Johann Heinrich

LAMBERT'S

PHOTOMETRIE.

(PHOTOMETRIA SIVE DE MENSURA ET GRADIBUS LUMINIS, COLORUM ET UMBRAE).

(1760.)

Deutsch herausgegeben

von

E. Anding.

Erstes Heft:

Theil I und II.

Mit 35 Figuren im Text.

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1892.

Photometria

sive

de mensura et gradibus luminis, colorum et umbrae.

Erster Theil.

Das directe Licht.

Seine verschiedenen Erscheinungen und seine Intensität. Helligkeit und Beleuchtung.

Kapitel I.

Tendenz des Unternehmens. Grundbegriffe und Principien der Photometrie.

[1] 1. Es scheint das allgemeine Schicksal der menschlichen Erkenntnisse zu sein, dass gerade dasjenige unserer Einsicht am meisten verschlossen ist, was der sinnlichen Wahrnehmung fortwährend begegnet. Für diese Behauptung stellt die Theorie des Lichtes ein ausgezeichnetes Beispiel dar. [2] Denn bei Untersuchungen über das Wesen und die Natur desselben begegnet man so vielen und so gewichtigen kaum überwindbaren Schwierigkeiten, dass wunderbarer Weise unsere Kenntniss gerade in Bezug auf denjenigen Gegenstand, welcher der Quell der Erleuchtung ist, von grosser Finsterniss umhüllt wird und dass gerade über das Licht soviel Dunkelheit herrscht. Und dass überhaupt auf dem Gebiete der Physik der Weg von den Wirkungen zu den dem Auge nicht zugänglichen Ursachen steil, wenn nicht geradezu unpassirbar ist, dies ist so gewiss, dass man nicht einmal einen Schritt thun kann, ohne auf entsprechende Beispiele zu stossen.

2. Da es nun gerade diese Schwierigkeiten sind, welche sich beim Nachdenken zuerst darbieten, so halte ich es auch für richtig, mit ihnen diese gegenwärtige Theorie der Messung des Lichts zu beginnen. Es fehlt nämlich, wie es scheint, gänzlich

oder wenigstens zumeist, an Stützpunkten, welche sonst geeignet sind, die Aufsuchung der Wahrheit zu fördern und die Eigenschaften der Grössen zu durchforschen. Es fehlt an einer physikalischen Theorie des Lichts, welche streng bewiesen und auf Schlüsse aufgebaut wäre. Es fehlen die Instrumente, um das Licht zu messen. Es fehlen endlich die ersten Principien, aus denen man das übrige ableiten könnte. Und ein Umstand, welcher dem Mathematiker nicht weniger Mühe macht, als alles bisher genannte, besteht darin, dass er sich nicht genug vor logischen Cirkelschlüssen in Acht nehmen kann, wenn er die einzelnen Ergebnisse mit einander verknüpfen und einem jeden den gebührenden Platz anweisen will.

3. Damit es aber nicht scheint, als ob ich die vorgebrachten Hindernisse mehr, als billig ist, aufbausche, muss ich dieselben mit gerechter Wage genau abwägen. Dass die Theorie des Lichts, soweit sie bis jetzt ausgebildet ist, unserem Ziel nicht genügt, folgt schon leicht aus dem Umstand, dass es zweifelhaft ist, welches unter den bisher über das Licht aufgestellten Systemen [**3**] vorzuziehen sei, wenn man nur Bewiesenes zulassen will. Denn wenn auch, um anderes zu übergehen, die Vorstellungen, welche sich so scharfsinnige Männer wie *Newton* und *Euler* gemacht haben, zur Erklärung der meisten Erscheinungen angewandt werden können, und wenn die *Euler*'sche Hypothese mit der Natur der Sache am meisten in Einklang zu stehen scheint, so lässt sich doch bedauerlicher Weise noch keine von beiden als Princip verwenden, welches zur Auffindung neuer Erscheinungen führen könnte. Und wenn sie dies auch leisten würden, so sieht man doch bei der Messung des Lichts nicht wenig Fälle, in welchen keineswegs feststeht, wie sie sich an die eine oder die andere Hypothese anschliessen lassen. Einige derselben hat gewiss schon *Newton* erkannt, aber er liess sie, von der Schwierigkeit abgeschreckt, im Ungewissen und versuchte nicht einmal durch Experimente etwas zu erreichen, da er sah, dass ihn die Theorie ganz im Stich lassen werde.

4. Es ist jedoch nicht meine Absicht, hierdurch die Anwendbarkeit und den Werth der Hypothesen zu schmälern. Denn wenn es auch noch nicht möglich ist, allem, was zu einem gewissen System gehört, seine natürliche Stellung anzuweisen, so halte ich es doch für nützlich und erforderlich, sich eines erdachten Systemes zu bedienen, um nach Möglichkeit Verwirrung und Dunkelheit zu vermeiden. Dazu kommt, dass manchmal eine anfangs für falsch gehaltene Hypothese bei aufmerksamerer

Prüfung allmählich von den Fehlern befreit und als Wahrheit oder als zur Wahrheit geworden erkannt wird. Auf diese Weise wird bekanntlich das Weltsystem täglich immer mehr in Klarheit gestellt. [4] Und in ähnlicher Weise wird ohne Zweifel auch die *Euler*'sche Theorie des Lichts ausgefeilt werden, wenn sie auch scheinbar jetzt noch nicht genügt, um alle Erscheinungen zu erklären. Denn unter die vornehmsten und sichersten Kriterien dafür, dass eine Hypothese sich der Wahrheit nähert, muss man den Fall rechnen, wenn man aus dem Lehrgebäude derselben den Eintritt neuer Erscheinungen vorhersehen und wenn man Sätze daraus folgern kann, denen die zu diesem Zweck angestellten Versuche beipflichten. Unter den bisherigen Hypothesen über die Natur des Lichtes sehe ich aber keine, welche diese Prüfung bestanden hätte; denn man hat gerade genug zu thun, um das einzelne an schon bekannte Erscheinungen anzuschliessen.

5. Diese Mängel, an welchen die physikalische Theorie des Lichtes so sehr leidet, sind allerdings bedeutsam genug, um sich unvermeidlich zum grossen Theil auch in die Photometrie einzuschleichen; sie sind jedoch, wenn man genau zusieht, in dieser Beziehung von viel geringerem Gewicht. Denn die Photometrie handelt nicht von dem Wesen des Lichts, welches den Sinnen ganz verborgen ist, sondern sie misst dessen Menge, Helligkeit und andere Wirkungen, welche den Sinnen fortwährend begegnen. Es ist aber schon längst bekannt und wird durch das Beispiel der Schwerkraft klar bewiesen, dass die mathematische Kenntniss der Gegenstände und Vorgänge in der Natur von der physikalischen nur in geringem Grade abhängig ist und dass jene mit raschem Schritt gefördert und in wunderbarer Weise erweitert werden kann, wenn auch diese sich immer in engen Schranken hält.

6. Doch glaube ich nicht, dass die Photometrie deshalb mit der Theorie der Schwere und der Bewegung der schweren Körper gleichen Schritt halten werde. Denn, wie oben schon erwähnt, hat man keine Instrumente, [5] mit welchen man in jedem gegebenen Fall die Intensität des Lichts messen und deren man sich anstatt der Wage oder des Maassstabes bedienen könnte. Denn wenn man unten auch verschiedene photometrische Instrumente wird beschrieben finden, so können sie doch nur insofern Anwendung finden, als man mit ihrer Hilfe die Helligkeit des Lichts und der Farben in einem gegebenen Verhältniss zu vergrössern und zu verkleinern im Stande ist, bis sie einer gegebenen Helligkeit dem

Urtheil des Auges zufolge merklich gleich ist. Offenbar ist also die Photometrie noch immer mit derselben Schwierigkeit behaftet, welche vor Erfindung des Thermometers einer genaueren Messung der Wärme entgegenstand. Es wäre also zu wünschen, dass ähnlich wie ein Thermometer so auch ein *Photometer* erfunden würde, welches, dem Licht ausgesetzt, dessen Intensität und Helligkeit anzeigen würde. Allerdings bietet uns hierfür das Auge selbst ein Beispiel, indem die Oeffnung der Pupille der Grösse und Helligkeit des Lichts nachfolgt und sich beiden anpasst. Aber es ist sehr zu bezweifeln, dass die Technik hierin die Natur nachahmen könne. Denn man wird kaum eine Substanz erzeugen können von solcher Empfindlichkeit, wie die Fibrillen des Auges, und welche der Bewegung des Lichts auch dann noch nachgiebt, wenn dessen Helligkeit sehr klein ist. Ich weiss sehr wohl, dass mehrfach zu diesem Zweck Experimente angestellt worden sind, um zu zeigen, dass die Bewegung des Lichts beobachtet werden könne, nämlich wenn Sand oder eine Stahlplatte in den Brennpunkt einer Convexlinse oder eines Brennspiegels gebracht und von der Wucht der Sonnenstrahlung in Bewegung gesetzt wird. Denn es ist sehr fraglich, ob dieser Erfolg dem Licht oder der Wärme zuzuschreiben ist; und selbst wenn man zugiebt, dass er allein vom Licht herrühre, so bleibt doch, da eine so enorme Dichtigkeit der Strahlen erforderlich ist, wenig Hoffnung, dass derselbe Erfolg eintritt, wenn man ein viel schwächeres Licht messen will. [6] Was aber das Sonnenlicht betrifft, so kann unter der Voraussetzung, dass dessen Wärme sich in derselben Weise verringert und vermehrt, wie die Dichtigkeit der Strahlen, jedenfalls das Thermometer die Stelle eines Photometers vertreten. Aber der Gebrauch desselben ist in zu enge Grenzen eingeschränkt. Denn wie wollte man mit einem Thermometer die Helligkeit des Mondlichtes bestimmen?

7. Da nun also bei der Bestimmung der Lichtstärken das Auge alleiniger Richter ist, so sind auch die Hindernisse zu besprechen, infolge deren wir uns auf das Urtheil desselben nicht genau verlassen dürfen. Offenbar bringt gerade die schon erwähnte Veränderung der Oeffnung der Pupille in unser Urtheil über die Helligkeit des Lichts eine Unsicherheit. Denn ein Licht wird um so heller erscheinen, je grösser diese Oeffnung ist und in je ausgedehnterem Maasse hierdurch das Licht in das Auge eintreten kann. Dadurch kann es kommen, dass ein helleres Licht uns nicht so hell erscheint, wie es bei derselben Oeffnung der Pupille sein würde. Hierher gehört auch die Gewohnheit,

dass sich das Auge allmählich sogar der nächtlichen Dunkelheit anpassen kann, wie man an Leuten beobachtet, welche in dunkle Gefängnisse eingeschlossen sind und dennoch die einzelnen Gegenstände unterscheiden können. Denn allmählich kehrt bei ihnen die schärfere Empfindlichkeit der Nerven, welche durch das hellere Licht abgeschwächt war, wieder zurück. Dieselbe Ursache macht auch die Morgendämmerung scheinbar viel heller als die Abenddämmerung, indem die Schärfe der Augen bei Tage beträchtlich abgestumpft wird.

8. Diese beiden Täuschungen, welche das Urtheil des Auges über die Helligkeit unsicher machen, bringen zugleich noch einen anderen Nachtheil mit sich. Wollte man nämlich die Urtheilsfähigkeit des Auges schärfer untersuchen, so müsste man [7] auf diese Täuschungen Rücksicht nehmen und dieselben in Rechnung ziehen, um dadurch die übrigen Principien der Photometrie auf festeren Boden stellen zu können. Aber bei einer näheren Betrachtung leuchtet ein, dass man gerade diese Principien schon braucht, wenn man den Fehler, welcher im Urtheil des Auges liegt, bestimmen will. Deshalb vermag ich nicht einzusehen, wie ein logischer Cirkel vermieden werden kann, wenn man eine Photometrie verlangt, die vollständig mit aller Strenge bewiesen sein soll. Geht man aber von dieser Strenge ein wenig ab, so giebt es ein Mittel, die Sätze der Photometrie so zu verknüpfen, dass sie die ihnen entsprechende Sicherheit sehr wohl erhalten.

9. Ehe wir aber hierzu übergehen, wird es gut sein, das Urtheil des Auges genauer zu betrachten und dasselbe mit dem Urtheil der übrigen Sinne, insbesondere des Gehörs und des Wärmesinnes zu vergleichen. Das erstere verlangt die Photometrie selbst, eben weil sie sich auf das Urtheil des Auges stützt. Dagegen soll die jetzt vorzunehmende Prüfung die daraus gefolgerten Ergebnisse nicht nur beleuchten, sondern auch verallgemeinern.

10. Der Wärmesinn betrügt unser Urtheil in stärkerem Maasse, als das Gesicht und das Gehör, wenn man dabei die Intensität der Wärme, des Lichts und des Schalles ins Auge fasst. Denn der Spielraum, innerhalb dessen wir Wärme und Kälte ertragen können, ist durch weit engere Grenzen beschränkt, als beim Licht und beim Schall. Denn das Licht erhebt sich von kimmerischer Finsterniss auf unendlich vielen Stufen bis zum erhabensten Glanz der Sonne, und diese alle kann das Auge wahrnehmen. Auch das Ohr kann bekanntlich

ähnlich viele Abstufungen der Töne unterscheiden. Viel leichter verführt uns aber der Wärmesinn, dieselbe Temperatur der Luft für kalt zu halten, [8] welche uns zu einer anderen Zeit, auch wenn sie sich nicht geändert hat, als warm erscheint; und man musste auf das Thermometer warten, bis man sich überzeugen liess, dass tiefe Schachte im Winter und Sommer dieselbe Temperatur haben und dass sich dieselbe dort niemals ändert.

11. Durch die Erfindung des Thermometers ist unser Urtheil über Wärme und Kälte weit sicherer geworden, und es liegt nun in unserer Hand, unabhängig vom Urtheil der Sinne, einen beliebigen Wärmegrad hervorzubringen, welcher einem gegebenen gleich sein soll. Ein ähnlicher, aber nicht gleicher, Vortheil steht auch dem Gehörssinn zu Gebote, indem man mit Hilfe der Musikinstrumente, besonders der Blasinstrumente und der Orgel, einen beliebigen Ton jederzeit wieder hervorrufen kann. Sobald man aber anderweitig einen ähnlichen Ton hervorbringen will, muss man das Ohr als Richter benutzen, da nur in wenigen Fällen die Theorie Hilfe leistet. Eine solche Hilfe erfährt aber das Auge noch weit weniger. Denn wenn man auch die verschiedenen Arten von Licht gleichsam aus der Finsterniss erwecken kann, je nachdem man verschiedene leuchtende Substanzen entzündet, so ist doch eine solche Helligkeit nicht constant und kann auch nicht festgehalten und wieder hervorgebracht werden wie der Ton der Blasinstrumente. *Dem Auge stehen also keine solchen Instrumente zu Gebote, wie das Thermometer und die Orgel, und dasselbe ist, um sich ein Urtheil zu bilden, auf sich selbst angewiesen.* Dass mit Hilfe des elektrischen Funkens eine constante Helligkeitsstufe hervorgebracht werden könne, sodass das Auge in derselben Weise unterstützt würde, wie das Ohr, muss ich sehr bezweifeln.

12. Das Thermometer entscheidet hinsichtlich der Wärme nur den Grad, sofern derselbe stärker oder schwächer ist. Dasselbe gilt auch hinsichtlich des Wärme s i n n e s; jedoch besteht zwischen dem Urtheil beider ein grosser Unterschied. Denn während das Thermometer im Wasser wie in der Luft denselben Wärme- oder Kältegrad anzeigt, [9] empfindet die Hand das Wasser bald kälter bald wärmer als die Luft. Dagegen können das Licht sowohl wie der Schall nicht nur an Grad, sondern auch an Art verschieden sein. Das Licht nämlich, indem es sich in die vielfältigen Farben spaltet, die einzeln wieder bald heller, bald dunkler sein können, je nachdem sie durch mehr oder weniger Licht erleuchtet werden. Dieselbe

Verschiedenheit besteht auch bezüglich der Töne. Wie aber das Ohr eine Dissonanz leichter herausfindet, als die Intensität und Stärke desselben Tones, so vermag auch das Auge die Verschiedenheit zwischen den mannigfaltigen Farben leichter zu erkennen, als die Intensitäten derselben Farbe. Denn die Art der Farbe hängt von der Oeffnung der Pupille nicht in der Weise ab, wie der Grad der Helligkeit. Hierbei sind aber nur sehr kleine Unterschiede gemeint.

13. Wenn sich unser Körper an eine gewisse Temperatur gewöhnt hat und dieselbe sich dann ändert, so passt er sich allmählich auch der neuen Temperatur an. Dies beobachtet man besonders im Herbst, sobald von neuem Kälte eintritt. Um sich an diese zu gewöhnen, ist ein Zwischenraum von einigen Tagen erforderlich. Dagegen passt sich das Auge hinsichtlich der Oeffnung der Pupille anderen Helligkeitsstufen in wenigen Augenblicken an. Denn hinsichtlich der Bewegung der Fibrillen und des Sehnerven finden andere Verhältnisse statt, wie man ja auch, wenn man die Sonne lange angesehen hat, dann bei davon abgewendetem Auge deren Bild in anderen Farben weiter sieht. Diese Wirkung des Lichts auf die Sehnerven ist besonders dann auffällig, wenn das Licht, welches man angesehen hat, sehr hell ist. Etwas ähnliches beobachtet man auch hinsichtlich des Gehörs.

[10] 14. Insofern als zwischen den Farben des Spectrums und den Tonintervallen einer Octave eine harmonische Verwandtschaft besteht, behauptet das Auge den Vorrang über das Ohr. Denn eine jede Farbe kann man für sich und ohne Vergleichung mit anderen Farben wieder erkennen. Dagegen ist die Unterscheidung von Tönen ohne Hilfe von Instrumenten schwieriger, wenn man sich nicht lange daran gewöhnt hat. Denn einen Sänger, dessen Stimme man schon öfter gehört hat, kann man nach den Gehör leichter erkennen, als die Note, welche er singt.

15. Ferner scheint auch das allen Empfindungen gemeinsam zu sein, dass die stärkere die schwächere unterdrückt. So scheint eine Kerze im Sonnenschein gar keine Helligkeit zu besitzen; dagegen vermag sie das Licht, welches Nachts von faulendem Holze verbreitet wird, so unsichtbar zu machen, als ob es gar nicht vorhanden wäre. Also wird auch in dieser Hinsicht das Urtheil des Auges leicht fehlerhaft. Bei Tage sieht man ein in das Sonnenlicht gehaltenes Blatt Papier ungefähr ebenso hell, wie das Licht einer Kerze, während es bei Nacht, wenn es nur von der Kerze beschienen wird, weit dunkler ist. Dennoch

stehen in beiden Fällen dieselben Gegenstände zum Vergleich. Denn beide werden bei Tage von der Sonne beschienen, welche Nachts wieder von beiden abwesend ist.

16. Nachdem wir die wichtigsten Täuschungen des Auges besprochen haben, ist zu untersuchen, auf welche Weise man dieselben unschädlich machen kann. Vielleicht glaubt mancher, dass ich bei diesen Fehlerquellen allzulange stehen geblieben bin, als ob ich die Wissenschaft, welche ich hier vortragen will, ganz unsicher zu machen und ihre Grundlagen zusammenzureissen beabsichtigt hätte. [11] Aber ich hoffe, dass ein solches Unternehmen von billigen Richtern nicht getadelt wird, da ich es vermeiden will, solche Dinge für gewiss und unbestreitbar auszugeben, von denen ich selbst voraussehen konnte, dass sie des Beweises noch bedurften. Denn es ist in der Physik wichtig, die ersten Principien abzuwägen und die ersten Begriffe gut zu entwickeln, bevor man eilig zu solchen Sachen übergeht, die man ohne Weiteres daraus hervorgehen sieht. Was wirklich sicher ist, wird man eben auf diese Weise auch als sicher erkennen und es wird sich Anlass finden, das Zweifelhafte einer weiteren Prüfung zu unterwerfen. Es giebt in der Physik mehrere Dinge, die nicht mit mathematischer Strenge bewiesen werden können und doch ebenso sicher sind, wie die gewissesten. Es wird aber nützlich und nöthig sein, den Unterschied dieser zweifachen Sicherheit sich klar zu machen.

17. Die Photometrie sehen wir als den zweiten Theil der Optik an. Als ersten betrachten wir denjenigen, welcher von der fortschreitenden Bewegung des Lichts handelt, ebenso von deren verschiedenen Arten, Erscheinungen und Anwendungen. Die Behandlung dieses ersten Theiles können wir übergehen, da schon viele sehr gute Werke darüber vorliegen, und wir dürfen sogar alles voraussetzen, was dort über die Beschaffenheit des Auges, den Weg des Lichtes und die verschiedenen allgemein bekannten optischen Instrumente gelehrt und bewiesen wird. Dagegen muss man in diesem zweiten Theil, den wir als Photometrie bezeichnen, ganz von vorn beginnen und von der Helligkeit des Lichts, der Leuchtkraft desselben und den verschiedenen Arten der Farben und des Schattens reden. Denn wenn man auch bei den Schriftstellern der Optik allenthalben hierüber etwas findet, so muss man sich dies alles doch wieder vom ersten Anfang an [12] vergegenwärtigen, um den inneren Zusammenhang zu erkennen.

18. Diesen Erscheinungen des Lichts begegnet das Auge

fortwährend, sodass sich immer Gelegenheit bietet, Versuche darüber anzustellen; und deshalb habe ich auch geglaubt, die Photometrie der grösseren Sicherheit wegen auf Experimente aufbauen zu müssen. Denn die blosse Theorie ist, wie schon erwähnt, nicht im Stande, die einzelnen Schwierigkeiten zu lösen. Indessen werde ich dieselbe nicht etwa vollständig ausser Acht lassen, sondern ich werde auch von dieser Seite her Beweise zu bringen suchen, um das, was die Versuche lehren, wenn auch nicht zu beweisen, so doch plausibel zu machen und einer gewissen Prüfung zu unterwerfen. (4) Diese Beweise werde ich zumeist an beide Hypothesen über die Natur des Lichts anschliessen, die *Newton*'sche und die *Euler*'sche, da sich, unter Weglassung der übrigen, die Physiker bis heute noch nicht für die eine oder die andere einmüthig entschieden haben. Die erstere liegt dem Verständniss, die letztere vielleicht der Natur der Sache näher. Sie unterscheiden sich hauptsächlich durch die Vorstellung der Art, wie das Licht den leuchtenden Körpern entströmt und sich im Weltraum verbreitet. *Newton* nimmt an, dass die Lichtstrahlen in der That aus dem leuchtenden Körper ausströmen und gleichsam ausgestossen werden, sodass die Masse des Körpers auf diese Weise beständig abnimmt. *Euler* dagegen vertritt das von *Descartes* ersonnene und von *Huyghens* ausgebildete System, nachdem er es so umgestaltet hat, dass es für die meisten Erscheinungen, besonders die allmähliche Fortpflanzung des Lichts und dessen Uebergang in die verschiedenen Farben passt. Hierzu nimmt er an, dass das Licht dem Schall, die Lichtsubstanz der Luft, der leuchtende Körper dem tönenden, die Farben endlich den verschiedenen in der Musik gebräuchlichen Tönen und Tonintervallen entsprechen [**13**] und ähnlich seien. Die Bewegung des Lichts und des Schalles erklärt er als eine Wellenbewegung, vermöge deren sich ersteres durch den Aether, letzterer durch die Luft verbreitet, und jenes durch Spiegel, dieser durch Wände und ähnliche Hindernisse reflectirt wird. Vergl. dessen *Conjectura physica circa propagationem soni ac luminis.*

19. Einen so bedeutsamen Streit zwischen den grössten Männern schlichten zu wollen, ist noch nicht an der Zeit. Man begegnet in der That in der Photometrie nicht wenigen Versuchen, welchen man jedes dieser beiden Systeme leicht zu Grunde legen kann. Es giebt aber auch andere und zwar recht schwerwiegende, denen man keines derselben gut anpassen kann, und die als Prüfstein dienen werden, wenn man beide zur Rechenschaft zieht.

20. Um nun die ersten Grundlagen der Photometrie aufzu-

stellen, beginnen wir mit der alltäglichen und allgemein zugänglichen Erfahrung, dass das Licht verschiedene Intensitäten besitzen kann, und dass es verschiedene Veränderungen erleidet, wodurch sich dessen Helligkeit und Art ändert. Hieraus ergeben sich die Grundbegriffe, die man genauer aufsuchen und gegenseitig unterscheiden muss.

21. So wird hoffentlich niemand leugnen, dass zwei Kerzen heller leuchten als eine einzige; dass durch die Annäherung der Lichtquelle die Helligkeit des Objectes vergrössert wird, dass schief einfallendes Licht eine schwächere Erleuchtung hervorbringt, dass eine Lichtquelle mehr oder weniger hell sein und doch dieselbe Grösse haben kann; dass die Helligkeit desselben Lichts ebenso bleibt oder etwas geändert wird, je nachdem das Auge dasselbe aus grösserer oder geringerer Entfernung anschaut.

22. Diese einzelnen Sätze werden durch die Erfahrung in der Weise bestätigt, dass über ihre Wahrheit kein Zweifel bleiben kann. Aber es ist wohl zu merken, [**14**] dass uns dies alles nur so *scheint*, und dass man hieraus noch nicht schliessen kann, dass es sich auch in der Sache so verhalte. Wenn man aber diesen Sprung zulässt, so kann man wenigstens den oben (8) erwähnten logischen Cirkel vermeiden. Verlangt man aber, dass die Principien der Photometrie regelrecht bewiesen werden, so muss man sich vor beidem hüten. Es ist also zu untersuchen, inwiefern die Täuschungen des Auges dessen Urtheil über diese Erfahrungen unsicher zu machen vermögen und auf welche Weise man dieser Unsicherheit entgegenwirken kann.

23. Wenn aber je in der Photometrie ein Axiom etwas gilt, so ist es gewiss das folgende, welches wir allem Anderen zu Grunde legen: *Eine Erscheinung ist dieselbe, so oft dasselbe Auge auf dieselbe Weise afficirt wird.* Lässt man dieses, da man über seine Wahrheit kaum zweifeln kann, zu, so werden sich, wie man sehen wird, hieraus die verschiedenen Sätze ergeben, mit deren Hilfe wir die vorher erwähnten Erfahrungen werden prüfen können.

24. Um nämlich sagen zu können, das Auge sei dasselbe, ist erforderlich, dass Zeit und Ort dieselben sind (7), ferner dass das Licht, welches in das Auge fällt, dieselbe Helligkeit und Grösse habe, da ja von beiden die Oeffnung der Pupille abhängig ist. Findet dies nicht statt, so wird das Urtheil des Auges über die Gleichheit des Lichts oder der Helligkeit nicht so sicher sein, dass nicht ein grösserer Grad der Sicherheit mit Recht erwünscht wäre.

25. In ähnlicher Weise ist, damit das Auge ebenso afficirt werde, erforderlich, dass Grösse, Distanz, Helligkeit und Stellung der betrachteten Gegenstände dieselben sind. Durch die Anwendung dieser Vorsichtsmaassregeln wird man dem Urtheil des Auges die denkbar grösste Sicherheit verleihen können. Denn wenn man auf diese Weise zwei oder mehrere Gegenstände anschaut [15] und die Helligkeit derselben als die gleiche findet, so wird dieses Urtheil sicher und richtig sein. Wenigstens muss man sehr bezweifeln, dass es hier noch eine grössere Sicherheit geben kann.

26. Da also das Urtheil des Auges richtig ist, wenn es sich auf die Gleichheit der Helligkeit zweier oder mehrerer nebeneinander stehender Gegenstände bezieht, so kann man auch auf sicherem Wege weiter gehen und die übrigen Fälle, welche verwickelter sind, auf diesen ersten und einfachsten reduciren. Dies wird eintreten, wenn sich die Hilfsmittel bieten, eine beliebige Helligkeit so zu vermehren oder zu vermindern, dass sie einer gegebenen Helligkeit gleich wird. Zuvor soll aber untersucht werden, inwiefern das Urtheil des Auges über die Ungleichheit der Helligkeit der Gegenstände richtig und zulässig ist.

27. Ein Auge möge zwei nebeneinander stehende leuchtende Gegenstände anschauen und dieselben ungleich hell finden. Dann werden wir unter Anwendung desselben Axioms (23) jedenfalls mit Sicherheit schliessen, dass entweder das Auge nicht in demselben Zustand ist, oder, wenn dies der Fall ist, dass es von beiden Gegenständen verschieden afficirt wird. Das Letztere kann man hinsichtlich der Lage, Grösse und Entfernung der Gegenstände verhüten, sodass allein der Unterschied der Helligkeit übrig bleibt. Wenn ein solcher da ist, so kann durch ihn die Oeffnung der Pupille dann und wann eine verschiedene werden. Stehen aber die Gegenstände einander so nahe, dass das Auge beide mit einem Blick übersieht, so ist klar, dass die Contraction der Pupille durch das Licht beider Gegenstände verursacht wird. Da also für beide die Oeffnung dieselbe ist, so erleiden die in das Auge einfallenden Strahlen bezüglich ihrer Menge keine Veränderung, und daher wird das Urtheil des Auges über die Verschiedenheit der Helligkeit jedenfalls richtig sein.

[16] 28. Ferner wollen wir, wie unten ausführlicher auseinandergesetzt werden wird, hier kurz bemerken, dass in diesen Fällen die Veränderung der Pupille die Wahrheit des Urtheils des Auges nicht beeinträchtigt. Es steht nämlich durch die Erfah-

rung fest, dass die Oeffnung der Pupille kleiner wird, wenn man ein Licht lebhafter anschaut. Es wird also den Lichtstrahlen der Zugang verschlossen und sie scheinen dadurch nicht so hell, als es sich gehört. Doch keineswegs wird derselbe in der Weise verschlossen, dass die Pupille um die Hälfte kleiner wird, wenn sich die Dichtigkeit des Lichts verdoppelt. Denn wenn dies stattfände, so würde man alle Gegenstände gleich hell *erblicken.* Dagegen sieht man vielmehr, dass Gegenstände, welche offenbar heller sind, durch das Urtheil des Auges auch heller gefunden werden. Dafür hat man ein sehr einleuchtendes Beispiel am Eisen, wenn es allmählich bis zur Weissgluth erhitzt wird.

29. Wenn daher hiernach offenbar ist, dass das Auge, wenn es zwei oder mehrere nebeneinanderstehende Gegenstände zugleich anschaut, dann ein richtiges Urtheil über die Helligkeit derselben fällen wird, wenn es entscheidet, ob dieselbe eine gleiche oder verschiedene ist, so ist es doch *nicht im Stande, bezüglich der Helligkeitsgrade ein anderes Verhältniss zu entscheiden, als eben das Verhältniss der Gleichheit.* Wenn aber die Helligkeitsgrade verschiedene sind, so lässt das Urtheil des Auges unentschieden, um wieviel der eine grösser ist als der andere. Man muss sich daher, da uns bis jetzt die Instrumente fehlen, anderer Hilfsmittel bedienen. Man muss vermöge derselben, wie schon erwähnt (6, 26), im Stande sein, die Helligkeit des einen oder des anderen Gegenstandes so zu vermehren oder zu vermindern, dass nicht nur die eine Helligkeit der anderen gleich wird, sondern dass man auch weiss, um wieviel diese Helligkeit vermehrt oder vermindert worden ist. Dass Gleichheit besteht, muss das Auge beurtheilen; wie viel aber die Helligkeit zugenommen oder abgenommen hat, dafür ist ein Maass aus den Principien der Photometrie zu ermitteln.

[**17**] 30. Wenn gesagt wurde, dass das Auge über die Beziehung der Gleichheit zweier Helligkeiten ein Urtheil fällen könne, so ist dies nicht so zu verstehen, als ob dieselben dann mit mathematischer Strenge und absolut gleich sein müssten. Man kann jedoch jedenfalls annehmen, dass dieser Gleichheit die Helligkeiten nahe kommen, wenn das Auge sie als gleich beurtheilt. Denn immer ist noch eine minimale Differenz da, welche sich der Schärfe des Auges entzieht. Es wird sich aber durch die unten vorkommenden Versuche zeigen, dass diese Differenz äusserst klein und in der Mehrzahl der Fälle vernachlässigbar ist.

31. Man wird aber dieses Urtheil des Auges auf eine zwei-

fache Art anwenden. Will man nämlich ein Gesetz, welches aus den Principien oder aus angenommenen Hypothesen gefolgert ist und welches die je nach den Umständen verschiedenen Lichtstärken nachweist, der Prüfung durch die Erfahrung unterwerfen, so genügt in diesem Fall das Urtheil des Auges gewiss, wenn es auch nur nahezu richtig ist. Denn man hat ja nur die Aufgabe, zu untersuchen, ob dieses Gesetz mit der Erfahrung stimmt oder nicht. Und in diesem Fall genügt es gewiss, wenn es im Rahmen der sinnlichen Empfindung stimmt.

32. Dagegen ist ein genaueres Urtheil des Auges und eine grössere Genauigkeit erforderlich, wenn man die Helligkeit eines Lichts bestimmen und mit einer gegebenen Helligkeit, welche als Maassstab angenommen wird, vergleichen will. Denn man kommt der gesuchten Wahrheit um so näher, je sorgfältiger diese Vergleichung ist.

33. Auf diese Grundlagen hin gehen wir mehr zu Einzelheiten über. Es bietet sich nämlich sogleich Anlass, die Grundbegriffe der Photometrie genauer zu entwickeln, um die verschiedenen Beziehungen, welche hinsichtlich der Helligkeit des Lichts und dessen [18] Leuchtkraft bestehen, auch durch den Ausdruck zu unterscheiden und jedes mit einem eigenen Namen zu bezeichnen.

34. Wenn man den Sprachgebrauch betrachtet, so findet man, dass der Begriff *Licht* (*lumen*) jedenfalls sehr unbestimmt ist. Es giebt nämlich Körper, welche an sich leuchtend sind und ein eigenes Licht besitzen. Es giebt auch sehr viele andere, welche durch erborgtes Licht sichtbar sind. Den Körpern der ersten Art kommt jedenfalls der Name *Licht* zu, wie z. B. der Sonne, der leuchtenden Kerze, der Feuerflamme und dem elektrischen Funken. Hierher muss man auch die Fixsterne rechnen, das faule Holz, ferner solche Würmer und Insecten, welche Nachts ein zwar schwaches aber doch sichtbares Licht verbreiten. Auch von den Körpern der anderen Art bezeichnet der Sprachgebrauch einige als Licht, zumal solche, welche in Abwesenheit eines grösseren Lichtes an dessen Stelle treten und die Gegenstände sichtbar machen. Hierher gehört besonders der Mond, die Planeten und bei Tage auch der Himmel, sofern dessen Licht in die Häuser tritt und die dort befindlichen Zimmer hell macht. Es ist auch nicht nöthig, dass uns diese Körper fortwährend die Stelle eines Lichts vertreten. So bezeichnet man auch bei Tage eine Flamme als ein Licht. Es genügt nämlich, wenn diese Körper dann und wann die Stelle eines Lichts vertreten. Und während

die meisten derartigen Körper, welchen man den Namen Lichter giebt, weiss sind, bezeichnet man die blaue Flamme des Schwefels als blaues Licht, sodass auch in dieser Beziehung die Begriffe Licht und Farbe wenig von einander verschieden sind; es besteht nur der Unterschied, dass das gefärbte Licht nicht so häufig vorkommt.

[19] 35. Da wir also nur das als Licht bezeichnen, was die Gegenstände entweder immer oder zeitweilig sichtbar macht, so hängt diese Benennung offenbar nicht von der Helligkeit ab. Denn sonst müsste man ein in den Sonnenschein gelegtes weisses Blatt Papier als Licht bezeichnen, da es eben so hell ist, wie eine Kerzenflamme, welcher gewiss Jedermann den Namen Licht beilegt. Alle anderen dem Auge vorkommenden Gegenstände bezeichnet man, sofern man sie sieht, als *beleuchtet* oder man sagt, dass sie erborgtes Licht besitzen. Wenn man aber sieht, dass auch diese die Helligkeit der Gegenstände dann und wann vermehren, wie z. B., wenn eine weisse Mauer Licht in ein Zimmer wirft, so sagt man, dass das Licht dort *reflectirt* wird.

36. Diesen Sprachgebrauch wird man auch mit wenigen Abänderungen in der Photometrie gebrauchen können. Auf jeden Fall muss man die Helligkeit einer Lichtquelle, welche einen Gegenstand beleuchtet, von der Helligkeit des von ihr erleuchteten Gegenstandes unterscheiden. In dieser Hinsicht werden wir der Lichtquelle *Leuchtkraft* (*vis illuminans*) oder *Helligkeit* (*splendor*) beilegen. Diejenige Helligkeit aber, welche dieselbe auf die Gegenstände ausbreitet, werden wir als *Beleuchtung* (*illuminatio*) bezeichnen.

37. Ferner ist die Helligkeit einer Lichtquelle, sofern sie vom Auge gesehen wird, von der Helligkeit derselben zu unterscheiden, sofern sie die Gegenstände beleuchtet. Jene wollen wir *scheinbare Helligkeit* (*claritas visa*) nennen, diese aber, wie schon erwähnt, wenn sie sich auf den leuchtenden Körper bezieht, als *Leuchtkraft*, wenn aber auf den Gegenstand, als *Beleuchtung* bezeichnen. Zwischen scheinbarer Helligkeit und Beleuchtung ist ein grosser Unterschied, und man muss sich wundern, dass *Wolf* beide Begriffe irrthümlich verwirrt hat, wenn er in seiner Optik sagt, dass entferntere Gegenstände deshalb weniger hell seien, weil das Licht umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung abnimmt. [20] Dabei meint er aber die *scheinbare Helligkeit*, von welcher diese Behauptung mit Unrecht aufgestellt wird, während sie nur von der *Beleuchtung* gilt. Aehnlich findet man ab und zu, dass der scheinbaren Helligkeit der Planeten Eigen-

schaften beigelegt werden, welche sich nur auf die Beleuchtung beziehen. Es soll aber am gehörigen Ort gezeigt werden, wie gross der Unterschied ist, welcher zwischen beiden besteht.

38. Aehnlich muss man bei jedem leuchtenden Körper zwischen seiner scheinbaren und wahren Grösse unterscheiden; denn dieser Begriff kommt auch einer Lichtquelle in diesem zweifachen Sinne zu, indem man sich die Ausdehnung derselben bei gleichbleibender Helligkeit vergrössert oder verkleinert denken kann. Hieraus entspringt also der Begriff von der *wahren und scheinbaren Grösse* einer Lichtquelle. Die erstere ist etwas absolutes, die letztere hängt von der ersteren und zugleich von der Entfernung und Lage des Körpers ab.

39. Dagegen kann die Helligkeit eines leuchtenden Körpers in endlosen Stufen grösser oder geringer sein, auch wenn seine Entfernung und Distanz dieselbe bleibt. Hierher gehört das oben schon erwähnte Beispiel vom Eisen, welches bis zur Weissgluth erhitzt wird (28), ebenso der Fall, wenn ein Blatt Papier durch Kerzen beleuchtet wird, deren Zahl vermehrt oder vermindert wird, oder wenn das Blatt der Kerze genähert oder von ihr weiter entfernt wird. Diese verschiedene Helligkeit desselben Körpers wollen wir hinsichtlich des leuchtenden Körpers selbst als *Intensität des Lichts* oder als *Dichtigkeit der Strahlen* bezeichnen. In dieser Beziehung kann man sagen, dass das Sonnenlicht das intensivste Licht sei, da seine Strahlen am dichtesten sind.

40. Die Helligkeit eines Körpers, sofern er beleuchtet wird, haben wir ohne Zufügung einer weiteren Unterscheidung als Beleuchtung bezeichnet. *Wenn nämlich, wie es häufig vorkommt, der Fall eintritt, dass ein Körper* [**21**] *mit erborgtem Licht die Stelle einer Lichtquelle vertritt und wieder andere Körper beleuchtet* (34), *so gilt über ihn alles, was über die leuchtenden Körper gesagt worden ist.*

41. Es gibt auch noch eine andere synonyme Bedeutung des Wortes Licht (lumen), welche jetzt genauer zu bestimmen ist. Als Licht bezeichnet man nämlich bald den leuchtenden Körper selbst, bald aber die Helligkeit, welche ein solcher Körper um sich verbreitet. In diesem letzteren Falle sagt man, dass das Licht *ausgestrahlt werde* und sich durch den unendlichen Raum *fortpflanze*. Dabei lassen wir dahingestellt (5), ob sich entweder dabei nur seine Helligkeit oder Wirkung fortpflanzt, wie *Euler* annimmt, oder ob mit dieser Wirkung zugleich Lichttheilchen aus dem leuchtenden Körper ausströmen, wie *Newton*

anzunehmen vorzieht. Beide Ausdrucksweisen wird man ohne Gefahr eines Fehlers in der Photometrie anwenden dürfen, da evident erwiesen ist, dass das Licht nicht nur sich bewegt, sondern dass seine Bewegung auch eine allmähliche ist, sodass es gleichgiltig ist, ob man sagt, dass das Licht zugleich mit seinen Theilchen oder ohne dieselben den Körpern entströme. In der That wird die Wirkung dieselbe sein, indem sie so sein muss, wie sie mit den Versuchen übereinstimmt.

42. Wenn aber Licht aus einem leuchtenden Körper austritt, so redet man von einem *Lichtstrahl.* Nach *Newton* ist ein Strahl die Reihe der aufeinanderfolgenden Lichttheilchen, welche in gerader Linie aus dem leuchtenden Körper ausströmen; nach *Euler* ist er dasselbe wie eine geradlinig fortgetriebene Aetherwelle, ähnlich wie die Schallwellen in der Luft. Wie man sich aber auch das Wesen und die Beschaffenheit der Strahlen denkt, so muss man doch, wenn man die augenfälligste Wirkung betrachtet, jedenfalls zugeben, dass sie in zweifacher Hinsicht [**22**] zu betrachten sind. *Denn nothwendiger Weise muss man unterscheiden zwischen der Dichtigkeit der Strahlen und der Menge derselben.* Für uns wird es dabei hinreichend sein, an dem gewöhnlichen Begriff der Strahlen festzuhalten, welchen man von Jugend auf sich folgendermaassen aneignet.

43. Es falle z. B. Sonnenlicht durch ein Loch in ein gut verschlossenes dunkeles Zimmer; dann wird man sehen, dass die Staubtheilchen, welche in der Luft fliegen, erleuchtet sind und den Weg deutlich bezeichnen, längs dessen die Fortpflanzung des Lichts stattfindet. Diesen ganzen Raum in der Luft, welcher sich von der Oeffnung bis zum Boden des Zimmers ausdehnt, bezeichnet man, sofern das Licht ihn durchdringt, als Lichtstrahl. Da sich dieser umsomehr verdünnt, je enger das Loch gemacht wird, so entspringt hieraus der Gedanke, dass dieser Strahl aus mehreren anderen zusammengesetzt ist. Wenn man diesen weiter theilt, so erhält man hieraus den Begriff des einfachen oder gleichsam unendlich dünnen Strahles. Weiter kann man aber nicht gehen und muss deshalb hier stehen bleiben. Mehr wird aber in der Photometrie auch nicht verlangt, denn es genügt, den vorher beschriebenen einfachen Strahl genauer zu betrachten. Hierzu nehmen wir an, ein solcher Strahl werde durch ein weisses Blatt Papier aufgefangen, sodass er senkrecht darauf auffällt; dann ist klar, dass ein Stück des Blattes von diesem Strahl beleuchtet werden wird. Wenn man nun bei gleichbleibender Entfernung und Stellung des Blattes

gegen die Oeffnung die Weite des Loches vergrössert, so vergrössert sich offenbar das erleuchtete Flächenstück in gleicher Weise; denn jetzt wird dem Licht in reichlicherem Maasse der Zugang gestattet, oder, um mich einer abgebrauchten Wendung zu bedienen, es fallen mehr Strahlen auf das Blatt. Damit hat man also den Begriff von der *Menge der Strahlen.* Wenn also auch die Zerlegbarkeit der Lichtstrahlen nicht so weit geht, dass man das Wesen [**23**] eines einfachen Strahles daraus ableiten könne, so steht dennoch nichts im Wege, ein beliebiges Bündel von Strahlen, um diesen Ausdruck zu brauchen, als Einheit aufzufassen und vermöge dieser Einheit eine grössere Menge von Strahlen auszudrücken.

44. Man denke sich jetzt bei gleichbleibender Lage des Blattes und derselben Oeffnung des Loches an der Stelle der Sonne den Vollmond, so wird jetzt, da er dieselbe scheinbare Grösse hat, dasselbe Stück des Blattes erleuchtet werden, und doch wird eine grosse Verschiedenheit der Helligkeit stattfinden. Da also die Helligkeit des Blattes weit geringer ist, so muss man jedenfalls folgern, dass im früheren Falle auf dasselbe Stück des Blattes eine grössere Anzahl von Strahlen aufgefallen sei. Hiermit hat man den anderen Begriff, nämlich den von der *Dichtigkeit* oder *Intensität* der Strahlen. Man wird also die Strahlen als dichter bezeichnen, wenn eine grössere Anzahl auf dasselbe Flächenstück auffällt. Man wird dagegen bei gleichbleibender Dichtigkeit eine grössere Menge haben, wenn ein grösseres Stück erleuchtet wird.

