$$(1-\tfrac{2}{3}x)\,y=\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{30}x^2-\tfrac{1}{80}x^3-\tfrac{1}{176}x^4-\tfrac{1}{352}x^5-\&c.$$

$$(1-\tfrac{2}{3}x)^2\,y=\tfrac{1}{2}x-\tfrac{11}{30}x^2+\tfrac{7}{720}x^3+\tfrac{7}{2640}x^4+\tfrac{1}{1056}x^5+\&c.$$

§. 51. Ceterum convergentia in seriebus hoc modo erutis eo maior est, quo minus progressio coefficientium a geometrica differt, v. gr. sit

$$y=x+\tfrac{2}{5}x^2+\tfrac{3}{13}x^3+\tfrac{4}{33}x^4+\tfrac{5}{81}x^5+\tfrac{6}{193}x^6+\&c.$$

erit $a=\frac{1}{2}$, quare

$$(1-\tfrac{1}{2}x)\,y=x-\tfrac{1}{10}x^2+\tfrac{2}{65}x^3+\tfrac{5}{858}x^4+\tfrac{6}{5346}x^5+\tfrac{7}{31266}x^6+\&c.$$

§. 52. Si progressio exacte fuerit geometrica, v. gr.

$$y=x+mx^2+m^2x^3+m^3x^4+m^4x^5+\&c.$$

erit $a=m$, adeoque

$$(1-mx)\,y=x+{*}+{*}+\&c.$$

Omnes adeo termini, primo excepto disparent, eritque $y=\dfrac{x}{1-mx}$

Est adeo haec methodus facillima summationem geometricarum serierum demonstrandi.

§. 53. Possunt quoque, quod alterum medium est, ex serie data termini quotlibet tolli, & praecipue in seriebus magis, aut saltem uniformiter convergentibus, termini sublatos sequentes adeo erunt parvi, ut omitti possint. Hoc ergo modo summa totius seriei quam proxime exprimetur per fractionem rationalem. En exempla quaedam.

Tab. VI. §. 54. Sit ſeries pro ſinu verſo ex arcu v determinando

$$x = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2.3.4} v^4 + \frac{1}{2.3.4.5.6} v^6 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8} v^8 + \&c.$$

multiplicetur per $1 + m v^2 + n v^4$, ut duos terminos tollamus, erit

$$(1 + m v^2 + n v^4)\, x = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2.3.4} v^4 + \frac{1}{2.3.4.5.6} v^6 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7.8} v^8 + \&c.$$

$$+ \frac{m}{2} v^4 - \frac{m}{2.3.4} v^6 + \frac{m}{2.3.4.5.6} v^8 - \&c.$$

$$+ \frac{n}{2} v^6 - \frac{n}{2.3.4} v^8 + \&c.$$

Cum in hac ſerie m & n determinari poſſint ad lubitum, determinentur ita, ut terminus tertius & quartus evadat $= 0$, quare faciendum

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6} - \frac{m}{1.2.3.4} + \frac{n}{2} = 0$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8} - \frac{m}{1.2.3.4.5.6} + \frac{n}{1.2.3.4} = 0$$

unde erit $m = \frac{11}{4.7.9}$, $n = \frac{13}{2.3.5.7.8.9}$.

his valoribus ſubſtitutis, erit

$$x \left(1 + \frac{11}{4.7.9} v^2 + \frac{13}{2.3.5.7.8.9} v^4 \right) = \frac{1}{2} v^2 - \frac{5}{4.7.9} v^4 \;\; * \;\; *$$

$$+ \frac{59}{2.3.4.5.6.7.8.9.10.2.3.7} v^{10} - \&c.$$

adeo-

adeoque termino quinto & sequentibus omissis, erit proxime Tab. VI.

$$x = \frac{7560\, v^2 - 300\, v^4}{15120 + 660\, v^2 + 13\, v^4}$$

Qui valor sinus versi adeo est exactus, ut etiamsi ponatur $v =$ sive $= 57^\circ, 17^{I}, 44^{II}, 49^{III}$ habeatur sinus versus a vero vix partibus radii 0, 0000006 sive 8 minutis tertiis aberrans.

§. 55. Sit hypothenusa trianguli rectanguli $= 1$, ipsius catheti x & y, erit $y = \sqrt{(1 - xx)}$ sive

$$y = 1 - \tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{1}{8} x^4 - \tfrac{1}{16} x^6 - \tfrac{5}{128} x^8 - \tfrac{7}{256} x^{10} - \&c.$$

Hac serie ut antea per $1 + m\, x^2 + n\, x^4$ multiplicata, determinabitur $m = -\frac{3}{4}$, $n = \frac{1}{16}$, & erit

$$(1 - \tfrac{3}{4} x^2 + \tfrac{1}{16} x^4)\, y = 1 - \tfrac{5}{4} x^2 + \tfrac{5}{16} x^4 ** - \tfrac{1}{516} x^{10} + \&c.$$

sive proxime

$$y = \frac{16 - 20\, x^2 + 5\, x^4}{16 - 12\, x^2 + x^4}.$$

Ex. gr. sit $x = \frac{1}{2}$, erit $y = \frac{181}{209} = 0, 8660287$, cum deberet esse 0, 8660253, differentia tantum 0, 0000034, utplurimum contemnenda.

§. 56. Methodus hactenus exposita eo nititur fundamento universaliori, ut a serie data alia series aut plures subtrahantur, quarum termini, terminis homologis seriei datae proxime sint aequales. Hoc pacto enim residuum erit series, cuius singuli termini, terminis seriei datae sunt minores. Hac conditione servata, vel me tacente patet, seriem assumi posse qualemcunque ipsi satisfacientem, nec adeo opus esse, ut multiplicationis ope eruatur.

§. 57. Hinc deducere licebit methodum sequentem. Sit series data quaecunque. Sumatur alia, cuius summa sit nota, ter-

Tab. VI. mini vero a terminis analogis ſeriei datae quam minime differant. Differentia utriuſque ſeriei erit ſeries data magis convergens & ſummarum differentiae aequalis.

§. 58. Ex. gr. Propoſita ſit ſeries

$$x = 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{36} + \&c.$$

in aliam magis convergentem mutanda

ſubtrahatur ab illa ſeries

$$\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{35} + \&c.$$

cuius ſumma $= \tfrac{3}{4}$, remanebit

$$x = \tfrac{5}{4} - \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{72} - \tfrac{1}{240} - \tfrac{1}{600} - \tfrac{1}{1260} - \&c.$$

ſeries longe magis convergens.

§. 59. Similiter ſit diameter circuli $= 1$, erit quadrans

$$q = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{13} - \&c.$$

ſive reductione facta

$$\tfrac{1}{2} q = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{99} + \tfrac{1}{195} + \tfrac{1}{323} + \&c.$$

Subtrahatur ab hac ſerie ſequens

$$\tfrac{1}{16} = \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{96} + \tfrac{1}{192} + \tfrac{1}{323} + \&c.$$

erit

$$\tfrac{1}{2} q = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{16} - \tfrac{3}{1120} - \tfrac{3}{9504} - \tfrac{3}{37440} - \tfrac{3}{103360} - \&c.$$

cuius lex progreſſionis

$$\tfrac{1}{2} q = \frac{19}{24} - \frac{3}{(6^2-1).(6^2-4)} - \frac{3}{(10^2-1).(10^2 4)} - \frac{3}{(14^2-1).(14^2--4)} - \frac{3}{(18^2-1).(18^2-4)} - \&c.$$

§. 60. Sit series Tab. VI.

$$y = \frac{1}{3} + \frac{1}{2.7} + \frac{1.3}{2.4.11} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.19} + \&c.$$

subtrahatur ab ipsa

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2.8} + \frac{1.3}{2.4.12} + \frac{1.3.5}{2.4.6.16} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.20} + \&c.$$

remanebit

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{2.7.8} + \frac{1.3}{2.4.11.12} + \frac{1.3.5}{2.4.6.15.16} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.19.20}$$

Quae series multo magis convergit. Est enim series prima terminis reductis

$$x = \frac{1}{3} + \frac{1}{14} + \frac{3}{88} + \frac{1}{48} + \frac{35}{2432} + \&c.$$

sed inventa

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{112} + \frac{1}{352} + \frac{1}{768} + \frac{35}{48640} + \&c.$$