45. Da wir später von dieser bekannten verschiedenseitigen Vorstellungsweise der Strahlen Anwendungen machen werden, so wird diese breitere Auseinandersetzung derselben keinen Anstoss erregen. Denn alle Beweise, welche im ersten Theil der Optik über den Weg des Lichts vorgebracht werden, beruhen auf diesem Begriff der Strahlen, mit dem einzigen Unterschiede, dass man dort nur auf den Weg des Lichts Rücksicht nimmt und deshalb die Strahlen als gerade Linien bezeichnet. Dagegen macht man in der Photometrie von dem Begriff des geradlinigen Lichtstrahles nur wenig Gebrauch, da es hier nur darauf ankommt, in wie weit eine Fläche durch ihn erleuchtet wird.

46. Nach dieser ausgedehnteren Entwickelung der photometrischen Grundbegriffe kehren wir zu den Erfahrungen zurück, welche oben kurz angedeutet wurden (21). [**24**] Es wurden nämlich die allgemein bekannten Sätze aufgestellt:

1) Zwei oder mehrere Kerzen leuchten stärker als eine einzige.

2) Ein Gegenstand erscheint heller, wenn er der Lichtquelle genähert wird.
3) Das Licht erleuchtet eine Fläche schwächer, wenn es schief auf sie auffällt.

Es fragt sich nun, nach welchem Gesetz diese Vermehrung oder Verminderung der Beleuchtung in den einzelnen Fällen vor sich geht. Denn wenn dieses Gesetz bekannt ist, so ergeben sich zugleich verschiedene Methoden, die Helligkeiten verschiedener Lichter unter einander zu vergleichen.

47. Wenn nun das Gesetz für einen einzigen dieser drei Fälle gegeben ist, so können, wie man leicht sieht, die übrigen durch Versuche erledigt werden. Nimmt man z. B. im ersten Falle an, dass sich die Beleuchtung in demselben Verhältniss vermehrt, wie die Anzahl der Kerzen, so bietet sich ein Mittel, eine Helligkeit zu verdoppeln, verdreifachen, vervierfachen u. s. w. Hierdurch kann man leicht die Entfernung bestimmen, bei welcher sich eine Beleuchtung verdoppelt, verdreifacht u. s. w., und ebenso bestimmt man die Einfallswinkel, unter welchen die Hälfte, der dritte Theil u. s. w. einer Beleuchtung stattfindet.

48. Um aber in dieser Angelegenheit positive Annahmen machen zu können, werden wir andere Erfahrungen zu Hilfe nehmen müssen, um durch sie diese Gesetze zu bestimmen. Es ist hinlänglich bekannt, dass die einzelnen Theile eines Gegenstandes überallhin sichtbar sind, wohin man sich auch wendet, ausser wenn sie von anderen verdeckt werden. Daraus hat man mit vollem Rechte längst den Schluss gezogen, dass ein beliebig kleines Theilchen der Oberfläche des leuchtenden Körpers [**25**] seine Strahlen nach jeder Richtung hin ausbreitet, und hieraus ist ferner der Begriff des *lichtausstrahlenden Punktes* entstanden. Deshalb hat man die Strahlen, welche aus einem solchen Punkte überallhin ausströmen, als vom Centrum aus *divergirend* bezeichnet und daher angenommen, dass sie sich je nach der grösseren Entfernung vom Centrum mehr vereinzeln oder dass ihre Dichtigkeit abnimmt. Und zwar mit gutem Grunde. Denn man denke sich zwei concentrische Kugelflächen, welche um den lichtausstrahlenden Punkt beschrieben seien. Dann ist klar, dass es die nämlichen Strahlen sind, welche diese beiden Flächen durchdringen. Sie sind aber auf der grösseren Kugelfläche auf einen grösseren Raum verbreitet und deshalb ist dort jedenfalls die Dichtigkeit der Strahlen geringer; und da man im Allgemeinen die Dichtigkeit ansehen muss als die Anzahl der Strahlen dividirt durch das Flächenstück, so folgt, *dass in diesem*

Fall die Dichtigkeit mit der zunehmenden Oberfläche der Kugeln abnimmt, also sich umgekehrt verhält, wie das Quadrat der Entfernung vom lichtausstrahlenden Punkte.

49. Diesen oder einen ähnlichen Beweis findet man in allen Darstellungen der Optik, sodass es überflüssig ist, länger dabei zu verweilen. Denn er entspricht allen Erscheinungen des Lichts und kann hinlänglich durch Versuche bestätigt werden.

50. Dass verschiedenes Licht sich nicht gegenseitig hinderlich ist, wenn es denselben Raum durchdringt, ist so klar, dass ein Beweis nicht nöthig ist. Geradezu bewundernswerth ist es, wie sich die Lichtstrahlen durch den ganzen Weltraum ausbreiten, indem die einzelnen Punkte der Gegenstände ihre Strahlen überallhin aussenden und dieselben überall dem Auge sichtbar machen. Bewundernswerth ist es auch, wie unzählige Strahlen gleichzeitig durch eine noch so enge Oeffnung dringen, indem man durch eine solche Oeffnung, die sich in einer Metallplatte befindet oder die man mit einer noch so feinen Nadel in ein Blatt Papier [**26**] gestochen hat, wenn man die Oeffnung dem Auge nähert, die einzelnen Gegenstände auf einen Blick übersehen kann. Wenn man dies auf ein dunkles Zimmer anwendet, und mit einem weissen Blatt die Strahlen auffängt, so zeigt dasselbe innen die einzelnen äusseren Gegenstände.

51. Auf dieser wunderbaren Eigenschaft der Lichtstrahlen beruht zum grössten Theil auch das zweite Gesetz, nämlich *dass die Beleuchtung eines Blattes um so stärker ist, je grösser die Anzahl der leuchtenden Kerzen ist, vorausgesetzt, dass dieselben gleich hell sind, von dem Blatt gleichweit entfernt sind und endlich dieselbe Grösse besitzen.* Denn da verschiedenes Licht sich gegenseitig nicht stört, so muss offenbar das Blatt bei Hinzufügung beliebig vieler neuer Kerzen um eben so viel Grade an Helligkeit zunehmen. Denn im Allgemeinen tritt zum ersten Helligkeitsgrad ein zweiter, dritter u. s. w., ohne Beeinträchtigung der vorherigen.

52. Wenn man nun die Kerzen durch eine andere Lichtquelle ersetzt, welche gleich hell ist und dieselbe scheinbare Grösse besitzt, wie alle Kerzen zusammengenommen, so wird dadurch auf dem Blatt dieselbe Helligkeit erzeugt werden. Daher kann man, wie auch die Optiker schon längst festgestellt haben, jedenfalls annehmen: *dass die Beleuchtung um so stärker ist, je grösser die Oberfläche des leuchtenden Körpers ist, wenn dabei die Leuchtkraft und die Entfernung der Lichtquelle unverändert bleiben.* Dabei ist aber wohl zu bemerken, dass wir es

hier mit der scheinbaren Oberfläche zu thun haben. Dass die Sache sich anders verhält, wenn die Fläche Ausbuchtungen besitzt, oder wenn man auf ihre wahre Gestalt Rücksicht nimmt, soll an passender Stelle noch gezeigt werden.

53. In ähnlicher Weise haben die Optiker auch das dritte Gesetz festgestellt, welches sich auf den Einfallswinkel bezieht. Dass [27] die Anzahl der Strahlen überhaupt geringer ist, wenn sie unter schiefem Winkel auf dieselbe Fläche einfallen, ist leicht zu sehen. Dieselben werden dadurch mehr vereinzelt und das Blatt muss nothwendig schwächer beleuchtet werden. Dass aber die Helligkeit in demselben Verhältniss abnimmt wie der Sinus des Einfallswinkels, wird folgendermaassen bewiesen: Zwischen den Parallelen CA, DB mögen parallele Strahlen auf die

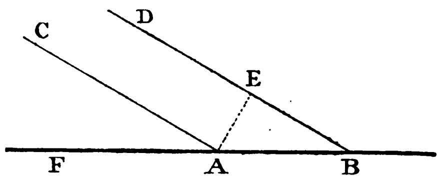

Fig. 1.

Ebene AB auffallen unter einem Winkel $CAF = DBF$. Nimmt man nun an, dass dieselben Strahlen durch eine Ebene AE aufgefangen werden, welche auf der Richtung der Strahlen senkrecht steht, so fängt offenbar das Stück AE dieselbe Anzahl der Strahlen auf wie vorher das grössere Ebenenstück AB. Sie müssen also in AE dichter sein, als in AB. Da nun die Dichtigkeit sich verhält wie die Anzahl der Strahlen, dividirt durch das betroffene Ebenenstück, so ist die gleiche Anzahl der Strahlen im ersten Falle durch AB, im zweiten durch AE zu dividiren und die Dichtigkeit in AB wird sich zur Dichtigkeit in AE umgekehrt verhalten wie diese Strecken, oder direct wie AE zu AB. Wenn man nun AB als Radius und als Einheit annimmt, so wird AE der Sinus des Incidenzwinkels sein. Deshalb *verhält sich die senkrechte Beleuchtung zur schiefwinkeligen, wie die Einheit zum Sinus des Incidenzwinkels*. Sie nimmt also ab mit dem Sinus des Incidenzwinkels.

54. Dies sind also die Beweise für diese drei Gesetze, durch welche die Veränderung und Stärke der Beleuchtung in jedem gegebenen Falle bestimmt wird, wie man sie in allen Büchern über Optik findet. Aber, genau genommen, lässt sich keines

derselben für sich durch Versuche bestätigen, da, wie wir oben gesehen, das dabei erforderliche Urtheil des Auges, ausser in Rücksicht der Gleichheit, nicht [**28**] als sicher zugelassen werden kann (7, 11, 29). Es möge nämlich ein Blatt durch das Licht einer Kerze beleuchtet werden. Ferner habe man ein zweites, auf welches zwei Kerzen ihre Strahlen ausbreiten. Das letztere wird man gewiss weit heller erblicken; ob aber die Helligkeit die doppelte ist, dies lässt sich zwar zufolge einer angestellten Ueberlegung annehmen, nicht aber mit Sicherheit durch das Auge entscheiden. In ähnlicher Weise wird man ein von der Kerzenflamme entfernteres Blatt dunkler sehen, als ein anderes, welches näher steht; aber das Auge vermag nicht zu entscheiden, welcher Unterschied und welches Verhältniss zwischen beiden Helligkeiten stattfindet. Ebenso wird man das schiefwinklig einfallende Licht etwas dunkler sehen, aber mit der blossen Hilfe des Auges wird man die Abnahme des Lichts nicht messen können. Worin besteht also die Sicherheit dieser Sätze, wenn sie auf dem sogenannten aposteriorischen Wege gewonnen werden muss?

55. In der That gibt es eine Methode, jedes beliebige dieser Gesetze an der Hand der Erfahrung mit den übrigen zu vergleichen und den Beweis zu erbringen, dass, wenn das eine davon als wahr zugelassen ist, auch die anderen wahr sein werden, sodass dieselben gleichsam durch ein gemeinsames Band verknüpft werden, infolge dessen sie sich gegenseitig bestätigen oder zerstören. Denn sie sind zwar alle aus derselben höchst natürlichen Auffassungsweise des Lichts abgeleitet; da aber Fehlschlüsse in der Physik sehr leicht möglich sind und häufig vorkommen, so werden diejenigen, welche in den Beweisen einer Wissenschaft die höchste Strenge fordern, vor einem logischen Zirkel warnen, der sich nach ihrer Meinung hier einschleicht.

56. Aber soviel ich auf dem Gebiet der Physik sehe, ist wirkliche Strenge in solchen physikalischen Beweisen äusserst selten oder findet überhaupt nicht statt. [**29**] Denn die Sicherheit wird ihre höchste Stufe erreichen, wenn ein Gesetz so mit den einzelnen Erscheinungen übereinstimmt, dass es keiner derselben offen widerspricht und mit allen aufs beste übereinstimmt, so weit man auch die Versuche ausdehnt. Dass aber diese drei Gesetze diese Beschaffenheit haben, dies wird man in diesem ganzen Werk über Photometrie in einer Weise bestätigt finden, welche keinen Zweifel übrig lässt.

57. Damit man aber auch an dieser Stelle einen Beweis für

diese Behauptung nicht vermisse, so wollen wir sofort sehen, wie diese Gesetze sich durch die Zuziehung von Versuchen gegenseitig bestätigen.

58. **Versuch 1.** Auf der Platte ABC mögen in A zwei gleich helle Kerzen stehen, auf CD stehe eine weisse ebene

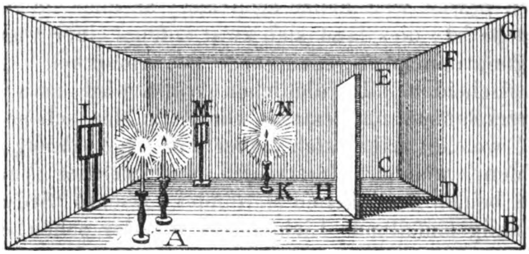

Fig. 2.

Fläche oder ein Blatt Papier derart, dass die Strahlen von A auf den Theil $BGFD$ der Ebene senkrecht auffallen. Auf HI stehe eine andere weniger breite Ebene so, dass der von beiden Kerzen in A geworfene Schatten den hinteren Theil $DFEC$ der Ebene bedeckt. Andererseits stehe in K eine weitere Kerze, welche ebenso hell ist, als die vorhergehenden, und zwar so, dass der von der Ebene HI geworfene Schatten nur den vorderen Theil $DFGB$ der Ebene bedeckt. Auf diese Weise wird also der vordere Theil $BGFD$ von zwei Kerzen, der hintere dagegen von einer einzigen beleuchtet werden. Unter Festhaltung dieser Bedingung bewege man die Kerze K zur Ebene BE hin oder davon weg, bis beide Theile DG und DE gleich hell erscheinen. Hierauf bestimme man die Entfernung der Kerzen von der Ebene BC; dann wird sich AB zu KC verhalten, wie $\sqrt{2}$ zu 1, oder mit anderen Worten: man wird finden, dass das Quadrat der Distanz AB [**30**] sich zum Quadrat der Distanz KC verhält wie 2 zu 1, oder allgemeiner: wie die Anzahl Kerzen in A zur Anzahl derjenigen in K. Denn man kann den Versuch auf dieselbe Weise mit mehreren Kerzen wiederholen. Er wird um so genauer sein, je mehr die einzelnen Kerzen an Grösse und Helligkeit gleich sind.

59. **Versuch 2.** Den eben beschriebenen Versuch kann man auch bloss mit einer einzigen Kerze, aber mit Benutzung von Planspiegeln folgendermaassen einrichten. Die Kerze befinde

sich in K, und man nähere ihr die Ebene HI so weit, bis ihr Schatten die ganze Ebene BE bedeckt. Hierauf bringe man in L hinter der Kerze zwei oder mehrere Spiegel so an, dass sie das Licht auf den Theil $BGFD$ der Ebene reflectiren. Die Spiegel müssen dabei von der Kerze gleichweit entfernt sein und gegenseitig sehr nahe bei einander stehen. Nun nehme man einen anderen Spiegel und stelle ihn näher zur Kerze und zwar so, dass er das Licht derselben auf den Theil $DFEC$ der Ebene werfe und diesen eben so hell erleuchte, wie der Theil $GBFD$ von jenen zwei Spiegeln erleuchtet wird. Man weiss aber aus der Katoptrik, dass die Beleuchtung eben so vor sich geht, als wenn die Kerze dort stände, wo man bei diesem Versuch ihr Bild erblickt, welches hinter der Spiegelfläche ebenso weit von ihr absteht, wie die Kerze. Man muss also die Entfernung der Spiegel von der Ebene BE nehmen und zu dieser die Entfernung desselben von der Kerze zufügen. Dann wird man finden, dass das Quadrat der Summe der Entfernungen $LG + LN$ sich zum Quadrat der Entfernungen $ME + MN$ verhält, wie die Zahl der Spiegel in L zur Zahl der Spiegel in M, [**31**] falls an beiden Stellen mehrere Spiegel standen.

60. Wir müssen nun aber beweisen, dass, wenn man das Gesetz § 51, 52 als richtig annimmt, das Gesetz § 48 durch diese Versuche bestätigt wird, und umgekehrt. Aus den Versuchen folgt nun zunächst, dass, wenn die Beleuchtung dieselbe bleiben soll, sich das Quadrat der Entfernung der Kerzen verhalten muss wie die Anzahl derselben. Daher ist die von einer einzelnen Kerze herrührende Beleuchtung um so schwächer, je grösser diese Anzahl ist (51, 52), also auch je grösser das Quadrat der Entfernung ist. Mithin verhält sich dieselbe umgekehrt wie dieses Quadrat.

61. Für diesen Satz soll noch ein analytischer Beweis beigebracht werden. Sei n die Anzahl der Kerzen in A, und sei J die daraus entspringende Beleuchtung, welche wir als constant annehmen. Dann ist nach Voraussetzung die von jeder einzelnen Kerze herrührende Beleuchtung $= J : n$; wir setzen dieselbe $= c$, so dass $c = J : n$. Nach dem Versuch ist aber $n =$ Quadrat der Entfernung; nennt man diese $= d$, so wird $n = d^2$; wegen $c = J : n$ hat man daher $c = J : d^2$ oder wegen $J =$ const. auch: $c \backsim 1 : d^2$. Ebenso verläuft der Beweis, wenn man den zweiten Versuch zuzieht und an die Stelle der Kerzen deren Bilder setzt, welche von den Spiegeln erzeugt werden.

62. **Versuch 3.** Auf der Geraden AB stehe eine weisse Ebene. In C befinde sich eine oder mehrere Kerzen, ebenso in

D, aber in grösserer Anzahl als in C. Ferner sei auf EF ein ebener Schirm errichtet, welcher den Punkt B gegen die Kerze C beschattet, ebenso den Punkt A gegen die Kerzen in D. Dann ermittele man durch Versuche diejenige Stellung der Kerzen, bei welcher sie von den beleuchteten Punkten [**32**] A und B gleichweit entfernt sind und dort die Ebene gleich stark erleuchten. Misst man dann die Einfallswinkel CAB und DBG, so wird man finden, dass ihre Sinus in demselben Verhältniss stehen wie die Anzahlen der Kerzen in D und C. Durch diesen Versuch wird bewiesen, dass die Gesetze in § 51 und § 53 von einander abhängig sind und sich gegenseitig bestätigen.

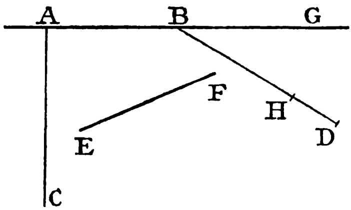

Fig. 3.

63. **Versuch 4.** In C stehe wieder eine Kerze; eine andere gleich helle und gleich grosse werde auf der Geraden BD, z. B. in H so aufgestellt, dass die Ebene in A und B gleich hell erleuchtet wird; dann wird man finden, dass sich die Sinus der Einfallswinkel umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Entfernung der Kerzen von den Punkten A und B. Dieser Versuch beweist wieder die Uebereinstimmung der Gesetze § 48 und § 53, welche sich gegenseitig bestätigen. Man wird, ohne dass ich ein Wort zu verlieren brauche, leicht sehen, dass diese beiden Versuche auch mit Hilfe von Spiegeln ausgeführt werden können.

64. Es gibt noch mehrere und wesentlich andere Versuche, als die vorgebrachten, mit deren Hilfe man diese Gesetze gegenseitig bestätigen kann. Man muss aber die Beibringung derselben bis dahin verschieben, wo die Principien, auf welche sie sich stützen, im Folgenden entwickelt werden. Inzwischen lassen wir uns an den beschriebenen genügen, um zu sehen, auf welche Art die verschiedensten Beleuchtungen mit einander verglichen werden können. Denn auf diese Weise schaffen wir uns im Voraus die Hilfsmittel, um später die verschiedenen Grade der Beleuchtung zu bestimmen.

65. [**33**] Aus dem Gesagten leuchtet ein, dass auf mehrfache Weise die Möglichkeit gegeben ist, eine beliebige Beleuchtung so zu modificiren, dass sie nicht nur einer gegebenen Beleuchtung gleich wird, sondern dass man auch erkennt, in welchem Verhältniss und um wie viel dieselbe zu- oder abgenommen hat.

Denn wenn man die Entfernung der Lichtquelle von dem Blatt oder der beleuchteten Ebene, oder wenn man die Stellung der letzteren reguliren kann, so ist es jedenfalls möglich, eine Beleuchtung mit einer gegebenen gleich zu machen. Denn die veränderte Beleuchtung wird sich immer direct wie der Einfallswinkel und umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung verhalten.

66. Es sei z. B. die Beleuchtung eines Blattes, welche durch den Mond hervorgebracht wird, zu vergleichen mit der Beleuchtung desselben Blattes durch eine Kerze. Nun ist leicht ersichtlich, dass dies auf verschiedene Art geschehen kann. Wie man aber auch verfährt, immer muss man das Blatt sowohl den Strahlen des Mondes wie der Kerze aussetzen, indem man einen Gegenstand so dazwischen stellt, dass der vom Mond beleuchtete Theil von den Strahlen der Kerze nicht getroffen wird und umgekehrt. Während man an dieser Regel festhält, wird man die Entfernung der Kerze so lange vergrössern oder verkleinern können, bis beide Stellen des Blattes gleich stark beleuchtet erscheinen. In ähnlicher Weise wird man auch durch die Benutzung mehrerer Kerzen die durch sie hervorgerufene Beleuchtung des Blattes mit der Beleuchtung durch den Mond oder eine andere Lichtquelle vergleichen können. Aber durch diese Versuche findet man, wie wohl zu bemerken ist, noch nicht das Verhältniss zwischen der Helligkeit der Lichtquellen selbst und man kann noch nicht die Helligkeit des beleuchteten Blattes vergleichen mit der Helligkeit des leuchtenden Körpers. Das erstere kann man jedoch leicht erreichen, wenn man sowohl auf den Einfallswinkel wie auf die scheinbare Grösse [34] Rücksicht nimmt. Es wird später der Ort sein, dies breiter auseinanderzusetzen.

67. Es bleibt noch übrig einige Begriffe zu entwickeln, deren gegenseitige Unterscheidung später von Nutzen sein wird. Es wurde schon bemerkt, dass von jedem Punkte der leuchtenden Fläche nach allen Richtungen Strahlen ausgesandt werden. Sei also AB eine solche Fläche, und befinde sich ihr gegenüber eine andere CD, welche beleuchtet werde. Dann verbreiten sich also die Strahlen, die von einem beliebigen Punkte E ausgehen, auf die ganze Fläche CD. Im Folgenden wird es nun oft vorkommen, dass die Summe derselben gesucht wird, wie auch die Gesammtmenge der

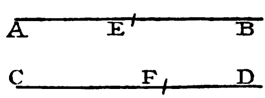

Fig. 4.

Helligkeit, welche auf CD nach Maassgabe der verschiedenen Entfernungen und Einfallswinkel hervorgebracht wird. Deshalb ist es gut, sie in dieser Hinsicht von den übrigen Arten der Strahlen zu unterscheiden. Wir werden sie also *die von dem Punkte ausgehenden* oder *divergirenden Strahlen* nennen.

68. Dagegen fallen auf einen beliebigen Punkt F der Fläche CD aus den einzelnen Punkten der Fläche AB Strahlen, deren Dichtigkeit den Grad der Beleuchtung bestimmt, welcher von der leuchtenden Fläche AB herrührt. Auch von solchen Strahlen wird im Folgenden in ausgedehntem Maasse die Rede sein. Um sie also von den anderen zu unterscheiden, wollen wir sie als *auf den gegebenen Punkt einfallende Strahlen* bezeichnen.

69. Man begegnet noch einer anderen Unterscheidung bezüglich der leuchtenden sowohl wie der beleuchteten Punkte, welche jedenfalls zu bemerken ist. Denn entweder betrachtet man einen Punkt einzeln für sich, und hierher kann man die sogenannten *leuchtenden Punkte* rechnen, welche man sich gleichsam als einzeln im leeren Raum befindlich vorstellt, und welche ihr Licht frei nach allen Seiten hin verbreiten. Oder aber, man sieht einen Punkt als den Theil einer Fläche an, wie z. B. im vorigen Paragraphen [**35**] die Punkte E und F. Solche Punkte wollen wir zum Unterschied gegen die erste Art als *Punkte der Fläche* bezeichnen. Bezüglich derselben muss man allgemein bemerken, dass sie *keineswegs als geometrische* Punkte anzusehen sind, welche überhaupt keine Ausdehnung haben, sondern als physische Punkte, welche eine, zwei, oder auch drei wenn auch noch so kleine Ausdehnungen besitzen, je nachdem sie Theile einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers sind. Dieser Begriff ist in die Optik bereits aufgenommen und wird nicht zu Irrthümern führen, wenn wir an seine Bedeutung hier erinnern. Sie werden zu geometrischen Punkten dann werden, wenn die unendliche Theilbarkeit des Lichts nicht nur als möglich, sondern auch als wirklich erwiesen ist. Für uns genügt es, sie hier als unendlich klein anzusehen. Wenn jedoch Dunkelheit oder Zweideutigkeit zu vermeiden ist, so werden wir uns noch anderer mehr handgreiflicher Ausdrucksweisen bedienen, die in die Geometrie Aufnahme gefunden haben.

Kapitel 2.

Messung und Stärke des directen Lichts.

70. Die im vorigen Kapitel besprochenen Sätze, die wir jetzt anwenden werden, sind folgende: die Beleuchtung nimmt ab umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung (48), dagegen direct wie der Sinus des Einfallswinkels (53), sie ist um so stärker, je grösser die dem beleuchteten Gegenstand zugewandte Oberfläche ist (52), und je intensiver [**36**] die der Lichtquelle eigenthümliche Helligkeit ist (39). Da nun diese Bedingungen, von welchen die Stärke der Beleuchtung abhängig ist, auf unendlich viele Arten verschieden sein können, so gibt es auch ebenso viele Modificationen der Beleuchtung. Die hauptsächlichsten derselben werden wir gleichsam als Typen in diesem Kapitel durchsprechen, damit die daraus folgenden Lehrsätze in den folgenden Theilen der Photometrie als Grundlagen dienen können.

71. Bevor wir aber dazu kommen, muss erst noch eine andere sehr wichtige Frage gelöst werden, die bisher nur wenig berührt wurde. Wir haben gesehen, dass die Beleuchtung abhängig ist von der Lage der beleuchteten Fläche, und dass dieselbe um so schwächer wird, je schiefer diese Fläche von den Lichtstrahlen getroffen wird oder je kleiner der Einfallswinkel ist. Es ist also nicht gleichgiltig, wie die beleuchtete Fläche liegt und welches die Neigung der einfallenden Strahlen ist. Jetzt fragt es sich aber, ob sich die Sache ebenso verhält in Bezug auf die Lage der leuchtenden Fläche, welche ihre Strahlen auf den Gegenstand ausbreitet. Hierüber beobachten die meisten, welche über Beleuchtung der Gegenstände geschrieben haben, tiefes Stillschweigen. *Euler* ist, wenn ich nicht irre, der einzige, der das Wesen des Lichts genauer und scharfsinniger durchforscht hat und der zugleich auf diesen Umstand Rücksicht nahm und ihn gelegentlich seiner Untersuchung über die Helligkeit der Planeten der Rechnung unterwarf. Vergl. dessen *Réflexions sur les degrés de la lumière du Soleil et des autres Corps célestes* in den *Mémoires de l'Académie de Berlin.*

[**37**] 72. In dieser sehr sorgfältigen Schrift sagt der berühmte Verfasser, wenn ich ihn recht verstanden habe, ausdrücklich, dass die Lage der leuchtenden Fläche gleichgiltig sei, und es gehe dieselbe Beleuchtung hervor für jede Schiefe, unter welcher die Strahlen austreten. Deshalb behauptet er, die

Beleuchtung eines Körpers durch die Sonne sei so, wie sie sich ergeben würde, wenn man sich die uns sichtbare Hälfte der Sonnenoberfläche in eine Ebene ausgebreitet denkt, dass also die Sonne nicht in dem Verhältniss leuchte, wie eine ebene Scheibe, sondern nach Maassgabe des wahren Oberflächenstückes, welches den Augen zugewandt ist. Ebenso behauptet er, dass die Mondberge dadurch, dass sie die Oberfläche dieses Körpers vergrössern, auch seine Helligkeit und Leuchtkraft vergrössern. Dies ist, wenn ich mich recht erinnere, diejenige Lösung, welche der scharfsinnige *Euler* für die in Rede stehende Frage gegeben hat. Die Abhandlung selbst ist mir nicht zugänglich.

73. Wenn sich dies wirklich so verhält, so sieht man, dass die Unterscheidung zwischen scheinbarer Helligkeit und Beleuchtung unbeachtet gelassen ist, die wir früher als höchst wichtig bezeichnet haben (37). Nun wird niemand zu leugnen wagen, dass das Auge, mit einem Helioskop ausgerüstet, die Oberfläche der Sonne, wo es dieselbe auch betrachtet, gleichmässig hell erblickt. Deshalb bleibt nur noch zu untersuchen, ob auch die Stärke der Beleuchtung, welche von den Strahlen ausgeht, die aus der Nähe des Sonnenrandes kommen, dieselbe ist wie diejenige, welche von Strahlen herrührt, die aus dem Centrum der Scheibe kommen. *Euler* scheint nämlich seine Rechnung so angelegt zu haben, als ob die Dichtigkeit der Strahlen überall im Verhältniss des ausstrahlenden Oberflächenstückes stehe, ohne Rücksicht auf die mehr oder weniger schiefe Stellung.

[38] 74. Es ist mir jetzt noch nicht möglich, für diese Frage eine Erörterung zu geben, welche sich auf einen in jeder Beziehung vollständigen Beweis stützt, da sie von solchen Sätzen abhängt, welche erst späterhin aufgestellt werden. Indessen wird es hinreichend sicher sein, wenn man sowohl die Erfahrung wie gewisse Sätze, welche im ersten Theil der Optik hinlänglich bewiesen werden, zu Hilfe ruft, um scheinbare Helligkeit und Beleuchtung gegenseitig vergleichen zu können. Zu diesem Zweck nehmen wir als allgemein bekannt an, dass die Strahlen, welche von irgend einem Punkt eines Körpers, den wir sehen, sich auf die äussere Oberfläche des Auges ausbreiten, dort so gebrochen werden, dass sie sich auf der Netzhaut in einen Punkt vereinigen und dort das Bild von diesem Punkte zeichnen. Das letztere muss aber selbstverständlich um so heller werden, je mehr Strahlen in diesem Punkt der Netzhaut zusammentreffen.

75. Hieraus folgt ohne weiteres, dass die Helligkeit des Bildes um so grösser ist, je grösser die Dichtigkeit der Strahlen und die Oeffnung der Pupille war. Man kann aber voraussetzen, dass diese Oeffnung constant bleibt, wenn man den Rand oder wenn man das Centrum der Sonne ansieht. Deshalb muss man annehmen, dass die Helligkeit des Sonnenbildes und auch jedes beliebigen Theiles desselben sich einfach verhält, wie die Dichtigkeit der Strahlen. Hieraus folgt aber, dass die Dichtigkeit der Sonnenstrahlen dieselbe ist, gleichviel ob sie vom Rande oder vom Centrum der Sonnenscheibe her in das Auge dringen; denn man muss annehmen, dass das Bild überall gleich hell ist, da man sieht, dass die Theile der Sonnenscheibe dieselbe Helligkeit besitzen.

76. Hieraus muss man aber nothwendigerweise schliessen, dass aus jedem beliebigen Punkte der Sonnenscheibe[**39**] dieselbe Menge von Strahlen auf einen gegebenen Theil der Augenfläche auffalle. Denn obwohl sich dieselben auf die ganze Oberfläche des Auges ausbreiten, so geben sie doch auf der Netzhaut jedem Theil des Bildes die entsprechende Helligkeit. Nun ändert sich die Menge dieser Strahlen keineswegs, wenn man statt der Augenfläche die Oberfläche eines anderen Körpers substituirt, und hieraus folgt, dass auf dieser Fläche von jedem Theil der Sonnenscheibe eine Beleuchtung erzeugt wird, welche dem Flächenraum proportional ist, welchen dieser Theil auf der Netzhaut des Auges einnimmt, also proportional nicht der wahren, sondern der scheinbaren Grösse. Dies zu folgendem Zweck.

77. Der Kreis ACB stelle die Sonnenscheibe vor, die wir hier als eben annehmen; ihr Durchmesser sei AB. Derjenige Schnitt der Sonnenfläche, welcher senkrecht auf diesem Durchmesser steht, werde in seinem vorderen, dem Auge zugewandten Theil durch den Halbkreis AMB dargestellt, welcher demnach als senkrecht auf dem Durchmesser AB stehend gedacht wird. Mm sei ein beliebig kleines Theilchen dieser Fläche. Aus M und m fälle man die Perpendikel MP und mp, so wird Pp der scheinbaren Grösse des Theilchens Mm gleich und dem Bilde desselben auf der Netzhaut des Auges proportional sein.

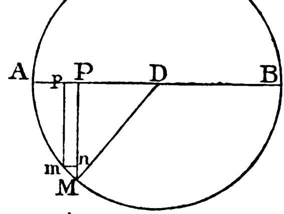

Fig. 5.

78. Man hat aber gesehen, dass diesem Bild auch die Mengen der auf die Oberfläche des Auges fallenden Strahlen proportional sind, diese müssen also, da sie alle aus dem Theilchen *Mm* kommen, nothwendig dem *Pp* proportional sein. *Es steht also die Anzahl der Strahlen, welche aus einem beliebigen Theil der Sonnenoberfläche Mm auf eine gegebene Fläche auffallen, in demselben Verhältniss, wie das auf dem Durchmesser der Scheibe abgeschnittene Stück Pp.*

[**40**] 79. Wenn man daher bedenkt, dass die Stärke der Beleuchtung um so grösser ist, je mehr Strahlen auf dieselbe Fläche fallen (indem dieselben dichter sind), so findet man folgenden Satz erwiesen: *Die Stärke der Beleuchtung, welche von einem beliebigen Oberflächenelement Mm herrührt, verhält sich nicht wie der wahre Flächeninhalt Mm desselben, sondern wie der scheinbare Pp, welcher von ersterem auf der Sonnenscheibe bedeckt wird.* Diese beiden sind aber von einander verschieden, sobald die Fläche *Mm* gegen *AP* geneigt ist. Wenn man deshalb auf der Sonne alle beliebigen Theilchen *Mm* gleich hell *sieht*, so ist doch die daher entspringende *Beleuchtung* keineswegs dieselbe. Es ist also auch in dieser Hinsicht falsch, Beleuchtung und scheinbare Helligkeit mit einander zu verwechseln. Dass dies noch in anderer Hinsicht falsch ist, haben wir bereits oben gesehen (37).

80. Da die Sonnenstrahlen, wenn sie in das Auge oder sonst auf eine gegebene Fläche fallen, eine Richtung befolgen, die zur Ebene der Scheibe senkrecht ist, so kann man sie offenbar alle annehmen als senkrecht zum Durchmesser *AB*. Deshalb treten nur diejenigen normal aus der Sonnenfläche aus, welche vom Centrum kommen. Alle anderen treten mehr oder weniger schief aus. Hieraus folgt von selbst der Begriff des *Emanationswinkels*, der zu der Oberfläche, von welcher die Lichtstrahlen kommen, in derselben Beziehung steht wie der Incidenzwinkel zu der von den Strahlen beleuchteten Fläche. Er ist nämlich der Winkel zwischen der leuchtenden Oberfläche und der Richtung des Lichtstrahles.

81. Im vorliegenden Beispiel sind die Strahlen gerichtet wie die Geraden PM, pm. Der Emanationswinkel wird also der Scheitelwinkel zu mMP [**41**] und dem letzteren gleich sein. Da also $mMP = PDM$ ist, so wird der Emanationswinkel durch den Bogen AM gemessen und MP ist sein Sinus. Aber wegen $mn = pP$ ist $Mm : Pp = MD : MP$. Deshalb verhält sich der Flächenraum mM, von welchem die Strahlen herkommen,

zur Stärke der Beleuchtung, welche durch den Abschnitt Pp dargestellt wird, wie die Einheit zum Sinus des Emanationswinkels. *Also nimmt die Leuchtkraft, sowie die Beleuchtung selbst, ab im Verhältniss des Sinus des Emanationswinkels.*

82. Da von diesem höchst wichtigen Satz in der ganzen Photometrie der ausgedehnteste Gebrauch gemacht wird, so ist es gut, ihn ausführlicher zu besprechen. Zunächst folgt nun aus demselben klar, *dass es keineswegs gleichgiltig ist, in welcher Stellung sich die leuchtende Fläche befindet.* Die leuchtende Fläche CD möge der Ebene AB gegenüberstehend und parallel sein mit ihr; dann werden die Strahlen GP unter einem rechten Winkel austreten und auffallen und daher in P das Maximum der Beleuchtung erzeugen. Aendert sich aber die Stellung der leuchtenden Fläche, bleibt dagegen die Entfernung GP und die Grösse EF dieselbe, so wird die Stärke der Beleuchtung kleiner nach Maassgabe des Sinus des Emanationswinkels PGF, und die Ebene wird also in P schwächer beleuchtet werden.

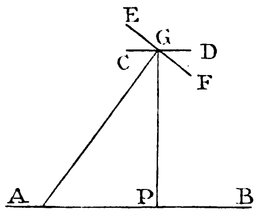

Fig. 6.

83. Anders verhält sich dagegen die Sache, wenn man die Stärke der Beleuchtung für den Punkt A sucht, wobei die Strahlen GA aus der Oberfläche EF senkrecht und aus der Fläche CD schief austreten. Denn der Einfallswinkel GAB ist in beiden Fällen derselbe und deshalb wird sich die Beleuchtung im ersten Falle zu derjenigen im zweiten Fall verhalten wie die Einheit zum Sinus des Emanationswinkels CGA. Daher sieht man, *dass die Beleuchtung sich ändert, wenn sich bei gleichbleibender Distanz und Grösse des leuchtenden Flächenstücks die Stellung des leuchtenden oder des beleuchteten Flächenstückes ändert.*

[**42**] 84. Um dieses neue Gesetz über die Stärke der Beleuchtung abzuleiten, haben wir bisher nur eine einzige Beobachtung benutzt, und deshalb wird es keineswegs überflüssig sein, dasselbe durch andere Beobachtungen zu bestätigen, unter welchen die am häufigsten vorkommende folgende ist. Wenn man eine weisse Mauer, die von der Sonne oder vom Himmel beleuchtet ist, von irgend einer Seite ansieht, so wird dieselbe, wenn die Oeffnung der Pupille dieselbe bleibt, in jedem Falle merklich

gleichmässig weiss aussehen und immer in derselben Stärke der Helligkeit erscheinen mit der einzigen Ausnahme, dass die Mauer von dort aus etwas heller erscheint, wo die Strahlen verlaufen, welche die Mauer im ersten Falle ähnlich wie ein roher Spiegel reflectirt. Im zweiten Fall ist dies anders, da sie von allen Seiten her durch die Hälfte der Himmelskugel erleuchtet wird. Man kann dies auch beobachten, wenn man eine weisse Platte unter freiem Himmel so hinlegt, dass sie von der ganzen Himmelshalbkugel beleuchtet wird, während entweder der Himmel mit weissen Wolken gleichmässig bedeckt ist, oder während kurz vor Aufgang oder kurz nach Untergang der Sonne Dämmerung herrscht. Dann sieht man nämlich diese Platte, von wo aus man sie auch betrachten mag, merklich gleichmässig hell. Da dies sich so verhält, so folgert man ebenso wie oben, dass die Beleuchtung sich wie der Sinus des Emanationswinkels verhält. Es werden unten noch mehrere Experimente vorkommen, die eigens zu dem Zweck angestellt wurden, diesen und andere Sätze zu bestätigen.

85. Um nun auch für diesen Satz einen Beweis mitzutheilen, wie es oben für jeden Gegenstand in Aussicht gestellt worden ist (18), so will ich den folgenden versuchen, welchen der Satz zuzulassen scheint. Sei AB ein Flächenstück des leuchtenden Körpers, [43] und möge jedes Theilchen dieses Stückes nach allen Seiten hin Licht ausbreiten. Wie man sich nun auch die Ausstrahlung des Lichtes vorstellen mag, so wird man doch zugeben müssen, dass sich die einzelnen Theilchen des leuchtenden Körpers in einer beständigen Erregung befinden, sodass ein Theilchen C von allen ihm benachbarten angestossen wird und umgekehrt selbst die ersteren antreibt. Da man aber annimmt, dass ersteres sich auf der Oberfläche befinde, so leuchtet für sich ein, dass die letzteren auf einer Halbkugel um das erstere gelegen sind. Das Theilchen wird deshalb die Bewegung oder das Licht nach der anderen Halbkugel hin ausbreiten. Nun ist zu beweisen, dass die Lichtmenge, welche längs CF ausgesandt wird, sich zu derjenigen, welche längs der Richtung CG normal ausgestrahlt wird, verhält wie der Sinus des Emanationswinkels FCB zur

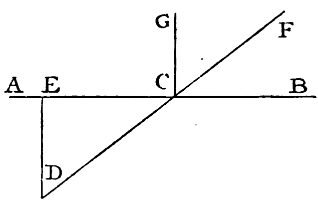

Fig. 7.

Einheit. Hierzu nehmen wir an, dass die Kraft, durch welche das Licht längs CF ausgestossen wird, von denjenigen Theilchen herrührt, welche auf der Geraden DC liegen. Diese Kraft sei $= DC$. Man zerlege sie in die normale Componente DE und die parallele EC; letztere trägt zur Aussendung des Lichts nichts bei, dieselbe kommt daher allein durch die Kraft DE zu Stande. Es verhält sich aber DE wie der Sinus des Emanationswinkels, also wird die Kraft in diesem Verhältniss abnehmen. Betrachtet man also das ausgesandte Licht als die Wirkung und nimmt an, dass dieselbe der Ursache proportional sei, so folgt, dass die Menge des schief austretenden Lichtes sich verhält, wie der Sinus des Winkels, unter welchem es austritt.

86. Auf diese oder eine ähnliche Weise wird man die Sache auffassen müssen. Wenn man die *Newton*'sche Annahme macht, dass mit dem Licht zugleich Theilchen des leuchtenden Körpers ausströmen, so wird man sich jedenfalls eines ähnlichen Beweises bedienen. Je kleiner nämlich die Kraft DE ist, vermöge deren die Theilchen fortgetrieben werden, um so kleiner wird die Anzahl der Theilchen sein, welche [**44**] zugleich ausgestossen werden. Denn die Geschwindigkeit, mit welcher sie sich längs der Geraden CF bewegen, muss dieselbe sein für jeden beliebigen Emanationswinkel. Es wird uns übrigens gleichgiltig sein, auf welche Weise unser Satz bewiesen wird, da es genügt, ihn aus den Beobachtungen abgeleitet zu haben; wir werden uns also bei dieser Untersuchung nicht länger aufhalten und uns jetzt die Aufgabe stellen, die höchst eleganten Lehrsätze, zu welchen dieser Satz uns hinführt, klar auseinander zu setzen.

87. **Lehrsatz 1.** *Die Lichtmenge, welche aus einem beliebigen unendlich kleinen Theilchen der leuchtenden Fläche nach einem gegebenen Punkt hin oder nach einem gegebenen Flächenstück ausgesandt wird, ist ebenso gross als ob sie von dem ebenso stark leuchtenden normalen Flächenstück AD ausginge.*

Beweis. In beiden Fällen steht nämlich die Beleuchtung im zusammengesetzten Verhältniss der Grösse des leuchtenden Flächenstücks und des Sinus des Emanationswinkels (52, 81). In der ersten Hinsicht wird sich deshalb die normale Beleuchtung zur

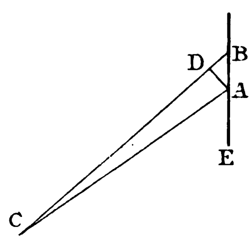

Fig. 8.

schiefwinkeligen verhalten wie DA zu AB, in zweiter Hinsicht aber wie die Einheit zum Sinus des Emanationswinkels CBE, also wie AB zu DA, oder umgekehrt wie die Flächenstücke. Da sich also diese Verhältnisse gegenseitig aufheben, so folgt der Lehrsatz.

88. **Lehrsatz 2.** *Die Lichtmenge, welche von dem Flächenstück $ABCD$ aus nach P gelangt, ist ebenso gross, als ob sie von dem Flächenstück $abcd$ käme, welches dem ersteren parallel ist, durch dieselben Seiten der Pyramide $PABCD$ ausgeschnitten wird und dieselbe Intensität besitzt.*

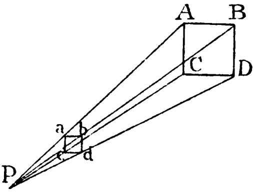

Fig. 9.

[**45**] Beweis. In beiden Fällen steht nämlich die Beleuchtung im directen Verhältniss wie das Flächenstück und ist umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung (52, 48), da man denselben Emanations- und Incidenzwinkel annimmt. Es verhalten sich aber die Flächenstücke direct wie das Quadrat der Entfernung, und deshalb heben sich auch hier diese beiden Verhältnisse auf. Die Beleuchtung ist folglich in beiden Fällen gleich.

89. **Lehrsatz 3.** *Wenn $ABCD$ das leuchtende Flächenstück ist, welches das ebene Element in P beleuchtet, und wenn $abcd$ ein anderes Flächenstück ist, welches gegen das erste beliebig geneigt ist, aber durch dieselben Seiten der Pyramide $PABCD$ ausgeschnitten wird, so ist in beiden Fällen die Beleuchtung dieselbe.*

Beweis. 1) Man stelle sich beide Flächenelemente als unendlich klein vor, und denke sich durch CD gehend ein drittes Flächenstück, welches dem zweiten $abcd$ parallel ist und durch dieselbe Pyramide ausgeschnitten wird, so folgt nach Lehrsatz 1, dass beide das Element in P gleich stark erleuchten werden. Aber nach Lehrsatz 2 wird die von diesem dritten Flächenstück kommende Beleuchtung dieselbe sein wie die, welche vom Flächenstück $abcd$ kommt. Also werden beide

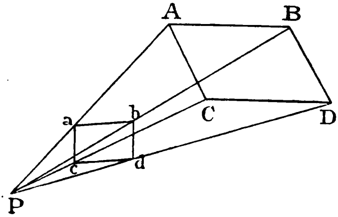

Fig. 10.

Flächenstücke $ABCD$ und $abcd$ das Element in P gleich stark erleuchten. Denn da man beide als unendlich klein annimmt, so wird auch der Incidenzwinkel gleich sein, da auch das Ebenenstück in P als unendlich klein angesehen wird.

2) Wenn nun diese Flächenstücke nicht unendlich klein sind, so steht nichts im Wege, die Pyramide in unendlich viele kleine Pyramiden zu zerlegen, und [**46**] dann gilt offenbar das Bewiesene für eine jede derselben. Da also von jedem Element der Oberfläche $ABCD$ dieselbe Beleuchtung hervorgerufen wird, wie vom entsprechenden Element auf der Oberfläche $abcd$, so folgt, dass die gesammte Beleuchtung in beiden Fällen gleich der Summe dieser Beleuchtungen ist, welche unendlich klein und paarweise gleich sind, und deshalb ist die Beleuchtung offenbar in beiden Fällen gleich.

90. **Lehrsatz 4.** *Wenn beide Flächen $ABCD$ und $abcd$ beliebig gekrümmt sind, und wenn zugleich beide mit gleicher Intensität leuchten und von den Seiten derselben Pyramiden ausgeschnitten werden, so wird das Element in P von beiden gleich stark beleuchtet.*

Beweis. Man denke sich die Pyramide $PABCD$ wieder in unzählige unendlich kleine Pyramiden zerlegt, welche ihren gemeinsamen Scheitel in P haben; dann folgt aus dem vorigen Satz (89, 1)), dass die Behauptung für jede einzelne gilt; und deshalb muss sie auch für die Summe derselben gelten.

91. *Man kann also derartige Flächen durch das Segment einer Kugeloberfläche ersetzen, welches von den Seiten derselben Pyramide ausgeschnitten wird und mit derselben Intensität leuchtet. Man wird dann dieselbe Stärke der Beleuchtung erhalten.*

92. *Die Grösse des Durchmessers dieser Kugel ist gleichgiltig.* Das Element P braucht sich auch nicht im Centrum der Kugel zu befinden, wenn nur das fragliche Segment die Pyramidenseiten nicht durchdringt, sondern von ihnen begrenzt wird.

93. *Wenn die Fläche $ABCD$ unendlich gross wird und dem Element in P parallel bleibt, so geht das Kugelsegment,* [**47**] *welches man an ihre Stelle setzen kann, in eine Halbkugel über.* Daher erhält man in beiden Fällen dieselbe Stärke der Beleuchtung.

94. *Dasselbe findet statt, wenn das Flächenstück $ABCD$ dem Element P unendlich nahe gerückt wird.* Denn das letztere wird ebenso beleuchtet werden, als geschähe dies durch

eine mit derselben Intensität leuchtende Halbkugel von beliebigem Durchmesser.

95. In allen diesen Fällen wird also nur die Bedingung erfordert, dass die Fläche *abcd*, welche an Stelle der gegebenen Fläche gesetzt wird, durch die Seiten derselben Pyramide ausgeschnitten wird, und unter dieser Voraussetzung kann die Distanz der Fläche beliebig sein. Daraus folgt, *dass jede Beleuchtung, obwohl sie durch die Grösse, Entfernung und Lage der leuchtenden Fläche bestimmt wird, in einfacher Weise auf die scheinbare Grösse zurückgeführt werden kann.* Denn diese wird durch die Gestalt der Pyramide bestimmt, auf welche alles andere reducirt wurde.

96. Man hat nämlich gesehen (87), dass die schiefe Lage der Fläche durch die normale oder eine beliebige andere ersetzt werden kann, wenn nur die Begrenzung durch die Seiten derselben Pyramide gebildet wird. Unter dieser Voraussetzung wurde weiter geschlossen, dass eine beliebige Entfernung auf eine beliebige andere in der Weise zurückgeführt werden kann 88, 89), dass bei gleichbleibender Gestalt und Lage der Pyramide gegenüber dem Element in P auch die Beleuchtung dieselbe bleibt. Denn es müsste im ersten Falle die Fläche AB Fig. 8, da sie grösser ist als die Fläche AD, auch eine grössere Wirkung hervorbringen, wenn nicht zugleich wegen des kleineren Emanationswinkels ABD die Menge der austretenden Strahlen eine geringere würde. Ebenso wird im zweiten Falle, Fig. 9, die von der Fläche *abcd* ausgehende Beleuchtung wegen des verkleinerten Flächenraumes eine geringere, aber sie wird in Folge der grösseren Nähe wieder vergrössert. Da sich also in [**48**] beiden Fällen die entgegengesetzten Wirkungen einander aufheben, so war es möglich, diese eleganten Sätze aufzustellen, die wir im Folgenden mit grossem Vortheil für die Rechnung in Anwendung bringen werden.

97. Da also Entfernung, Grösse und Lage des leuchtenden Gegenstandes einzig auf die scheinbare Grösse desselben reducirt sind, so folgt: *In jedem beliebigen Falle hängt die Beleuchtung nur ab: 1. vom Einfallswinkel, 2. von der scheinbaren Grösse der Lichtquelle, 3. von der Intensität oder Helligkeit derselben.*

98. Die scheinbare Grösse ist der körperliche Winkel, welcher durch die Seiten einer beliebigen Pyramide oder eines Kegels begrenzt wird und dessen Grösse also gemessen wird durch das Segment einer Kugelfläche, welches durch die Seiten

derselben Pyramide ausgeschnitten wird. Die Spitze der Pyramide fällt in das Centrum dieser Kugel, und dort nimmt man auch das beleuchtete Flächenstück an, welches man hier als Punkt betrachtet. Auf diese Weise wird in jedem Falle die Leuchtkraft der einfallenden Strahlen bestimmt (68). *Denn wenn diese Grösse durch den Inhalt des erleuchteten Elementes dividirt wird, so ergibt sich die Beleuchtung oder Helligkeit des Elements.*

99. Die Berechnung der Beleuchtung ist also auf diejenige der sphärischen Segmente reducirt, und da die Grösse des Durchmessers gleichgiltig ist (92, 98), so werden wir den Halbmesser oder Radius der Kugel im Folgenden stets durch die Einheit ausdrücken.

100. Da ferner die Beleuchtung eines beliebigen Elementes ihr Maximum erreicht, wenn sie von einer Halbkugel ausgeht, weil in diesem Fall von allen Seiten, woher Strahlen einfallen können, in der That auch solche einfallen, so werden wir diese von der Halbkugel ausgehende Beleuchtung [**49**] schlechthin als die *absolute Beleuchtung* bezeichnen. Man hat gesehen, dass eine solche stattfindet, 1) wenn das beleuchtete Element an der Oberfläche des leuchtenden Körpers liegt oder dieselbe berührt, (94) 2) wenn die beleuchtete Fläche das beleuchtete Element allseitig umgibt oder umhüllt, ähnlich wie der Himmel ein Oberflächenstück der Erde umgiebt, 3) wenn die leuchtende Fläche unendlich gross und dem Element parallel ist (93). In diesen einzelnen Fällen findet, wenn alle Theile der leuchtenden Fläche ihre Helle beibehalten, dieselbe Beleuchtung statt, und zwar die Maximal- oder die absolute Beleuchtung.

101. Hieraus folgt von selbst der folgende sehr elegante Satz: *Wenn der ganze Himmel, so weit er dem Auge sichtbar ist, mit derselben Helligkeit leuchten würde, wie die Sonne in ihrem erhabenen Glanze, so würde die Oberfläche der Erde ebenso beleuchtet, als ob sie sich an der Oberfläche der Sonne selbst befände.* Hierdurch sieht man deutlich ein, welche Einbusse die Leuchtkraft der Sonne oder die Helligkeit der irdischen Objecte infolge der ungeheuren Entfernung der Sonne erleidet. Man darf jedoch nicht sogleich folgern, dass die absolute Beleuchtung sich zur thatsächlich stattfindenden so verhalte, wie der Inhalt der hellen Himmelskugel, die wir sehen, zur scheinbaren Grösse der Sonnenscheibe verhält. Diesen Fehlschluss hat *Smith* in seinem vorzüglichen systematischen Werk über Optik begangen bei der Gelegenheit, wo er die Hel-

ligkeit der Sonne und des Mondes vergleichen will. Wir werden aber unten sehen, dass dem ausgezeichneten Mann hier ein Fehler untergelaufen ist, und dies leuchtet auch sofort ein, denn man muss, wenn man einen solchen Schluss machen will, auf die Verschiedenheit der Einfallswinkel Rücksicht nehmen. [**50**] Denn wenn ein Element durch eine Halbkugel erleuchtet wird, so kommen alle Einfallswinkel zugleich vor. Dies verhält sich aber anders, wenn die Beleuchtung nur von einem sphärischen Segment kommt, wie ein solches in diesem Fall die Sonnenscheibe darstellt. Man wird bald sehen, dass aus diesem Grunde dieses Verhältniss um die Hälfte kleiner wird. Uebrigens hat der eben genannte Autor den in Rede stehenden Satz nur auf den Vollmond angewendet und man wird sehen, dass er, unbeschadet des daraus gezogenen Schlusses, hierauf eben so gut wie auf die Sonne anwendbar ist.

102. Nach diesen Vorbereitungen werden wir die einzelnen Fälle rechnerisch verfolgen und hierzu werden diese Grundlagen vollkommen genügen. Man hat gesehen, dass jeder leuchtende Gegenstand durch einen Kugelabschnitt ersetzt werden kann, welcher dieselbe scheinbare Grösse hat. Zu diesem Zweck ist die Gestalt und die scheinbare Grösse der leuchtenden Gegenstände in Betrachtung zu ziehen. Die verschiedenen Modificationen der Beleuchtung, soweit sie von der Gestalt abhängen, werden wir auf drei sehr allgemeine Fälle reducieren: 1) wir werden den Rand des Körpers, soweit derselbe dem Auge zugewandt ist, als kreisförmig annehmen; in diesem Fall ist der Kugelabschnitt kreisförmig und wird begrenzt durch einen grössten oder einen kleinen Kugelkreis. Hierher kann man die Hemisphäre des Himmels, die Sonne, den Vollmond rechnen, u.s.w. 2) Wir werden annehmen, der Rand des leuchtenden Körpers sei durch gerade Linien begrenzt. In diesem Fall wird der Abschnitt der Kugelfläche durch grösste Kugelkreise begrenzt werden, und entweder ein sphärisches Dreieck vorstellen, wie man sie in der sphärischen Trigonometrie berechnet, oder ein Vieleck, welches aus solchen Dreiecken zusammengesetzt ist. [**51**] Hierher gehört die Himmelsfläche, wenn sie durch die Fenster der Häuser oder andere geradlinige Oeffnungen betrachtet wird. 3) Es gibt unendlich viele Fälle, in welchen der scheinbare Rand der Lichtquelle weder kreisförmig noch geradlinig ist, sondern entweder durch eine beliebige andere Curve gebildet wird oder eine Figur hat, welche aus verschiedenen Curven zusammengesetzt ist. Zu dieser letzten Klasse kann man die

sichelförmige Mondgestalt rechnen, den Himmel, wenn er zum Theil durch die Gestalten von Häusern oder von Bergen verdeckt ist, u. s. w.

103. In jedem dieser Fälle ist die Gestalt des leuchtenden Körpers so zu nehmen, wie sie sich dem Auge, wenn es sich an der Stelle des erleuchteten Punktes befindet, darbietet. Um ferner auf die Einfallswinkel Rücksicht zu nehmen, werden wir die erleuchtete Fläche unendlich klein setzen. Denn auf diese Weise kann man die Beleuchtung für jeden Punkt der beleuchteten Ebene bestimmen. Endlich ist hier ein ähnlicher Begriff zu betrachten wie der in allen Schriften über Optik vorkommende Begriff des *Lichtkegels*, dessen Spitze der leuchtende Punkt ist; jetzt aber soll die Lage die umgekehrte sein und die Spitze sich im erleuchteten Element befinden. Der Unterscheidung wegen werden wir den ersteren als *divergenten Strahlenkegel*, den letzteren als *convergenten Strahlenkegel* bezeichnen (67, 68). Jeder von beiden geht in eine Pyramide oder einen anderen zugespitzten Körper über, sobald der scheinbare Rand entweder der erleuchteten Ebene oder des leuchtenden Körpers von geraden Linien oder beliebigen Curven begrenzt wird.

104. Ein solcher Körper sei, Fig. 10, die Pyramide $PABCD$. Wenn die Basis derselben von dem leuchtenden Punkte P beleuchtet wird, so gehen offenbar alle dort auffallenden Strahlen von diesem Punkte aus, [**52**] sind also divergent. Es findet also der erste Fall statt und man hat eine *divergente Strahlenpyramide*. Nimmt man umgekehrt die Basis $ABCD$ als leuchtende Fläche an, welche den Punkt P, der auf irgend einer Ebene liege, beleuchten möge, so fallen offenbar von jedem beliebigen Punkte der Fläche $ABCD$ aus die Strahlen auf den Punkt P. Wenn dies stattfindet, muss man von einer *convergenten Strahlenpyramide* reden. In beiden Fällen heisst sie *Strahlenpyramide*, weil sie nur aus Lichtstrahlen zusammengesetzt ist, welche alle entweder vom Scheitel P ausgehen, oder auf diesen hinzielen.

105. Da der Punkt P immer als ein unendlich kleiner Theil einer Fläche angesehen wird, so ist es offenbar nicht gleichgiltig, wie die Pyramide dagegen geneigt ist. Denn wenn sich die Neigung ändert, so werden auch die Emanations- oder Incidenzwinkel, und also auch die Menge und Dichtigkeit der Strahlen sich ändern. Wenn aber die Fläche $ABCD$ senkrecht über P steht oder sich von dieser Lage nur wenig entfernt, so leuchtet für sich ein, dass dann die Menge der Strahlen

grösser sein wird als dann, wenn eine grössere Neigung stattfindet.

106. Hält man also diesen Begriff des Strahlenkegels oder der Strahlenpyramide fest, so kann man offenbar beide Fälle mit derselben Rechnung erledigen, weil man in beiden Rücksicht nehmen muss auf Emanations- und Incidenzwinkel, die Leuchtkraft und die Beleuchtung, die Basis $ABCD$ und das Element der Ebene oder Fläche in P. Und da ferner die Menge der Strahlen abnimmt im zusammengesetzten Verhältniss der Sinus der Emanations- und Incidenzwinkel, so ist diese Analogie offenbar in jeder Hinsicht vollständig, [53] und es ist nichts leichter als diese Substitution, wenn man diese Ausdrücke in gehöriger Weise mit den entgegengesetzten vertauscht. Wir kommen aber nunmehr zu speciellen Fällen und wollen zunächst denjenigen entwickeln, dass der scheinbare Rand des leuchtenden Körpers kreisförmig ist; und um vom einfachen zum zusammengesetzten überzugehen, wollen wir annehmen, dass diese leuchtende Kreisfläche sich senkrecht über dem beleuchteten Element befinde. In diesem Fall steht also der convergente Strahlenkegel senkrecht über demselben.

107. Es stelle also ADB eine Halbkugel dar, dieselbe stehe senkrecht über der Ebene AB und im Centrum C befinde sich das zu erleuchtende unendlich kleine Stück dieser Ebene. Auf dieses mögen die Strahlen vom Kugelsegment MDS aus, welches man an Stelle der Lichtquelle setzen kann, durch den Kegel MCS auffallen (91, 102). Vom Centrum C aus ziehe man normal den Kugelradius CD; ferner ziehe man MS und, demselben unendlich nahe, ms, dann wird die Fläche $MSsm$ eine unendlich schmale Kugelzone darstellen.

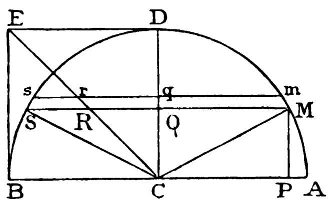

Fig. 11.

Es werde nun die Zunahme der Beleuchtung gesucht, welche dieser Zone entspricht. Da diese Zone der Ebene AB parallel ist und deren Normale CD zur Axe hat, so ist offenbar der Einfallswinkel aller Strahlen $= MCA$ und der Sinus desselben $= PM = CQ$. Nun verhält sich aber die Fläche der Zone, welcher die Menge der in C einfallenden Strahlen proportional ist, wie das auf der Axe abgeschnittene Stück Qq. Daher wird sich die Beleuchtung verhalten wie das Product von Qq und dem Sinus des Einfallswinkels CQ. Man construire das Quadrat $CDEB$ und ziehe die Diagonale CE; dann wird $QR = CQ$ und es wird das fragliche Product $CQ \,.\, Qq =$ dem Trapez $QRrq$. Daher kann die gesuchte Zunahme der Beleuchtung durch den Flächenraum $QRrq$ ausgedrückt werden. [54] Und da jeder Zone ein solcher Raum im Dreieck CDE entspricht, so ist klar, dass die Beleuchtung, welche von der Summe der Zonen, d. h. von dem Segment MDS herrührt, ausgedrückt wird durch die Summe der Flächenräume, also durch das Viereck $QRED$. *Bei jedem beliebigen sphärischen Segment MDS ziehe man also nur die Gerade MS, so wird die demselben entsprechende Beleuchtung durch den Raum $QRED$ dargestellt und sie verhält sich zur absoluten Beleuchtung, welche der ganzen Halbkugel entspricht, wie dieses Flächenstück $QRED$ zum ganzen Dreieck CDE* (100). Dieser Satz wird noch eleganter auf folgende Weise:

108. Da CE die Diagonale eines Quadrats ist, dessen Seite dem Halbmesser oder Radius einer Kugel gleich ist, so ist der Flächeninhalt des Dreiecks CDE gleich dem halben Quadrat des Radius. Aber der Inhalt des Dreieckes CQR ist gleich der Hälfte des Quadrats der Seite CQ, oder, was dasselbe ist, dem halben Quadrat des Cosinus des Winkels DCS, und wenn man dieses vom vorigen abzieht, so bleibt das Flächenstück $QRED$, welches dem halben Quadrat des Sinus desselben Winkels gleich ist. Dieser Winkel DCS ist aber der scheinbare Halbmesser der Lichtquelle. Daher gewinnt man, wenn man alles mit 2 multiplicirt, den folgenden

109. **Lehrsatz 5.** *Wenn ein leuchtender Gegenstand, dessen scheinbarer Rand kreisförmig ist, senkrecht steht über dem Element, so verhält sich die daraus entspringende Beleuchtung zur absoluten Beleuchtung, wie das Quadrat des Sinus des scheinbaren Halbmessers zur Einheit.*

110. *Euler* leitet in seiner oben (71) citirten Schrift eben denselben Satz aus seinen Principien ab, obgleich dieselben von den hier benutzten verschieden sind. Der Grund für diese unerwartete Uebereinstimmung [55] ist in der kreisförmigen Figur zu suchen. Nimmt man nämlich eine andere Figur, so verschwindet diese Uebereinstimmung sofort. Diese Rechnungserscheinung, wie man es nennen kann, welche aus der kreisförmigen und sphärischen Figur entspringt, wird unten noch in zwei anderen Fällen vorkommen.

111. Da also die absolute Beleuchtung durch das Quadrat

des Radius des Kreises ausgedrückt wird und da dieselbe als Maass dienen kann, um die anderen zu bestimmen, so werden wir sie beständig zur Einheit nehmen, wenn es nicht ausdrücklich anders gesagt wird. Denn diese Einheit hängt bisher einzig von der Helligkeit der Lichtquelle ab, durch welche ein beliebiges Element erleuchtet wird. Daher ist bei gleichbleibender Leuchtkraft diese Einheit constant. Deshalb braucht man um so weniger von ihr abzugehen, da wir auch die Sinus der Winkel in derselben ausdrücken.

112. Da sich also die Beleuchtung wie das Quadrat des Sinus des scheinbaren Halbmessers verhält, so folgt sofort, dass es, wie oben angedeutet wurde (101), falsch ist, zu schliessen, die absolute Beleuchtung stehe zu einer solchen, welche hervorgebracht wird durch eine Lichtquelle, deren scheinbare Figur durch einen kleinen Kugelkreis begrenzt wird, in demselben Verhältniss, wie die halbe Kugeloberfläche zum Flächeninhalt des scheinbaren Kreises. Denn dieses würde das Verhältniss der Einheit zum doppelten Quadrat des Sinus des halben scheinbaren Halbmessers sein. Das Verhältniss soll aber so sein, wie sich die Einheit zum Quadrat des scheinbaren Halbmessers verhält. Das letztere Verhältniss ist aber für ein kleineres Kugelsegment, wie z. B. die Sonnenscheibe, nur halb so gross als das erstere.

113. Aus dem Gesagten folgt nun ein anderer nicht weniger eleganter Satz, den man überall vorfindet, aber nicht als bewiesen, sondern gleichsam als geschenkt hingenommen. [**56**] Er bezieht sich auf eine Lichtquelle, deren Gestalt kugelförmig ist, wie die Sonne, der Mond und die Planeten. Es leuchtet an sich ein, dass die scheinbare Scheibe eines solchen Körpers kreisförmig ist, daher wird sich jedenfalls die Beleuchtung des Elements, welches ihr senkrecht gegenübersteht, verhalten wie das Quadrat des Sinus des scheinbaren Halbmessers (109).

114. Es sei CB der Halbmesser der Sonne oder eines anderen kugelförmigen Körpers. Von seinem Centrum aus gehe die Axe CAE, auf welcher sich das beleuchtete Element E befinde. Von diesem Punkte aus ziehe man die Gerade ED, welche die Oberfläche der Lichtquelle oder den Kreis BDA be-

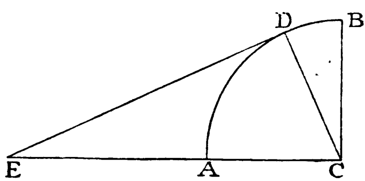

Fig. 12.

rührt, und auf diese Gerade fälle man vom Centrum C aus die Normale CD. Dann ist EC die Entfernung des Elements E vom Centrum, und der Winkel DEC ist der scheinbare Halbmesser des leuchtenden Körpers, während CD der wahre ist. Sieht man nun CE als Einheit an, so ist CD der Sinus des Winkels CED oder des scheinbaren Halbmessers, und daher wird sich die Einheit zum Sinus des scheinbaren Halbmessers verhalten, wie die Entfernung EC des Centrums zum wahren Halbmesser CD. Es verhält sich also der Sinus des scheinbaren Halbmessers umgekehrt wie die Distanz EC. Deshalb verhält sich sein Quadrat umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung des Centrums. Nun verhält sich das Quadrat des scheinbaren Halbmessers wie die Beleuchtung des Elementes in E. Hieraus ergiebt sich also der folgende

115. **Lehrsatz 6.** *Ist der leuchtende Körper kugelförmig, so verhält sich die absolute Beleuchtung in A zu einer beliebigen normalen in E, wie das Quadrat der Distanz CE zum Quadrat des Halbmessers CA des Körpers, also umgekehrt wie das quadratische Verhältniss der Entfernung des Elementes E vom Centrum C des Körpers.*

[**57**] 116. Wie wir also die absolute Beleuchtung als die Einheit bezeichnet haben (111), so werden wir auch den Halbmesser CA durch dieselbe ausdrücken. Denn dann erhält man die Stärke jeder anderen Beleuchtung, wenn man die Einheit durch das Quadrat der Entfernung des Gegenstandes vom Centrum C dividirt. Hieran knüpfen sich noch einige Bemerkungen.

117. Zunächst ist hieraus klar, dass für Kugeln der Satz streng giltig ist, welchen *Wolf*, *Thümmig* und sehr viele andere bisher nur als annähernd richtig ausgesprochen haben, sofern man nämlich den scheinbaren Halbmesser wegen seiner Kleinheit vernachlässigen könne. Denn sie erkannten richtig, dass dann, wenn der scheinbare Halbmesser eine merkliche Grösse hat, auch die Differenz sowohl zwischen den Entfernungen der einzelnen Punkte der Oberfläche AD, als auch zwischen den Incidenzwinkeln der von diesen Punkten ausgehenden Strahlen merklich wird. Ueber eine dritte Differenz, diejenige nämlich, welche zwischen den Emanationswinkeln besteht, findet man, *Euler* ausgenommen, auch nicht ein Wort. Man hat nämlich diese Unterschiede nicht in Rechnung gezogen, weil man meinte, dass dadurch die Eleganz des Satzes gestört werden würde. Wir haben aber gesehen, dass durch die Rücksicht auf dieselben dieser elegante Satz nicht beeinträchtigt wird,

sobald man den leuchtenden Körper als kugelförmig annimmt, wie z. B. die Sonne, deren Leuchtkraft *Thümmig* in seinen *Meletemata varii argumenti* rechnerisch verfolgt hat. In dieser Beziehung ist daher alles das streng richtig, was er bezüglich der Beleuchtung der Planeten als nur annähernd richtig bewiesen hat.

[**58**] 118. Wie erwähnt, macht der geistreiche *Euler* hier eine Ausnahme. In seiner oben mehrfach erwähnten Schrift (71, 72) hat er nämlich auf diese Unterschiede Rücksicht genommen. Nachdem er aber unsern fünften Lehrsatz (109), welcher sich auf kugelförmige Körper bezieht, bewiesen hat, ist merkwürdigerweise dieser sechste (116), welcher ohne Weiteres daraus hervorgeht, seinem Scharfsinn entgangen. Vielleicht hat er aber, um zu wichtigeren Dingen überzugehen, geglaubt, hierbei nicht länger verweilen zu dürfen. Uebrigens wurde schon erwähnt, dass in einigen wenigen Fällen der *Euler*'sche Calcul mit dem unsrigen übereinstimmt (110).

119. Aus dem Gesagten erhellt ferner sofort, warum man die Entfernung vom Centrum nicht kleiner annehmen kann, als den Halbmesser. Denn wenn man das Element E allmählich näher heranrücken lässt, so vermehrt sich die Beleuchtung in der Weise, dass sie dann, wenn E nach A gelangt ist, zur Maximal- oder absoluten Beleuchtung wird, die der grössten scheinbaren Grösse entspricht, da ein beliebiger Sinus nicht grösser als die Einheit werden kann.

120. Bisher wurde auseinandergesetzt, welche Beleuchtung im einfachsten Fall stattfindet, nämlich wenn der scheinbare Rand des leuchtenden Körpers ein Kreis ist und wenn sich derselbe senkrecht über dem beleuchteten Element befindet, wo also der Lichtkegel der einfallenden Strahlen senkrecht steht auf demselben. Man könnte nun, nachdem dies erledigt ist, zu anderen Fällen übergehen. Da aber diese so complicirt sind, dass sie sich nur mühsam, und zwar durch Rechnung verfolgen lassen, so wird es nicht ohne Nutzen sein, zu sehen, wie man auch diesen einfacheren Fall rechnerisch behandeln kann. Wir werden dann ein Mittel finden, die Lichtkegel [**59**] beider Art (103, 104) mit einander zu vergleichen.

121. Wir kehren also zu Fig. 11 zurück, und es sei alles so wie in § 107. Der Radius CA sei $= 1$, der Winkel $MCD = v$, $mM = dv$, $MP = \cos v$, $MQ = \sin v =$ dem Halbmesser der Zone $MSsm$. Das Verhältniss des Durchmessers zur Peripherie soll hier, wie auch im ganzen Werke, mit $1 : \pi$

bezeichnet werden, sodass also, wenn man den Durchmesser $= 1$ setzt, die Peripherie $= \pi = 3.1415927$ wird. Dann wird der Flächeninhalt der Zone $MSsm = 2\pi \sin v\, dv$, und dieser Grösse ist die Menge der nach allen Seiten austretenden Strahlen proportional. Wenn diese aber auf ein gegebenes Element auffallen, so verhält sich ihre Menge wie der Sinus des Incidenzwinkels, deshalb wird die Beleuchtung in C, welche von den Strahlen der Zone $MSsm$ ausgeht, $= 2\pi \sin v \cos v\, dv = 2\pi \sin v\, d \sin v$. Durch Integration wird also die Beleuchtung, welche dem ganzen Segment MDS entspricht, $= \pi \sin^2 v$. Daraus folgt ohne weiteres der Lehrsatz 5 (109), da der Winkel v der scheinbare Halbmesser des Gegenstandes ist.

122. Auf diese Weise haben wir die Intensität der Beleuchtung in C gefunden, welche $= \pi \sin^2 v$ ist. Sucht man aber die Quantität der Beleuchtung, so muss man das Product nehmen von $\pi \sin^2 v$ und dem Flächeninhalt des beleuchteten Elementes C. Es giebt nämlich $\pi \sin^2 v$ die Menge der Strahlen an, welche auf die Einheit des Flächenraumes auffallen, d. h. also die Dichtigkeit (44) derselben, von welcher die Helligkeit des beleuchteten Elementes abhängt.

123. Wenn $v = 90^\circ$ ist, so wird $\sin v = 1$ und die absolute Beleuchtung wird $= \pi$. Dieselbe wurde zwar [60] oben (111) durch die Einheit ausgedrückt, jedoch muss man hier den Werth π anwenden, wenn man die Kegel der divergirenden und convergirenden Strahlen gegenseitig vergleichen will. Wir fassen diese Aufgabe, indem wir den bisher entwickelten Fall umkehren (106), in folgender Weise an.

124. Sei C ein unendlich kleiner Theil der leuchtenden Oberfläche; seinen scheinbaren Halbmesser, wie er von D aus gesehen wird, drücken wir durch z aus, und an Stelle dieser Grösse kann man, da sie unendlich klein ist, hier ihren Sinus setzen; ferner betrachte man in D ein unendlich kleines Segment der Kugel, welche um C beschrieben ist; sein Halbmesser und Sinus heisse ζ. Dann ist offenbar die Fläche des Kreises $C = \pi z^2$, des Segmentes D aber $\pi \zeta^2$; also ist die Intensität der Beleuchtung in D, welche von dem Element C herrührt $= \pi z^2$ und ihre Menge $= \pi^2 z^2 \zeta^2$. *Es wird nun die Menge der Strahlen gesucht, welche sich vom Element C aus über die ganze Halbkugel oder durch einen beliebigen Strahlenkegel MCS verbreiten.*

125. Die Menge der austretenden Strahlen hängt ab: 1) von der Helligkeit des Elements C, da diese dessen wirkliche Hellig-

keit oder die Intensität seines Lichts bestimmt (36, 39), 2) vom Flächenraum desselben, weil sich mit ihm die Menge der auf ein und dasselbe Flächenstück auffallenden Strahlen vergrössert oder verkleinert (38, 52), 3) endlich vom Emanationswinkel, da die Beleuchtung und die Menge der schief austretenden Strahlen sich ebenso vermindert wie der Sinus dieses Winkels (81). Die Leuchtkraft nennen wir hier $= 1$, da sie in die vorliegende Rechnung nicht eingeht. Den Flächenraum des Kreises C haben wir $z^2 \pi$ genannt, [61] und wenn man den Winkel MCD mit v bezeichnet, so wird der Sinus des Emanationswinkels $= \cos v$, also wird die Menge der Strahlen, welche unter dem Winkel MCA nach der Zone $MSsm$ hin ausgestrahlt wird, $= 2\pi^2 z^2 \cos v \sin v \, dv$, also gleich dem Product der Kreisfläche C, der Zone $MSsm$ und des Sinus des Emanationswinkels. Durch Integration findet man also die Menge der Strahlen, welche durch den Lichtkegel MCS divergiren, $= \pi^2 z^2 \sin^2 v$. *Sie wächst also wie das Product des Flächenraums des unendlich kleinen Kreises und der Basis des Lichtkegels, dessen Durchmesser MS ist.* Es ist nämlich πz^2 der Inhalt des unendlich kleinen Kreises C und $\pi \sin^2 v$ der Flächeninhalt der Basis des Kegels MCS, dessen Seite $MC = 1$ ist. Hieraus folgt also der elegante

126. **Lehrsatz 7.** *Sei MCcS ein Kegel, dessen Axe CE auf der Grundfläche MS senkrecht steht, und welcher so abgestumpft ist, dass die Schnittfläche Cc unendlich klein und zur Axe normal ist. Setzt man dann die Seite CM = 1, so ist die Menge der Lichtstrahlen, welche die leuchtende Schnittfläche Cc durch den Kegel auf die Grundfläche verbreitet, gleich dem Product aus der Schnittfläche Cc und dem Inhalt der Basis MS.*

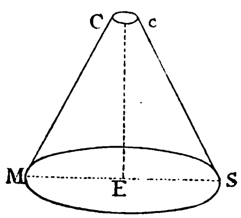

Fig. 13.

127. Diesem Satze, welcher sich auf die divergirenden Strahlen bezieht, ist der folgende analog:

128. **Lehrsatz 8.** *Denkt man sich die Basis MS des Kegels als leuchtend, so ist die Menge der Strahlen, welche auf die unendlich kleine Schnittfläche Cc auffällt, gleich dem Product aus dem Inhalt der Schnittfläche Cc und dem Inhalt der leuchtenden Grundfläche MS. Setzt man also in beiden Fällen die Leuchtkraft gleich, so ist diese Lichtmenge gleich.*

[**62**] 129. Eines Beweises bedarf dieser Satz nicht, da er aus § 121 deutlich hervorgeht. Denn man hat oben (91) gesehen, dass die Basis *MS* durch die Calotte einer Kugel ersetzt werden kann, welche *CM* als Radius und *MS* als Sehne hat. Uebrigens wird durch die Vergleichung beider vorstehenden Sätze dasjenige illustrirt, was über die Vergleichung der austretenden und einfallenden Strahlen früher (106) bemerkt worden ist. Denn wenn man in beiden Fällen die Helligkeit der leuchtenden Flächen gleichsetzt, so ist die Menge der Strahlen, welche auf die entgegengesetzte Fläche einfallen, beidemale dieselbe. Dagegen ist die Helligkeit der beleuchteten Flächen sehr verschieden. Denn diese verhält sich umgekehrt wie der erleuchtete Flächeninhalt. Sie wird also in *Cc* endlich, in *MS* unendlich klein sein.

Es ist nun die Beleuchtung zu bestimmen, welche entsteht, wenn der Lichtkegel schief gegen das beleuchtete Element steht. Dies findet z. B. statt, wenn die Sonne oder der Vollmond nicht vertical steht.

130. Sei *ABCD* ein verticaler Kugelkreis, *AEFB* der Horizont, *IM* ein kleinerer Kreis der Kugelfläche, welcher den

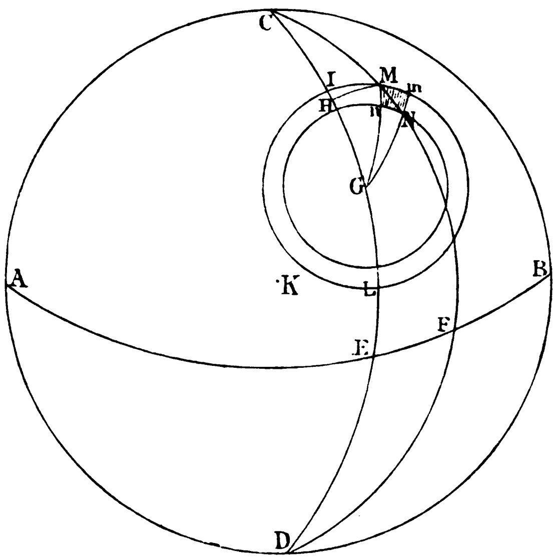

Fig. 14.

Lichtkegel begrenzt, durch den ein in der Ebene des Horizonts und im Centrum K der Kugel befindliches Element beleuchtet wird. Das Centrum oder der Pol des kleinen Kreises sei G, und $CGED$ sei ein Verticalkreis, der durch diesen Pol geht. M sei ein beliebiger Punkt auf diesem kleinen Kreis, und $CMFD$ sei ein Verticalkreis, der durch diesen Punkt geht. Zum Kreis MI denke man sich unendlich nahe benachbart den Kreis Nn gezogen, welcher denselben Pol G hat. Vom Pole G aus ziehe man, einander unendlich nahe, die grössten Kreise oder deren Bögen GM und Gm, und fälle aus M auf CG [63] das sphärische Perpendikel MH. Dann ist die Beleuchtung zu suchen, welche von dem Element $MmNn$ hervorgeht. Zu diesem Zweck setze man

die Distanz GC des Centrums vom Scheitel . $= a$
die Distanz GM des Kreises M vom Pol . . $= x$
die Distanz MC des Punktes M vom Scheitel $= z$
den Winkel CGM . . . . $= y$

dann ist

$$\cos HM = \frac{\cos x}{\cos HG} \qquad \cos z = \cos HC \cdot \cos HM$$

und daher

$$\cos z = \frac{\cos x \cdot \cos HC}{\cos HG} .$$

Es ist aber

$$HC = a - HG \qquad \cos HC = \cos a \cdot \cos HG + \sin a \sin HG$$

und deshalb

$$\cos z = \cos x \cdot (\cos a + \sin a \operatorname{tg} HG) .$$

Es ist aber

$$\operatorname{tg} HG = \operatorname{tg} x \cos y ,$$

daher

$$\cos z = \cos x \cos a + \sin x \sin a \cos y = \sin MF$$

und letzteres ist der Sinus des Einfallswinkels.
Ferner ist das Element

$$Mm\,Nn = dx\,dy \sin x .$$

Also ist die Leuchtkraft dieses Elements, da sie sich verhält wie der Sinus des Incidenzwinkels,

$$d^2\eta = \cos a\,dy \cdot \sin x \cos x\,dx + \sin a \cos y\,dy \cdot \sin^2 x\,dx .$$

Diese Formel erfordert eine zweimalige Integration; bei der ersten ist x und dx constant zu halten, um die Beleuchtung zu finden, welche [**64**] von dem unendlich schmalen Stück MI des sphärischen Ringes herrührt. Daher wird

$$d\eta = y \cos a \sin x \cos x \, dx + \sin a \sin y \sin^2 x \, dx \ .$$

Um nun die Beleuchtung zu finden, welche vom Sector IGM ausgeht, setze man y constant, und dann wird, wenn man die zugehörige Constante zufügt,

$$\eta = \tfrac{1}{2} \cos a \sin^2 x \cdot y + \tfrac{1}{2} \sin a \sin y \cdot (x - \tfrac{1}{2} \sin 2x) \ .$$

Dies ist die Beleuchtung für den Sector IGM. Wir betrachten nun einige specielle Fälle.

131. Befindet sich das Centrum des Kreises im Scheitel, so fallen die Punkte G und C zusammen und es wird $a = \sin a = 0$, $\cos a = 1$, daher ist die Beleuchtung

$$\eta = \tfrac{1}{2} \sin^2 x \cdot y \ .$$

Sie verhält sich also wie das Product aus dem Quadrat des Sinus des scheinbaren Halbmessers und des halben Winkels IGM. Nimmt man daher statt des Sectors den ganzen Kreis, so wird $\frac{1}{2} y = \pi$, also die Beleuchtung $= \sin^2 x$. Dieser einfachere Fall wurde schon früher erledigt (121).

132. Befindet sich das Centrum des Kreises im Horizont, so fallen die Punkte G und E zusammen, und es wird $a = \frac{1}{2}\pi = 90^\circ$, $\cos a = 0$, $\sin a = 1$, daher

$$\eta = \tfrac{1}{2} \sin y \cdot (x - \tfrac{1}{2} \sin 2x) \ .$$

In diesem Fall kann der Winkel y die Grösse eines rechten nicht überschreiten; setzt man also $y = 90^\circ$, so wird $\eta = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2} \sin 2x)$, und dies ist die Beleuchtung, welche von einem Quadranten dieses Kreises ausgeht, welcher auf der einen oder der anderen Seite des Verticalkreises CE auf dem Horizont steht. Um auch den anderen Quadranten hinzuzufügen, ist dieser Ausdruck zu verdoppeln, es wird also

$$\eta = x - \tfrac{1}{2} \sin 2x \ .$$

[**65**] *In dem Fall also, wo sich das Centrum des Kreises im Horizont befindet, ist die Beleuchtung, welche von dem sichtbaren Halbkreis ausgeht, gleich der Differenz zwischen dem scheinbaren Halbmesser und der Hälfte des Sinus des scheinbaren Durchmessers.*

133. Wenn sich das Centrum G im Scheitel befindet und der Bogen GM in einen Quadranten übergeht, so wird auch der ganze Kreis in eine Halbkugel übergehen, welche auf dem Horizont steht. In diesem Fall findet aber die absolute Beleuchtung statt und es wird $a = \sin a = 0$, $\cos a = 1$, $x = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $\sin x = 1$, $\cos x = 0$, $y = 180^\circ = \pi$, $\sin y = 0$, daher ist die Beleuchtung, welche von der halben Hemisphäre kommt,

$$\eta = \tfrac{1}{2}\pi$$

und für den ganzen Kreis ist

$$\eta = \pi \ .$$

Dies ist also die absolute Beleuchtung, auf welche alle anderen zu beziehen sind, wenn eine Vergleichung angestellt wird. Es wurde schon erwähnt, dass dieselbe bei diesen Rechnungen nicht durch die Einheit, sondern durch den Werth π ausgedrückt wird (121, 123).

134 Ist die Höhe des Centrums beliebig, und wird $y = 180^\circ = \pi$, so wird $\sin y = 0$ und daher ist für den Halbkreis auf der einen oder der anderen Seite des Verticalkreises CGE

$$\eta = \tfrac{1}{2}\pi \cos a \sin^2 x$$

und die Beleuchtung, welche einem vollen Kreis entspricht, wird

$$\eta = \pi \cos a \sin^2 x \ .$$

Es ist aber $\cos a$ der Sinus der Höhe des Centrums G, und $\sin^2 x$ ist das Quadrat des Sinus des scheinbaren Halbmessers, endlich ist $\pi \sin^2 x$ der Flächeninhalt der leuchtenden Grundfläche des Kegels oder der *leuchtenden Scheibe.* Dadurch gelangen wir wieder zu dem höchst eleganten

[**66**] 135. **Lehrsatz 9.** *Wenn ein leuchtender kreis- oder kugelförmiger Körper über einer Ebene schwebt, so ist die einem Element dieser Ebene zugewandte Beleuchtung gleich dem Product aus dem Sinus der Höhe des Centrums und dem Inhalt der scheinbaren Kreisscheibe.*

136. Hiermit verwandt ist der folgende

137. **Lehrsatz 10.** *Die absolute Beleuchtung verhält sich zur Beleuchtung durch einen kreis- oder kugelförmigen Körper, der über einer Ebene schwebt, wie die Einheit zum Product aus dem Sinus der Höhe des Centrums und dem Quadrat des Sinus des scheinbaren Halbmessers.*

Denn die absolute Beleuchtung ist $= \pi$ (133); deshalb ist das Verhältniss $= \pi : \pi \cos a \sin^2 x = 1 : \cos a \sin^2 x$ identisch mit dem im Theorem bezeichneten Verhältniss.

138. Hieraus folgt wiederum ohne Weiteres

139. **Lehrsatz 11.** *Wenn derselbe kreis- oder kugelförmige Körper bei derselben Entfernung seines Centrums das eine Mal senkrecht, das andere Mal schief über einer Ebene schwebt, so verhält sich die normale zur schiefwinkeligen Beleuchtung, wie die Einheit zum Sinus der Höhe des Centrums im letzteren Falle.* Denn da die Distanz in beiden Fällen die gleiche ist, so wird auch der scheinbare Halbmesser derselbe sein. Daher hängt die Verschiedenheit der Beleuchtung nur von der Höhe ab. Da aber im ersteren Falle der Sinus der Höhe $= 1$ ist, so ergibt sich hieraus unser Satz.