§. 61. Series subtrahenda vero plerumque invenitur eodem modo, quo gignitur series in aliam mutanda. Sic enim in primo exemplo series proposita (§. 58)

$$x = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \&c.$$

resolvitur in sequentem

$$x = 1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \frac{1}{4.4} + \frac{1}{5.5} + \&c.$$

a qua sequens non multum differt

$$y = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.6} + \&c.$$

Tab. VI. haec vero nascitur ex serie

$$z = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \&c.$$

si mutilata duobus primis terminis a semetipsa subtrahatur. Est enim

$$z = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \&c.$$

$$z - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \&c.$$

Unde

$$1\frac{1}{2} = \frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} + \frac{2}{24} + \frac{2}{35} + \frac{2}{48} + \&c.$$

$$\frac{3}{4} = y = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \&c.$$

§. 62. Similiter in secundo exemplo series (§. 59)

$$\frac{1}{2}q = \frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \frac{1}{195} + \&c.$$

resolvitur in sequentem

$$\frac{1}{2}q = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \&c.$$

a qua non multum differt haec

$$y = \frac{1}{4.8} + \frac{1}{8.12} + \frac{1}{12.16} + \&c.$$

quae invenitur seriem

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{20} + \&c.$$

primo

primo termino truncatam a femetipfa fubtrahendo, & refiduum Tab. VI.

$$\frac{1}{4} = \frac{4}{4.8} + \frac{4}{8.12} + \frac{4}{12.16} + \frac{4}{16.20} + \&c.$$

per 4 dividendo. *Vid. Cel. JAC. BERNOULLI Tract. de feriebus, in fin.* §. *XVII.*

§. 63. Denique feries exempli tertii (§. 60) nafcitur ex integratione differentialis $xxdx : \sqrt{}(a^4 - x^4)$ cui analogum eft differentiale $x^3dx : \sqrt{}(a^4 - x^4)$ perfecte integrabile. Eft vero

$$y = \int x^2 dx : \sqrt{}(a^4 - x^4 = \frac{x^3}{3a^2} + \frac{x^7}{2.7.a^6} + \frac{1.3.x^{11}}{2.4\ 11.a^{10}}$$
$$+ \frac{1.3.5\ x^{15}}{2.4.6.15a^{14}} + \&c.$$

$$\& \int x^3 d\ x : \sqrt{}(a^4 - x^4) = \tfrac{1}{2} a^2 - \tfrac{1}{2} \sqrt{}(a^4 - x^4)$$
$$= \frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^8}{2.8.a^6} + \frac{1.3\ x^{12}}{2.4.12.a^{10}} + \frac{1.3.5\ x^{16}}{2.4.6.16.a^{14}} + \&c.$$

Serie hac per x divifa & a priori fubtracta, remanebit

$$y = \frac{a^2 - \sqrt{}(a^4 - x^4)}{2x} + \frac{x^3}{3.4.a^2} + \frac{1.x^7}{2.7.8\ a^6} + \frac{1.3\ x^{11}}{2.4.11.12\ a^{10}} +$$
$$\frac{1.3.5.\ x^{15}}{2\ 4.6.15.16a^{14}} + \&c.$$

Ex qua formula generaliori habetur feries individualis exempli (§.60) ponendo $a = x = 1$.

§. 64. Similiter feries (§.51.)

$$y = x + \frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{13}x^3 + \frac{4}{33}x^4 + \frac{5}{81}x^5 + \frac{6}{193}x^6 + \&c.$$

parum differt a geometrica

$$\frac{x}{1 - \frac{1}{2}x} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^5 + \frac{1}{32}x^6 + \&c.$$

Hac

Hac ergo ab illa subtracta, erit

$$y = \frac{x}{1 - \frac{1}{2}x} - * - \frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{52}x^3 - \frac{1}{264}x^4 - \frac{1}{1296}x^5 - \frac{1}{6176}x^6 - \&c.$$

Quodsi & ab hac subtrahatur series geometrica

$$\frac{-x^2}{10 - 2x} = -\frac{1}{10}x^2 - \frac{1}{50}x^3 - \frac{1}{250}x^4 - \frac{1}{1250}x^5 - \frac{1}{6250}x^6 - \&c.$$

erit

$$y = \frac{x}{1 - \frac{1}{2}x} - \frac{x^2}{10 - 2x} + \frac{1}{1300}x^3 + \frac{7}{33000}x^4 + \frac{23}{810000}x^5 - \frac{37}{1930000}x^6 - \&c.$$

§. 65. Ex omnibus exemplis hactenus allatis (§. 48--63) patet, in singulis casibus, dispari quidem successu, obtineri series propositis magis convergentes, saepissime tamen convergentiam initio tantum serierum maxime esse notabilem, cum in plurimis seriebus hoc modo erutis termini citissime ad rationem aequalitatis accedant, quod caveri non poterit, nisi series mutari possit in aliam, serie geometrica magis convergentem.

JOAN-