140. In diesen Sätzen tritt eine unerwartete Erscheinung auf, infolge deren sie so elegant werden. Man hätte nämlich zweifeln können, ob alle die schiefen Winkel der Strahlen, welche von den verschiedenen Punkten des kreis- [**67**] oder kugelförmigen Körpers ausgehen und auffallen, sich so in eine Summe zusammenziehen und zu einem Mittel vereinigen lassen, dass dieses der *Höhe des Centrums* entspricht. Zwar hat *Halley* bei seiner Untersuchung über die Wärmewirkung der Sonnenstrahlen diese Höhe angenommen, dies jedoch, soviel ich weiss, nur als annähernd richtig bezeichnet. Indessen einen Beweis dafür, dass die mittlere Höhe streng richtig diejenige ist, welche alle anderen Neigungen ersetzt, habe ich nirgends vorgefunden. Wir haben bereits oben (117) einen ähnlichen Zweifel gelöst, der sich auf leuchtende kugelförmige Körper bezog.

141. Mit Hilfe der ermittelten Formeln kann man alle einzelnen Fälle der Beleuchtung durch einen Kegel berechnen. Daher können wir zum zweiten allgemeinen Fall (102) übergehen, nämlich dass der scheinbare Rand des leuchtenden Körpers durch gerade Linien gebildet wird, oder dass der Kugelabschnitt aus einem oder mehreren sphärischen Dreiecken gebildet wird, welche durch grösste Kreise begrenzt werden. Um aber auch hier mit dem einfachsten Fall zu beginnen, wollen wir annehmen, man habe ein einziges und zwar ein rechtwinkeliges Dreieck derart, dass der eine Schenkel und die Hypotenuse im Zenith zusammenstossen. Ferner nehmen wir der grösseren Anschaulichkeit wegen das beleuchtete Element als horizontal an.

142. Sei also $ACBD$ ein Verticalkreis, welcher in A und B den Horizont AEB schneidet, welcher seinerseits in E in die zwei Quadranten AE und EB getheilt ist. Sodann ziehe man einen beliebigen Kreis EMQ und den ihm unendlich benachbarten Emq, ferner den Verticalkreis $CMPD$; dann handelt es sich um die Beleuchtung eines im Centrum der Kugel befindlichen Elementes durch das rechtwinkelige Dreieck MCQ.

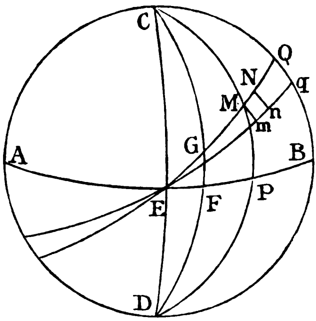

Fig. 15.

[68] 143. Zum Punkt E als Pol ziehe man die parallelen und unendlich benachbarten Bogenelemente Mm und Nn, und es sei die vom Element $MmnN$ ausgehende Beleuchtung $= d^2\eta$. Ferner sei

$$CQ = y \qquad PB = \omega \qquad MQ = x \ ,$$

dann ist

der Flächeninhalt $MmnN \quad = dy\,dx \cos x$
der Sinus der Höhe $PM \quad = \cos x \cos y$

und da die Beleuchtung sich verhält wie das Product aus beiden Grössen, so wird

$$d^2\eta = \cos y\, dy \cdot \cos^2 x\, dx \ .$$

Um diesen Ausdruck zu integriren, muss man zuerst y und dy constant halten, woraus

$$d\eta = \tfrac{1}{2} \cos y\, dy \cdot (x + \sin x \cos x) \ .$$

Dies ist also die Beleuchtung, welche dem Theil $MQqm$ entspricht.

144. Nimmt man jetzt y oder CQ als veränderlich an, so variirt auch x oder MQ, und zwar in der Weise, dass

$$\sin y = \operatorname{cotg} \omega \cdot \operatorname{tg} x \ .$$

Da aber ω constant ist, so wird

$$d \sin y = \cos y\, dy = \operatorname{cotg} \omega \cdot d \operatorname{tg} x \ .$$

Setzt man dies ein, so folgt

$$d\eta = \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \omega \cdot (x\, d \operatorname{tg} x + \sin x \cos x\, d \operatorname{tg} x) \ .$$

Es ist aber

$$d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x} \ ,$$

also durch Substitution dieses Werthes in das zweite Glied

$$d\eta = \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \omega \cdot (x\, d \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x\, dx) \ ,$$

mithin durch Integration:

$$\eta = \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg} \omega\, x \operatorname{tg} x \ .$$

[69] Da aber

$$\operatorname{cotg} \omega \operatorname{tg} x = \sin y$$

so wird

$$\eta = \tfrac{1}{2} x \sin y \ .$$

So sind wir schliesslich zu einer sehr eleganten Formel gelangt, welche man aussprechen kann durch den folgenden

145. **Lehrsatz 12.** *Die Beleuchtung, welche von dem verticalen Dreieck CMQ ausgeht, ist die Hälfte des Products aus dem Sinus des verticalen Schenkels CQ und der Bogenlänge des anderen Schenkels QM.*

146. Man kann den Schenkel CQ festhalten und den anderen Schenkel QM variiren. *In diesem Fall ist in der Formel y constant und x veränderlich, mithin wächst die Beleuchtung im einfachen directen Verhältniss des Bogens $QM = x$.*

147. Ist also $GM = MQ$, sind die Beleuchtungen, welche von den Dreiecken QCM und MCG ausgehen, einander gleich.

148. Der gegenwärtige Fall kommt bei Weitem am häufigsten vor; denn als ein Kreis EQ stellt sich der scheinbare obere Rand von Hausdächern und von Mauern dar, welche zur Umfriedung von Gärten dienen und deren oberer Rand horizontal ist.

149. Aus diesen Sätzen folgt ferner, dass die Beleuchtung, welche

vom Dreieck	MCQ	ausgeht,	$= \frac{1}{2} MQ \cos MEP$	ist
» »	GCM	»	$= \frac{1}{2} GM \cos MEP$	»
» »	PCB	»	$= \frac{1}{2} PB$	»
» »	FCP	»	$= \frac{1}{2} FP$	»

mithin auch

vom Dreieck	EGF	$= \frac{1}{2} EF - \frac{1}{2} EG \cos GEF$
» »	EQB	$= \frac{1}{4} \pi (1 - \cos GEF)$
vom Viereck	$FGMP$	$= \frac{1}{2} FP - \frac{1}{2} GM \cos GEF.$

[70] 150. Hieraus lässt sich ferner leicht die Beleuchtung ermitteln, welche von einem beliebigen Dreieck ausgeht. Eine allgemeine Methode ist die folgende: Sei $ACBD$ ein Verticalkreis, AEB der Horizont, und sei die Beleuchtung gesucht, welche von dem Dreieck QNF hervorgebracht wird, wenn das beleuchtete Element horizontal liegt und sich im Centrum der Kugel befindet. Vom Scheitel C ziehe man durch die Spitzen N, Q, F der Winkel die Verticalkreise CND, CQD, CFD. Dann hat man drei verticale Dreiecke NCQ, QCF, FCN. Sucht man also mit Hilfe der vorigen Formel die Beleuchtung, welche von jedem dieser 3 Dreiecke herrührt, so bleibt dann nichts weiter zu thun, als die Beleuchtung durch das Dreieck FCN von der Summe der Beleuchtungen durch die Dreiecke NCQ und QCF zu subtrahiren. Die Differenz ist dann die gesuchte Beleuchtung.

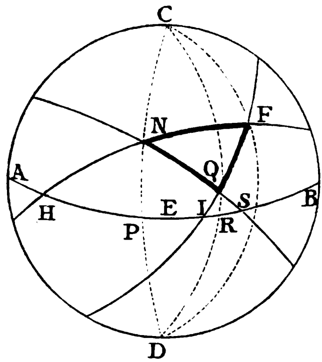

Fig. 16.

151. Nun ist die Beleuchtung, welche

vom Dreieck NCQ herrührt, $= \frac{1}{2} NQ \cos NSE$
» » QCF » $= \frac{1}{2} QF \cos FIB$
» » FCN » $= \frac{1}{2} FN \cos FHE$,

also ist die gesuchte Beleuchtung

$$\eta = \tfrac{1}{2} NQ \cos NSE + \tfrac{1}{2} QF \cos FIB - \tfrac{1}{2} FN \cos FHE .$$

152. Nachdem jetzt die Beleuchtung für ein beliebiges Dreieck gefunden ist, ergibt sich sogleich diejenige für ein Vieleck, dessen Seiten ebenfalls grösste Kreise oder deren Bögen sind. Denn da man ein solches in Dreiecke auflösen kann, so wird man für jedes einzelne Dreieck die Beleuchtung bestimmen und die Summe aller einzelnen Beleuchtungen wird die gesuchte sein. Offenbar kann man aber auch folgendes kürzere Verfahren einschlagen: Sei $ACBD$ ein Verticalkreis, AB der Horizont und $EFGHI$ ein Fünfeck. Vom Zenith C aus ziehe man die Verticalkreise [71] CE, CF, CG, CH, CI und suche mit Hilfe der Formel § 144 die Beleuchtung, welche von den Dreiecken ECF, FCG, GCH, HCI, ICE ausgeht; dann

zeigt ein Blick auf die Figur, dass man von der Summe der drei ersten die Summe der zwei letzten abziehen muss, um die Beleuchtung zu finden, welche von diesem Fünfeck ausgeht.

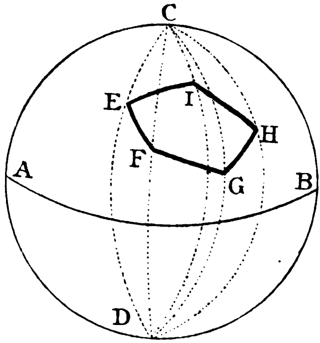

Fig. 17.

153. Da man also die Beleuchtung, welche einem beliebigen, durch grösste Kreise begrenzten, sphärischen Segment entspricht, auf die Beleuchtung durch solche Dreiecke zurückführen kann, deren eine Ecke in das Zenith fällt, so wollen wir zu den letzteren zurückkehren, um ihre Eigenschaften etwas genauer zu untersuchen. Behält man also alle Bezeichnungen von § 142 bei, so hat man gesehen, dass $\eta = \frac{1}{2} x \sin y = \frac{1}{2} MQ \sin CQ$ diejenige Beleuchtung ist, welche dem Dreieck CQM entspricht, dessen Schenkel CQ und MQ in Q einen rechten Winkel bilden. Hält man ferner den Schenkel CQ fest, so hat man gesehen, dass die Beleuchtung proportional ist zur Bogenlänge des Schenkels QM; wählt man also auf dem Kreis EQ irgend einen Abschnitt GM und zieht man die Verticalkreise CM und CG, so entspricht dem Dreieck GCM die Beleuchtung $\frac{1}{2} GM \sin CQ$.

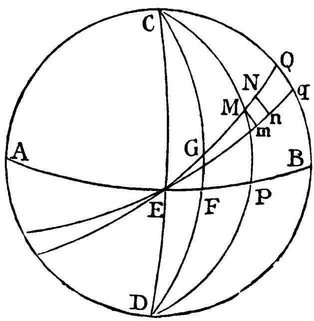

Fig. 15.

154. Die Beleuchtung durch ein beliebiges verticales Dreieck GCM hängt hiernach offenbar nur von 2 Stücken desselben ab, nämlich einerseits vom Schenkel GM, welcher dem Scheitel C gegenüber liegt, andererseits vom Bogen CQ, oder, was dasselbe ist, vom Complement des Winkels QEB; den letzteren kann man mit einem aus der Astronomie entlehnten Ausdruck als den *Elevationswinkel* des Kreises EQ über den Horizont EB bezeichnen. Wenn man sich diesen Kreis EQ als den Aequator vorstellt, so kann man sich nicht unpassend so ausdrücken: *Die einem beliebigen Dreieck GCM*

entsprechende Beleuchtung ist gleich dem halben [**72**] *Product aus dem Cosinus des Elevationswinkels des Aequators und dem auf diesem abgeschnittenen Stück oder dem Bogen GM.*

155. Die Beleuchtung ist also in diesem Falle von der Grösse oder dem Flächeninhalt des Dreiecks unabhängig, denn dieser ist gleich der Differenz zwischen der Summe der 3 Winkel des sphärischen und eines ebenen Dreiecks, und daher kann die Beleuchtung, welche einem Dreieck entspricht, dem Flächeninhalt desselben nicht proportional sein. Hält man den Abschnitt GM fest, so wird der Flächeninhalt $\triangle GCM$ um so kleiner sein, je näher jener Abschnitt dem Culminationspunkt Q oder je kleiner der Bogen MQ ist.

156. Nimmt man statt GM den Quadranten $EQ = \frac{1}{2}\pi$, so wird die vom Dreieck ECQ abhängige Beleuchtung $= \frac{1}{4}\pi \cos QEB = \frac{1}{4}\pi \sin CQ$; in diesem Falle wird also bei wachsender Zenithdistanz des Culminationspunktes Q die Beleuchtung zunehmen wie der Sinus des Bogens CQ. Wenn dieser Zuwachs unendlich klein ist $= Qq = dy$, so wird $d\eta = \frac{1}{4}\pi \cos y\, dy = \frac{1}{4}\pi \cdot Qq \cdot \sin BQ$. Obgleich also die Zunahme der Helligkeit, welche einem Element $MmnN$ eines beliebigen unendlich kleinen Sectors QEq entspricht, wächst wie der Sinus der Höhe MP, da dieser dem Sinus des Incidenzwinkels gleich ist, so wird dennoch die dem ganzen Sector entsprechende Zunahme wachsen wie der Sinus der Höhe des Culminationspunktes. Dies ist jedenfalls merkwürdig; denn beim ersten Anblick hätte man vermuthen können, dass dieser Zuwachs in demselben Verhältniss stehe, wie der Sinus irgend eines dazwischenliegenden Winkels, z. B. des Bogens PM. Es wird also nicht ohne Nutzen sein, die Ursache dieses Paradoxons aufzusuchen.

157. Sei wie oben (143) der Flächeninhalt $MmnN = dy\, dx \cos x$, ferner setze man die Höhe $PM = z$, so wird die Beleuchtung

$$d^2\eta = dy\, dx \cos x \sin z \;.$$

[**73**] In diesem Ausdrucke ist dy constant, also wird

$$d\eta = dy \int dx \cos x \sin z$$

oder

$$d\eta = dy \int \sin z \, d \sin x \;.$$

Da aber

$$\frac{1}{\sin EM} = \frac{\sin MEP}{\sin MP} ,$$

so wird

$$\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos y}{\sin z} ,$$

woraus

$$\sin z = \cos y \cos x .$$

Der Bogen y ist aber hier constant, daher hat man durch Substitution

$$d\eta = \cos y \, dy \int \cos x \, d \sin x .$$

Wie also auch das Integral wird, jedenfalls hängt es nicht vom Bogen y ab, sodass die einem beliebigen Theil MEm entsprechende Beleuchtung sich verhält, wie der Sinus der Höhe des Culminationspunktes. Der Grund für die unerwartete Erscheinung liegt also darin, dass $\sin z$ einfach im Verhältniss wie $\cos x$ steht, so lange der Bogen y constant bleibt. Daher kommen dy und $\cos y$ im Integral nicht vor.

158. Wenn man dennoch einen solchen zwischenliegenden Sinus aufzusuchen wünscht, so kann man die Sache so anfassen. Zuerst ist die Integration zu erledigen und es wird wie oben:

$$d\eta = \tfrac{1}{2} \cos y \, dy (x + \sin x \cos x) .$$

Andrerseits ist der Inhalt des Stückes $MQqm$ zu suchen, welcher gleich

$$dy \int \cos x \, dx = dy \sin x$$

ist. Derselbe ist mit dem Sinus des zwischenliegenden Winkels $= \sin \zeta$ zu multipliciren, und das Product muss $= d\eta$ sein. Es wird also

$$d\eta = dy \sin x \sin \zeta = \tfrac{1}{2} \cos y \, dy \, (x + \sin x \cos x)$$

[74] und daher

$$\sin \zeta = \frac{\cos y (x + \sin x \cos x)}{2 \sin x} .$$

Hieraus folgt: 1) $\sin \zeta$ hängt vom Bogen QM und vom Sinus und Cosinus desselben ab, 2) bei gleichbleibendem Bogen $QM = x$ ist der Sinus des gesuchten Bogens ζ proportional dem Sinus der Höhe des Culminationspunktes Q, 3) er verhält sich zu diesem wie $x + \sin x \cos x$ zu $2 \sin x$.

159. Es ist also

$$\sin\zeta = \frac{x\cos y}{2\sin x} + \tfrac{1}{2}\cos y \cos x \ .$$

Nun ist aber

$$\cos y \cos x = \sin MP = \sin z \ ,$$

mithin ist

$$\sin\zeta = \frac{x\cos y}{2\sin x} + \tfrac{1}{2}\sin z \ .$$

Daher ist $\sin\zeta$ nicht weit von dem Mittel zwischen $\sin MP$ und $\sin QB$ entfernt. Denn für kleinere Bögen MQ wird sehr nahe $x = \sin x$, also auch sehr nahe

$$\sin\zeta = \frac{\cos y + \sin z}{2} \ .$$

160. Der gefundene Ausdruck für $\sin\zeta$ ist zwar ziemlich einfach, wenn man den Sector QEq unendlich schmal annimmt; er wird aber durch die zweite Integration viel verwickelter. So wird für das Dreieck GCM

$$\sin\zeta = \frac{\tfrac{1}{2}x\sin y}{CGM + CMG + MCG - \pi} \ ,$$

wobei diese Winkel in Einheiten des Radius gemessen sind. Es ist nämlich der Nenner dieses Bruches gleich dem Flächeninhalt des Dreiecks GCM.

[**75**] 161. Bei der Besprechung des dritten allgemeinen Falles (102) können wir uns kürzer fassen, da die unzähligen sehr verschiedenen Fälle, welche er in sich schliesst, seltener vorkommen und sich schwieriger berechnen lassen. Jedoch werden unten specielle Fälle vorkommen, wenn von der Beleuchtung des Planetensystems die Rede ist. Es wird daher genügen, die Methode anzugeben, deren wir uns in solchen Fällen bedienen werden. Wir fassen dabei wieder sphärische Segmente ins Auge.

162. Welches also auch die Figur des Randes des leuchtenden Körpers sei, so kann man doch immer einen Punkt als Centrum annehmen, auf welches man die übrigen Stücke der scheinbaren Fläche bezieht oder bequem beziehen kann. Man nehme die Elevation dieses Centrums über das beleuchtete Element, sie sei EG, ferner bezeichne $ACBD$ einen Verticalkreis, und AEB sei der Horizont des beleuchteten Elements, welches

sich im Centrum der Kugel befindet. Vom Centrum G aus ziehe man die einander unendlich benachbarten Bögen GM, Gm, und suche dann aus den Bedingungen der Beleuchtung und der Lage des leuchtenden Gegenstandes die Beziehung zwischen dem Winkel IGM und dem Bogen GM, welche sich durch eine Gleichung aussprechen wird. Denn setze man wie oben (130)

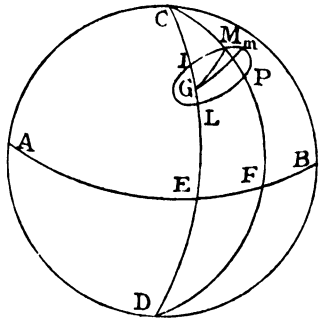

Fig. 18.

$$CG = a \qquad CM = z$$
$$GM = x \qquad CGM = y$$

so ergibt sich mit Hilfe jener Gleichung x aus y und umgekehrt. Für das Element Mm wird aber der Sinus des Einfallswinkels

$$\sin MF = \cos z = \cos x \cos a + \sin x \sin a \cos y \ ,$$

und der Inhalt des Elementes Mm

$$= dy\, dx \sin x,$$

also ist die entsprechende Beleuchtung

$$d^2\eta = \cos a\, dy \cdot \sin x \cos x\, dx + \sin a \cos y\, dy \cdot \sin^2 x\, dx \ .$$

[76] Hält man nun y und dy constant, um die Beleuchtung zu finden, welche dem Flächenstück MGm entspricht, so wird durch Integration:

$$d\eta = \tfrac{1}{2} \cos a \sin^2 x\, dy + \tfrac{1}{2} \sin a \cos y\, (x - \sin x \cos x)\, dy \ .$$

Um auch die zweite Integration zu erledigen, drücke man in diesem Ausdruck x durch y, oder y durch x aus, was mit Hilfe der gefundenen Gleichung zwischen dem Bogen GM und dem Winkel IGM geschieht; dann ergibt sich durch Integration η als Function von y oder x, und dies ist die Beleuchtung durch das Flächenstück IGM.

163. Sieht man beispielsweise den Abschnitt IML als kreisförmig an, so wird G zum Mittelpunkt und x ist constant. Daher findet man durch Integration wieder die Formel des § 130:

$$\eta = \tfrac{1}{2} \cos a \sin^2 x \cdot y + \tfrac{1}{2} \sin a \sin y\, (x - \tfrac{1}{2} \sin 2x) \ .$$

164. Ist $y = x$, so hat man

$$d\eta = \tfrac{1}{2}\, dx \cos a \sin^2 x + \tfrac{1}{2} \sin a \cos x\, (x - \sin x \cos x)\, dx$$

und das Integral hiervon ist nach Zufügung der erforderlichen Constanten:

$$\eta = \tfrac{1}{4} x \cos a - \tfrac{1}{4} \cos a \sin x \cos x$$
$$+ \tfrac{1}{2} \sin a\, (x \sin x + \cos x + \tfrac{1}{3} \cos^3 x - \tfrac{4}{3})\,.$$

165. Statt der Gleichung zwischen IGM und GM kann man auch eine andere nehmen, nämlich diejenige, welche zwischen EF und den Höhen FP und FM besteht. Da aber diese Fälle eine umständliche Rechnung veranlassen und sonst nichts elegantes bieten, so ist es nicht der Mühe werth, dieselben hier weitläufiger durchzugehen, zumal da unten andere hierhergehörige Beispiele vorkommen, welche angenehmer sind als diese abstracten Fälle.

166. Alle bisherigen Auseinandersetzungen über das directe Licht stützen sich auf die Voraussetzung: *dass die Oberfläche des leuchtenden Körpers überall mit der gleichen Intensität leuchte*, und auf Grund derselben haben wir alle Fälle, die es geben kann, aufgezählt und diejenigen, [77] welche häufiger vorkommen, einer ausführlicheren Rechnung unterworfen. Wenn man aber annimmt, die leuchtende Fläche besitze an verschiedenen Stellen eine verschiedene Helligkeit, so ist zuerst das Gesetz zu bestimmen, nach welchem diese Helligkeit in Länge und Breite abnimmt. Ist dieses gegeben, so muss dann die oben gefundene Beleuchtung, welche einem beliebigen Element, z. B. $MmnN$ (Fig. 15), entspricht, mit der Helligkeit multiplicirt werden, welche demselben eigenthümlich ist. Dann findet man durch Integration die Beleuchtung, welche der ganzen Oberfläche oder einem Theil derselben entspricht. Da es aber hier unendlich viele verschiedene Fälle gibt, so würde es überflüssig sein, die Sache durch Beispiele zu illustriren, wozu sich im Folgenden ein mehr geeigneter Platz finden wird. Wir verweisen also den Leser auf diejenigen Capitel, in welchen von der Beleuchtung des Planetensystems und vom Schatten die Rede ist.

167. Bevor wir jedoch nach Erledigung dieser Gegenstände die Behandlung der directen Beleuchtung beschliessen, bleibt noch manches übrig, wobei noch etwas zu verweilen zweckmässig ist; den Theil der beleuchteten Fläche haben wir als unendlich klein angenommen und als Einheit angesehen (122), sodass

wir also diejenige Beleuchtung fanden, welche diesem Element oder Punkt eigen ist und welche daher für verschiedene Punkte verschieden ist. Es kommt aber oft vor, dass man auf alle Strahlen, welche auf die ganze Fläche auffallen, Rücksicht nehmen muss, unabhängig von der Helligkeit, welche dieselben in den einzelnen Punkten der beleuchteten Fläche hervorbringen. Diese Menge nämlich, dividirt durch die scheinbare Grösse der Fläche, bestimmt deren *mittlere Helligkeit*. In diesem Falle ist die Rechnung aber viel verwickelter, weil für [**78**] jeden Punkt der beleuchteten Fläche der Incidenz- und Emanationswinkel, die Entfernung der Lichtquelle, ihre scheinbare Grösse und in einigen Fällen auch die scheinbare Gestalt des Randes sich ändern. Wenn wir dies also an dem einen oder anderen Beispiel erläutern, so unternehmen wir damit durchaus nicht etwas unnützliches oder schon dagewesenes.

168. Sei, um mit dem einfachsten zu beginnen, $ABMD$ ein Kreis; senkrecht über seinem Centrum befinde sich die Kugel G, deren ganze Oberfläche gleichmässig leuchtet. Man suche dann die Menge der auf den Kreis auffallenden Lichtstrahlen und die mittlere Helligkeit dieses Kreises. Hierzu kann man sich mehrerer Vereinfachungen bedienen, welche die Rechnung in beachtenswerther Weise elegant machen.

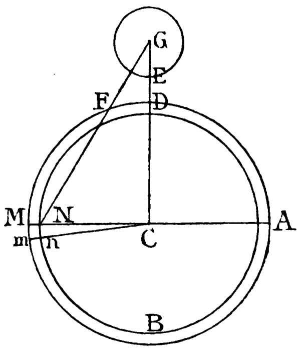

Fig. 19.

1) Die absolute Beleuchtung werden wir mit π bezeichnen (133), d. h. diejenige Beleuchtung, welche im Punkte C stattfinden würde, wenn ihm die Oberfläche der Kugel unendlich nahe wäre (100).

2) Den Halbmesser der Kugel darf man $= 1$ setzen, denn wenn dies die gegenseitige Entfernung der Mittelpunkte G und C ist, so entsteht die absolute Beleuchtung.

3) Von der scheinbaren Grösse der Kugel darf man absehen, da wir bewiesen haben, dass die Beleuchtung sich umgekehrt verhält wie das Quadrat der Entfernung des Centrums (115).

4) Da diese Entfernung für jedes Element $MmnN$ des Ringes $ABMD$ dieselbe ist, so findet man auf einen Schlag die Menge der auf den ganzen Ring auffallenden Strahlen.

[79] 169. Sei also

die Entfernung der Centra $CG = a$
der Halbmesser des Ringes $CN = x$
die Breite des Ringes $NM = dx$,

dann wird

die Distanz $GN = \sqrt{a^2 + x^2}$

der Sinus des Incidenzwinkels $GMC = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

Bezeichnet man daher die Dichtigkeit der auf den Ring $ABMD$ auffallenden Strahlen mit η, ihre Menge mit dq, so wird:

$$\eta = \pi \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \frac{1}{a^2 + x^2} .$$

Denn die Beleuchtung steht im zusammengesetzten Verhältniss der absoluten Beleuchtung, des Sinus des Incidenzwinkels und des reciproken Quadrats der Entfernung des Centrums G. Durch Zusammenziehung des vorigen Ausdrucks hat man also:

$$\eta = \frac{a\pi}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

In diesem Fall verhält sich also die Beleuchtung eines Elements $MmnN$ umgekehrt wie der Cubus der Entfernung. Um jetzt die Menge dq zu bestimmen, ist die Beleuchtung η mit dem Flächeninhalt des Ringes zu multipliciren, es ist also

$$dq = \eta \cdot 2\pi x\, dx ,$$

oder, wenn man die Substitution ausführt:

$$dq = \frac{2a\pi^2 x\, dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} .$$

Das Integral hiervon ist nach Hinzufügung der erforderlichen Constanten:

$$q = 2\pi^2\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) .$$

Es ist aber

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{GC}{GN} = \text{Sinus des Incidenzwinkels} ,$$

daher ist $1 - a : \sqrt{a^2 + x^2}$ der Sinus versus des Winkels NGC, der das Complement vom vorigen ist. *Daher steht die Menge der Strahlen, welche auf den* [**80**] *Kreis $ABMD$ auffallen, in demselben Verhältniss wie der Sinus versus des Winkels NGC, welcher gleich dem scheinbaren Halbmesser des beleuchteten Kreises ist, vom Centrum der leuchtenden Kugel aus gesehen.*

170. Lässt man das Dreieck NGC um die Axe GC rotiren, so schneidet die Gerade NFG aus der Oberfläche der Kugel G ein Segment aus, dessen Flächeninhalt ist

$$2\pi\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\right).$$

Daher drückt dieser Flächeninhalt die Menge der auf den Kreis AM auffallenden Strahlen aus, da er dieser Grösse proportional ist.

171. Wenn man endlich diesen Flächeninhalt mit der absoluten Beleuchtung π multiplicirt, so folgt

$$2\pi^2\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)=q\,,$$

dies ist also die wahre Menge der Strahlen.

172. Setzt man den Radius des Kreises CM unendlich, so geht die Formel in die folgende über

$$q=2\pi^2\,.$$

Dies ist das Product aus der absoluten Beleuchtung oder der Helligkeit der leuchtenden Kugel und dem doppelten Flächeninhalt eines grössten Kreises der Kugel. Hieraus folgt von selbst der

173. **Lehrsatz 13.** *Die Menge der Strahlen, welche eine leuchtende Kugel nach einer unendlich ausgedehnten Ebene hinsendet, ist dieselbe wie die, welche sie im Falle der absoluten Beleuchtung auf eine Kreisfläche werfen würde, welche der halben Oberfläche der Kugel gleich ist.*

Beweis: Die absolute Beleuchtung ist $=\pi$ (133, 168); und dies ist die Menge der Strahlen, welche auf ein Flächenstück $=1$ auffallen. Wenn man also annimmt, dass ein Kreis, welcher der halben Oberfläche der Kugel gleich ist, einer absoluten Beleuchtung ausgesetzt sei, so wird jetzt die Menge [**81**] der Strahlen $=2\pi^2$ sein, da dieselbe im Verhältniss der Flächenräume, also wie $1:2\pi$, vergrössert wird. Dies ist aber dieselbe

Strahlenmenge wie diejenige, welche auf eine unendlich ausgedehnte Kreisebene auffällt. Hieraus ergibt sich die Behauptung.

174. Um jedoch diesen Satz richtig zu verstehen, muss man bemerken, dass eine solche Beleuchtung, wenigstens wenn man sie sich durch eine leuchtende Kugel hervorgebracht denkt, nur fingirt ist. Denn da die Kugel nur das Centrum des Kreises berührt, so findet zwar in diesem Centrum absolute Beleuchtung statt, nicht aber in irgend einem anderen Punkte, und daher wird die Menge der Strahlen jedenfalls kleiner sein. Um dies genauer einzusehen, setze man $x = 1$, $a = 1$; dann hat man $q = 2\pi^2(1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}})$, während man erwarten könnte, dass $q = 2\pi^2$. Ebenso ist die mittlere Helligkeit weit kleiner als die absolute. Dividirt man nämlich die Grösse $2\pi^2(1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}})$ durch die Fläche 2π des Kreises, so wird diese mittlere Helligkeit $= \pi(1 - \sqrt{\tfrac{1}{2}})$, und dies ist noch nicht der dritte Theil der absoluten. Indessen kann man eine solche Beleuchtung nicht als schlechthin fingirt betrachten, da sie thatsächlich stattfindet, wenn man diesen Kreis mit der Concavseite einer Halbkugel bedeckt, welche mit derselben Intensität leuchtet, wie die Kugeloberfläche. Es ist nicht einmal nöthig, dass man ihn mit einer Halbkugel bedeckt, da man letztere durch jede beliebige andere Fläche ersetzen kann (90 fgde.). In diesem Sinne muss man also die absolute Beleuchtung des ganzen Kreises auffassen. Man kann übrigens, wenn man für diese oder andere Zwecke leuchtende Flächen herstellen will, Phosphor anwenden oder auch die Pyrotechnik zu Rathe ziehen, wo die Zubereitung solcher Mittel gezeigt wird. An diese Vorbemerkungen schliessen wir den folgenden

[82] 175. **Lehrsatz 14.** *Die Menge der Strahlen, welche sich von der ganzen Oberfläche einer Kugel nach allen Richtungen hin ausbreiten, ist eben so gross wie diejenige, welche im Fall der absoluten Beleuchtung auf eine ebene Kreisfläche auffällt, welche der leuchtenden Kugeloberfläche inhaltsgleich ist.*

Beweis. Nimmt man den Halbmesser der Kugel $= 1$, so ist die Menge der Strahlen, welche auf eine unendlich ausgedehnte Ebene fallen, $= 2\pi^2$. Wenn man nun annimmt, dass sich die Kugel zwischen 2 solchen Ebenen befinde, welche einander parallel sind, so folgt, dass alle Strahlen, die aus der Oberfläche der Kugel austreten, auf die eine oder die andere von beiden Ebenen auffallen müssen; ihre Menge muss also das Doppelte von derjenigen sein, welche auf nur eine Ebene auffällt, also gleich $4\pi^2$. Es ist aber 4π die Oberfläche einer Kugel, und wenn man diese mit der absoluten Beleuchtung π multiplicirt, so ergibt sich $4\pi^2$ als die Menge der Strahlen, welche im Fall der absoluten Beleuchtung auf eine Kreisfläche derselben Grösse auffallen. Da beide Ausdrücke gleich sind, so folgt der Satz.

Zweiter Beweis. Wir fügen diesen zweiten Beweis deshalb bei, weil er directer ist und weil er gewissermaassen durch ein Beispiel zeigt, dass die Grundlagen des ersteren richtig sind. Man denke sich die leuchtende Kugel umgeben von einer concentrischen Kugel, deren Radius $= x$ sei; dann werden offenbar die einzelnen Theile dieser Kugelfläche von der leuchtenden Kugel gleichmässig beleuchtet, und die Beleuchtung an irgend einer Stelle ist $= \pi : x^2$. Daher ist die Menge der Strahlen, welche sich über die ganze Kugelfläche ausbreiten, [83] $= \frac{\pi}{x^2} \cdot 4\pi x^2$, da die Beleuchtung $\pi : x^2$ mit dem Flächeninhalt zu multipliciren ist. Es ist aber $\frac{\pi}{x^2} \cdot 4\pi x^2 = 4\pi^2$, also gleich der fraglichen Menge der Strahlen, welche im Falle der absoluten Beleuchtung auf ein Ebenenstück auffallen, welches der Oberfläche der Kugel inhaltsgleich ist.

176. Wir haben dieses leichtere Beispiel für die Berechnung einer Strahlenmenge (167) um so lieber benutzt, da bei seiner Entwickelung mehrere Hauptsätze der Photometrie und mehrere Kunstgriffe zur Verwendung kamen. Für diesen Zweck sei auch noch das folgende Beispiel angeführt.

177. Auf der Horizontalebene $ABCD$ stehe eine Verticalebene $AFED$, welche leuchtend sei. Man suche die Menge der Strahlen, welche auf das horizontale Ebenenstück auffällt. Obwohl diese Aufgabe sehr einfach scheint, so ist ihre Lösung doch weit verwickelter als man glauben sollte. Denn es wäre zwar sehr leicht, den Differentialausdruck, welcher von der

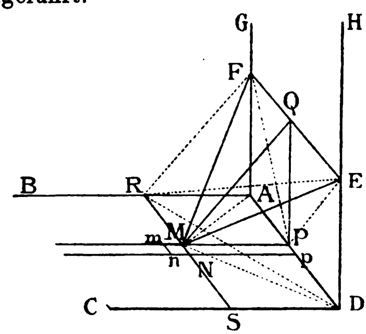

Fig. 20.

vierten Ordnung ist, aufzustellen, der dann viermal integrirt werden müsste; aber die höchst mühsame Rechnung würde auch den geduldigsten mit Widerwillen erfüllen und abschrecken. Die einzige Vereinfachung, welche ich habe erreichen können, besteht darin, dass ich mit Hilfe der oben aufgestellten Sätze den Ausdruck auf ein Differential zweiter Ordnung reduciren und auf diese Weise die Rechnung ausführen konnte.

178. Mit Hilfe dieser Sätze erhielt ich sofort die Menge der Strahlen, welche von der ganzen Ebene $AFED$ auf das Element $MmnN$ auffallen, [84] während man sonst eine zweifache Integration hätte ausführen müssen, die jedoch oben (142 fgde.) allgemein erledigt worden ist. Aber auch dies durfte man nicht direct ausführen, wenn man die Sache mit möglichst wenig Arbeit erledigen wollte. Ich habe daher die Aufgabe in folgender Weise angefasst.

179. Man ziehe die Verlängerungen FG, EH und denke sich die Ebene AH unendlich hoch und in ihren einzelnen Theilen gleich stark leuchtend; dann kann man dieselbe durch ein solches sphärisches Segment ersetzen (91 fgde.), wie es z. B. in Figur 15 durch FCP oder PCB dargestellt wird, wobei ein beliebiges Element, dessen Beleuchtung gesucht ist, sich im Centrum der Kugelfläche befindet. In ähnlicher Weise kann man das Rechteck $AFED$ durch ein sphärisches Segment ersetzen, welches durch die Seiten der Pyramide $MAFED$ ausgeschnitten wird. Dann werden den geraden Linien AG, PQ, DH verticale Kreise entsprechen, während AD den Horizont, und FE den Aequator darstellen. Wenn nun MP und PQ auf AD senkrecht stehen, so wird Q der Culminationspunkt des Aequators sein und QMP ist seine Elevation über den Horizont. Endlich werden FMQ, QME die Bögen sein, welche auf dem Aequator abgeschnitten werden. Diese Bezeichnungsweise ist der grösseren Durchsichtigkeit wegen gewählt worden (154).

180. Unendlich benachbart zu PM, und parallel zu dieser Geraden sei pN gezogen. Senkrecht dazu gehe durch den Punkt M die Gerade RMS; endlich ziehe man MA, MD, MF, ME, PF, PE, RD. Ferner setze man

$$\begin{array}{lll} AF = a & AP = x & FMQ = v \\ AD = b & PM = y & FPQ = \omega \;. \end{array}$$

Die Beleuchtung in M, welche von dem oberen Ebenenstück $GFEH$ ausgeht, sei η, und die Menge der Strahlen, welche auf das Element $MmnN$ auffällt, sei d^2Q; dann ist (154, 179)

$$\eta = \tfrac{1}{2} FME \cdot \cos QMP \;,$$

[**85**] und dieser Ausdruck zerlegt sich in die zwei folgenden

$$'\eta = \tfrac{1}{2} FMQ \cdot \cos QMP + \tfrac{1}{2} QME \cdot \cos QMP \;,$$

wo das erste Glied die von der linken Seite, das zweite die von der rechten Seite auf ein Element $= 1$ auffallende Strahlenmenge darstellt. Hieraus folgt

$$d^2Q = \eta\, dy\, dx = (\tfrac{1}{2} FMQ \cdot \cos QMP + \tfrac{1}{2} QME \cdot \cos QMP)\, dy\, dx \,.$$

181. Da beide Glieder dieses Differentialausdruckes in gleicher Weise zu behandeln sind, so werden wir nur die Behandlung des einen durchführen. Sei also die ihm entsprechende Strahlenmenge $= d^2 q$, so wird

$$d^2 q = \tfrac{1}{2} FMQ \cos QMP \cdot dy\, dx \;,$$

oder durch Einsetzung der Werthe:

$$2\, \frac{d^2 q}{dx} = v\, \frac{y\, dy}{\sqrt{y^2 + a^2}} \;.$$

Es ist aber

$$\operatorname{tg} v = \frac{x}{\sqrt{y^2 + a^2}} \;.$$

Wenn man daher zuerst die Strahlenmenge sucht, welche auf das Rechteck $PMNp$ auffällt, so ist x constant und

$$y\, dy = x^2 \operatorname{cotg} v\; d \operatorname{cotg} v = x \sqrt{y^2 + a^2}\; d \operatorname{cotg} v \;.$$

Substituirt man diesen Werth, so wird

$$\frac{2\, d^2 q}{x\, dx} = v\; d \operatorname{cotg} v$$

und hieraus folgt durch Integration:

$$\frac{2\, dq}{x\, dx} = v \operatorname{cotg} v - \log \sin v + \text{Const.}$$

182. Wenn y verschwindet, so fallen keine Strahlen mehr auf, und daher wird dann $dq = 0$. Bei $y = 0$ [**86**] wird aber $v = \omega$, da die Dreiecke FMQ und FPQ zusammenfallen; mithin wird

$$\text{Const} = - \omega \operatorname{cotg} \omega + \log \sin \omega \;;$$

setzt man also diese Grösse ein, so hat man:

$$\frac{2\, dq}{x\, dx} = v \operatorname{cotg} v - \log \sin v - \omega \operatorname{cotg} \omega + \log \sin \omega \;.$$

183. Um nun auch die zweite Integration auszuführen, durch welche sich die Menge der Strahlen ergibt, die auf das ganze Ebenenstück auffallen, bemerke man, dass man eine Gleichung zwischen der Abscisse x und der Ordinate y kennen muss, falls man die Gestalt des Ebenenstückes als krummlinig annimmt; kennt man diese Gleichung, so eliminirt man die eine oder die andere Variable aus dem Differentialausdruck. Hier wollen wir jedoch annehmen, das Ebenenstück sei ein Rechteck, also es sei $y =$ Const; dann ist diejenige Strahlenmenge zu bestimmen, welche auf das Flächenstück $ARMP$ auffällt. Es wird also

$$2\,dq = v \cot g\, v\, x\, dx - \log\sin v\, x\, dx - \omega \cot g\, \omega\, x\, dx + \log\sin\omega\, x\, dx\ .$$

Aber wegen

$$x = \sqrt{y^2 + a^2}\operatorname{tg} v = a \operatorname{tg}\omega$$

wird

$$x\,dx = (y^2 + a^2)\operatorname{tg} v\, d\operatorname{tg} v = a^2 \operatorname{tg}\omega\, d\operatorname{tg}\omega\ ,$$

also durch Substitution dieses Ausdrucks:

$$2\,dq = (y^2 + a^2)(v\, d\operatorname{tg} v - \log\sin v \operatorname{tg} v\, d\operatorname{tg} v) - a^2(\omega\, d\operatorname{tg}\omega - \log\sin\omega\operatorname{tg}\omega\, d\operatorname{tg}\omega)$$

und durch Integration wird schliesslich:

$$q = \tfrac{1}{2}(y^2 + a^2)(v\operatorname{tg} v - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 v\log\sin v + \tfrac{1}{2}\log\cos v) - \tfrac{1}{2}a^2(\omega\operatorname{tg}\omega - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\omega\log\sin\omega + \tfrac{1}{2}\log\cos\omega)\ .$$

Dies ist also die Strahlenmenge, welche auf das Stück $APMR$ von der linken Seite her einfällt. Eine Constante braucht man nicht zuzufügen, da x, v, ω, q gleichzeitig verschwinden.

[87] 184. Auf dieselbe Weise ergibt sich die Menge der Strahlen, welche von der rechten Seite her auf das Stück $DPMS$ auffallen, nämlich

$$\begin{aligned} q' = \tfrac{1}{2}(y^2 + a^2)\,(&QME \operatorname{tg} QME - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 QME \log\sin QME \\ &+ \tfrac{1}{2}\log\cos QME) \\ - \tfrac{1}{2}a^2(&QPE\operatorname{tg} QPE - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 QPE\log\sin QPE \\ &+ \tfrac{1}{2}\log\cos QPE)\ , \end{aligned}$$

ebenso für das Flächenstück $DARS$

$$\begin{aligned} q'' = \tfrac{1}{2}(y^2 + a^2)\,(&FRE\operatorname{tg} FRE - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 FRE\log\sin FRE \\ &+ \tfrac{1}{2}\log\cos FRE) \\ - \tfrac{1}{2}a^2(&FAE\operatorname{tg} FAE - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 FAE\log\sin FAE \\ &+ \tfrac{1}{2}\log\cos FAE)\ . \end{aligned}$$

Daher wird endlich die Strahlenmenge, welche von beiden Seiten auf das Stück $RAPM$ auffällt,

$$Q = q + q'' - q' .$$

185. Diejenige Menge aber, welche auf das ganze Stück $ADSR$ auffällt, ist $= 2q''$, nämlich das Doppelte derjenigen, welche von der rechten oder linken Seite allein auffällt.

186. Diese Strahlenmengen entsprechen dem unendlich grossen höheren Raum $GFEH$. Variirt man daher die Höhe $PQ = a$, so kann man die Strahlenmenge finden, welche einem beliebigen Segment oder dem Rechteck $GADH$ entspricht.

187. Alle diese einzelnen Formeln sind sich einander darin ähnlich, dass in allen dieselbe Function der entsprechenden Winkel auftritt. Wenn man also das Glied

$$\tfrac{1}{2}(v \operatorname{tg} v - \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 v \log \sin v + \tfrac{1}{2} \log \cos v) ,$$

[88] welches vom Winkel $v = FMQ$ abhängt, der Kürze halber mit $\varphi(v) = \varphi(FMQ)$ bezeichnet, so lässt sich offenbar das Glied

$$\tfrac{1}{2}(\omega \operatorname{tg} \omega - \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \omega \log \sin \omega + \tfrac{1}{2} \log \cos \omega) ,$$

welches dem Winkel $\omega = FPQ$ entspricht, durch $\varphi(\omega) = \varphi(FPQ)$ ausdrücken. Zieht man hiermit die vorigen weitläufigeren Formeln zusammen, so wird kurz

$$\begin{aligned} Q = &+ (y^2 + a^2)\,\varphi(FMQ) - a^2\varphi(FPQ) \\ &+ (y^2 + a^2)\,\varphi(FRE) - a^2\varphi(FAE) \\ &- (y^2 + a^2)\,\varphi(QME) + a^2\varphi(QPE) , \end{aligned}$$

oder, wenn man dies wieder zusammenzieht,

$$\begin{aligned} Q = (y^2 + a^2)\,&[\varphi(FMQ) + \varphi(FRE) - \varphi(QME)] \\ &- a^2[\varphi(FPQ) + \varphi(FAE) - \varphi(QPE)] . \end{aligned}$$

188. Setzt man an Stelle des Ebenenstückes $GFEH$ das ganze Ebenenstück $GADH$, so wird $a = 0$ und es ist, wenn man die Menge der einfallenden Strahlen mit R bezeichnet,

$$R = y^2[\varphi(AMP) + \varphi(ARD) - \varphi(PMD)] ,$$

mithin ist die Menge der Strahlen, welche von dem Stück $AFED$ auf das Stück $ARMP$ fallen:

$$\begin{aligned}R - Q = y^2[\varphi(AMP) + \varphi(ARD) - \varphi(PMD)]\\ + a^2[\varphi(FPQ) + \varphi(FAE) - \varphi(QPE)]\\ - (y^2 + a^2)[\varphi(FMQ) + \varphi(FRE) - \varphi(QME)]\end{aligned}$$

und dies ist die gesuchte Grösse.

189. Da aber dieser Ausdruck von beiden Ebenenstücken in gleicher Weise abhängt, so folgt hieraus:

[89] 190. **Lehrsatz 15.** *Die Strahlenmenge, welche von der Ebene $AFED$ auf die Ebene $ARMP$ auffällt, ist derjenigen gleich, welche umgekehrt von der Ebene $ARMP$ auf die Ebene $AFED$ auffällt, vorausgesetzt, dass in beiden Fällen die Intensität der leuchtenden Ebene dieselbe ist.*

Beweis: Denn durch Vergleichung sieht man, dass zu setzen ist

statt der Höhe a	die Höhe y	
» » Länge y	» Länge a	
» des Winkels AMP	der Winkel FPQ	und umgekehrt
» » » FAE	» » ARD	
» » » QPE	» » PMD	
statt des Winkels FMQ	die gleichen Winkel.	
» FRE		
» QME		

Hieraus ergibt sich aber derselbe Ausdruck. Man wird übrigens später sehen, dass dieser Satz noch viel allgemeiner gilt.

191. Setzt man statt des Stückes $ARMP$ das ganze Ebenenstück $ARSD$, so zieht sich die Formel bedeutend zusammen und es wird

$$R - Q = 2y^2\varphi(ARD) + 2a^2\varphi(FAE) - 2(y^2 + a^2)\varphi(FRE).$$

192. Nimmt man dann auch die ganze Ebene $GADH$, so wird (188)

$$R = 2y^2\varphi(ARD)$$

und dies ist zugleich die Menge der Strahlen, welche im zweiten Fall des vorstehenden Lehrsatzes von dem Stück $ARSD$ aus auf die unendlich hohe Ebene $GADH$ gesandt werden (190).

193. Setzt man in ähnlicher Weise die Ebene $BADC$ unendlich lang, während die Breite AD die gleiche bleibt, so wird **[90]** die Strahlenmenge, welche die Ebene $AFED$ nach der ersteren hinsendet, $= 2a^2\varphi(FAE)$.

194. Denkt man sich jetzt das Ebenenstück $AFED$ in der Weise von 4 Seitenflächen umgrenzt, dass sie zur Basis eines

unendlich langen Prismas wird, so müssen offenbar alle Strahlen, die von ihr ausgehen, auf die eine oder die andere dieser Seitenflächen auffallen. Daher wird die Menge aller Strahlen, welche überhaupt von der Ebene $AFED$ ausgehen, $E = 8\,a^2\varphi(FAE)$, oder, wenn man den Winkel FAE mit γ bezeichnet, so wird diese Menge:

$$E = 4\,a^2[\gamma \operatorname{tg}\gamma - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2\gamma \log\sin\gamma + \tfrac{1}{2}\log\cos\gamma] \;.$$

Dies gilt jedoch nur dann, wenn die Seiten der Ebene $AFED$ gleich sind; in diesem Falle ist aber $\gamma = 45^\circ = \tfrac{1}{4}\pi$, $\operatorname{tg}\gamma = 1$, $\sin\gamma = \cos\gamma$, daher geht die Formel über in die folgende höchst einfache:

$$E = a^2\pi \;.$$

195. Sind dagegen die Seiten a und b ungleich, so werden auch die Lichtmengen, welche auf zwei anstossende Seitenflächen auffallen, ungleich sein. Mithin hat man in diesem Falle

$$E = 4\,a^2\varphi(FAE) + 4\,b^2\varphi(EAD) \;.$$

Es ist aber $EAD = 90^\circ - FAE = \tfrac{1}{2}\pi - \gamma$, mithin wird

$$E = 2\,a^2\gamma\operatorname{tg}\gamma - a^2\operatorname{tg}^2\gamma\log\sin\gamma + a^2\log\cos\gamma$$
$$+ 2\,b^2(\tfrac{1}{2}\pi - \gamma)\operatorname{cotg}\gamma - b^2\operatorname{cotg}^2\gamma\log\cos\gamma + b^2\log\sin\gamma \;.$$

Da aber $a\operatorname{tg}\gamma = b$, $b\operatorname{cotg}\gamma = a$ ist, so wird einfach

$$E = ab\pi \;.$$

Daher besteht auch hier die Ausstrahlung aus der gleichen Strahlenmenge wie die absolute Beleuchtung. Diese Beziehung werden wir nun für eine jede beliebige gegenseitige Beleuchtung beweisen (129).

[91] 196. **Lehrsatz 16.** Sind die zwei Flächen $ALKD$ und FEI, welche mit gleicher Intensität leuchten, sich in irgend einer Weise einander zugewandt, so ist die von einer jeden auf die andere auffallende Strahlenmenge in beiden Fällen dieselbe.

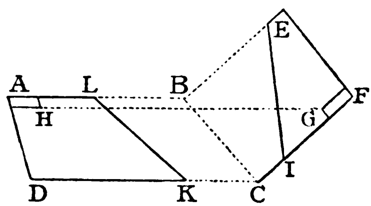

Fig. 21.

Beweis: 1) Betrachtet man die zwei Flächenelemente AH und GF, so wird sich die Strahlenmenge, welche von dem einen auf das andere auffällt, ausdrücken durch das Product aus beiden Flächeninhalten, dem Sinus des Incidenz- und dem Sinus des Emanationswinkels. Nun sind aber die Flächeninhalte in den beiden Fällen dieselben und ebenso sind die auftretenden Sinus die gleichen; da also das fragliche Product in beiden Fällen dasselbe ist, so müssen offenbar von AH aus eben so viele Strahlen nach GF gelangen, wie von GF nach AH.

2) Hält man das Element AH fest, so gilt offenbar das Gesagte auch für jedes beliebige Element der Fläche FEI; vereinigt man daher diese einzelnen Beleuchtungen zu einer Summe, so wird von der ganzen Fläche FEI auf das Element AH dieselbe Strahlenmenge auffallen, wie umgekehrt vom Element AH auf die Fläche FEI.

3) Da dasselbe auch von den einzelnen Elementen der Fläche $ALKD$ gilt, so wird es auch für deren Summe gelten. Hieraus folgt der Satz.

197. Da man also durch eine und dieselbe Operation beide Mengen bestimmen kann, so liefert uns der vorstehende Satz für die ganze Photometrie ein ausgezeichnetes Mittel, die Rechnung zu vereinfachen. Denn man kann nicht nur eine Wiederholung derselben ersparen, [**92**] sondern es wird auch in solchen Fällen, wo die eine Aufgabe schwieriger ist als die andere, hinreichend sein, dieselbe umzukehren und die leichtere zu behandeln.

198. Wenn man statt der einen Fläche nur ein unendlich kleines Element derselben betrachtet, wie z. B. AH, so braucht man den Flächeninhalt desselben nicht in die Rechnung einzuführen, wenn nicht andere Gründe dies fordern. Denn man kann ein solches Element annehmen, dessen Inhalt $= 1$ gesetzt wird, und dann durch Rechnung die Strahlenmenge bestimmen, welche von diesem Element auf eine gegebene Fläche FEI, oder von letzterer auf ersteres auffällt. Muss man aber statt dieses Elements diejenige Grösse einführen, welche die Natur der Rechnung verlangt, z. B. dq, dx, u. s. w., so hat man die Strahlenmenge offenbar mit diesem Flächeninhalt zu multipliciren.

199. Den zwei bisherigen Beispielen wollen wir noch ein drittes anschliessen und dies deshalb genauer entwickeln, weil wir im Folgenden bei Gelegenheit der Untersuchung über die Helligkeit der Bilder im Brennpunkte von Linsen oder Spiegeln ausgedehnteren Gebrauch davon machen werden. Bei dieser Gelegenheit treten nämlich unendlich viele schiefe Strahlenkegel auf, und deshalb wollen wir im Voraus die Strahlenmenge bestimmen, welche einem solchen zukommt.

200. Sei also $BHGF$ eine ebene, leuchtende oder beleuchtete Kreisfläche, die wir der grösseren Deutlichkeit wegen

als horizontal liegend annehmen werden. In A befinde sich ein Element einer Fläche, welches der Kreisebene parallel, also horizontal liegt und welches entweder den Kreis BG beleuchtet,

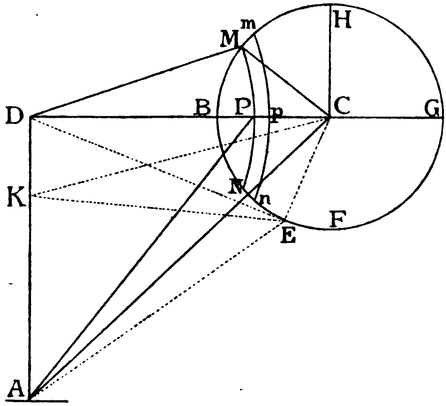

Fig. 22.

oder von ihm beleuchtet wird; dann bilden die austretenden oder auffallenden Strahlen offenbar einen schiefen Strahlenkegel, dessen Grundfläche der Kreis BHG ist und dessen Axe AC mit der Basis einen schiefen Winkel bildet. [93] Da nun das Element in A der Grundfläche parallel ist, so wird die Axe CA gegen dieses Element in der gleichen Weise geneigt sein, und da dies auch für alle anderen Geraden PA gilt, so sind offenbar der Incidenz- und der Emanationswinkel einander gleich. Die Gerade AD stehe vertical, und senkrecht zu ihr ziehe man CD; dann wird D die Projection von A auf die Ebene des Kreises BHG sein, während DAC die Neigung der Axe AC ist. Endlich werde der Inhalt des Elements A mit 1 bezeichnet.

201. Nimmt man einen beliebigen Punkt P, zieht AP und lässt das Dreieck DPA um die Axe AD rotiren, so wird der Punkt P offenbar einen Kreisbogen MPN beschreiben, und wenn man sich unendlich benachbart dazu in gleicher Weise den Bogen mpn denkt, so erhält man ein ringförmiges Segment $MNnm$, für welches alle Strahlen denselben Emanations- und Incidenzwinkel haben. Man bestimme zuerst die Menge *dieser* Strahlen, die wir mit dq bezeichnen werden.

202. Hierzu setze man

die Höhe des Scheitels $DA = 1$
die Entfernung des Centrums $CD = a$
den Halbmesser $CB = x$

Ferner ziehe man DM und CM, und bezeichne:

die Strecke $DP = DM = z$
den Winkel $MDC = v$
» » $MCH = -\xi$
» » $DAP = \omega$,

dann wird

$$z = \operatorname{tg} \omega$$

$$AP = \sqrt{1 + z^2} = \sec \omega$$

$$\text{Inhalt } MNnm = 2vz\,dz = \frac{2v \sin \omega\, d\omega}{\cos^3 \omega}.$$

Da sich nun die Strahlenmenge direct verhält [**94**] wie der Flächeninhalt und die Sinus des Emanations- und Incidenzwinkels, dagegen umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung, so erhält man:

$$dq = 2v \frac{\sin \omega\, d\omega}{\cos^3 \omega} \cdot \cos \omega \cdot \cos \omega \cdot \frac{1}{\sec^2 \omega},$$

oder nach gehöriger Vereinfachung

$$dq = 2v \sin \omega\, d \sin \omega.$$

Hieraus folgt:

$$dq = d(v \sin^2 \omega) - \sin^2 \omega\, dv.$$

203. Es ist aber im Dreieck MDC

$$2az \cos v = z^2 + a^2 - x^2.$$

Setzt man daher der Kürze wegen

$$a^2 = b^2 + x^2,$$

so wird

$$2a \cos v = z + \frac{b^2}{z},$$

und hieraus

$$-dv = \frac{z\,dz - \frac{b^2}{z}\,dz}{\sqrt{4a^2z^2 - (z^2 + b^2)^2}}$$

und da

$$\sin^2\omega = \frac{z^2}{1+z^2},$$

so wird

$$-\sin^2\omega\, dv = \frac{(z^2-b^2)\, z\, dz}{(1+z^2)\sqrt{4a^2z^2-(z^2+b^2)^2}}.$$

Ferner setze man

$$z^2+b^2 = 2y+2a^2$$

oder

$$z^2 = 2y+a^2+x^2,$$

dann wird

$$-\sin^2\omega\, dv = \frac{(x^2+y)\, dy}{(1+a^2+x^2+2y)\sqrt{a^2x^2-y^2}}.$$

[95] Um diesen Ausdruck eleganter zu machen, zerlege man ihn und verwandle ihn in

$$-\sin^2\omega\, dv = \frac{dy}{2\sqrt{a^2x^2-y^2}} - \frac{(1+b^2)\, dy}{2(1+a^2+x^2+2y)\sqrt{a^2x^2-y^2}}.$$

204. Endlich setze man:

$$1+b^2 = 2cax \qquad \text{oder} \qquad c = \frac{1+b^2}{2ax}$$

$$1+a^2+x^2 = 2eax \qquad \text{oder} \qquad e = \frac{1+a^2+x^2}{2ax}$$

$$y = axs \qquad \text{oder} \qquad s = \frac{y}{ax} = \frac{z^2-a^2-x^2}{2ax}.$$

Setzt man dies ein, so wird:

$$-2\sin^2\omega\, dv = \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} - \frac{c\, ds}{(e+s)\sqrt{1-s^2}},$$

woraus sogleich hervorgeht, dass s der Sinus eines gewissen Bogens sein muss. Vergleicht man aber seinen Ausdruck

$$-s = \frac{a^2+x^2-z^2}{2ax}$$

mit dem Dreieck DMC, so findet man leicht

$$\frac{a^2+x^2-z^2}{2ax} = \cos MCD.$$

Daher hat man

$$s = \cos MCG = \sin(-HCM) = \sin\xi.$$

205. Setzt man dies also ein, so wird

$$-2\sin^2\omega\, dv = d\xi - \frac{c\, d\xi}{e+\sin\xi},$$

also

$$dq = d(v\sin^2\omega) + \tfrac{1}{2} d\xi - \frac{1}{2}\,\frac{c\, d\xi}{e+\sin\xi}.$$

[96] 206. Um ferner das letzte Glied dieser Gleichung von der Irrationalität zu befreien, setze man

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\xi = \zeta,$$

dann wird

$$\sin\xi = 2\,\frac{\zeta}{1+\zeta^2} \qquad d\xi = 2\,\frac{d\zeta}{1+\zeta^2},$$

und hieraus

$$\frac{c\, d\xi}{e+\sin\xi} = \frac{2c\, d\zeta}{e+e\zeta^2+2\zeta}.$$

Das Integral hiervon ist

$$\frac{2c}{\sqrt{e^2-1}}\operatorname{arc\,tg}\frac{e\zeta+1}{\sqrt{e^2-1}}.$$

Daher hat man

$$q = v\sin^2\omega + \tfrac{1}{2}\xi - \frac{c}{\sqrt{e^2-1}}\operatorname{arc\,tg}\frac{e\zeta+1}{\sqrt{e^2-1}} + \text{Const.}$$

Die Constante ist so zu bestimmen, dass q verschwindet, wenn $z = DB$ ist. In diesem Fall ist aber $v = 0$, $-\xi = \frac{1}{2}\pi$, $\zeta = -1$; mithin ist

$$\text{Const} = \tfrac{1}{4}\pi - \frac{c}{\sqrt{e^2-1}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}$$

und hiernach ist die Strahlenmenge, welche dem linsenförmigen Stück $MBNP$ entspricht.

$$q = v\sin^2\omega + \tfrac{1}{2}\xi + \tfrac{1}{4}\pi$$
$$-\frac{c}{\sqrt{e^2-1}}\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{e-1}{e+1}} + \operatorname{arc\,tg}\frac{e\zeta+1}{\sqrt{e^2-1}}\right).$$

[97] 207. Sucht man jetzt die Strahlenmenge für den ganzen Kreis, so ist zu setzen $z = DG$, und hieraus folgt $v = 0$, $\xi = +\frac{1}{2}\pi$, $\zeta = +1$; dann ist

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{c}{\sqrt{e^2 - 1}} \left(\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\right),$$

da aber

$$\sqrt{\frac{e+1}{e-1}} = 1 : \sqrt{\frac{e-1}{e+1}},$$

so ist der eine Bogen das Complement des anderen, sodass also die Summe beider einen Quadranten $= \frac{1}{2}\pi$ beträgt; daher zieht sich der Ausdruck so zusammen, dass man für den ganzen Kreis erhält:

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{c}{\sqrt{e^2 - 1}}\right).$$

Es ist aber

$$c = \frac{1 + a^2 - x^2}{2ax} \qquad e = \frac{1 + a^2 + x^2}{2ax}.$$

Mithin wird endlich durch Substitution

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{1 + a^2 - x^2}{\sqrt{(1 + a^2 - x^2)^2 + 4x^2}}\right).$$

In dieser Gleichung ist also die Strahlenmenge für den ganzen Kreis ausgedrückt durch die geradlinigen Strecken AD, DC, BC, welche am leichtesten zu bestimmen sind.

208. Man kann sie jedoch auch durch Winkelgrössen ausdrücken. Zieht man nämlich die Tangente DE, ferner senkrecht zu ihr CE, und verbindet man E mit A, nennt man ferner die Winkel $CDE = w$, $DAE = \varphi$, so wird

$$\begin{aligned} DE^2 &= a^2 - x^2 &&= \operatorname{tg}^2\varphi \\ AE^2 &= 1 + a^2 - x^2 &&= \sec^2\varphi \\ CE &= x &&= \operatorname{tg}\varphi\,\operatorname{tg} w\,. \end{aligned}$$

[98] Hieraus folgt

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left\{1 - \sqrt{\frac{\sec^4\varphi}{\sec^4\varphi + 4\operatorname{tg}^2\varphi\,\operatorname{tg}^2 w}}\right\}$$

oder

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\pi\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 w \sin^2 2\varphi}}.$$

Vom Punkte E aus ziehe man eine Gerade so, dass der Winkel $DKE = 2\varphi = 2\,DAE$ wird, dann ist

$$DE^2 : KE^2 = \sin^2 2\varphi$$
$$EC^2 : KE^2 = \sin^2 2\varphi \operatorname{tg}^2 w$$
$$CK^2 : KE^2 = 1 + \sin^2 2\varphi \operatorname{tg}^2 w\,.$$

Hieraus folgt,

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\,(1 - \cos CKE) = \pi \sin^2 \tfrac{1}{2}\, CKE\,,$$

209. Bei dieser ganzen Rechnung wurde die Höhe oder die Distanz AD der Ebenen als Einheit betrachtet, was jedenfalls erlaubt war (91, 92). In diesem Fall muss man aber die anderen Geraden in dieser Einheit ausdrücken. Um jedoch den zuvor ermittelten Ausdruck jeder beliebigen Maasseinheit anzupassen, bezeichne man die Strecke AD mit h; dann ist offenbar:

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi \left\{1 - \frac{h^2 + a^2 - x^2}{\sqrt{(h^2 + a^2 - x^2)^2 + 4x^2h^2}}\right\}.$$

210. Die Strahlenmenge Q entspricht dem ganzen Kreise $BHGF$, gleichgiltig ob die Strahlen nun von diesem aus auf das Element $A = 1$, oder von diesem Element auf den Kreis auffallen. Im ersten Fall hat man die Helligkeit oder die Beleuchtung des Elementes A, wenn man seinen Flächeninhalt $= 1$ setzt. Um nun die Uebereinstimmung der ermittelten Formel mit den früheren zu zeigen, werden wir sie auf einige specielle Fälle anwenden.

[**99**] 211. Setzt man $a = 0$, so fällt das Centrum C des Kreises in den Scheitel D, und es wird

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{h^2 - x^2}{h^2 + x^2}\right) = \pi\,\frac{x^2}{h^2 + x^2}\,.$$

Es ist aber $x^2 : (h^2 + x^2)$ das Quadrat des Sinus des scheinbaren Halbmessers; also wird die Grösse Q demselben proportional, was mit dem früher (109, 121) Bewiesenen übereinstimmt.

212. Setzt man $a = h = 0$, so wird $Q = \pi$, es findet also absolute Beleuchtung statt (100, 123).

213. Setzt man den Halbmesser x unendlich klein, so wird

$$Q = \pi\,\frac{h^2x^2}{(h^2 + a^2)^2}\,.$$

Es ist aber πx^2 der wahre Inhalt des Kreises, $\pi x^2 h : (h^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}$ dessen scheinbare Grösse und $h : \sqrt{h^2 + a^2}$ der Sinus des Incidenzwinkels, daher ist Q das Product aus diesem Sinus und dem scheinbaren Flächeninhalt, wie man auch ohnedies sieht.

214. Sei jetzt MDE ein Kreis, und senkrecht über seinem Centrum befinde sich das Centrum des Kreises BC, welcher dem ersteren parallel sei; dann wird AC die Axe sein, welche durch die Centra beider Kreise senkrecht hindurchgeht. Man nehme nun den einen von beiden Kreisen als leuchtend an und suche die Strahlenmenge, welche auf den anderen auffällt. Hierzu setze man

die Entfernung beider Kreise $AC = h$
den Halbmesser des leuchtenden Kreises . . . $CB = b$
den Halbmesser des beleuchteten Kreises . . . . $AM = x$

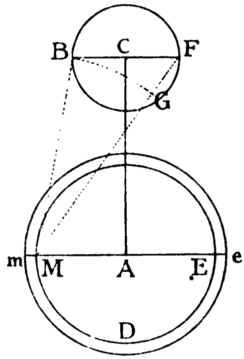

Fig. 23.

Zum Kreis MDE denke man sich unendlich nahe einen zweiten mit ihm concentrischen me gezogen, und in Mm befinde sich [**100**] ein Element $= 1$, dann wird die Dichtigkeit der Strahlen, welche auf dieses Element auffallen (209)

$$= \tfrac{1}{2}\pi\left[1 - \frac{h^2 - b^2 + x^2}{\sqrt{4h^2b^2 + (h^2 - b^2 + x^2)^2}}\right].$$

Da diese Dichtigkeit auf dem ganzen Ring MDE dieselbe ist, so verhält sich die Menge der auf ihn auffallenden Strahlen, wie dessen Flächeninhalt. Derselbe ist aber $= 2\pi x\,dx$; bezeichnet man daher die Strahlenmenge mit dq, so wird

$$dq = \pi^2\left[x\,dx - \frac{(h^2 - b^2 + x^2)\,x\,dx}{\sqrt{4h^2b^2 + (h^2 - b^2 + x^2)^2}}\right],$$

und das Integral hiervon ist

$$q = \tfrac{1}{2}\pi^2\left[x^2 - \sqrt{4h^2b^2 + (h^2 - b^2 + x^2)^2} + \text{Const}\right].$$

215. Die Constante findet man, wenn man beachtet, dass q und x zugleich verschwinden. Sie wird also $= h^2 + b^2$; fügt man diese Grösse hinzu, so wird

$$q = \tfrac{1}{2}\pi^2\left[x^2 + h^2 + b^2 - \sqrt{4h^2b^2 + (h^2 - b^2 + x^2)^2}\right],$$

oder, wenn man diese Gleichung gehörig reducirt,

$$q = \tfrac{1}{2}\pi^2\left[h^2 + b^2 + x^2 - \sqrt{(h^2 + b^2 + x^2)^2 - 4x^2b^2}\right].$$

Dieser Werth ist eine Wurzel der Gleichung

$$q^2 - \pi^2(h^2 + b^2 + x^2)\, q + x^2 b^2 \pi^4 = 0\,.$$

216. Da diese Gleichung von beiden Radien b und x in gleicher Weise abhängt, so muss sich offenbar dieselbe Strahlenmenge ergeben, gleichgiltig welcher von beiden Kreisen als leuchtend angesehen wird (196).

217. Man kann aber auch die gefundene Formel

$$q = \tfrac{1}{2}\pi^2\left[h^2 + x^2 + b^2 - \sqrt{(h^2 + x^2 + b^2)^2 - 4x^2 b^2}\right]$$

elegant zusammenziehen. Seien nämlich BCF und MAE einander parallel, und ziehe man MB, MF, so wird

$$MB^2 = h^2 + b^2 + x^2 - 2bx$$
$$MF^2 = h^2 + b^2 + x^2 + 2bx\,,$$

[101] und daher

$$\frac{MB^2 + MF^2}{2} = h^2 + b^2 + x^2$$
$$MB^2 \cdot MF^2 = (h^2 + b^2 + x^2)^2 - 4b^2x^2\,.$$

Setzt man diese Werthe ein, so hebt sich nicht nur die Irrationalität weg, sondern der Ausdruck verwandelt sich sogar in ein reines Quadrat, und es wird

$$q = \tfrac{1}{4}\pi^2(MF - MB)^2\,.$$

Hieraus folgt

218. **Lehrsatz 17.** *Ist $BMEF$ ein Strahlenkegel derart, dass von den beiden Schnittflächen BF, ME, welche zur Axe CA normal sind, die eine durch die andere erleuchtet wird, zieht man ferner MF und macht $MG = MB$, so ist die Strahlenmenge dieses Kegels gleich dem Product aus der absoluten Beleuchtung π und der Fläche eines Kreises, dessen Durchmesser $= GF$ ist.*

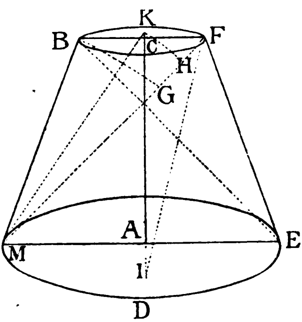

Fig. 24.

Beweis: Nach dem vorigen Paragraphen ist

$$q = \tfrac{1}{4}\pi^2(MF - MB)^2\,.$$

Nach Construction ist aber

$$MF - MB = GF\,,$$

woraus

$$q = \tfrac{1}{4}\pi^2\, GF^2\,.$$

Es ist aber π **die absolute Beleuchtung (123) und** $\frac{1}{4}\pi GF^2$ **der Inhalt eines Kreises, dessen Durchmesser** $= GF$ **ist. Hieraus folgt die Behauptung. Nicht weniger elegant ist der folgende**

219. **Lehrsatz 18.** *In einem Strahlenkegel MBFE ist die Menge der Strahlen dieselbe wie diejenige, welche im Fall der absoluten Beleuchtung auf den Flächenraum eines Kreises vom Durchmesser GF auffallen würde.*

[**102**] Beweis: π ist die Strahlenmenge, welche im Fall der absoluten Beleuchtung auf ein Flächenstück $= 1$ auffällt; daher wird $q = \frac{1}{4}\pi^2 GF^2$ die Menge sein, welche in demselben Fall auf den Raum $\frac{1}{4}\pi GF^2$ auffällt. Dieser Raum ist aber gleich dem Inhalt eines Kreises, dessen Durchmesser $= GF$ ist. Hieraus folgt die Behauptung.

220. **Lehrsatz 19.** *Wird die Schnittfläche BF von der Schnittfläche ME beleuchtet, so verhält sich die mittlere Helligkeit von BF zu ihrer Helligkeit im Fall der absoluten Beleuchtung, wie* GF^2 *zu* BF^2.

Beweis: Die mittlere Helligkeit wird gefunden, wenn man die Strahlenmenge des Lichtkegels $MBFE$ durch den Inhalt der Schnittfläche BC dividirt. Dieser Inhalt ist aber $= \frac{1}{4}\pi BF^2$ und die Menge der Strahlen ist (218) $= \frac{1}{4}\pi^2 GF^2$; daher ist die mittlere Helligkeit $GF^2\pi : BF^2$. Da nun die absolute Beleuchtung $= \pi$ ist, so wird

$$\pi \frac{GF^2}{BF^2} : \pi = GF^2 : BF^2 ,$$

wie zu beweisen war.

221. Dasselbe gilt selbstverständlich auch von der Schnittfläche MDE, wenn sie von der Schnittfläche BF erleuchtet wird (216). Es verhält sich nämlich die mittlere Helligkeit zur Helligkeit der absoluten Beleuchtung wie FG^2 zu ME^2. Wegen $FE = BM$ wird aber auch: $FM - FE = FM - BM = FG$ (218). Daher ist es gleichgiltig, ob man das Dreieck MBF odre das Dreieck MFE benutzt, da es hier nur auf die Differenz der Schenkel ankommt.

[**103**] 222. Da die 4 Punkte $BMEF$ nach Construction ein Sehnenviereck bilden, so wird

$$BE \cdot MF = BM \cdot FE + BF \cdot ME .$$

Es ist aber

$$BE = MF \qquad BM = FE ,$$

also

$$MF^2 = BM^2 + BF \cdot ME \,.$$

Hieraus wird

$$GF = MF - MB = \frac{BF \cdot ME}{MF + MB} \,.$$

Da nun aber (218)

$$q = \tfrac{1}{4}\pi^2 \, GF^2 \,,$$

so wird

$$q = \tfrac{1}{4}\pi^2 \frac{BF^2 \cdot ME^2}{(MF + MB)^2} \,.$$

Die Gerade GF möge nun halbirt werden in H, dann wird

$$MH = \tfrac{1}{2}(MF + MB) \,.$$

Mithin ist

$$q = \pi^2 \frac{BC^2 \cdot MA^2}{MH^2} \,.$$

Hieraus folgt wieder

223. **Lehrsatz 20.** *Betrachtet man $MH = \frac{1}{2}(MB + MF)$ als Einheit, und bezeichnet man die absolute Beleuchtung mit π, so wird die Menge der Strahlen des Lichtkegels MBFE gleich dem Product aus dem Inhalt der leuchtenden Schnittfläche und dem Inhalt der beleuchteten.*

Beweis: Es ist nämlich

$$\pi BC^2 = \text{dem Inhalt der Schnittfläche } BCF$$
$$\pi MA^2 = \text{dem Inhalt der Schnittfläche } MDE \,.$$

[104] Setzt man also $MH = 1$, so wird

$$q = \pi BC^2 \cdot \pi MA^2 \,,$$

also gleich dem Product beider Flächen (219).

224. **Lehrsatz 21.** *Die mittlere Helligkeit der beleuchteten Schnittfläche verhält sich zur mittleren Helligkeit bei absoluter Beleuchtung, wie das Quadrat des Halbmessers der leuchtenden Schnittfläche zum Quadrat der Strecke MH.*

Beweis: Man findet die mittlere Helligkeit, wenn man die Menge der Strahlen durch den Inhalt der beleuchteten Fläche dividirt. Bezeichnet man also die mittlere Helligkeit mit c, so wird, wenn die Ebene BF die beleuchtete ist,

$$c = \frac{q}{\pi BC^2} = \frac{\pi AM^2}{MH^2} \,,$$

hieraus wird

$$c : \pi = AM^2 : MH^2 \,.$$

Ist aber die Schnittfläche MDE die beleuchtete, so wird

$$c = \frac{q}{\pi MA^2} = \frac{\pi BC^2}{MH^2},$$

woraus

$$c : \pi = BC^2 : MH^2.$$

Für beide Fälle gilt also die Behauptung des Lehrsatzes.

225. Wenn man die Strecke MH von M aus nach K hin abträgt, und ebenso von F aus nach I hin, so wird die mittlere Helligkeit

des Schnittes MDE : $\pi \sin^2 KIF$
des Schnittes BF : $\pi \sin^2 MKI$.

[**105**] *Hieraus folgt die Uebereinstimmung und Analogie zwischen dem gegenwärtigen und dem fünften Lehrsatz* (109). Denn die Winkel MKI, KIF sind die scheinbaren Halbmesser der leuchtenden Segmente, wenn sie von den Punkten K und I aus betrachtet werden.]

Kapitel III.

Experimentelle Prüfung des Urtheils des Auges.

Begründung der Principien der Photometrie.

226. Die ersten Grundlagen, auf welche die Photometrie aufgebaut wird, wurden im Früheren (54, 55) als möglicherweise zweifelhaft bezeichnet. Dieselben sollen aber jetzt unter Anwendung aller Strenge nicht, wie man sagen kann, mit der gewöhnlichen Krämerwage, sondern mit Hilfe der Goldwage einer Prüfung unterworfen werden, welche nur dasjenige als sicher und evident gelten lässt, was wirklich vollständig evident ist. Wir betreten dieses Gebiet um so lieber, je ausgedehnter der Gebrauch der Methode ist, deren wir uns hierbei bedienen werden, um alles ins rechte Licht zu setzen.

227. Die Principien nun, deren Richtigkeit hier zu prüfen ist, sind folgende:

1. *Die Beleuchtung wächst nach Maassgabe der Anzahl der Kerzen oder Lichtquellen oder leuchtenden Punkte, durch welche ein ihnen zugewandtes Blatt oder eine Ebene beleuchtet wird.*

2. *Sie nimmt ab mit dem zunehmenden Quadrat der Entfernung der beleuchteten Ebene vom leuchtenden Körper.*
3. *Sie nimmt ab im Verhältniss des Sinus des Incidenzwinkels.*

[**106**] 228. Es wurde schon erwähnt (54), dass sich keines dieser Gesetze für sich allein durch Experimente bestätigen lässt. Ferner haben wir gesehen, dass dann, wenn man irgend eines von ihnen angenommen hat, die anderen durch die Erfahrung geprüft werden können, sodass sich dieselben also gegenseitig entweder bestätigen oder widerlegen (55). Ob nun aber das erste oder das letztere der Fall ist, soll jetzt etwas genauer untersucht werden. Zu diesem Zweck werden wir das erste dieser Gesetze mit dem zweiten und dann mit dem dritten vergleichen, um den Zusammenhang klar zu stellen.

229. Wir nehmen also den früher beschriebenen ersten Versuch (58) wieder vor, oder auch den ihm ähnlichen zweiten (59). Alles, was man aus ihm ohne Hilfe einer Hypothese zu schliessen vermag, kommt darauf hinaus, *dass dieselbe Beleuchtung entsteht, wenn die Anzahl der Kerzen in demselben Verhältniss steht, wie das Quadrat der Entfernung.* Da sich dieser Satz mit Nothwendigkeit ergibt, und da ausser den Fällen des Satzes bei gleichbleibender Helligkeit der Kerzen und gleicher Reflexionsfähigkeit der das Licht senkrecht auffangenden Ebene eine Gleichheit der Beleuchtung nicht stattfinden kann, so werden wir ihn als ein Axiom anwenden.

230. Um jedoch die Methode, deren wir uns bedienen werden, im Voraus durch ein leichteres Beispiel zu illustriren, nehmen wir zunächst an, der Versuch sei so angelegt gewesen, dass die Anzahl der Kerzen in A, Fig. 2, immer gleich der doppelten Anzahl derjenigen in K war, sodass sich also in jedem Falle die Distanz KC zu AB verhält, wie $1 : \sqrt{2}$. Es fragt sich dann, mit welchem Recht man hieraus einen Schluss ziehen kann, der sich allgemeiner auf das Verhältniss einer beliebigen Anzahl von Kerzen erstreckt, sodass sich die Distanz bestimmt, bei welcher dieselbe Beleuchtung durch [**107**] eine beliebige Anzahl von Kerzen entsteht, oder dass umgekehrt letztere durch erstere gefunden wird.

231. Um diese Aufgabe zu lösen, bezeichne man eine beliebige Distanz mit x, die entsprechendeAnzahl der Kerzen mit y. Welches nun auch die Beziehung sein mag, die zwischen diesen Grössen besteht, so muss sie sich doch ganz

allgemein durch eine Reihe von folgender Form ausdrücken lassen:

$$A = y = \alpha + \beta x^m + \gamma x^n + \delta x^p + \cdots .$$

Denn in eine solche Reihe kann man alle beliebigen irrationalen Ausdrücke verwandeln.

232. Es sind nun die Coefficienten und Exponenten dieser Reihe zu ermitteln. Hierzu setze man, entsprechend dem Versuche (230), in dieser Reihe statt der Distanz x die Grösse $x\sqrt{2}$, so muss man offenbar $2y$ anstatt y setzen, und es wird

$$B = 2y = \alpha + \beta x^m 2^{\frac{m}{2}} + \gamma x^n 2^{\frac{n}{2}} + \cdots ,$$

es wird also $2A = B$; und wenn man $2A - B = 0$ setzt, so kommt

$$0 = (2 - 1)\alpha + (2 - 2^{\frac{m}{2}})\beta x^m + (2 - 2^{\frac{n}{2}})\gamma x^n + \cdots .$$

Da aber die Distanz x beliebig sein kann, so spielt sie in dieser Reihe die Rolle der Variablen und daher sind alle Coefficienten $= 0$. Setzt man also

$$\begin{array}{llllll}
(2-1)\alpha & = 0 & \text{so wird} & \alpha = 0 & & \\
(2-2^{\frac{m}{2}})\beta & = 0 & \text{»} & 2 = 2^{\frac{m}{2}} & \text{also} & m = 2 \\
(2-2^{\frac{n}{2}})\gamma & = 0 & \text{»} & 2 = 2^{\frac{n}{2}} & \text{»} & n = 2 \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Da also alle Exponenten $= 2$ werden, so ist

$$y = \beta x^2 + \gamma x^2 + \delta x^2 + \cdots ,$$

[108] oder

$$y = (\beta + \gamma + \delta + \cdots) x^2 .$$

Bei gleichbleibender Stärke der Beleuchtung verhält sich also die Anzahl der Kerzen wie das Quadrat der Entfernung.

233. Man kann diesen Satz allerdings durch Versuche direct bestätigen. Man suche nämlich, während die Kerze in K stehen bleibt, die Entfernung, bei welcher zwei, drei oder mehr Kerzen dieselbe Beleuchtung erzeugen (58), dann wird sich diese Distanz verhalten wie die Quadratwurzel aus der Anzahl der Kerzen. Indessen ziehen wir es vor, denselben auf indirectem Wege abzuleiten, und zwar wegen der Methode, deren

wir uns bedienen; und aus diesem Grunde werden wir, um die Sache genauer zu entwickeln, bei dieser Aufgabe etwas stehen bleiben. Befinde sich also in A eine Wand oder ein Blatt Papier, oder sonst eine zu beleuchtende Ebene. In B, C, D, E, ... mögen sich 1, 2, 3, 4, ... Kerzen befinden, welche die Ebene nach einander gleichhell erleuchten. Die Ordinaten Bb, Cc, Dd mögen für jede Distanz die Anzahl der Kerzen bezeichnen. Dann ziehe man die Curve Abf und suche die Gleichung derselben.

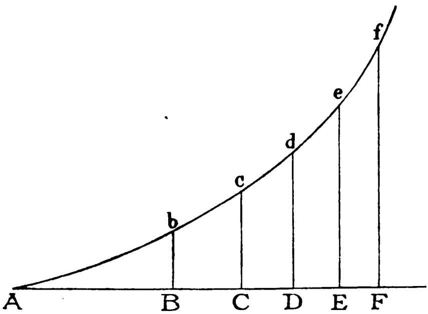

Fig. 25.

234. Die Aufgabe ist also auf die folgende reducirt: *Man soll eine Curve von der Beschaffenheit finden, dass der doppelten Ordinate eine Abscisse entspricht, welche sich zur Abscisse der einfachen Ordinate verhält wie* $\sqrt{2}$ *zu* 1. Man bemerkt sofort, dass diese Curve eine Parabel ist; es muss aber bewiesen werden, dass sie die einzige ist, welche diese Eigenschaft besitzt. Hierin besteht aber gerade die Lösung der vorigen Aufgabe. Bezeichnet man nämlich die Abscisse mit x, die Ordinate mit y, so findet man $y \backsim x^2$.

235. Es ist aber nun zu entscheiden, ob die Curve Abf, welche jenes Verhältniss zwischen der Distanz und der Anzahl der Kerzen ausdrückt, wirklich diese Eigenschaft hat. Zu diesem Zweck kann man die Versuche so anordnen, [**109**] dass man in beliebiger Entfernung eine beliebige Anzahl von Kerzen aufstellt, welche die Ebene in A beleuchten, und dann die Entfernung sucht, bei welcher die doppelte Anzahl der Kerzen dieselbe Beleuchtung hervorbringt. Wiederholt man diesen Versuch bei einer anderen Distanz und einer anderen Anzahl der Kerzen, hält dabei aber das Verhältniss beider Zahlen fest, so findet sich das Verhältniss der vorhergehenden zur folgenden Distanz $= 1 : \sqrt{2}$. Auf diese Weise ergibt sich das Gesetz allgemein, indem es auf die Kerzen in B, C, D, ... angewandt werden kann, so dass, wenn sich Bb zu Cc verhält wie $1 : 2$, auch $AB : AC = 1 : \sqrt{2}$ ist, und in ähnlicher Weise $AC : AE = 1 : \sqrt{2}$. Dies

ist diejenige Form der Aufgabe (234), auf welche wir die vorliegende Frage reducirt haben.

236. Bisher wurde nur dasjenige Verhältniss behandelt, welches zwischen der Entfernung und der Anzahl der Kerzen besteht; auf die Helligkeit der beleuchteten Ebene kann man hieraus noch keinen Schluss ziehen. Um diesen Weg zu betreten, muss man die Annahme machen, dass die Helligkeit in irgend einer Weise von der Distanz und der Anzahl der Kerzen abhänge, dass also bei sonst gleichen Umständen einer gegebenen Distanz und einer gegebenen Anzahl von Kerzen eine gegebene oder bestimmte Beleuchtung entspricht. Da dieselbe also von zwei Variablen abhängt, so bezeichne man die Beleuchtung mit η, die entsprechende Entfernung mit x, die Anzahl der Kerzen mit z; dann kann man η durch eine Reihe ausdrücken, deren einzelne Terme viergliedrig und von folgender Form sind:

$$\eta = a + b z^m + \gamma x^n + \delta z^p x^q ,$$

welcher Ausdruck das allgemeine Glied der ganzen Reihe ist.

[**110**] 237. Um nun die Exponenten und Coefficienten zu bestimmen, muss man sich erinnern (229), dass die Beleuchtung dieselbe ist, so oft die Anzahl der Kerzen sich verhält wie das Quadrat der Entfernung. Setzt man also x^2 statt z, so wird

$$\eta = \text{Const.} = \alpha + \beta x^{2m} + \gamma x^n + \delta x^{2p+q} .$$

Da aber die Distanz x bei Festhaltung dieser Bedingung beliebig sein kann, so liefert die vorstehende Gleichung nur dann einen constanten Werth für η, wenn

$$m = n = 2p + q = 0 .$$

Denn dann ergibt sich

$$\eta = \alpha + \beta + \gamma + \delta .$$

Diese Constante hängt aber von der Helligkeit oder Leuchtkraft und von der Grösse der Kerzen ab, oder, was auf dasselbe hinauskommt, von der absoluten Beleuchtung.

238. Setzt man die gefundenen Werthe in die Gleichung

$$\eta = \alpha + \beta z^m + \gamma x^n + \delta z^p x^q$$

ein, so erhält man

$$\eta = \alpha + \beta + \gamma + \delta z^p x^{-2p} .$$

Da aber für $z = 0$ auch $\eta = 0$ wird, so ist

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \,,$$

also endlich

$$\eta = \delta z^p x^{-2p} \,.$$

239. Da nun das einzige übriggebliebene Glied der allgemeine Ausdruck für unendlich viele andere ihm ähnliche ist, so kann man allgemein setzen:

$$\eta = a z^m x^{-2m} + b z^n x^{-2n} + c z^p x^{-2p} + \cdots$$

Auf diese Weise wurde die Doppelreihe, deren allgemeines Glied der Ausdruck 236 ist, auf eine einfache Reihe reducirt. Da man diese aber nicht weiter [**111**] reduciren kann, ohne neue Versuche zu Hilfe zu nehmen, so wollen wir sie inzwischen etwas näher betrachten.

240. Man sieht nämlich sogleich, dass das Gesetz 229, welches wir bisher allein benutzt haben, nicht genügt, die Formel vollständig zu reduciren. Indessen ist sie doch so weit vereinfacht, dass die Beziehung zwischen den Exponenten feststeht und die einzelnen Glieder ähnliche Functionen von z und x sind. Denn sie hängt in derselben Weise direct von der Anzahl der Kerzen ab, wie sie vom reciproken Quadrat der Entfernung abhängt.

241. Wenn man nun die Annahme machen dürfte, die Beleuchtung wachse einfach wie die Anzahl der Kerzen, so würden alle Exponenten $= 1$ und es würde sein:

$$\eta = (a + b + c + \cdots) \frac{z}{x^2} \,.$$

242. Würde man dagegen alle Exponenten $m, n, p, \ldots$ einander gleich setzen, so würde folgen:

$$\eta = A \frac{z^m}{x^{2m}} \,,$$

die Beleuchtung würde also wachsen wie eine gewisse Potenz der Kerzenanzahl, und abnehmen wie das Quadrat derselben Potenz der Entfernung.

243. Ebenso wie hieraus der Zusammenhang zwischen dem ersten und zweiten Gesetz (227, 228) klargelegt wird, gehen wir jetzt weiter und ziehen auch das dritte Gesetz, welches sich auf den Sinus des Incidenzwinkels bezieht, in Rechnung. Geht man also auf den dritten und vierten der oben beschriebenen Versuche (62, 63) zurück, so folgt aus beiden ohne Hilfe einer Hypothese sofort der Satz: *Die Beleuchtung ist dieselbe, so oft der Sinus des Incidenzwinkels sich direct verhält wie*

das Quadrat der Entfernung und umgekehrt wie die Anzahl der Kerzen. Sei also der Sinus des Incidenzwinkels $= s$, [112] so hat man für die Helligkeit der beleuchteten Ebene die ganz allgemeine Formel:

$$\eta = A + Bz^a + Cx^b + Ds^c + Ez^d x^e + Fz^f s^g + Gx^h s^i + Hz^k x^l s^m ,$$

welches der allgemeine Ausdruck für die Glieder einer unendlichen Reihe ist. Es sind nun die Coefficienten und Exponenten dieser Formel zu bestimmen.

244. Hierzu erinnere man sich, dass die Helligkeit constant bleibt, sobald

$$s = \frac{x^2}{z} ,$$

oder

$$z = \frac{x^2}{s} .$$

Setzt man diesen Werth ein, so erhält man.

$$\eta = \text{Const} = A + Bx^{2a}s^{-a} + Cx^b + Ds^c + Ex^{2d+e}s^{-d} + Fx^{2f}s^{g-f} + Gx^h s^i + Hx^{2k+l}s^{m-k} .$$

Nun soll aber η immer constant sein, sowohl wenn sich x und s zugleich ändern, wie wenn sich eine der Variablen allein ändert. Lässt man also x variiren, und hält s constant, so müssen die einzelnen Glieder der Formel constant sein, also

$$a = b = 2d + e = f = h = 2k + l = 0 .$$

Hält man dagegen x constant und lässt s sich ändern, so wird ebenso

$$a = c = d = g - f = i = m - k = 0 .$$

Hieraus wird wegen $f = 0$ und $d = 0$ auch

$$g = e = 0 .$$

Setzt man dies also ein, so erhält man wegen $k = m$ und $l = -2m$

$$\eta = A + B + C + D + E + F + G + Hz^m s^m x^{-2m} .$$

[113] Nun soll aber η verschwinden, sobald z oder s oder endlich $\frac{1}{x^2} = 0$ ist. Hieraus wird

$$\eta = Hz^m s^m x^{-2m}$$

oder

$$\eta = H\left(\frac{zs}{x^2}\right)^m.$$

245. Dieser Ausdruck ist das allgemeine Glied einer Reihe, deren jedes einzelne Glied eine noch unbestimmte Potenz von $(zs : x^2)$ ist. Daher wird

$$\eta = a\left(\frac{zs}{x^2}\right)^m + b\left(\frac{zs}{x^2}\right)^n + c\left(\frac{zs}{x^2}\right)^p + \cdots$$

246. Setzt man nun, was die grösste Vereinfachung sein würde, alle Glieder ausser dem ersten $= 0$, so wird

$$\eta = a\left(\frac{zs}{x^2}\right)^m.$$

Würde sich also die Helligkeit verhalten wie das Quadrat des Sinus des Incidenzwinkels, so wäre offenbar $m = 2$, und die Helligkeit würde sich demnach auch verhalten, wie das Quadrat der Kerzenanzahl und umgekehrt wie die vierte Potenz der Entfernung. Ferner haben bei derselben Annahme alle Glieder der gefundenen Reihe (245) denselben Exponenten, und es ist $m = n = p = \cdots$ Denn setzt man in der Function (244)

$$\eta = H z^m x^m : x^{2m}$$

[114] $\eta = s^2$, so würde offenbar

$$1 = H z^m s^{m-2} : x^{2m} = \text{Const.}$$

Daher muss für jedes einzelne Glied der Exponent $= 2$ sein.

247. Wenn nun aber irgendwo ein Zweifel an der Wahrheit der photometrischen Gesetze von Bedeutung ist, so wird er hier wenigstens ins hellste Licht gerückt. Wir haben nämlich im Früheren den Beweis dafür, *dass die Beleuchtung abnehme wie der Sinus des Incidenzwinkels* (53) nach dem Vorgang aller Schriftsteller der Optik so geführt, dass gezeigt wurde, dass auf die Ebene AB (Fig. 1) eben so viel Strahlen auffallen müssen, wie auf die Ebene AE, welche zur Richtung der Strahlen senkrecht steht. Aber genau gesprochen, würde es, wie man zumeist sofort erkennen wird, voreilig sein, den Schluss zu ziehen, dass die Helligkeit einfach deshalb abnehme, weil die Anzahl der Strahlen, welche schief auffallen, geringer ist als die Anzahl der senkrecht auf dieselbe Ebene auffallenden. Die Sache könnte sich nämlich anders verhalten, wenn man auch Rücksicht nehmen

müsste auf die Schiefe des Stosses, mit welchem die Strahlen die Ebene AB treffen. Wenigstens nehmen die meisten etwas ähnliches an bezüglich der Wärmewirkung der Sonnenstrahlen. Wenn nun dies auch für die Lichtwirkung gelten würde, so würde folgen, dass

$$\eta = z^2 s^2 : x^4 ,$$

und daher würde wider alle Erwartung die Helligkeit zunehmen wie das Quadrat der Anzahl der Kerzen und umgekehrt abnehmen wie die vierte Potenz der Entfernung. Dies ist aber jedenfalls sehr unwahrscheinlich, weil es allen Principien der Mechanik (51) zu widersprechen scheint. Denn viel eher könnte, wenn sich die Kraft verdoppelt, verdreifacht u. s. w., [**115**] ein Theil der Kraft zerstört werden, statt dass sie sich im Gegentheil noch in stärkerem Maasse vergrössern sollte.

248. Nimmt man dagegen an, dass sich die Helligkeit umgekehrt verhält, wie die einfache Entfernung, so geht die ganze Reihe in die höchst einfache Gleichung über

$$\eta = \frac{\sqrt{z s}}{x} ,$$

die Beleuchtung würde also wachsen, wie die Quadratwurzel aus dem Product der Kerzenanzahl und dem Sinus des Incidenzwinkels. Es würde sich also die Leuchtkraft der schief einfallenden Strahlen, unter Rücksicht auf ihre kleinere Menge, vergrössern. Denn ihre Anzahl ist geringer nach Maassgabe des Sinus des Incidenzwinkels s. Es ist aber $\sqrt{s} : s > 1$.

249. Setzt man aber $\eta \backsim z$ oder $\eta \backsim s$, oder endlich $\eta \backsim 1 : x^2$, so wird sich für jede dieser Annahmen nach Substitution des betreffenden Werthes die ganze Reihe (245)

$$\eta = a\left(\frac{z s}{x^2}\right)^m + b\left(\frac{z s}{x^2}\right)^n + c\left(\frac{z s}{x^2}\right)^p + \cdots$$

auf das einzige Glied reduciren:

$$\eta = A\frac{z s}{x^2} \cdot$$

Hieraus folgt mit Evidenz, dass jene drei photometrischen Gesetze (227) richtig sind, sobald nur ein einziges von ihnen richtig ist. Setzt man also z. B.

$$\eta \backsim s ,$$

so wird durch Substitution dieses Werthes

$$s = a\left(\frac{z\,s}{x^2}\right)^m + b\left(\frac{z\,s}{x^2}\right)^n + c\left(\frac{z\,s}{x^2}\right)^p + \cdots$$

[116] und daher

$$1 = a z^m s^{m-1} x^{-2m} + b z^n s^{n-1} x^{-2n} + c z^p s^{p-1} x^{-2p} + \ldots$$

Hält man nun z und x constant, lässt dagegen s variiren, so müssen alle Glieder der Reihe constant sein, und man muss aus diesem Grund setzen $m - 1 = 0$ oder $m = 1$, und ebenso $n = 1$, $p = 1$. Daraus geht nach Substitution dieser Werthe die Gleichung hervor

$$\eta = a\frac{z\,s}{x^2} + b\frac{z\,s}{x^2} + c\frac{z\,s}{x^2} + \cdots$$

oder einfach

$$\eta = A\frac{z\,s}{x^2}\,.$$

Dasselbe findet man, wenn man $\eta \backsim z$ oder $\eta \backsim 1 : x^2$ setzt.

250. Die wahrscheinlichste Annahme ist aber diejenige, dass sich die entwickelte Reihe auf ihr erstes Glied reducire, so dass also

$$\eta = A\left(\frac{z\,s}{x^2}\right)^m.$$

Hieraus folgt aber

$$\frac{z\,s}{x^2} = \left(\frac{\eta}{A}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Daher könnte man, auch wenn m nicht $= 1$ wäre, dennoch denselben Calcül anwenden, welcher früher benutzt wurde. So oft nämlich früher zwei oder mehrere Helligkeiten einander gleich waren, werden sie auch jetzt durch die obige Beziehung als gleich bestimmt. Sind sie aber ungleich, so bestünde der einzige Unterschied darin, dass man jetzt statt der Helligkeiten, die zu vergleichen sind, deren $m$te Wurzel zu setzen hat. Dass dies auch dann gilt, [117] wenn man die ganze Reihe beibehält, sieht man von selbst.

251. Wie man aber auch den Exponenten m, falls er von der Einheit verschieden sein soll, bestimmen mag, so bleibt immer ein offener Widerspruch gegen die gewöhnliche Erfahrung bestehen. Da nämlich die Helligkeit einer beleuchteten Ebene

nichts anderes ist, als die Lichtmenge, welche auf die gegebene Fläche auffällt, und da ebenso die scheinbare Helligkeit (37) des leuchtenden Gegenstandes nach der Lichtmenge beurtheilt wird, welche durch die Pupille auf die Netzhaut des Auges fällt und dort das Bild des Gegenstandes erzeugt, so folgt, dass bei gleichbleibender Oeffnung der Pupille ein Gegenstand um so heller erscheint, je dichter das Licht ist, welches durch die Pupille auf einen gegebenen Punkt des Bildes auffällt. Vergrössert sich nun die scheinbare Oberfläche des Objectes, so wird in demselben Maasse auch der Flächeninhalt des Bildes zunehmen; und wenn sich nun die einfallende Lichtmenge in demselben Maasse vergrössert, oder wenn $m = 1$ ist, so muss jedenfalls die Helligkeit des Bildes dieselbe bleiben. Wenn also der Gegenstand immer mit der gleichen Intensität leuchtet, so wird er auch, unabhängig von seiner scheinbaren Grösse, immer gleich hell erscheinen. Setzt man dagegen $m = 2$, so wird $\eta = z^2$ (246); wenn sich also die scheinbare Grösse des Gegenstandes verdoppelt, so wird sich die in das Auge tretende Lichtmenge vervierfachen. Da sich aber der Flächeninhalt des Bildes auf der Netzhaut nur verdoppelt, so muss folglich das auf denselben Punkt des Bildes auffallende Licht doppelt so dicht sein. Daher würde die Helligkeit des Bildes um so grösser oder intensiver sein, je grösser die scheinbare Grösse des Gegenstandes ist. Dies steht aber mit der Wirklichkeit jedenfalls nicht in Einklang; denn bei gleichbleibender Oeffnung der Pupille [**118**] sieht man einen Gegenstand eben so hell, wenn man seine ganze Oberfläche anblickt, wie wenn man nur einen Theil derselben ins Auge fasst. Dasselbe gilt, wenn man $m = 3, 4, \cdots$ setzt und umgekehrt auch für $m = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$; denn in den letzteren Fällen würde sich bei zunehmender Oberfläche des gleichmässig leuchtenden Objectes die scheinbare Helligkeit vermindern wie die Quadrat- oder Kubikwurzel u. s. w. der scheinbaren Fläche, sodass für eine doppelt so grosse Fläche die Helligkeit $= \sqrt{\frac{1}{2}}$ wäre, u. s. w.

252. Man nehme nun drei gleich helle Kerzen und stelle sie in verschiedenen Entfernungen von der beleuchteten Ebene so auf, dass die Beleuchtung infolge der nächststehenden gleich wird der Beleuchtung, welche von den beiden anderen zusammen herrührt. Die Entfernung der ersten heisse x, die der zweiten ξ, die der dritten y, und es seien die entsprechenden Beleuchtungen η, η', η''. In der allgemeinen Formel (244) wird also wegen $z = s = 1$:

$$\eta = H : (x^2)^m \qquad \eta' = H : (\xi^2)^m \qquad \eta'' = H : (y^2)^m .$$

Hat man aber den Versuch auf die beschriebene Art ausgeführt, so wird man dann $\eta' + \eta'' = \eta$ finden, wenn

$$\frac{1}{y^2} + \frac{1}{\xi^2} = \frac{1}{x^2}$$

ist. Substituirt man daher diesen Werth, so folgt

$$\eta = \eta' + \eta'' = H\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{\xi^2}\right)^m = H\left(\frac{1}{y^2}\right)^m + H\left(\frac{1}{\xi^2}\right)^m$$

und daher:

$$\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{\xi^2}\right)^m = \left(\frac{1}{y^2}\right)^m + \left(\frac{1}{\xi^2}\right)^m .$$

[119] Da aber in dieser Gleichung y und ξ variabel sind, so kann sie nur dann bestehen, wenn $m = 1$ ist. Hieraus folgt allgemein (249):

$$\eta = \frac{zs}{x^2} .$$

253. Um aber nichts unerörtert zu lassen, wollen wir die Sache auf die Spitze treiben. Man könnte nämlich die Annahme in Zweifel ziehen, dass die Summe der Helligkeiten der beiden entfernteren Kerzen, wenn sie sich auf der beleuchteten Ebene vereinigen, gleich gross ist wie die Summe der einzelnen Helligkeiten, jede für sich betrachtet, d. h. also ob man dann, wenn die Versuche zeigen, dass die Beleuchtung in beiden Fällen gleich ist, auch setzen dürfe: $\eta' + \eta'' = \eta$. Wenn man dies nicht für zulässig hält, so darf man auch nicht setzen:

$$H\left(\frac{1}{x^2}\right)^m = H\left(\frac{1}{y^2}\right)^m + H\left(\frac{1}{\xi^2}\right)^m ,$$

sondern es ist zu setzen:

$$H\left(\frac{1}{x^2}\right)^m = H\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{\xi^2}\right)^m$$

und es wird auch nicht sein

$$\eta = \eta' + \eta'' ,$$

sondern es wird

$$\frac{\eta}{H} = [(\eta' : H)^{\frac{1}{m}} + (\eta'' : H)^{\frac{1}{m}}]^m .$$

Es scheint mir aber nach dem Vorgebrachten höchst überflüssig, weiter zu untersuchen, ob die Natur wirklich so weit von dem einfachsten Wege abweicht. Wenn aber jemand meint, ich habe mich hierbei unnöthig lange aufgehalten, so ist mir dies gleichgiltig, da es mit Absicht geschehen ist. Dass die angewandte Methode nicht wenig dazu beiträgt, den Zusammenhang zwischen den photometrischen Grundgesetzen zu erläutern, [**120**] wurde schon anfangs (226) erwähnt. Denn mit Hilfe unserer Methode haben wir gesehen, dass dieser Zusammenhang so eng ist, dass bei der geringsten Aenderung des einen dieser Gesetze auch die anderen sich in derselben Weise ändern müssen (247, 248). Denn sobald man annimmt, die Beleuchtung wachse wie das Quadrat des Sinus des Incidenzwinkels, muss man auch annehmen, sie wachse wie das Quadrat der Anzahl der Kerzen, und nehme umgekehrt ab, wie das Biquadrat der Entfernung.

254. Das vierte Gesetz, welches sich auf den Emanationswinkel bezieht, haben wir nicht in Erwägung gezogen, da es von den übrigen nicht abhängt und durch besondere Versuche bewiesen wird. (74 fgde.)

255. Die Versuche, welche gelegentlich der früheren Entwickelungen angestellt wurden, sind dort nicht eingefügt worden, da der geeignetere Platz hier ist, wo das Urtheil des Auges zu prüfen ist, und die Vorsichtsmaassregeln anzugeben sind, durch die man den Täuschungen des Auges begegnen kann.

256. **Beispiele zu Versuch 2.** Die Decke und Wände eines Zimmers waren mit geschwärzten Brettern belegt und nur in der Nähe des Ofens war ein Stück der ganz weissen Mauer unüberzogen gelassen; dasselbe möge durch die Gerade $\beta\,\alpha$ dargestellt werden. Diesem Stück der Mauer gegenüber stellte ich eine Kerze L auf, während ein Brett in C so dazwischengestellt wurde, dass dasselbe die ganze Mauer beschattete. Ferner wurden in B drei Spiegel aufgestellt, in der Weise, dass sie das Licht der Kerze nach β warfen und die Distanz $LB + B\beta$ für alle die gleiche wurde. Da nun die Incidenzwinkel wenig von einander verschieden waren, so hätten die drei Räume in β, welche von den Spiegeln beleuchtet wurden, eigentlich gleich hell sein [**121**] müssen. Da ich aber eine kleine

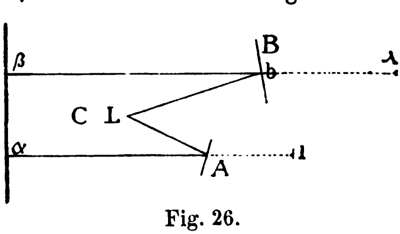

Fig. 26.

Verschiedenheit der Helligkeit bemerkte, so musste ich schliessen, dass diese Spiegel das Licht nicht gleich stark reflectirten. Der Spiegel, welcher die Mitte hielt, wurde also bei Seite gesetzt und die beiden anderen, nämlich der hellste und der dunkelste, wurden in B und b so aufgestellt, dass sie das Licht auf denselben Raum in β werfen und dass $Lb + b\beta = LB + B\beta$ wurde. Der dritte Spiegel wurde in A aufgestellt, und dann wurde durch Versuche die Distanz AL oder $A\alpha$ so bestimmt, dass der Raum α, auf welchen das Licht der Kerze fiel, durch diesen einzigen Spiegel eben so hell erleuchtet wurde, wie der Raum β von den zwei Spiegeln B und b. Sodann wurden die Distanzen $A\alpha$, AL, $B\beta$, BL in Zollen und Linien des Pariser Fusses gemessen. Der Versuch wurde fünf mal wiederholt, und es fand sich

beim	1.	2.	3.	4.	5. Versuch:
$LB =$	35″ 8‴	33″ 7‴	69″ 5‴	69″ 2‴	28″ 7½‴
$B\beta =$	64 11	86 1½	97 4	101 6	48 1
$LA =$	21 1	18 4	48 4	46 2	17 0
$A\alpha =$	50 1½	70 6½	71 9	73 5	36 7½

257. Um nun durch diese Versuche zu zeigen, dass sich die Anzahl der Kerzen verhält, wie das Quadrat der Entfernung, muss man bemerken, dass an Stelle der mehrfachen Kerzen hier die verschiedenen Bilder der einzigen Kerze L treten. Diese Bilder befinden sich hinter den Spiegeln und daher waren die fraglichen Entfernungen:

$$\lambda\beta = \beta B + BL$$
$$l\alpha = \alpha A + AL\ .$$

Es war also bei unseren Versuchen:

$\lambda\beta =$	100″ 7‴	119″ 8½‴	166″ 9‴	170″ 8‴	76″ 8½‴
$l\alpha =$	71 2½	88 6½	120 1	119 7	53 7½ .

[**122**] 258. Nun befanden sich in λ zwei Bilder, in l nur eins. Deshalb muss sein

$$\lambda\beta^2 : \alpha l^2 = 2 : 1$$

oder

$$\lambda\beta : \alpha l = \sqrt{2} : 1 = 1 : \sqrt{\tfrac{1}{2}}\ .$$

Es war aber

beim	1. Versuch:	$\alpha l : \beta \lambda =$	0.70795
»	2. »		0.73933
»	3. »		0.72083
»	4. »		0.70068
»	5. »		0.69908.

Das Mittel hieraus gibt $\alpha l : \beta \lambda = 0.71357$

es ist aber $\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0.70711$

also bleibt die Differenz $= 0.00646$.

259. Man sieht also, dass die einzelnen Versuche wenig von dem Verhältniss $1 : \sqrt{\tfrac{1}{2}}$ abweichen. Die grösste Differenz, nämlich diejenige des zweiten Versuches, beträgt 0.03222, ist also nicht grösser als der dreissigste Theil der grösseren Distanz $\beta \lambda$. Diese Distanz beträgt aber $119'' \, 8\tfrac{1}{2}'''$, daher ist jene Differenz sehr nahe = 4 Zoll, um welchen Betrag die Distanz αl hätte kleiner sein sollen. Dies würde aber stattgefunden haben, wenn der Spiegel A der Kerze um 2 Zoll näher gestanden hätte. Dieser Umstand zeigt aber gerade, dass eine andere Ursache vorhanden war, da sich schon bei einer Verschiebung des Spiegels um nur einen halben Zoll eine Veränderung der Helligkeit entschieden erkennen liess. Was nun auch die Ursache des Fehlers gewesen sein mag, so wollte ich diesen Versuch dennoch nicht unterdrücken, da ich mehrere derart nicht angestellt habe. Uebrigens wird der Werth des Versuchs unten noch erörtert werden.

[**123**] 260. **Versuch 5.** In L (Fig. 27) wurde wieder eine Kerze aufgestellt, und in C ein Gegenstand, welcher die Mauer $\alpha\beta$ beschattete; der hellste unter den Spiegeln wurde in B, der dunkelste in b aufgestellt, dagegen derjenige, welcher als der mittlere bezeichnet wurde, in A, und zwar derart, dass die Spiegel B und b das Licht der Kerze auf denselben Punkt β der Mauer warfen und dass die Helligkeit der Mauer in α, welche von der Lichtquelle A kam, ebenso hell erschien, wie die Helligkeit in β, welche von den beiden Spiegeln B und b herrührte. Hierauf wurden die Ent-

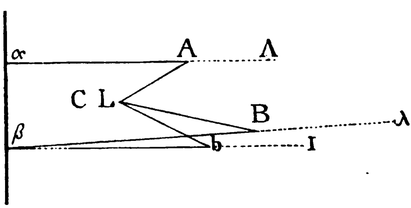

Fig. 27.

fernungen der Spiegel von der Mauer und der Kerze gemessen. Der Versuch wurde viermal angestellt und es war:

	1)	2)	3)	4)
AL	20″ 0‴	26″ 9‴	31″ 1‴	44″ 10‴
$A\alpha$	36 3	41 6	66 10	79 2
bL	25 6	32 0	41 3	62 7
$b\beta$	47 3	54 1	85 2	101 5
BL	32 6	45 6	60 6	77 2
$B\beta$	55 10	65 5	101 8	116 0

261. Nun sind auch hier die Distanzen der Bilder Λ, l, λ zu bestimmen; dieselben waren also

$\Lambda\alpha$	56″ 3‴	68″ 3‴	97″ 11‴	124″ 0‴
$l\beta$	72 9	86 1	126 5	164 0
$\lambda\beta$	88 4	110 11	162 2	193 2

262. Da bei diesen Versuchen die Entfernung der Bilder ungleich ist, so muss sein

$$\frac{1}{\Lambda\alpha^2} = \frac{1}{l\beta^2} + \frac{1}{\lambda\beta^2}.$$

Man kann diese Formel elegant construiren. *Man trage die Distanzen der beiden entfernteren Bilder von β aus nach λ und l hin so auf, dass die Geraden $\beta\lambda$ und βl auf einander senkrecht stehen.* [**124**] *Zieht man dann die Hypotenuse und fällt das Perpendikel $\beta\Lambda$, so ist dieses gleich der Distanz des nächsten Bildes Λ.* Denn in jedem Dreieck verhalten sich die Höhen umgekehrt wie die Seiten, auf denen sie senkrecht stehen. Im rechtwinkligen Dreieck ist aber das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten und je die eine Kathete als Höhe steht senkrecht auf der anderen Kathete als Seite. Setzt man also den Inhalt des Dreiecks = 1, so

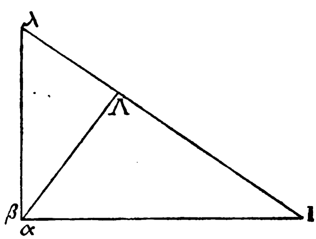

Fig. 28.

wird die Hypotenuse $\lambda l = 1 : \alpha \Lambda$, die Kathete $\beta\lambda = 1 : \beta l$, die Kathete $\beta l = 1 : \beta\lambda$; daher ist

$$\frac{1}{\alpha \Lambda^2} = \frac{1}{\beta l^2} + \frac{1}{\beta \lambda^2}\,.$$

Bezeichnet man ferner die Helligkeit, welche der nächsten Kerze entspricht, mit $l\lambda$, so entspricht der folgenden Kerze eine Helligkeit $= \lambda\Lambda$, und der entferntesten entspricht Λl; sie verhalten sich also wie die Basisabschnitte zur ganzen Basis des rechtwinkligen Dreiecks.

263. Hier ist jedoch die Rechnung vorzuziehen. Um nun die einzelnen Versuche unter sich vergleichen zu können, schreiben wir

$$1 = \left(\frac{\alpha\Lambda}{\beta l}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\Lambda}{\beta\lambda}\right)^2,$$

sodass jedesmal die Helligkeit in α als Einheit angesehen wird. Der Rechnung zufolge war

$(\alpha\Lambda : \beta l)^2 =$	0.5978	0.6286	0.5986	0.5717
$(\alpha\Lambda : \beta\lambda)^2 =$	0.4055	0.3786	0.3646	0.4119
Summe $=$	1.0033	1.0072	0.9632	0.9836 .

[125] Nimmt man aus diesen vier Zahlen das Mittel, so wird

$(\alpha\Lambda : \beta\lambda)^2 + (\alpha\Lambda : \beta l)^2 = 0.9898$
eigentlich hätte dies sein sollen $= 1.0000$
daher bleibt die Differenz . . $= 0.0102$.

264. Die Differenz ist am grössten beim dritten Versuch, nämlich $= 0.0368$. Sie gehört aber zu einer Distanz $\Lambda\alpha = 97''\,11'''$, welche also um $1''\,10'''$ zu vergrössern wäre, indem man den Spiegel Λ um etwa 11 Linien von der Mauer oder der Kerze fortwärts hätte verschieben müssen. Man sieht also auch hieraus, dass das Auge noch sehr kleine Helligkeitsdifferenzen wahrzunehmen vermag. Denn das Maximum des Fehlers oder der Differenz überschreitet bei diesen vier Versuchen nicht den siebenundzwanzigsten Theil der ganzen Helligkeit, beim vierten Versuch beträgt er ein Sechzigstel, und beim ersten und zweiten ist er ganz verschwindend.

265. **Versuch 6.** Die Gerade BC stelle eine weisse und vollständig ebene Mauer dar von einer Breite $= 2'$ und einer Höhe $= 10'$. In L stehe eine Kerze, deren Strahlen senkrecht auf A auffallen. Dann weiss man nach dem Früheren, dass die höheren und tieferen Theile der Mauer schwächer beleuchtet sind, und zwar im directen Verhältniss des Sinus des Incidenzwinkels und umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung (48, 53), sodass also die Beleuchtung in B ist $= \cos^3 BLA : AL^2$. Wenn daher der Winkel BLA nur wenige Grade beträgt, so nimmt die Helligkeit von A nach B hin nur wenig ab, so dass der Unterschied nicht *merkbar* wird. Es wurde nun in L eine Kerze aufgestellt, und in D ein Brett, durch welches das ganze Zimmer [**126**] hinter der Kerze verdunkelt wurde; sodann entfernte ich mich auf 10 bis 12 Fuss von der Mauer und betrachtete bald mit dem blossen Auge, bald durch eine Concavlinse die Mauer und suchte den Zwischenraum BC zu bestimmen, innerhalb dessen das Auge eine merkbare Differenz der Helligkeit nicht zu erkennen vermochte. Hieraus wurde die Entfernung LA der Kerze gemessen, ebenso die Höhe des Raumes CB, und die Hälfte davon wurde als Distanz AB bezeichnet. Es war

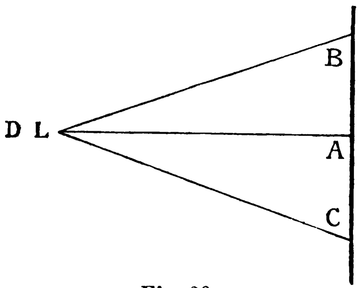

Fig. 29.

beim	1.	Versuch	$AL = 10''$	$AB = 3''$	$3'''$
»	2.	»	$20''$	6	9
»	3.	»	$30''$	11	0
»	4.	»	$40''$	15	9
»	5.	»	$50''$	21	6

266. Wenn nun auch das Auge einen Unterschied zwischen den Helligkeiten in B und A nicht zu erkennen vermochte, so sind dieselben in Wirklichkeit dennoch von einander verschieden. Bezeichnet man nämlich die Helligkeit in A mit 1, so wird diejenige in $B = \cos^3 BLA$ sein, daher ist der Unterschied beider Helligkeiten $= 1 - \cos^3 BLA$; dies ist also die Differenz, welche sich bei diesem Versuch der Schärfe des Auges entzieht. Es ist aber

bei Versuch:	Winkel $BLA =$	$\cos^3 BLA =$	also die Differenz =
1	$9^\circ 14'$	0.9616	0.0384
2	9 35	0.9587	0.0413
3	10 23	0.9517	0.0483
4	11 8	0.9446	0.0554
5	12 8	0.9345	0.0655

267. Hieraus folgt, 1) dass diese Differenzen klein sind, wenn sie vielleicht auch alle wegen der Schwierigkeiten, mit denen die Vergleichung beider Helligkeiten verknüpft ist, grösser sind als bei anderen Versuchen. 2) Die Differenzen wachsen [**127**] mit zunehmender Distanz der Kerze; sie sind also nicht ein bestimmter Procentsatz der gesammten Helligkeit. Denn beim ersten Versuch ist die Differenz = 0.0384 oder = $\frac{1}{26}$ der Helligkeit in A, beim fünften dagegen, wo die Kerze fünfmal soweit entfernt war, betrug die Differenz = 0.0655 oder $\frac{1}{15}$ der Helligkeit in A.

268. Um andererseits diese Zahlen auf dieselbe Einheit zu beziehen, sind sie durch das Quadrat der Entfernung zu dividiren, und hierdurch wird

für die Distanz:	die Helligkeit in A:	die Helligkeit in B:	die Differenz:
10″	1.0000	0.9616	0.0384
20	0.2500	0.2397	0.0103
30	0.1111	0.1057	0.0054
40	0.0625	0.0590	0.0035
50	0.0400	0.0374	0.0026

Die Differenzen nehmen also mit den Helligkeiten ab, jedoch nicht in demselben Verhältnisse. Denn die Helligkeiten nehmen schneller ab, als die Differenzen. Es ist aber wohl zu bemerken, dass es sich hier um die wahre, nicht um die scheinbare Helligkeit handelt. Denn da die scheinbare Helligkeit von der Oeffnung der Pupille abhängig ist, so war sie bei den letzten Versuchen wegen der grösseren Oeffnung der Pupille grösser als bei den ersten. Nimmt man sie bei den einzelnen Versuchen den Differenzen, welche § 266 gefunden wurden, proportional, so ist die Helligkeit in A und B in diesem Maasse zu vergrössern, um die wahre Helligkeit in die scheinbare zu verwandeln. Denn von dieser ist das Urtheil des Auges abhängig. Daher war

[128]

bei Versuch	die scheinbare Helligkeit in A	die scheinbare Helligkeit in B	die Differenz
1	1.0000	0.9616	0.0384
2	0.2688	0.2578	0.0110
3	0.1398	0.1330	0.0068
4	0.0902	0.0852	0.0050
5	0.0682	0.0638	0.0044

269. Diese Differenzen sind die äussersten und wohl nie oder höchst selten überschrittenen Grenzen der Fehler, welche sich in das Urtheil des Auges einschleichen können. Denn bei diesen Versuchen nimmt die Helligkeit von A aus nach B oder C hin so allmählich ab, dass man sehr schwer bestimmen kann, wo die Differenz merkbar wird. Deshalb kann man gewiss annehmen, dass bei der Ausführung der beschriebenen Versuche die Höhe AB eher zu gross als zu klein bestimmt worden ist.

270. Aus der letzten Tabelle (268) ist ersichtlich, dass die Helligkeit schneller abnimmt als der Fehler, den man bei der Vergleichung der Helligkeiten begehen kann. Obzwar also der Fehler, an sich betrachtet, grösser ist bei einer grösseren scheinbaren Helligkeit, so macht er dennoch, wenn er auf die Helligkeit selbst bezogen wird, nur einen kleineren Theil derselben aus. So ist z. B. der Fehler beim ersten Versuche = 0.0384, d. h. neunmal so gross als beim fünften; aber der erstere beträgt $\frac{1}{26}$, der letztere erhebt sich bis auf $\frac{1}{15}$ der betreffenden Helligkeit. Und ohne Zweifel würde der Fehler, oder sein Verhältniss zur Helligkeit noch beträchtlicher ausfallen, wenn die Helligkeit noch geringer würde als diejenige, welche einer Distanz der Kerze von 50 Zoll entspricht. Man kann sich eine Helligkeit sogar so klein denken, dass das Auge sie mit [129] der vollständigen Dunkelheit verwechselt, wenn sich auch dasselbe, wie oben erwähnt, noch diesem Zustand allmählich anpasst.

. . . .

[144] 307. Die grössten Fehler der Versuche entspringen jedenfalls aus der Nachlässigkeit des Beobachters; es wird also gut sein, hier die Vorsichtsmaassregeln mitzutheilen, welche man anwenden muss, um dieselben so viel als möglich zu vermeiden. Ein Umstand, den man unter die wichtigsten Hindernisse rechnen muss, und der zugleich allen sinnlichen Wahrnehmungen gemein zu sein scheint, besteht in dem *Einfluss des Gemüths*

auf die Wahrnehmung. In Folge hiervon findet man oft, oder genauer gesprochen, glaubt man oft mehr zu finden, als da ist. Um diesem [**145**] Fehler aus dem Wege zu gehen, *darf man eine Messung von Strecken oder Winkeln nicht eher vornehmen, als bis man zuvor durch Versuche beide Helligkeiten als gleich gefunden hat. Man darf ferner diese Strecken oder Winkel nicht nachträglich ändern, wenn man etwa findet, dass sie einer vorgefassten Annahme nicht genügend entsprechen.* Man muss also an derjenigen Reihenfolge festhalten, welche bei den früher mitgetheilten Versuchen und Beispielen befolgt wurde.

308. Eine Vergleichung geht leichter von Statten, wenn beide Helligkeiten entweder gleich weiss, oder gleich gelb, gleich bläulich u. s. w. sind. *Die Richtigkeit der Entscheidung, dass zwei Helligkeiten gleich sind, ist aber dann am meisten zweifelhaft, wenn man bei der Vergleichung Schwierigkeiten gefunden hat und wenn man beide Helligkeiten länger anschauen musste, bevor man über ihre Gleichheit ein Urtheil abgeben zu können im Stande war.* Denn wenn beide Helligkeiten wirklich gleich waren, so springt dies so deutlich und so widerspruchslos ins Auge, dass ein Zweifel gar nicht aufkommen kann. So müssen bei den obigen Versuchen (256, 260) die von den Spiegeln beleuchteten Räume in der Weise gleich hell gesehen werden, als ob dieselbe Lichtquelle die Mauer durch zwei verschiedene Oeffnungen beleuchtete. Sobald man in Zweifel ist und das Auge sich beim ersten oder wiederholten Anblick weigert ein Urtheil abzugeben, kann man mit Sicherheit annehmen, dass ein Fehler vorliegt, und dann wird es am Platze sein, die Distanz der Spiegel zu ändern.

309. Besonders schwierig ist es dann, Helligkeiten mit einander zu vergleichen, wenn dieselben mehr oder weniger in der Farbe verschieden sind. So hat ein Blatt Papier, wenn es vom Mond beschienen wird, eine milchähnliche Farbe, unter dem Einfluss des Lichts einer Kerze sieht es gelb aus. Dieser Unannehmlichkeit kann man bisweilen abhelfen, wenn man das weisse Blatt durch ein anderes ersetzt, welches eine Farbe hat, die diese Ungleichheit aufhebt. *Oft muss man auch* [**146**] *absichtlich die eine von beiden Helligkeiten verstärken oder abschwächen, um deutlich zu sehen, dass sie dann grösser oder kleiner wird.* Denn auf diese Weise wird man zugleich erkennen, *worin die Differenz besteht, wenn sie von der verschiedenen Farbe beider Helligkeiten abhängig ist. Man*

kann dieselbe sodann allmählich so weit vermindern, dass sie für die Wahrnehmung verschwindet. Beispiele, welche hierher gehören, werden später vorkommen.

310. Da sich ferner das Auge an Helligkeiten, die sehr verschieden sind, nur allmählich gewöhnt, so darf man nicht sprungweise von einem Extrem zum anderen übergehen und muss abwarten, bis die Oeffnung der Pupille diejenige geworden ist, wie sie für die gegebene Helligkeit passt, und bis die zitternde Bewegung der Fibrillen, welche sich allmählich an jede Helligkeit anpasst, in einen *permanenten Zustand* übergegangen ist. Das Auge kann aber auch die dichteste Dunkelheit eher ertragen als eine zu grosse Helle, wie z. B. den Glanz der Sonne; daher wird unter fast gleichen Umständen das Urtheil des Auges weniger getrübt, wenn eine Helligkeit vorliegt, welche schwächer ist, als dieser Glanz.

311. Bevor man einen Versuch anstellt, sind die *Bedingungen* desselben genau zu erwägen. Deshalb *muss man alles fremde Licht so viel als möglich fernhalten; und wenn man dasselbe nicht vollständig fernhalten kann, so muss man dafür sorgen, dass beide zu vergleichende Helligkeiten durch dasselbe in gleichem Maasse verstärkt werden.* Denn auf diese Weise bleibt die Gleichheit fortbestehen. *Wenn man mehrere Kerzen anwendet, so muss man die Gleichheit ihrer Helligkeit, die sehr veränderlich ist, in Zweifel ziehen.* Deshalb wurde bei den früher mitgetheilten Versuchen die Anwendung von Spiegeln anstatt mehrerer Kerzen vorgezogen. Denn so veränderlich auch die Helligkeit der angewendeten Kerze sein mag, so sind doch alle Bilder derselben in dem nämlichen Maass heller oder dunkler geworden, sodass das *Verhältniss* zwischen den Leuchtkräften, worauf [**147**] es bei diesen Versuchen hauptsächlich ankommt, bestehen bleibt. Auch die verschiedene Reflexionsfähigkeit der Spiegel muss man vor Anstellung der Versuche besonders prüfen, um auch diese Bedingung zu erfüllen (256, 275). Aus demselben Grunde *ist es viel sicherer, die Entfernung oder den Incidenzwinkel einer einzigen Kerze zu ändern, als dass man eine andere Anzahl von Kerzen zuzieht.*

312. *Wenn, was mehrere der später vorkommenden Versuche erfordern, die Leuchtkraft der nämlichen Kerze auf der vorderen und hinteren Seite zu vergleichen ist, so glückt der Versuch besser, wenn die Kerzenflamme eine kegelförmige Gestalt hat.* Diese Bedingung muss man sehr

im Auge behalten, wenn man starke Vernachlässigungen vermeiden will.

313. *Es versteht sich endlich von selbst, dass die angewandten Spiegel oder Gläser mit aller Sorgfalt gereinigt werden müssen*, da selbst die kleinsten Stäubchen das Licht auffangen, und daher seine Dichtigkeit, die man intact halten sollte, verringern.

314. Es gibt noch mehrere Vorsichtsmaassregeln, die wir jedoch passender bei den Versuchen selbst einfügen werden, um sie zugleich an einem Beispiel zu beleuchten.

[148] ## Zweiter Theil.

Die Schwächung des Lichts durch durchsichtige Körper, besonders durch Glas,

experimentell und theoretisch betrachtet.

. . . .

. . . .

[232] ### Kapitel III.

Ueber die Brechung des Lichts durch krumme Flächen, besonders durch Linsen, und über die Lichtstärke des gebrochenen Lichts.

. . . .

[233] 487. Um auch hier vom Einfacheren zum Complicirteren fortzuschreiten, betrachten wir eine einzige Convexlinse, und indem wir zuerst von ihrer Reflexionsfähigkeit absehen, fragen wir *nach dem Verhältniss, in welchem das durch dieselbe gebrochene Licht verstärkt oder geschwächt ist, nach der Dichtigkeit, welche dasselbe im Brennpunkt der Linse besitzt, und nach dem Verhältniss derselben zur directen Beleuchtung.*

488. Ferner wollen wir, ähnlich wie die Linsen selbst oder deren Oeffnungen kreisförmig sind, auch annehmen, dass der leuchtende Gegenstand kreisförmig und eben sei, sodass die Axe der Linse das Centrum des Gegenstandes senkrecht durchschneide. Wenn dieser Fall entwickelt ist, so wird sich leicht ergeben, wie man zu verfahren hat, wenn sich dies anders verhält.

489. Sei also AB eine Linse, die wir als biconvex annehmen und deren Oberfläche aus zwei Kalotten zweier Kugeln gebildet werde, deren Radien DC und CE sind. FCG sei die Axe der Linse, das kreisförmige Object $g\,G\,\gamma$ sei senkrecht zu

ihr und G sei das Centrum desselben. Der Brennpunkt befinde sich in F; zieht man dann die Geraden $g\,C\,f$ und $\gamma\,C\varphi$, so

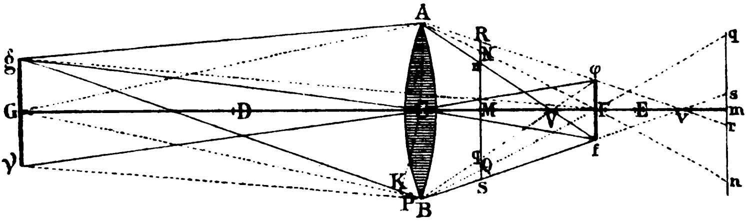

Fig. 46.

wird $\varphi F f$ das Bild des Gegenstandes sein. Es soll nun die Helligkeit desselben gesucht werden.

490. Nun ist an sich klar, dass es hier unendlich viele Strahlenkegel gibt, welche alle dieselbe gemeinsame Grundfläche haben, nämlich die Linse AB oder deren Oeffnung. Diese Kegel sind auf der vorderen Seite divergent, da die Strahlen von den einzelnen Punkten des Gegenstandes $g\,G\,\gamma$ aus sich über die ganze Oberfläche der Linse ausbreiten; auf der anderen Seite CF sind es convergente Strahlenkegel, da sich alle Strahlen, die von einem beliebigen Punkte g auf die ganze Linse sich verbreiten, nach der Brechung wieder in einem Punkte f vereinigen, um dort das Bild des Punktes g zu erzeugen. Da wir von der Reflexion und Zerstreuung durch das Glas absehen, [**234**] so folgt hieraus leicht, *dass die Menge der Strahlen in beiden Kegeln dieselbe ist.* Da dies für jeden leuchtenden Punkt gilt, so ergibt sich, *dass die Gesammtmenge aller Strahlen, die vom Gegenstand aus auf die Oberfläche oder die Oeffnung der Linse auffallen, in derselben Vollständigkeit in das Bild $\varphi F f$ eintritt.* Daher *findet man die mittlere Helligkeit des Bildes, wenn man diese Strahlenmenge durch den Flächeninhalt des Bildes dividirt.* In derselben Weise findet man auch die Helligkeit, welche einem beliebigen Punkte oder einem beliebigen Theil des Bildes entspricht.

491. Ferner ergibt sich aus dem Früheren die directe Beleuchtung, welche stattfindet, wenn dem Gegenstande ein Blatt Papier in φf zugewandt ist und folglich *ergibt sich hieraus auch eine Vergleichung zwischen der Beleuchtung des Bildes und derjenigen, welche der leuchtende Gegenstand ohne die Linse auf directem Wege erzeugt.* Sonach werden wir hierauf die Rechnung anwenden.

492. Sei also

die Entfernung des Gegenstandes . . $GC = h$
die Entfernung des Brennpunktes . . $CF = f$
der Halbmesser des Gegenstandes. . $Gg = x$
der Halbmesser des Bildes . . . . $F\varphi = \xi$
der Halbmesser der Linse . . . . $CA = b$
der Halbmesser DC. . . . . . $DC = c$
der Halbmesser CE. . . . . . $CE = e$

Ferner sei die Menge der Strahlen, welche auf die Linse auffallen, $= q$, die mittlere Helligkeit des Bildes $= \eta$, die directe Beleuchtung $= \lambda$ und die absolute Beleuchtung $= \pi$ (100, 123).

493. Sieht man die Dicke der Linse als verschwindend an, so ist nach den Hauptsätzen der Dioptrik:

$$f = \frac{2ceh}{(c+e)h - 2ce} .$$

[**235**] Ferner wird nach denselben Sätzen

$$\begin{aligned} Gg : GC &= Ff : CF \\ x : h \quad &= \xi \quad : f , \end{aligned}$$

also wird durch Substitution:

$$\xi = \frac{2cex}{(c+e)h - 2ce} .$$

Durch diese Gleichungen ergeben sich also die Beziehungen zwischen den Entfernungen und Halbmessern des Gegenstandes und des Bildes.

494. Um nun die Helligkeit des Bildes zu bestimmen, erinnere man sich, dass man nach dem Früheren (215) hatte

$$q = \tfrac{1}{2}\pi^2 \left[h^2 + b^2 + x^2 - \sqrt{(h^2 + b^2 + x^2)^2 - 4x^2b^2}\right] .$$

Dies ist die Strahlenmenge, welche auf die Oberfläche oder die Oeffnung der Linse auffällt. Dividirt man dieselbe durch den Flächeninhalt des Bildes, welcher $= \pi\xi^2$ ist, so geht daraus die mittlere Helligkeit des Bildes hervor, nämlich

$$\eta = q : \pi\xi^2 .$$

495. Wünscht man eine elegantere Formel, so ist, wenn man die Gerade gB zieht (217),

$$q = \tfrac{1}{4}\pi^2 (gB - gA)^2 ,$$

und daher

$$\eta = \pi \frac{(g B - g A)^2}{4 F \varphi^2} .$$

Bezeichnet man also den schiefen Kegel $B g A$ als einen *äusseren Kegel* (conus extremus) und seien $g A$ und $g B$ dessen *Seiten*, so wird $g B - g A$ *die Differenz der Seiten des äusseren Kegels*. Hält man diese Bezeichnungsweise fest und erinnert sich, dass π die absolute Beleuchtung ist, so entspringt hieraus der folgende

[**236**] 496. **Lehrsatz 23.** *Die absolute Beleuchtung verhält sich zur mittleren Beleuchtung eines Bildes, wie der Flächeninhalt des Bildes zum Flächeninhalt eines Kreises, dessen Durchmesser die Differenz der Seiten des äusseren Kegels $g B$ und $g A$ ist.*

Beweis: Da nämlich

$$\eta = \frac{\pi (g B - g A)^2}{4 F \varphi^2} ,$$

so wird

$$\pi F \varphi^2 : \tfrac{1}{4} (g B - g A)^2 \pi = \pi : \eta .$$

Es ist aber $\pi F \varphi^2$ der Flächeninhalt des Bildes, $\frac{1}{4} (g B - g A)^2 \pi$ der Inhalt eines Kreises, dessen Durchmesser $= g B - g A$ ist; endlich ist π die absolute Beleuchtung. Hieraus folgt der Satz.

497. Man trage $g A$ von g aus nach K hin ab und halbire $K B$ in P, so wird

$$g P = \tfrac{1}{2} (g A + g B)$$

und daher (222)

$$q = \frac{\pi^2 G g^2 A C^2}{g P^2}$$

und hieraus ferner

$$\eta = \frac{\pi G g^2 A C^2}{g P^2 \cdot F \varphi^2} .$$

Es ergibt sich also die mittlere Beleuchtung η eines Bildes aus den Halbmessern des Objects, der Linse und des Bildes und aus dem arithmetischen Mittel zwischen den Seiten $g B$ und $g A$ des äusseren Kegels. Hieraus folgt:

498. **Lehrsatz 24.** *Die mittlere Beleuchtung eines Bildes verhält sich zur absoluten Beleuchtung, wie das Product aus dem Flächeninhalt des Objects und* [**237**] *dem Flächeninhalt*

der Linse, zum Product aus dem Inhalt des Bildes und dem Inhalt eines Kreises, dessen Halbmesser $= gP$ *oder gleich dem arithmetischen Mittel zwischen den Seiten* gA *und* gB *des äusseren Kegels ist.*

Beweis: Da nämlich

$$\eta = \frac{\pi\, Gg^2 \cdot CA^2}{gP^2 \cdot F\varphi^2},$$

so wird

$$\eta : \pi = \pi\, Gg^2 \cdot \pi\, CA^2 : \pi\, F\varphi^2 \cdot \pi\, gP^2 .$$

Es sind aber $\pi\, Gg^2$, $\pi\, CA^2$, $\pi\, F\varphi^2$, $\pi\, gP^2$ die im Lehrsatz erwähnten Flächeninhalte, und π ist die absolute Beleuchtung. Hieraus erhellt der Satz.

499. Es ist ferner nach § 493

$$GC : CF = Gg : F\varphi ,$$

setzt man dies ein, so wird

$$\eta = \frac{\pi\, CA^2 \cdot GC^2}{CF^2 \cdot gP^2},$$

Nun ist aber $CA : CF = \operatorname{tg} AFC$ und $GC : gP$ sei der Cosinus eines Winkels, der mit ω bezeichnet werden möge. Hierdurch wird

$$\eta = \pi \cos^2 \omega \operatorname{tg}^2 AFC ,$$

Hieraus folgt leicht der

500. **Lehrsatz 25.** *Die Helligkeit im Mittelpunkt* F *des Bildes verhält sich zur absoluten Beleuchtung, wie das Quadrat der Tangente des scheinbaren Halbmessers der Linse, wenn sie von* F *aus gesehen wird, zum Quadrat der Secante desselben scheinbaren Halbmessers, von* G *aus gesehen.*

Beweis: Da nämlich die Helligkeit des Centrums die gleiche ist, welches auch die Grösse des Objectes sei, so nehmen wir [**238**] das Object unendlich klein an, und dann fällt offenbar der äussere Lichtkegel BgA mit dem mittleren und geraden Kegel BGA zusammen; daher wird $gP = GA = GB$. Hieraus folgt

$$\cos \omega = GC : GA = \cos AGC ,$$

mithin

$$\eta = \pi \cos^2 AGC \operatorname{tg}^2 AFC ,$$

oder

$$\eta : \pi = \operatorname{tg}^2 AFC : \sec^2 AGC .$$

Die Winkel AFC und AGC sind aber die scheinbaren Halbmesser der Linse, wenn sie von F und von G aus gesehen wird. Hieraus folgt der Satz.

501. **Lehrsatz 26.** *Ist der Gegenstand unendlich weit entfernt, so verhält sich die mittlere Helligkeit des Bildes zur absoluten Beleuchtung, wie das Quadrat der Tangente des scheinbaren Halbmessers der Linse, von F aus gesehen, zum Quadrat der Secante des scheinbaren Halbmessers des Objects, von C aus gesehen.*

Beweis: Denn wegen der unendlichen Entfernung des Objectes wird $gC = gP$, und hieraus folgt

$$\cos\omega = GC : gC = \cos gCG \ ,$$

mithin ist

$$\eta = \pi \cos^2 gCG \cdot \mathrm{tg}^2 AFC$$

oder

$$\eta : \pi = \mathrm{tg}^2 AFC : \sec^2 gCG \ .$$

Es ist aber gCG der scheinbare Halbmesser des Objectes, von C aus gesehen, und AFC der scheinbare Halbmesser der Linse, vom Brennpunkt F aus gesehen. Hieraus ergibt sich der Satz.

502. Sucht man nur die Helligkeit [**239**] im Centrum des Bildes, so wird $gCG = 0$ und $\sec gCG = 1$, daher ist

$$\eta : \pi = \mathrm{tg}^2 AFC : 1 \ .$$

Die Helligkeit des Bildes ist im Centrum ein Maximum und die mittlere Helligkeit nimmt ab wie das Quadrat des Cosinus des scheinbaren Halbmessers des Objectes.

503. **Lehrsatz 27.** *Sind die Entfernungen des Gegenstandes und des Bildes von der Linse einander gleich, so verhält sich die centrale Beleuchtung des Bildes zur absoluten Beleuchtung, wie das Quadrat des Sinus des Halbmessers der Linse, von F aus gesehen, zur Einheit.*

Beweis: In diesem Fall ist nämlich

$$GC = FC \ ,$$

daher

$$AGC = AFC \ ,$$

mithin

$$\sec^2 AGC = \sec^2 AFC \ .$$

In demselben Fall ist aber auch (500)

$$\eta = \pi\, \mathrm{tg}^2 AFC \sec^2 AGC \ .$$

Hieraus wird durch Substitution:

$$\eta = \pi \operatorname{tg}^2 AFC \sec^2 AFC$$

oder

$$\eta = \pi \sin^2 AFC\,,$$

also

$$\eta : \pi = \sin^2 AFC : 1\,.$$

504. **Lehrsatz 28.** *Sind der Gegenstand und das Bild von der Linse gleichweit entfernt, so wird ein Blatt, welches das Bild im Centrum desselben, F, auffängt, eben so hell erleuchtet, als ob der Gegenstand nicht da sei* [**240**] *und die Linse mit derselben Intensität leuchte wie das Object.*

Beweis: Nach dem vorigen Satze ist nämlich für den ersten Fall

$$\eta = \pi \sin^2 AFC\,.$$

Dieselbe Formel erhält man aber auch für den zweiten Fall zufolge Lehrsatz 5 (109, 121), wenn man in diesem Falle die Linse selbst als leuchtenden Gegenstand ansieht. Hieraus ergibt sich also der Satz.

505. *Dasselbe gilt, wenn $\omega = AFC$.* Denn man hat gesehen (499), dass

$$\eta = \pi \operatorname{tg}^2 AFC \cos^2 \omega\,,$$

daher wird durch Substitution:

$$\eta = \pi \sin^2 AFC\,.$$

η ist aber in diesen Fällen die mittlere Helligkeit des Bildes; sie ist also dieselbe, welche im Centrum F stattfinden würde, wenn die Linse mit derselben Intensität wie der Gegenstand leuchten würde, und wenn das Blatt φf von der Linse AB beleuchtet würde.

506. In den anderen Fällen gilt dieser Satz nicht, wenn er auch meistens der Wahrheit sehr nahe kommt. Es ist jedoch zu bemerken, dass bei allen diesen Entwickelungen die Reflexionsfähigkeit des Glases und die Menge der zerstreuten Lichtstrahlen gleich Null gesetzt wurde. Dies entspricht nicht genau der Wirklichkeit, da es solche Gläser nicht gibt. Daher wird die Helligkeit der einzelnen Theile des Bildes jedenfalls geringer sein. Nehmen wir also an, die Helligkeit des Bildes werde infolge der Reflexion und Zerstreuung der Strahlen verändert in einem Verhältniss $= 1 : \varkappa$, so wird (499)

$$\eta = \varkappa \pi \operatorname{tg}^2 AFC \cos^2 \omega\,.$$

[**241**] 507. Am häufigsten kommt derjenige Fall vor, dass die Entfernung des Gegenstandes unendlich ist. Dann ist also die Beleuchtung des Bildes im Centrum F:

$$\eta = \varkappa \pi \operatorname{tg}^2 AFC \cos^2 gCG ,$$

oder

$$\eta = \varkappa \pi \frac{\sin^2 AFC \cos^2 gCG}{\cos^2 AFC} .$$

508. Der Winkel AFC hängt von der Oeffnung der Linse ab. Wenn nun diese derart war, dass man genau oder nahezu setzen durfte

$$\varkappa = \frac{\cos^2 AFC}{\cos^2 gCG} ,$$

so wird auch

$$\eta = \pi \sin^2 AFC .$$

509. Es gibt aber sehr viele Fälle, wo diese günstigen Umstände entweder vollständig zutreffen, oder wo nur geringe Abweichungen stattfinden. Nimmt man z. B. eine Linse von guter Durchsichtigkeit, so ist $\varkappa$ ungefähr $= \frac{15}{16}$. Wenn sie nun stark genug gekrümmt ist, dass für entferntere Gegenstände der Winkel $AFC = 14^{\circ}$ ist, so wird auch $\varkappa = \cos^2 AFC$ oder wenigstens sehr nahe. Daher ist für die centrale Helligkeit

$$\eta = \pi \sin^2 AFC .$$

Werden also in diesen Fällen die Sonnenstrahlen durch eine Convexlinse gebrochen und im Brennpunkt durch ein weisses Blatt aufgefangen, so wird die Helligkeit des Bildes dieselbe sein, wie wenn die Linse durch ein Oberflächenstück der Sonne von gleicher Grösse ersetzt würde, durch welches das Blatt auf dieselbe Entfernung hin erleuchtet würde.

510. Hierdurch kann man sich ungefähr eine Vorstellung machen, wie riesengross die Helligkeit der Sonne ist, und welches *unter sonst gleichen Umständen* die Distanz ist, auf [**242**] welche sich irdische Körper entzünden würden. Denn die Wärmewirkung eines Stückes der Sonnenoberfläche, welches an der Stelle der Linse gedacht wird, ist mindestens ebensogross und vielleicht noch weit grösser als die Wärmewirkung der Strahlen dann ist, wenn sie mit Hilfe einer Linse im Brennpunkt derselben gesammelt werden. Derselbe Gegenstand wird also ohne Zweifel, wenn in dem einen, dann auch im andern Fall in Brand gerathen.

511. Die directe Beleuchtung λ bestimmt sich leicht nach Lehrsatz 5. Zieht man nämlich die Geraden gF und γF, so wird $gFG = GF\gamma$ der scheinbare Halbmesser des Gegenstandes $G\gamma$, von F aus gesehen, und hieraus wird (109, 121)

$$\lambda = \pi \sin^2 gFG \ .$$

512. **Lehrsatz 29.** *Ist der Gegenstand unendlich weit entfernt, so verhält sich die mittlere Helligkeit des Bildes zur directen Beleuchtung, wie das Quadrat der Tangente des scheinbaren Halbmessers der Linse, von F aus gesehen, zum Quadrat der Tangente des scheinbaren Halbmessers des Gegenstandes.*

Beweis: In diesem Fall ist nämlich (501)

$$\eta = \pi \operatorname{tg}^2 AFC \cdot \cos^2 gCG \ ,$$

wegen $gFG = gCG$ wird aber auch

$$\lambda = \pi \sin^2 gCG \ ,$$

hieraus folgt

$$\eta : \lambda = \operatorname{tg}^2 AFC : \operatorname{tg}^2 gCG \ .$$

513. Auch bei diesem Lehrsatz wurde von der Reflexion und der Zerstreuung der Lichtstrahlen abgesehen. Berücksichtigt man jedoch dieselbe, so wird

$$\eta : \lambda = \varkappa \operatorname{tg}^2 AFC : \operatorname{tg}^2 gCG \ .$$

514. Auf diese Weise ergibt sich also das Verhältniss zwischen der directen Beleuchtung und [**243**] der Helligkeit im Brennpunkt der Linse, vorausgesetzt dass das Verhältniss $1 : \varkappa$ gegeben ist, welches die Undurchsichtigkeit und Zerstreuungsfähigkeit der Linse ausdrückt. Man hat aber gesehen, dass man zumeist setzen darf

$$\varkappa \operatorname{tg}^2 AFC = \sin^2 AFC \ ,$$

und da der Winkel AFC selten $> 20^\circ$ ist, so wird man für Gegenstände, deren Halbmesser kleiner als 10 bis 15 Grad ist, sehr angenähert schreiben dürfen:

$$\eta : \lambda = AFC^2 : gFG^2 \ .$$

Setzt man z. B. den Winkel $AFC = 15^\circ$ und den scheinbaren Halbmesser der Sonne $= \frac{1}{4}^\circ$, so wird

$$\eta : \lambda = 15^2 : (\tfrac{1}{4})^2 = 60^2 : 1 = 3600 : 1 \ .$$

In diesem Fall wird also die Helligkeit des Sonnenbildes im

Brennpunkt der Linse 3600 mal so gross als die Helligkeit eines Blattes, welches direct von der Sonne beleuchtet wird.

515. Da ferner ist (513)

$$\eta : \lambda = \varkappa \operatorname{tg}^2 AFC : \operatorname{tg}^2 gCG ,$$

so wird

$$\varkappa = \frac{\eta \operatorname{tg}^2 gCG}{\lambda \operatorname{tg}^2 AFC} .$$

Wenn man daher einen Versuch so einrichten kann, dass $\eta = \lambda$ wird, so ergibt sich $\varkappa$ durch die Winkel gCG und AFC und in diesem Fall wird

$$\varkappa = \frac{\operatorname{tg}^2 gCG}{\operatorname{tg}^2 AFC} .$$

Es ist aber

$$\operatorname{tg} gCG = \varphi F : FC$$
$$\operatorname{tg} AFC = AC : FC ,$$

woraus

$$1 : \varkappa = AC^2 : \varphi F^2 .$$

Hat man also die Oeffnung einer Linse in der Weise verkleinert, dass die Helligkeit des Bildes derjenigen Helligkeit, welche die directe Beleuchtung erzeugt, gleich wird, [**244**] *so verhält sich die Lichtmenge, welche auf die Oeffnung der Linse auffällt, zu derjenigen, welche gebrochen wird, d. h. durch die Linse hindurchgeht, wie der Flächeninhalt der Oeffnung der Linse zum Flächeninhalt des Bildes.*

516. Hieraus folgt also, dass man durch einen einzigen Versuch die Lichtmenge bestimmen kann, welche von der Linse reflectirt und zerstreut wird; dieser Betrag ist $= 1 - \varkappa$. Da aber das Verhältniss $1 : \varkappa$ nur wenig von der Gleichheit verschieden ist, so werden sich offenbar die Flächeninhalte einerseits der Oeffnung der Linse, andererseits des Bildes nur wenig von einander unterscheiden. Daher empfiehlt es sich, den Versuch so anzuordnen, dass beide Flächenstücke eine Grösse erhalten, welche eine bequeme Messung gestattet. Denn kleinere Flächenstücke, wie z. B. das Bild der Sonne, einer Kerze, des Mondes im Brennpunkt einer stark convexen Linse, lassen sich weniger leicht und weniger genau durch Messung bestimmen. Da überdies eine Kerzenflamme hinsichtlich ihrer Grösse sehr veränderlich ist, so ist sie für diesen Zweck nicht brauchbar, weil die directe Beleuchtung von dieser Grösse abhängt, während die Helligkeit des Bildes nur wenig dadurch beeinflusst wird.

Ich habe deshalb geglaubt, die Sache folgendermaassen anfassen zu müssen.

517. **Versuch 19.** Ein Zimmer wurde gut verdunkelt und nur ein Fenster offen gelassen, durch welches das Licht eintreten konnte. Der Himmel war überall mit ziemlich gleichmässig hellen Wolken bedeckt. An der Wand, welche sich dem Fenster gegenüber befand, wurde ein weisses Blatt befestigt, und durch eine davor aufgestellte Sammellinse wurde ein Bild des Himmels, so weit er durch das Fenster sichtbar war, erzeugt und auf dem Blatte aufgefangen. Nun fiel dasselbe Licht auf directem Wege auf die übrigen Theile des Blattes auf, und so konnte ich sehen, dass ich einen grossen Theil der Linse mit einem ebenen Schirme [**245**] bedecken musste, wenn die Helligkeit des Bildes der directen Beleuchtung gleich werden sollte.

Der Kreis AB stelle die Oberfläche der Linse dar, und der Theil FBG derselben sei durch einen ebenen Schirm FGE bedeckt. Die Fläche AFG wurde in einen gleichgrossen Kreis HI verwandelt, um bei Erneuerung des Versuchs eine kreisförmige Oeffnung herstellen zu können, welche mit der Linse concentrisch wäre. Man konnte dann also versuchen, ob dies die Oeffnung war, bei welcher die Helligkeit des Bildes der directen Beleuchtung gleich wird.

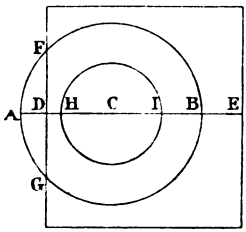

Fig. 47.

Hierauf wurden die nachstehenden Entfernungen und Strecken gemessen, und zwar in Rheinischen Fussen und deren Decimaltheilen: Fig. 46:

die Distanz	$GF =$	19.833
» »	$CF =$	0.521
also	$GC =$	19.312
ferner	$AB =$	0.191
die Höhe des Fensters. . . .	$=$	2.403
dessen Breite	$=$	1.722
also der Inhalt	$=$	4.138
das entspricht einem Kreis, dessen Durchmesser	$g\gamma =$	2.295
ebenso war der Durchmesser des Bildes	$\varphi f =$	0.065
	$DC = CE =$	0.502
der Halbmesser der Oeffnung der Linse	$=$	0.071

518. Da nun die Gleichung gilt (515)

$$1 : \varkappa = AC^2 : \varphi F^2 = AB^2 : \varphi f^2 ,$$

so wird in unserem Versuche

$$1 : \varkappa = 0.071^2 : 0.065^2 = 71^2 : 65^2 ,$$

und daher sehr nahe

$$1 : \varkappa = 37 : 31 = 6 : 5 .$$

[**246**] Bei dieser Linse wurde also ungefähr der sechste Theil des Lichts reflectirt und zerstreut; sie war also ziemlich unrein und weniger glatt.

519. Wegen

$$\operatorname{tg} gFG = \frac{g.G}{FG} = \frac{1.1475}{19.8330} = 0.0578581$$

ist der scheinbare Halbmesser, nämlich der Winkel

$$gFG = 3^\circ\, 18'\tfrac{2}{3} ,$$

woraus

$$\sin^2 gFG = 0.003336 ,$$

es wird also die directe Beleuchtung (511)

$$\lambda = 0{,}003336\,\pi .$$

520. Aehnlich wird

$$\operatorname{tg} AFC = \frac{955}{5210} = 0.1833013 ,$$

woraus

$$AFC = 10^\circ\, 23'\tfrac{1}{3} ,$$

und in ähnlicher Weise

$$GCg = 3^\circ\, 24' .$$

Wegen

$$\eta = \pi \operatorname{tg}^2 AFC \cos^2 GCg$$

wird also durch Ausführung der Rechnung

$$\eta = 0.03356\,\pi .$$

Dies ist die Helligkeit des Bildes, wenn das Licht durch die ganze Linse gebrochen wird. Dieselbe ist jedoch zu vermindern in dem Verhältniss, in welchem der Inhalt der ganzen Linse zu dem der übrigbleibenden Oeffnung steht. Dieses Verhältniss wurde zu 60 : 7 gefunden, und deshalb ist

$$\eta = 0.003915\,\pi ,$$

während eigentlich sein sollte

$$\eta = 0.003336\,\pi$$
$$\text{Differenz} = 0.000579\,\pi\,.$$

[**247**] Dies ist ungefähr ein Sechstel des directen Lichts, oder ein Siebentel derjenigen Lichtmenge, welche auf die Linse auffällt und an der Oberfläche derselben oder infolge der Heterogeneität der Theilchen reflectirt und zerstreut wird.

. . . .

523. Diese Bestimmung des Lichtverlustes in Sammellinsen ist von höchster Bedeutung deshalb, weil wir später sehr vielen wichtigen Versuchen begegnen werden, die man ohne Hilfe jener Bestimmung nicht anstellen kann. Man muss deshalb den eben beschriebenen Versuch mehrmals sorgfältig wiederholen, um aus allen das Mittel zu nehmen und so der Wahrheit so nahe als möglich kommen zu können. Da nun im Folgenden vorzugsweise die centrale Helligkeit in Betracht kommt, so wollen wir zunächst das Verhältniss bestimmen, in welchem für die ausserhalb des Centrums F liegenden Punkte die Helligkeit abnimmt. Hierdurch [**248**] wird sich ergeben, wie gross der Winkel φCF werden darf, ohne dass das Auge in dem Raume φf eine Verschiedenheit der Helligkeit zu bemerken vermag. Denn man sieht leicht im Voraus, dass die Helligkeit vom Centrum F aus gegen φ und f hin nur wenig abnimmt, wenn nicht der Winkel AFC sehr beträchtlich ist.

524. In g befinde sich also ein unendlich kleines Element $= 1$, die Strahlenmenge, welche von diesem Element aus auf die Oberfläche der Linse oder deren Oeffnung und daher auch in das entsprechende Element f des Bildes gelangt, heisse Q. Hierbei sehen wir zunächst von der Reflexion und Zerstreuung der Strahlen ab, um erst später darauf Rücksicht zu nehmen. Man erinnere sich nun, dass man dieselbe Menge Q erhält, sowohl wenn man sich das Element g, wie auch, wenn man sich die Oberfläche oder die Oeffnung der Linse als leuchtend denkt (196, 197). Also wird (207)

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{h^2 + x^2 - b^2}{\sqrt{(h^2 + x^2 - b^2)^2 + 4b^2h^2}}\right).$$

Diese Gleichung verwandelt sich leicht in die folgende

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{(h^2 + x^2 + b^2) - 2b^2}{\sqrt{(h^2 + x^2 + b^2)^2 - 4b^2x^2}}\right).$$

Es ist aber

$$gA^2 = h^2 + x^2 - 2bx + b^2$$
$$gB^2 = h^2 + x^2 + 2bx + b^2 .$$

Hieraus wird

$$h^2 + b^2 + x^2 = \tfrac{1}{2}(gB^2 + gA^2)$$
$$2bx \quad = \tfrac{1}{2}(gB^2 - gA^2) .$$

[249] Setzt man diese Werthe ein, so wird nach gehöriger Reduction

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{gB^2 + gA^2 - 4b^2}{2gB \cdot gA}\right) .$$

Da aber

$$\frac{gB^2 + gA^2 - 4b^2}{2gB\,gA} = \cos BgA ,$$

so wird

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi(1 - \cos BgA) = \pi \sin^2 \tfrac{1}{2} BgA .$$

525. Nun findet sich aber der Inhalt des dem Element g entsprechenden Bildes durch das Verhältniss

$$\frac{CF^2}{CG^2} = \frac{Ff^2}{Gg^2} .$$

Daher ist seine Helligkeit

$$\eta = \pi \frac{CG^2}{CF^2} \sin^2 \tfrac{1}{2} BgA .$$

Wenn nun die Linse AB von g aus gesehen wird, so wird $\tfrac{1}{2}BgA$ der kleinere scheinbare Halbmesser derselben sein; die Beleuchtung η verhält sich also wie das Quadrat desselben. Dieser Lehrsatz ist also sehr ähnlich dem Lehrsatz 5 (109).

526. Der Winkel gCG ist nur in seltenen Fällen $> 20^o$. Für Punkte, welche näher beim Centrum liegen, kann man daher die Grösse $x : h$ als so klein ansehen, dass ihre höheren Potenzen vernachlässigt werden dürfen. Da ferner $b : h$ meistens eine sehr kleine Grösse ist, so kann man die Formel

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left[1 - \frac{(h^2 + x^2 + b^2) - 2b^2}{\sqrt{(h^2 + x^2 + b^2)^2 - 4b^2x^2}}\right]$$

[250] in die folgende zusammenziehen:

$$Q = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{(h^2 + x^2 + b^2) - 2b^2}{\sqrt{(h^2 + x^2 + b^2)^2}}\right).$$

Hieraus wird

$$Q = \pi \frac{b^2}{h^2 + b^2 + x^2} = \pi \frac{b^2}{h^2 + b^2} - \pi \frac{b^2 x^2}{(h^2 + b^2)^2} + \cdots$$

und mithin

$$\eta = \pi \frac{AC^2 \cdot CG^2}{CF^2 \cdot GA^2} - \pi \frac{AC^2 \cdot Gg^2 \cdot CG^2}{CF^2 \cdot GA^4} + \cdots$$

Bezeichnet man also die centrale Helligkeit des Bildes mit c, so wird

$$\eta = c\left(1 - \frac{Gg^2}{GA^2} + \cdots\right).$$

Daher verhält sich die Abnahme der Helligkeit sehr nahe wie das Quadrat der Tangente des Winkels gCG.

527. Nimmt man an, dass das Auge solche Helligkeiten noch als gleich empfindet, welche sich von einander um ein Zwanzigstel ihres Betrages unterscheiden, so wird

$$\mathrm{tg}^2 gCG = \tfrac{1}{20} = 0.05\ ,$$

woraus

$$\mathrm{tg}\, gCG = 0.2236\ .$$

Daher wird der Winkel gCG ungefähr $= 12\frac{1}{2}^{\circ}$.

So gross darf also der scheinbare Halbmesser des Objectes werden, bevor das Auge im Stande ist, an dem Bilde eine Differenz zwischen der Helligkeit der äussersten Punkte φ, f und derjenigen des Centrums F wahrzunehmen. Also darf man gerade in denjenigen Fällen, wo es erlaubt ist, die ausführlichere Rechnung abzukürzen, auch die centrale Helligkeit als die allen Punkten gemeinsame betrachten. Auf diese Weise hat man (500)

$$\eta = \pi\, \mathrm{tg}^2 AFC : \sec^2 AGC\ ,$$

und für unendlich entfernte Objecte

$$\eta = \pi\, \mathrm{tg}^2 AFC\ .$$

[**251**] 528. Man darf einen Gegenstand dann als unendlich entfernt ansehen, wenn der Halbmesser der Linse AC gegenüber der Entfernung GC, oder wenn der Winkel AGC verschwindend klein ist. Nun wird aber das Auge die Helligkeiten so lange als gleich empfinden, bis $\sec^2 AGC = 21 : 20$ ist, oder bis der Winkel $AGC = 12^{\circ}$ wird. Daher darf man eine Abkürzung dann gewiss zulassen, wenn der Winkel AGC nur 2 bis 3 Grad beträgt.

529. Man kann hier nebenbei bemerken, dass sich das Gesagte auch auf das Auge anwenden lässt, da die Helligkeit des Bildes auf der Netzhaut in genau derselben Weise bestimmt wird und dieselben Strahlenkegel auftreten. Ferner ist die Oeffnung der Pupille so klein, dass man die Gegenstände selbst dann noch als unendlich entfernt ansehen darf, wenn sie dem Auge so nahe sind, dass sie sich innerhalb der deutlichen Sehweite befinden. Hieraus erkennt man den Grund, warum die scheinbare Helligkeit der Gegenstände unabhängig ist von der Entfernung derselben, abgesehen von der Verminderung durch andere Ursachen, wie z. B. die Zerstreuung der Strahlen in der Luft. Hierdurch ist also der Unterschied zwischen scheinbarer Helligkeit und directer Beleuchtung klargestellt, welcher schon früher (37, 73, 79) als sehr beträchtlich bezeichnet wurde. Weiteres hierüber später.

530. Wir kommen jetzt auf die früher (64, 74, 84) in Aussicht gestellte Absicht zurück, zu zeigen, wie die Grundsätze der Photometrie unter einander zusammenhängen und durch Versuche gestützt werden. Man hat gesehen und es wurde durch Versuch 19 (517) bewiesen, dass die Helligkeit eines Bildes abhängig ist von der Helle des Objectes und von den Winkeln AGC und AFC, und dass dieselbe einfach auf den Winkel AFC reducirt werden kann, sobald der Gegenstand genügend weit entfernt [252] und sein scheinbarer Halbmesser hinlänglich klein ist. Ferner steht fest, dass man jene Helligkeit zu ändern im Stande ist, dadurch dass man nur die Oeffnung der Linse ändert. Man hat also ein Mittel, beliebig viele Bilder in der Weise zu verändern, dass ihre Helligkeiten gleich werden, und dann kann man aus dem Winkel AFC einen Schluss ziehen auf das Verhältniss der Helligkeiten der Gegenstände selbst. Auf diese Weise ist es also möglich, dieselben mit einander zu vergleichen. Hiermit hat man den

531. **Versuch 20.** In L befinde sich eine Kerze, in CD und AB stelle man zwei weisse Ebenen oder Blätter so auf,

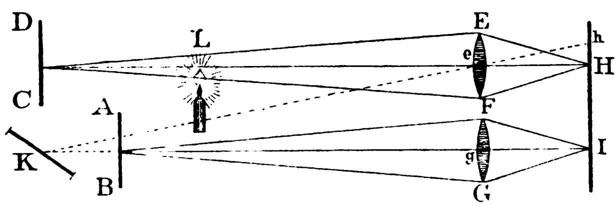

Fig. 48.

dass das Licht der Kerze senkrecht auf beide auffällt. Dann folgt aus dem Versuch 6, dass die einzelnen Theile derselben dann merklich gleich erleuchtet scheinen, wenn die Winkel DLC und ALB kleiner als 20 Grad sind; und dies kann man leicht erreichen, da die Grösse der Blätter willkürlich ist. Ferner mögen in EF und FG zwei gleiche Convexlinsen stehen und in H und I die Bilder der Blätter AB und CD aufgefangen werden. Da nun das Bild I, welches dem Blatt AB, das der Kerze näher ist, entspricht, heller ist, so folgt, dass man die Linse FG abblenden, d. h. ihre Oeffnung so lange verkleinern muss, bis beide Bilder gleich hell gesehen werden. Dann wird der Halbmesser der Oeffnung einer Linse in demselben Verhältniss stehen, wie die Entfernung des entsprechenden Blattes von der Kerze, oder der Flächeninhalt der Oeffnung wird sich verhalten wie das Quadrat dieser Entfernung.

532. Durch Ausführung des Versuches fand ich, dass dieser Satz thatsächlich besteht. Die Entfernung des Blattes AB nahm ich zu 10 Pariser Zoll, [253] die des Blattes DC zu $14\frac{1}{7}$ Zoll. Alsdann fand ich, dass die Oeffnung der Linse FG gleich der Hälfte derjenigen der Linse EF sein musste. Die Entfernung beider Linsen von der weissen Ebene betrug 7 Zoll, die Entfernung der Kerze H ungefähr 5 Fuss, der Halbmesser der Oeffnung EF war $= 16\frac{3}{4}'''$, derjenige der Oeffnung FG $= 11\frac{3}{4}'''$.

533. **Princip des Versuchs.** Bezeichnet man die Helligkeit des Blattes AB mit C, diejenige von DC mit c, so ist offenbar

$$\begin{aligned} \text{die Helligkeit des Bildes } I &= C \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} FIG \\ \text{des Bildes } H &= c \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} EHF\,. \end{aligned}$$

Nun sind aber die beiden letzteren Helligkeiten einander gleich, und da auch die Entfernung beider Linsen von der Ebene HI dieselbe ist, so wird

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} FIG &= \tfrac{1}{2} FG : gI \\ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} EHF &= \tfrac{1}{2} FE : eH = \tfrac{1}{2} FE : gI\,, \end{aligned}$$

also

$$C \cdot FG^2 = c \cdot FE^2$$

oder

$$C : c = FE^2 : FG^2\,.$$

Es ist aber (48)

$$C : c = LC^2 : LA^2$$

und daher

$$FE : FG = LC : LA\,.$$

Da dies dem Versuch zufolge wirklich stattfindet, so folgt, dass die Grundsätze der Photometrie, auf welche der Calcül aufgebaut wurde, richtig sind.

534. **Versuch 21.** Das Blatt, welches beim vorigen Versuche das nähere war, stellte ich in K auf, sodass beide von der Kerze gleich weit entfernt waren, während jedoch das Licht der Kerze auf das Blatt K unter einem schiefen Winkel $= 30^{\circ}$ auffiel. [**254**] Hierauf musste man die Oeffnung der Linse EF verkleinern, um beide Bilder gleich hell zu machen. Die Oeffnung der Linse FG fand sich nun doppelt so gross als die der Linse EF. Aber aus den Grundsätzen der Photometrie folgt: *dass bei gleicher Entfernung beider Blätter von der Kerze im Allgemeinen der Flächeninhalt der Oeffnung im umgekehrten Verhältniss stehen muss wie der Sinus des Incidenzwinkels, vorausgesetzt dass* $eH = gI$ *ist.*

Beweis: Bezeichnet man die Helligkeit des Blattes DC mit c, des Blattes K mit k, den Sinus des Incidenzwinkels am Blatte K mit s, so wird, weil das Licht auf das Blatt DC unter einem rechten Winkel auffällt (53),

$$c : k = 1 : s \, .$$

Aber wegen $DH = KI$ und $eH = gI$ wird auch die Helligkeit

$$H : I = EF^2 c : FG^2 k = EF^2 : FG^2 s \, .$$

Es ist aber $H = I$, also

$$EF^2 = s \cdot FG^2$$

oder

$$1 : s = FG^2 : EF^2 ,$$

wie zu beweisen war.

535. In diesen beiden Versuchen wurden die Entfernungen DH, BI, KI so gross genommen, dass sie gegenüber dem Durchmesser der Oeffnung der Linsen als unendlich angesehen werden konnten, wodurch sich die Entwickelungen eleganter gestalten liessen (527, 528). Aus demselben Grunde wurden ferner zwei gleiche Linsen gewählt, um $eH = gI$ setzen zu können. Im anderen Falle würde das, was über die Durchmesser der Oeffnungen gesagt wurde, für die Tangenten der Winkel EHe und FIg Geltung haben.

[**255**] 536. **Versuch 22.** Die Linse FG wurde entfernt und beide Blätter D und K so aufgestellt, dass sie von der Kerze

L gleichweit entfernt waren und die Strahlen auf beide senkrecht auffielen, während zugleich das eine Blatt *K* gegen die Ebene *HI* schief geneigt war. Die Strahlen traten also unter einem Winkel aus, welcher kleiner war, als ein Rechter. Es fand sich dann, dass die Bilder beider Blätter *H* und *h* dennoch gleich hell waren.

537. Hieraus folgt also, dass die Schiefe der Ausstrahlung keinen Einfluss auf die Helligkeit des Bildes hat, dass also die Dichtigkeit der Strahlen dieselbe ist, gleichviel ob sie mehr oder weniger schief austreten. Da dies auch für das Bild des Gegenstandes auf der Netzhaut des Auges gilt (529), so folgt hieraus die Uebereinstimmung des vorliegenden Versuches mit denjenigen, welche im Früheren (74 bis 84) besprochen wurden, und ferner ergibt sich, was früher (87) bewiesen wurde, dass man eine leuchtende Fläche von schiefer Stellung ersetzen kann durch eine andere, welche dem Gegenstand senkrecht gegenübersteht. Man bemerke ferner, dass bei diesen Versuchen die grössere oder geringere Durchsichtigkeit der Linse gleichgiltig ist, falls nur bei den zwei ersteren Versuchen (531, 534) die beiden Linsen, welche angewendet werden, gleich hell sind; man kann dies feststellen, wenn man das Bild des nämlichen Blattes *DC* im Brennpunkt beider Linsen auf einem weissen Blatt auffängt. Denn beide müssen gleich hell gesehen werden, so lange die Winkel *EHe* und *FIg* gleich sind. Da diese aber von der Oeffnung der Linse abhängen, so kann man sie leicht zur Gleichheit bringen.

538. Werden die Strahlen nach ihrer Brechung durch die Linse ausserhalb des Brennpunktes auf einer weissen Fläche aufgefangen, z. B. in *RS*, [256] so ergibt sich aus dem Früheren

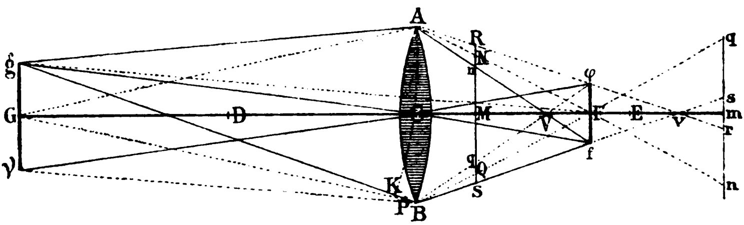

Fig. 46.

ohne Schwierigkeit die Helligkeit dieser Fläche. Dieselbe ist jedenfalls kleiner als die Helligkeit des Bildes *φf* und in hohem

Maasse abhängig von der scheinbaren Grösse des leuchtenden Gegenstandes. Man kann diese Sache in folgender Weise behandeln.

539. Wie man früher schon gesehen hat, entstehen hinter der Linse unendlich viele Strahlenkegel, welche die Oeffnung der Linse als gemeinsame Basis haben, während ihre Spitzen auf einer krummen Fläche liegen, an deren Stelle man eine mit dem Radius CF beschriebene Kugeloberfläche gesetzt denken kann. So lange jedoch der Winkel φCF nur wenige Grad beträgt, wird man statt der Fläche ohne merklichen Fehler die Ebene φf substituiren dürfen. Der mittlere AFB unter diesen Kegeln steht senkrecht auf der Basis, während alle übrigen mehr oder weniger dagegen geneigt sind. Die äussersten Kegel seien $A\varphi B$ und AfB. Alle Kegel durchschneiden ferner die Ebene RS, und der mittlere AFB schneidet hier einen Kreis aus, dessen Durchmesser NQ ist und dessen Centrum auf der Axe der Linse in M liegt. In ähnlicher Weise schneiden auch die übrigen Kegel Kreise aus, welche die gleiche Grösse haben, wie der mittlere Kreis, jedoch excentrisch gelegen sind. Mithin gibt es in der Ebene SR einen kreisförmigen Raum vom Durchmesser nq, welcher allen diesen Kreisen gemeinsam ist. In diesem Raum findet das Maximum der Helligkeit statt, weil hier die Strahlen von allen Kegeln auftreffen. Dagegen wird die Helligkeit in der Richtung von n nach R und von q nach S hin abnehmen und in den äussersten Punkten R und S vollständig verschwinden.

540. Obzwar also das Licht in der Ebene RS ungleichmässig vertheilt ist, so wird doch der mittlere Theil nq in der Weise gleichmässig beleuchtet, als ob alle Kegel mit dem mittleren Kegel AFB zusammenfielen. Mithin ergibt sich die Helligkeit dieses Stückes nq, wenn man die Menge aller Strahlen, welche die Linse durchdringen [**257**] und sich in der Bildebene φf vereinigen, durch den Inhalt eines Kreises dividirt, dessen Durchmesser $= NQ$ ist.

541. Nun hat man früher (497) gesehen, dass

$$q = \frac{\pi^2 G g^2 AC^2}{g P^2},$$

bezeichnet man also die Helligkeit in qn mit η', so wird, da der Inhalt des Kreises $NQ = \pi NM^2$ ist,

$$\eta' = \frac{\pi\, G g^2 \cdot AC^2}{g P^2 \cdot NM^2}.$$

542. Diese Helligkeit ist noch zu vermindern nach Maassgabe der Lichtschwächung, welche infolge der Reflexion und der Brechung durch die Linse entsteht. Uebrigens muss man wohl beachten, dass bei zunehmender Distanz CM der Halbmesser nq abnimmt, bis er schliesslich in V ganz verschwindet, nämlich in dem Punkte, wo die Seiten Af und $B\varphi$ der äussersten Kegel die Axe schneiden. Daher kann die gefundene Formel nur bis zu der Distanz CV ausgedehnt werden.

543. Diese Distanz ist um so grösser, je grösser die Oeffnung der Linse und je kleiner der Durchmesser des Bildes ist. Stellt also φf das Bild der Sonne oder des Mondes dar, und beträgt der Winkel AFC 10 Grad oder mehr, so liegt der Punkt V dem Centrum F so nahe, dass die Distanz VF nahezu verschwindend ist.

544. In ähnlicher Weise gibt es hinter dem Bildpunkt F einen Punkt v, welcher dem Punkt V analog ist. Verschiebt man dann die Ebene RS bis nach qn, so hat man auch in sr ein kreisförmiges Flächenstück, welches durch alle Strahlenkegel beleuchtet wird. Die Helligkeit desselben findet sich auf dieselbe Weise =

$$\eta'' = \frac{\pi \cdot G g^2 \cdot AC^2}{g P^2 \cdot mn^2}.$$

[258] 545. Vergleicht man diese beiden Helligkeiten mit der Helligkeit des Bildes im Brennpunkt, nämlich mit (497)

$$\eta = \frac{\pi \cdot G g^2 \cdot AC^2}{g P^2 \cdot \varphi F^2},$$

so findet man

$$\eta \cdot \varphi F^2 = \eta' \cdot MN^2 = \eta'' \cdot mn^2,$$

. . . .

[263] Kapitel IV.

Ueber die Brechung des Lichts durch mehrere Linsen und über die mehrfache Reflexion und Brechung durch eine und dieselbe Linse.

. . . .

[280] 596. Man habe zwei Linsen ef und EF, ihre gemeinsame Axe sei $AdDC$, der Gegenstand sei Aa, das erste Bild Bb, das zweite Cc. Das letztere werde auf einer weissen

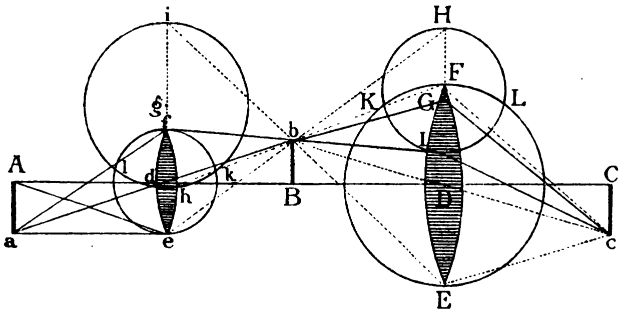

Fig. 55.

Ebene aufgefangen und es sei seine Helligkeit zu berechnen. Hierzu zunächst einige Vorbemerkungen.

597. Man sehe zunächst ab von demjenigen Licht, welches von beiden Linsen reflectirt und zerstreut wird, da man nach Ausführung der Rechnung leicht darauf Rücksicht nehmen kann.

598. Ferner sieht man leicht, dass sich die Helligkeit des Bildes Cc aus dem Früheren ergibt, sobald man annehmen darf, dass alles Licht, welches in das erste Bild Bb eintritt, auch in das zweite Cc gelange, was wenigstens in den meisten Fällen stattfindet. *Bestimmt man nämlich die Menge der Strahlen, welche auf die Objectivlinse fe auffallen, so wird diese Menge, falls sie vollständig nach Cc gelangt, durch den Flächeninhalt des Bildes Cc zu dividiren sein.* Oder, was genau dasselbe ist: *Man berechne die Helligkeit des Bildes Bb, dann verhält sich diese zur Helligkeit des Bildes Cc, wie der Inhalt von Cc zum Inhalt von Bb.* Die Rechnung selbst stützt sich hinsichtlich der Grösse der Bilder auf die Principien der Dioptrik, hinsichtlich der Strahlenmenge oder der Helligkeit

des Bildes Bb auf diejenigen Sätze, welche im vorigen Capitel bewiesen wurden.

599. Hat man mehr als zwei Linsen, so ist die Sache ebenso zu behandeln, sobald nur bewiesen ist, dass alles Licht, welches auf die Objectivlinse fe auffällt, sich im Bilde Cc wieder vereinigt. Dieser Annahme stehen jedoch häufig zwei [**281**] Umstände hindernd entgegen, auf welche wenigstens hingewiesen werden möge.

600. Von einem gegebenen Punkte a des Gegenstandes aus fallen, wie man sieht, die Strahlen durch den Strahlenkegel fae auf die Oberfläche oder die Oeffnung der Objectivlinse fe, sodann vereinigen sie sich durch den zweiten Kegel fbe wieder im Punkte b und gehen schliesslich in derselben Richtung fortschreitend später wieder auseinander durch den Kegel HbI; die Grundfläche dieses Kegels ist der Kreis $IKHL$ in der verlängerten Ebene der Linse EF. Nun wird aber die Oberfläche der Linse bloss durch den Kreis $EKFL$ gebildet, und hieraus folgt leicht, dass die Strahlen, welche vom Punkte a aus auf die Linse fe auffallen, einerseits nicht alle auf die Oberfläche der Linse FE gelangen, andererseits sich nicht auf die gesammte Oberfläche derselben ausbreiten. Denn diejenigen Strahlen, welche auf das sichelförmige Stück $KHLF$ auffallen, gelangen nicht in das Bild Cc; andererseits gelangen vom Punkte b aus auf das gleichfalls sichelförmige Stück $KELI$ der Linse überhaupt keine Strahlen. Hierdurch ist klar, dass die Helligkeit des Punktes c nur von solchen Strahlen herrührt, welche in den linsenförmigen Raum $KFLI$ eintreten.

601. Man ziehe die Geraden Ebi und Fbh und beschreibe mit den Durchmessern fe und hi die Kreise $flek$ und $ilhk$, so werden diese den Kreisen $HLIK$ und $FKEL$ entsprechen und denselben proportional sein, und die Strahlen, welche in den Raum $KFLI$ einfallen, sind dieselben wie die, welche in den entsprechenden Raum der Objectivlinse $lfkh$ auffielen. *Diese Menge muss man also durch den Inhalt des Raumes c dividiren, um die Helligkeit des Punktes c zu finden.*

602. *Nimmt man den Gegenstand als unendlich entfernt an, so verhält sich diese Menge zu derjenigen Strahlenmenge, welche auf die ganze Oberfläche der Linse auffällt, wie der Inhalt des Flächenstückes* $lfkh$ [**282**] *zum Inhalt der ganzen Oeffnung* $lfke$; *und in demselben Verhältniss steht auch die Helligkeit in c.*

603. Gehen Strahlen von einem Punkte A aus, der sich auf

der Axe befindet, so treten zwar ähnliche Strahlenkegel auf; jedoch ist in diesem Fall $flek$ die erste Grundfläche, und diese ist der Oberfläche der Linse fe gleich und mit ihr concentrisch, während die zweite Grundfläche dem Kreise $HLIK$ gleich und mit der Linse FE concentrisch ist. *So lange also der Flächeninhalt des letzteren Kreises nicht grösser als derjenige der Linse ist, werden alle Strahlen, welche vom Punkte A aus auf die Objectivlinse fe auffallen, auch in das Bild C des Punktes gelangen, und die Helligkeit desselben wird also ihr Maximum erreichen.* Dasselbe wird stattfinden, wenn der Kreis $HLIK$ ganz in die Oberfläche der Linse FE hineinfällt.

604. Sobald dagegen der Kreis HI grösser ist, als die Oberfläche der Linse FE, und wenn er mit ihr concentrisch ist, so wird die Wirkung dieselbe sein, als ob die Oeffnung der Objectivlinse fe so weit verkleinert würde, dass $HI = FE$ wird. Man nehme an, Cc sei der Gegenstand, so wird Aa sein Bild sein, und da die Fläche $ilhk$ grösser ist als die Oberfläche der Linse fe, so folgt, dass die Oeffnung der Objectivlinse $FE = HLIK$ sein darf, wenn der Punkt A dieselbe Beleuchtung erhalten soll, welche er bei unverändert bleibender Oeffnung FE erhalten hat.

605. In derselben Weise bestimmt sich die Strahlenmenge, welche in einen gegebenen Punkt des Bildes dann eintritt, wenn mehr als zwei Linsen dazwischen liegen.

606. Es seien, um das Gesagte durch ein Beispiel zu erläutern, FE und fe zwei Linsen, AC ihre gemeinsame Axe,

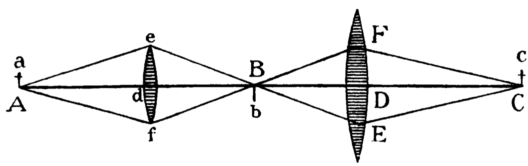

Fig. 56.

C der Gegenstand, B das erste, A das zweite Bild; man suche die centrale Helligkeit des letzteren. Hierzu sei [**283**]

die Brennweite der Linse FE . . . $= \varphi$
» » » » fe . . . $= f$
» Entfernung CD des Gegenstandes $= \delta$
» Distanz dD der Linsen. . . . $= \beta$,

dann ist nach den Sätzen der Dioptrik

$$DB = \frac{\delta\varphi}{\delta - \varphi},$$

woraus

$$Bd = \frac{\beta(\delta - \varphi) - \delta\varphi}{\delta - \varphi},$$

$$Ad = \frac{Bd \cdot f}{Bd - f} = \frac{f\beta(\delta - \varphi) - f\varphi\delta}{(\beta - f)(\delta - \varphi) - \delta\varphi}.$$

607. Es seien nun CF und CE zwei solche Strahlen, welche nach der Brechung durch die Linse FE auf den Rand der Linse ef treffen; dann ist die Menge der Strahlen, welche das Bild A beleuchtet, offenbar enthalten im Kegel FCE. Bezeichnet man also DF mit a, de mit b, so wird

$$b : a = dB : BD = [\beta(\delta - \varphi) - \delta\varphi] : \delta\varphi.$$

Durch diese Gleichung bestimmt sich also die Oeffnung der einen Linse durch den Inhalt der anderen.

608. Sucht man jedoch die Beleuchtung im Centrum, so denke man sich in Cc ein unendlich kleines Flächenstück, dessen Halbmesser $= 1$ und dessen Inhalt $= \pi$ sei. Dann wird

$$\text{der Inhalt des ersten Bildes } Bb = \frac{\pi DB^2}{DC^2} = \frac{\pi\varphi^2}{(\delta - \varphi)^2},$$

$$\text{der Inhalt des zweiten Bildes } Aa = \frac{\pi DB^2 \cdot Ad^2}{DC^2 \cdot dB^2},$$

$$\text{oder} = \frac{\pi\varphi^2 f^2}{[(\beta - f)(\delta - \varphi) - \delta\varphi]^2}.$$

[284] 609. Bezeichnet man ferner die Menge der innerhalb FE einfallenden Strahlen mit q, die Helligkeit des Bildes Aa mit η, so wird (222)

$$q = \frac{\pi^2 FD^2}{FC^2} = \frac{\pi^2 a^2}{a^2 + \delta^2},$$

woraus also

$$\eta = \frac{\pi a^2 [(\beta - f)(\delta - \varphi) - \delta\varphi]^2}{(a^2 + \delta^2)\varphi^2 f^2},$$

oder

$$\eta = \frac{\pi a^2 [(\beta - f - \varphi)\delta - (\beta - f)\varphi]^2}{(a^2 + \delta^2)\varphi^2 f^2}.$$

610. Ist die Entfernung des Gegenstandes unendlich, so geht die Formel in die folgende über:

$$\eta = \frac{\pi a^2 (\beta - f - \varphi)^2}{\varphi^2 f^2}.$$

Dieselbe soll durch zwei Beispiele erläutert werden.

611. Erstes Beispiel. Sei FE die Objectivlinse, fe die Ocularlinse eines astronomischen Fernrohrs, welches in einem dunklen Zimmer stehe und das Bild der Sonne auffangen möge; man suche die centrale Helligkeit. Hierbei setze man die Brennweite der Objectivlinse $= 6' = 72''$, die der Ocularlinse $= \frac{3}{2}''$, den Halbmesser FD der Oeffnung $= \frac{3}{2}''$; dann wird

$$\varphi = 72''$$
$$f = \tfrac{3}{2}$$
$$a = \tfrac{3}{2}$$

Fängt man nun das Bild in einer Entfernung $= 2' = 24''$ auf, so wird $Ad = 24''$, und wegen

$$dB = \frac{Ad \cdot f}{Ad - f}$$

[285] wird also

$$dB = \frac{24 \cdot \frac{3}{2}}{24 - \frac{3}{2}} = \tfrac{8}{5}''$$

Wegen

$$BD = \varphi = 72''$$

wird daher

$$dD = \beta = 72 + \tfrac{8}{5}$$
$$\beta - f - \varphi = 72 + \tfrac{8}{5} - \tfrac{3}{2} - 72 = \tfrac{1}{10}''$$

und mithin

$$\eta = \frac{\pi a^2 (\beta - f - \varphi)^2}{\varphi^2 f^2} = \pi \frac{9}{4} \frac{1}{100} \frac{1}{72^2} \frac{4}{9},$$

oder

$$\eta = \frac{\pi}{518400} = 0.000001929\,\pi .$$

Die directe Beleuchtung ist aber $= \pi \sin^2 \frac{1}{4}^\circ = 0.000021662\,\pi$. In diesem Fall ist also ein Blatt, auf welches die Sonnenstrahlen direct auffallen, elfmal so hell wie das Bild, welches mit Hilfe dieses Fernrohrs im dunklen Zimmer erzeugt wurde. Die Helligkeit des ersten Bildes Bb wird $= \pi \operatorname{tg}^2 FBD$ (500, 501) oder

$= \pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 : 72^2 = 0.0004321\,\pi$, d. h. das Bild wird zwanzigmal so hell als bei directer Beleuchtung, und zweihundertmal so hell als die Helligkeit des zweiten Bildes aA ist.

612. Zweites Beispiel. Die Linse FE sei eine Sammellinse von grosser Brennweite. Die Sonnenstrahlen, welche auf sie auffallen, mögen zum Zweck einer stärkeren Verdichtung durch eine Collectivlinse aufgefangen werden. In diesem Fall liegt die Linse fe und der zweite Brennpunkt A der Objectivlinse näher, als der erste Brennpunkt B, wie es Fig. 57 zeigt. [**286**] Man setze nun, Fig. 57

$$\begin{aligned} a &= FD = 1' \\ \varphi &= DB = 8 \\ b &= fd \;= \tfrac{1}{4} \\ f &\quad\;\;\, = 1 \end{aligned}$$

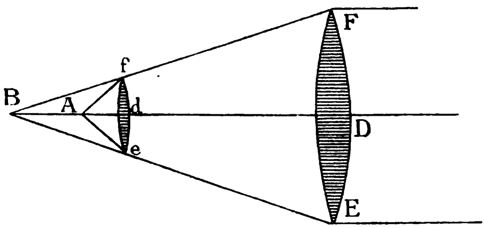

Fig. 57.

und bestimme dann die Stellung der Linse fe so, dass sie alle Strahlen auffängt. Es wird also

$$Bd : df = BD : DF,$$

mithin

$$Bd = \frac{df \cdot BD}{DF} = 2'$$

und demnach

$$\beta = Dd = 6'.$$

Setzt man diese Werthe ein, so wird

$$\eta = \frac{\pi a^2 (\beta - \varphi - f)^2}{f^2 \varphi^2} = \frac{9}{64}\pi = 0.140625\,\pi.$$

Es ist aber

die Helligkeit des ersten Bildes $= \frac{1}{64}\pi = 0.015625\,\pi$
die directe Beleuchtung . $= \pi \sin^2 \frac{1}{4}^\circ = 0.00002166\,\pi$
die absolute Beleuchtung . . . . . $= \pi$

Die Helligkeit des Bildes A ist also ungefähr der siebente Theil der absoluten Beleuchtung.

613. Alle diese Grössen sind zu verkleinern nach Maassgabe des Verhältnisses, in welchem das Licht von beiden Linsen reflectirt und zerstreut wird. Dasselbe bestimmt sich aber leicht nach dem Versuch 19. Für die Linse FE sei also diese Verkleinerung $= 1 : n$, für die Linse fe sei sie $= 1 : m$; hiernach wird sich die Helligkeit des ersten Bildes B offenbar vermindern nach dem Verhältniss $1 : n$, und die Helligkeit des zweiten Bildes A wird [**287**] abnehmen im zusammengesetzten Verhältniss $1 : mn$. Wendet man mehrere Linsen an, und ist der Grad ihrer Durchsichtigkeit bezw. $n, m, p, q, r, \ldots$, so wird in gleicher Weise die Helligkeit des letzten Bildes abnehmen in dem zusammengesetzten Verhältniss $1 : nmpqr \ldots$ Man weiss aber aus dem Früheren, dass für Gläser von mässiger Durchsichtigkeit der Coëfficient ungefähr $= \frac{6}{7}$ oder $\frac{5}{6}$ beträgt, daher wird bei der Anwendung mehrerer Linsen die Helligkeit der Bilder beträchtlich abnehmen. Da jedoch für jedes einzelne Glas der Grad der Durchsichtigkeit ein verschiedener ist, so ist es vorzuziehen, diese Verhältnisse durch Versuche zu bestimmen. Die Methode, deren man sich dabei bedienen kann, ist schon früher (517, fgde.) beschrieben worden.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

LAMBERT'S

PHOTOMETRIE.

(PHOTOMETRIA SIVE DE MENSURA ET GRADIBUS LUMINIS, COLORUM ET UMBRAE.)

(1760.)

Deutsch herausgegeben

von

E. Anding.

Zweites Heft:

Theil III, IV und V.

Mit 32 Figuren im Text.

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1892.

Dritter Theil.

Die Reflexion des Lichts durch dunkele Körper, experimentell und theoretisch betrachtet.

Kapitel I.

Ueber die Reflexion des Lichts an der Oberfläche von glatten dunkelen Körpern, besonders an Spiegeln; über die Intensität desselben.

[**288**] 614. Man weiss aus der Erfahrung, dass die Oberfläche jedes Körpers, wenn sie nicht schon an sich glatt ist, immer so weit geglättet werden kann, dass sie das Licht mehr oder weniger reflectirt. Beispielsweise sind die Oberflächen von Flüssigkeiten schon von selbst geeignet, eine gewisse Menge von Licht zu reflectiren. Das Glas, die Metalle und andere Körper, die im Feuer schmelzen, bekommen beim Guss eine glatte Oberfläche, die ihnen auch bleibt, wenn sie vom Feuer entfernt sind und wieder erhärten, sofern sie nicht Schlacken enthalten oder Rost hinzukommt. Hierher kann man auch die Edelsteine und die Salze rechnen, welche beim Krystallisiren eine regelmässige Gestalt und eine glatte Oberfläche annehmen. Eine solche kann man den Metallen, [**289**] den Steinen, den Holzarten und den anderen festen Körpern auch dadurch ertheilen, dass man sie gehörig glättet.

615. Es ist gleichfalls allgemein bekannt, dass die weniger glatten Körper die Eigenthümlichkeit haben, dass an ihren Oberflächen sich mehr oder weniger rauhe und hervorragende Theilchen erheben; in der That ist das Auge, wenn es mit dem Mikroskop bewaffnet ist, im Stande, dies wahrzunehmen; denn dann erscheinen selbst solche Flächen, an welchen das blosse Auge keine Spur von Rauhheit oder Unebenheit zu entdecken

vermag, dem Aussehen nach wie ein gepflügter Acker. Deshalb haben die Naturforscher von jeher die Oberfläche eines ebenen Körpers nur in dem Sinne als eben bezeichnet, in welchem man etwa die Erde als kugelförmig betrachtet. Denn beide Ausdrucksweisen vertragen sich nicht mit einer geometrischen Strenge.

616. Obzwar es in der Natur absolut ebene Oberflächen nicht gibt, so kann man sich doch diesem Zustande so weit nähern, dass die übrigbleibende Rauhheit unbeträchtlich klein wird. Dies kann man bekanntlich dadurch erreichen, dass man die hervorragenden Theilchen entweder abschabt oder eindrückt. Auf die letztere Art werden, wie jedermann weiss, Papier und leinene oder baumwollene Stoffe geglättet. Meistens muss man beide Methoden anwenden.

617. Ferner hat *Newton* gezeigt, dass selbst die dichtesten der dunkelen Körper durchsichtig werden, wenn sie in ganz dünne Blättchen ausgezogen werden, sodass sich hier eine Analogie zwischen dunkelen und durchsichtigen Körpern zu ergeben scheint. Man weiss aus der Erfahrung, dass dickeres Glas weniger durchsichtig ist, und dass die Dicke eine Grenze hat, bei welcher die Durchsichtigkeit entweder ganz verschwindet, oder sich wenigstens der Beobachtung durch das Auge entzieht. Diese Grenze liegt um so näher, je dunkeler ein Körper ist, [**290**] und ohne Zweifel ist eine solche auch noch bei den dunkelsten Körpern vorhanden, nur mit dem Unterschied, dass die Dicke des Blättchens, welches Licht durchlässt, hier viel geringer ist wegen der grösseren Undurchsichtigkeit. Ob es aber Fälle gibt, in welchen diese Dicke ganz verschwindend ist, dafür hat man keine Versuche. Wenigstens lässt das Gold, der dichteste aller Körper, das Licht noch durch, wenn es in ganz dünne Blättchen ausgezogen ist.

618. Ferner weiss man aus der Erfahrung, dass das Glas, das Wasser, die Luft und die meisten durchsichtigen Körper, obwohl sie fast alles Licht durchlassen, doch in gefärbtem, beispielsweise grünem oder blauem, Licht sichtbar sind, welches von den inneren Theilen reflectirt wird und um so dichter ist, je weiter diese Theile von der Oberfläche entfernt sind und je länger der Weg ist, welchen das Licht in diesem Körper zurücklegen muss, bevor es an die Oberfläche gelangt.

619. Ebenso gibt es durchsichtige Körper, welche nach der Vorderseite Licht von anderer Farbe reflectiren, als sie nach der Rückseite durchlassen. Diese Eigenschaft hat bekanntlich das mit blauem Sandelholz gefärbte Wasser.

620. Nach meiner Ansicht steht aber nichts im Wege, hier die Behauptung aufzustellen: *Beide Erscheinungen, nämlich dass man alle dunkelen Körper gefärbt sieht, und dass dickeres Glas grün scheint, haben denselben Grund, und diese Farbe geht nicht bloss von den Theilchen aus, welche sich an der Oberfläche befinden, sondern auch von den inneren.* Sei nämlich AB die Oberfläche des Körpers $ABED$. An ihr betrachte man die Schicht $ABba$; dieselbe möge das Licht durchlassen, solange der innere Theil $abED$ nicht da wäre. Dann ist jedenfalls klar, dass alle Theilchen der Schicht $ABba$ das [291] dort auffallende Licht so reflectiren, dass ein Theil davon nicht nur wieder nach oben fortschreitet, sondern sogar durch die Oberfläche AB wieder in die Luft austritt. Wenn nun diese Theilchen die Eigenschaft haben, nur gefärbtes, z. B. gelbes Licht zu reflectiren, so wird der Körper $ABED$ gelb erscheinen, und diese Farbe wird durch alle die Theilchen erzeugt, welche in der Schicht $ABba$ liegen. Das von der Gesammtheit der Theilchen reflectirte Licht gelangt also dadurch in das Auge, dass jene Schicht durchsichtig ist.

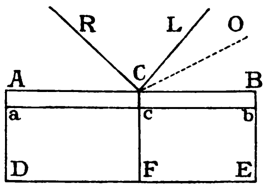

Fig. 58.

621. Da ferner alle diese Theilchen das Licht zerstreuen, so folgt, *dass auch hier der Emanationswinkel* (80) *auftritt und dass die Menge gefärbten Lichts, welches unter einem schiefen Winkel ausgestrahlt wird, mit dem Sinus des Emanationswinkels abnimmt* (81). Denn obwohl dieses Licht erborgt ist, so kann man seine Wirkung doch ansehen, als ob es dem dunkelen Körper eigenthümlich wäre. Es werden später Versuche vorkommen, welche die Wahrheit dieses Satzes a posteriori beweisen.

622. Bei den dunkelen Körpern tritt also, um alles Gesagte zusammenzufassen, eine dreifache Spaltung des Lichts ein. Sei AB die Oberfläche eines farbigen Körpers, welche in beliebigem Grade glatt sein möge. In der Richtung LC falle Licht auf dieselbe; dann wird ein Theil davon, den wir als den ersten bezeichnen wollen, in der Richtung CR so reflectirt, dass der Reflexionswinkel gleich dem Incidenzwinkel ist. Als zweiten Theil, welcher meistens sehr klein ist, betrachten wir denjenigen, welcher an der Oberfläche C von heterogenen und weniger ebenen Theilchen nach allen Seiten hin zerstreut wird (323,

331). [292] Der dritte Theil schliesslich, welcher übrig ist, tritt in den Körper selbst ein und wird von den Theilchen, welche die Schicht *ABba* zusammensetzen, theilweise reflectirt. Dies ist das farbige Licht, von welchem schon oben (620 fgde.) die Rede war.

623. Den ersten Theil, d. h. alles dasjenige Licht, welches in der Richtung *CR* reflectirt wird und welches insofern an der Oberfläche *AB* zu Stande kommt, als dieselbe glatt ist, werden wir als *reflectirtes Licht* (lumen reflexum) bezeichnen, und für dasselbe gilt alles dasjenige, was man in der Katoptrik über die Reflexion des Lichts zu beweisen pflegt. Den zweiten Theil, welcher infolge der Rauhheit der Oberfläche und durch die Heterogeneität der Theilchen zu Stande kommt, werden wir *zerstreutes Licht* (lumen dispersum) nennen, weil dasselbe in der That nach allen Seiten zerstreut wird. Der dritte Theil, welcher aus der Schicht *ABba* wieder austritt, nach allen Seiten ausgestrahlt wird und welcher den Körper in seiner Farbe sichtbar macht, soll als *ausgestrahltes* oder *farbiges Licht* (lumen emanans vel coloratum) bezeichnet werden (40, 621). Hierzu kann man noch einen vierten Theil zählen, welcher alles dasjenige Licht umfasst, das innerhalb des Körpers zerstreut wird; seine Menge ist sehr beträchtlich und übertrifft in sehr vielen Fällen alle drei übrigen Theile zusammengenommen. Dieses Licht also, welches vom Körper verschluckt wird, wollen wir *absorbirtes Licht* (lumen amissum) nennen.

624. Die ersten drei Theile vermischen sich häufig. Ein Auge nämlich, welches sich in der Richtung *R* befindet und die Oberfläche in *C* betrachtet, sieht das reflectirte, das zerstreute und das farbige Licht gleichzeitig. Jedoch wird das zerstreute und das farbige Licht von dem reflectirten dann überstrahlt und verdunkelt werden, wenn die Oberfläche *AB* sehr glatt und ihre Reflexionsfähigkeit sehr beträchtlich ist. In diesem Fall ist sie ein *Spiegel* oder wirkt wenigstens wie ein Spiegel. [293] Beträgt der Winkel *RCA* nur wenige Grad, so findet dies auch dann noch statt, wenn die Reflexionsfähigkeit schwächer und das gefärbte Licht intensiver ist. In diesem Fall können sogar Holz, schwarzer Marmor und andere Körper ähnlicher Art, wenn sie nur gehörig geglättet sind, das Licht so wie ein Spiegel reflectiren, sodass fast gar kein gefärbtes Licht vorhanden zu sein scheint.

625. Dies wird sich jedoch anders verhalten, wenn sich das Auge nicht auf der Geraden *R* befindet, sondern in einem beliebigen

anderen Punkte O. Denn in diesem Fall gelangt das reflectirte Licht CR überhaupt nicht in das Auge und man erblickt nur das zerstreute und das farbige Licht. Diese beiden Arten vermischen sich immer, da sich beide nach allen Richtungen hin verbreiten.

626. In anderer Weise vermischen sich auch reflectirtes und zerstreutes Licht. Ist nämlich die Oberfläche rauh, sodass noch Erhöhungen zurückbleiben, die nicht weggeschabt sind, und Vertiefungen oder Furchen, die nicht ausgefüllt sind, so wird durch diese das Licht nach den verschiedensten Richtungen reflectirt werden. Man darf dasselbe nicht demjenigen Licht zurechnen, welches in der Richtung RC reflectirt wird, vielmehr vermischt es sich mit demjenigen Licht, welches aus irgend einem Grunde zerstreut wurde. Solche Erhebungen und Vertiefungen kann man als heterogene Theilchen bezeichnen, da sie die Oberfläche des Körpers, welche vollkommen eben sein sollte, ungleichmässig und rauh machen. Man erkennt aber ohne Weiteres, dass diejenige Lichtmenge, welche zerstreut wird, dem reflectirten Licht entzogen wird, indem sich die Menge des letzteren vermindert, während sich die Menge des ersteren vermehrt.

627. Wie es aber unendlich viele Abstufungen hinsichtlich der Rauhheit gibt, so wird sich auch das reflectirte Licht auf unendlich viele Arten [**294**] mit dem zerstreuten vermischen. Beispielsweise bleibt immer, auch wenn die Oberfläche AB noch so rauh und höckerig sein mag, eine gewisse grössere Lichtmenge übrig, welche so reflectirt wird, dass sie in der Richtung CR oder einer nahezu parallelen Richtung fortschreitet. Hingegen gibt es keine Oberfläche, welche alles Licht zerstreut.

628. Nach diesen Vorbemerkungen bestimmen wir die Menge des reflectirten Lichts, d. h. diejenige Lichtmenge, welche von der Oberfläche des Körpers, sofern diese vollständig glatt ist, in der fraglichen Richtung CR zurückgeworfen wird. Man hat aber gesehen, dass sich der Unterschied zwischen durchsichtigen und dunkelen Körpern darauf zurückführen lässt, dass die Dicke Cc der Schicht $ABba$ beträchtlicher ist, wenn die Durchsichtigkeit eine grössere ist. Es gibt nämlich einerseits kaum einen Körper von einem solchen Grade der Durchsichtigkeit, dass er überhaupt kein Licht zerstreut, und andererseits wird es auch kaum so dunkele Körper geben, in welche überhaupt kein Licht eintritt oder bei welchen die Dicke $Cc = 0$ ist. Wenn man Glas, Krystalle und andere durchsichtige Körper zerbricht, so sind allerdings die Oberflächen der Bruchstücke bei aller

Ungleichheit dennoch glatt und vermögen das Licht zu reflectiren, während die meisten dunkleren und rauheren Steine, wenn sie zerbrochen werden, sich anders verhalten, indem sie alles Licht zerstreuen, dagegen keines reflectiren, wenn sie nicht absichtlich geglättet und zur Reflexion geeignet gemacht werden. Trotz dieses verschiedenen Verhaltens bleibt aber die Durchsichtigkeit der Schicht $ABba$, so klein sie auch sein mag, fortbestehen und dem Licht wird der Eintritt in den Körper auf keinen Fall verschlossen. Ausserdem kommt dieser Schicht dieselbe Ungleichmässigkeit zu [**295**] wie der Oberfläche selbst, falls sie rauh ist und sich von einer vollkommenen Ebene mehr oder weniger entfernt. Man muss sie daher im letzteren Falle eben machen durch Glätten.

. . . .

[**298**] 637. Um nun zum Einzelnen überzugehen, nehmen wir zuerst an, es gebe Spiegel, welche alles Licht reflectiren, und wir bestimmen durch Rechnung die Menge des reflectirten Lichts. Wenn es auch solche Spiegel nicht gibt, so ist es dennoch gut, ihre Eigenschaften zu untersuchen, da auf diese Weise eine leichtere rechnerische Grundlage geschaffen wird, und weil man nach Erledigung dieses Falles durch Versuche oder durch Rechnung feststellen kann, in welchem Verhältniss die Menge des reflectirten Lichts zu vermindern ist, wenn die Reflexionsfähigkeit kleiner war.

638. Sei also AB ein Planspiegel, der das Licht vollkommen reflectirt; auf ihn mögen die Strahlen CA, CB auffallen, welche vom Punkte C ausgehen. Die reflectirten Strahlen AD, BE mögen durch die Ebene DE aufgefangen werden. Nun weiss man aus der Katoptrik, dass die Incidenzwinkel CAK, CBK und die Reflexionswinkel DAL, EBL entsprechend gleich sind, und dass sich die Strahlen DA, EB in ihrer Verlängerung in einem Punkte F schneiden, welcher auf dem Einfallsloth CKF liegt.

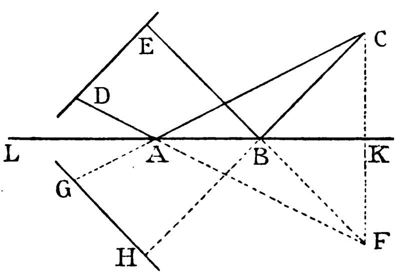

Fig. 59.

[**299**] 639. Hieraus folgt sofort, *dass die Beleuchtung der Ebene DE dieselbe ist, wie wenn der Spiegel beseitigt und*

der leuchtende Punkt nach F versetzt würde, d. h. an den Ort des Bildes des Punktes C. Denn hierdurch werden die einzelnen Strahlen AC, BC auf die Rückseite nach AF, BF verlegt, sodass sie dann auf directem Wege auf die Ebene DE auffallen, wohin sie vorher durch Reflexion gelangten.

640. Ferner verlängere man, während der leuchtende Punkt in C bleibt, die Strahlen CA und CB bis zu G und H, und mache $AG = AD$ und $BH = BE$. *Setzt man dann den Spiegel bei Seite und verlegt die Ebene DE nach GH, so hat man wieder dieselbe Beleuchtung.* Denn hierdurch werden die reflectirten Strahlen in directe verwandelt, welche in derselben Art und Anzahl auf die Ebene GH auffallen.

641. Da diese beiden Sätze Geltung haben für jede beliebige Lage, die der leuchtende Punkt C und die Ebene DE bezüglich des Spiegels einnehmen können, so folgt leicht, dass sie auch dann noch richtig sind, wenn man den Punkt C durch einen beliebigen leuchtenden Gegenstand ersetzt. Denn der Gegenstand liegt zu seinem Bilde in Beziehung auf den Spiegel symmetrisch. *Hierdurch wird also die Berechnung der Beleuchtung, welche durch Strahlen erzeugt wird, die von einem Planspiegel reflectirt sind, reducirt auf die Berechnung der directen Beleuchtung, welche früher* (Th. I., Kap. II) *eingehender behandelt wurde; dabei wird aber vorausgesetzt, dass man annehmen darf, der Spiegel reflectire alle Strahlen oder wenigstens er reflectire unter jedem Incidenzwinkel dieselbe Anzahl von Strahlen.* Denn es wird sich dieselbe Beleuchtung ergeben, welche stattfinden würde, wenn man den Spiegel beseitigt und den Gegenstand selbst an die Stelle des Bildes setzt, und im letzteren Fall die Helligkeit des neuen Gegenstandes in dem Maasse vermindert, in welchem das Licht bei der Reflexion durch den Spiegel geschwächt wird. Von diesem Satze wurde bei [**300**] verschiedenen, früher (59, 63, 256, 260) beschriebenen Versuchen Gebrauch gemacht.

642. Während man sich bei der Entwickelung dieses Falles, wo es sich um Planspiegel handelte, sehr kurz fassen durfte, ist eine grössere Ausführlichkeit nöthig bei der Betrachtung der Reflexion durch sphärische Spiegel, und zwar werden wir zuerst die Convexspiegel behandeln und wieder annehmen, dass sie das Licht vollkommen reflectiren (637). Man kann diese Verhältnisse auf verschiedene Art klarlegen, indessen werden wir das folgende Verfahren anwenden, welches zeigt, wie man die Berechnung für einen *einzelnen Lichtstrahl* anzustellen hat, um sodann

hieraus die Lichtmenge zu bestimmen, welche von einer ausgedehnten Oberfläche aufgefangen wird.

643. Sei also (Fig. 60) L ein leuchtender Punkt, $AQNM$ ein sphärischer Convexspiegel. Man ziehe LCB und bezeichne der grösseren Deutlichkeit wegen A als den Pol und $AMNQ$ als einen Meridian. Sei ferner (Fig. 61) $A\mu\nu B$ ein zweiter

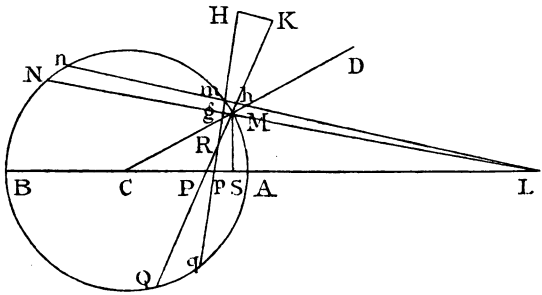

Fig. 60.

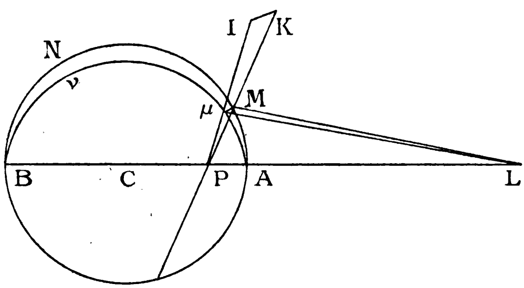

Fig. 61.

Meridian, welcher dem ersten unendlich benachbart ist, $M\mu$ ein Stück eines Parallelkreises, dessen Pol gleichfalls A ist. Wenn nun vom Punkte L aus auf das Element Mm des Meridians und auf das Element $M\mu$ des Parallels Strahlen fallen, so werden sie wegen der verschiedenen Krümmung beider Kreise offenbar so reflectirt, als ob der erstere vom Punkte R, der letztere vom Punkte P ausginge; sodass also diejenigen, welche auf den Meridian auffallen, anders divergiren als diejenigen, welche auf den Parallel auftreffen. Die Punkte P und R kann man nach den Principien der Katoptrik leicht in folgender Weise bestimmen.

644. Durch das Centrum C der Kugel und den Punkt M ziehe man eine Gerade CMD und mache den Winkel $KMD = DML$, so wird MK die Richtung des reflectirten Strahles sein, und diese [**301**] verlängere man rückwärts bis Q. Ebenso ziehe man durch m die Gerade Hmq, dann wird der Schnittpunkt R derjenige Punkt sein, von welchem aus die von Mm reflectirten Strahlen divergiren.

645. Verlängert man ferner LM und Lm bis N und n, so wird

$$Nn = \frac{LN \cdot Mm}{LM}$$

$$MN = MQ$$

$$mn = mq$$

$$mq = mn = MN - Mm - Nn$$

$$Qq = \qquad MQ - mq + Mm\,,$$

woraus

$$Qq = 2Mm + Nn = \left(2 + \frac{LN}{LM}\right) Mm\,.$$

Es ist aber

$$MR : RQ = Mm : Qq\,,$$

woraus

$$MR : RQ = 1 : \left(2 + \frac{LN}{LM}\right)$$

$$MR : MQ = 1 : \left(3 + \frac{LN}{LM}\right)\,.$$

Da aber

$$LN = \frac{LB \cdot LA}{LM}\,,$$

so folgt

$$MR : MQ = 1 : \left(3 + \frac{LB \cdot LA}{LM^2}\right)\,.$$

Ferner ist

$$MQ = MN = LN - LM\,,$$

woraus

$$MQ = \frac{LB \cdot LA - LM^2}{LM}\,,$$

[**302**] also endlich

$$MR = \frac{LM \cdot (LB \cdot LA - LM^2)}{LA \cdot LB + 3LM^2}\,.$$

646. In zweiter Linie ist, wenn man das Perpendikel MS fällt

$$CMP = DMK = DML$$
$$DML = MCL + MLC\,,$$

woraus

$$CMP = MCL + MLC$$
$$MPL = 2\,MCL + MLC\,.$$

Es ist aber

$$MS = CM \cdot \sin MCL = MP \sin MPL$$

und mithin

$$MP = \frac{MC \sin MCL}{\sin(2\,MCL + MLC)}\,.$$

647. Bezeichnet man nun CL mit a, den Radius CM mit 1, den Bogen AM mit v, so hat man

$$LM = \sqrt{a^2 - 2a\cos v + 1}$$
$$\sin CLM = \sin v \cdot LM$$
$$\cos CLM = (a - \cos v) : LM$$
$$\sin MPL = \frac{a \sin 2v - \sin v}{\sqrt{a^2 - 2a\cos v + 1}}$$
$$MP = \frac{\sqrt{a^2 - 2a\cos v + 1}}{2a\cos v - 1}$$
$$MR = \frac{(a\cos v - 1)\sqrt{a^2 - 2a\cos v + 1}}{2a^2 - 3a\cos v + 1}\,.$$

648. Ist der leuchtende Punkt unendlich entfernt, so wird $a = \infty$ und man hat kurz:

$$MP = CP = \tfrac{1}{2}\sec v$$
$$MR = \tfrac{1}{2}\cos v\,,$$

also

$$MP \cdot MR = \tfrac{1}{4}\,.$$

[**303**] 649. Das Licht, welches auf ein Element Mm des Meridians fällt, wird so reflectirt, als ob es vom Punkte R ausginge. Senkrecht zu den Geraden mp und mL ziehe man die Bögen Mg und Mh, dann werden die Dreiecke Mmh und Mmg wegen der gemeinsamen Hypotenuse und wegen des Reflexionsgesetzes einander congruent sein, sodass also $Mh = Mg$

ist. Daher ist in Mg und in Mh die Dichtigkeit des Lichts die gleiche, sie möge daher mit D bezeichnet werden. Ist ferner die Ebene HKI zur Richtung der Strahlen senkrecht, und wird die Dichtigkeit des Lichts in $HK = \delta$ gesetzt, so wird

$$D : \delta = RK : RM$$

$$\delta = D \frac{RM}{RK}.$$

Dies ist die Dichtigkeit des Lichtstrahls in HK, wenn derselbe vom Element Mm des Meridians reflectirt wird.

650. Um nun auch diejenige Dichtigkeit zu suchen, welche dem Element $M\mu$ des Parallels entspricht und welche mit d bezeichnet werden möge, muss man sich erinnern, dass das Licht so reflectirt wird, als ob es vom Punkt P der Axe käme. Bezeichnet man also die Dichtigkeit des Lichts, wie es auf $M\mu$ auffällt, mit D, so ist offenbar

$$D : d = PK : PM$$

und mithin

$$d = D \frac{PM}{PK}.$$

Also findet man durch Multiplication die wirkliche Beleuchtung

$$\eta = d \cdot \delta = \frac{PM \cdot RM}{PK \cdot RK} D^2 ,$$

oder durch Substitution der früher gefundenen Ausdrücke:

$$\eta = d \cdot \delta = \frac{[(a^3 + 3a)\cos v - a^2(1 + 2\cos^2 v) - 1] \cdot D^2}{[(4a^3 + 5a)\cos v - a^2(2 + 6\cos^2 v) - 1] \cdot PK \cdot RK}.$$

[**304**] 651. Die Dichtigkeit D^2 ist veränderlich, da sie von der Distanz LM abhängt; bezeichnet man also die Dichtigkeit in C mit $\varDelta$, so wird

$$D^2 = \varDelta a^2 : LM^2 = \frac{a^2 \varDelta}{a^2 - 2a\cos v + 1},$$

also

$$\eta = d \cdot \delta = \frac{a^3\cos v + 3a\cos v - a^2 - 2a^2\cos^2 v - 1}{4a^3\cos v - 2a^2 - 6a^2\cos^2 v + 5a\cos v - 1} \cdot$$

$$\cdot \frac{a^2 \varDelta}{(a^2 - 2a\cos v + 1) PK \cdot RK}.$$

652. Die vorstehenden verwickelten Formeln ziehen sich ausserordentlich zusammen, wenn man die Entfernung des leuchtenden Punktes L unendlich setzt. In diesem Fall wird nämlich $a = \infty$, und daher

$$\eta = d \cdot \delta = \frac{\varDelta}{4 PK \cdot RK},$$

und da man in diesem Fall hat

$$RM = \tfrac{1}{2} \cos v$$
$$PM = \tfrac{1}{2} \sec v \,,$$

so wird

$$PK \cdot RK = (MK + \tfrac{1}{2} \sec v)(MK + \tfrac{1}{2} \cos v)\,,$$

und mithin

$$\eta = d \cdot \delta = \frac{\varDelta}{4\, MK^2 + 2\, MK(\sec v + \cos v) + 1}\,.$$

653. Wenn man überdies annehmen darf, dass die Entfernung der Ebene KH unendlich gross ist gegenüber dem Durchmesser AB — was dann der Fall ist, wenn AB gegenüber der Distanz MK unendlich klein ist, — so wird in diesem Falle

$$PK = RK\,,$$

[305] und die Beleuchtung der Ebene KH wird im umgekehrten quadratischen Verhältniss der Entfernung abnehmen und unabhängig sein vom Incidenzwinkel oder dem Bogen AM; denn die letzte Formel geht in die folgende über:

$$\eta = d \cdot \delta = \frac{\varDelta}{4\, PK^2}\,.$$

654. Die Beleuchtung ist vollständig vom Bogen AM unabhängig, wenn $\sec v$ gegenüber der Distanz MK unendlich klein ist. *In diesem Fall verhält sich also die Kugel AQN wie ein leuchtender Punkt und die hervorgehende Beleuchtung verhält sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung.*

655. Im entgegengesetzten Falle, wenn sich der Winkel v nur sehr wenig von einem rechten unterscheidet und deshalb $\sec v$ unbeschränkt gross ist, kann diese Grösse zu der sehr grossen Entfernung der Ebene MK in einem endlichen Verhältniss stehen und man darf dann das zweite Glied im Nenner des Bruches

$$\eta = \frac{\Delta}{4\,MK^2 + 2\,MK(\sec v + \cos v) + 1}$$

nicht vernachlässigen, sondern man hat

$$\eta = \frac{\Delta}{4\,MK^2 + 2\,MK\sec v}\,,$$

und wenn in diesem Falle, wo sich also der Winkel v nur ganz wenig von einem rechten unterscheidet, die Distanz MK sehr klein und die Secante von v ihr gegenüber unbeschränkt gross wird, so ist

$$\eta = \Delta : 2\,MK\sec v\,.$$

656. Selbstverständlich ist Δ die directe Beleuchtung einer Ebene in C, wenn sie dem leuchtenden Punkt L senkrecht gegenübersteht, und man findet die Helligkeit η, wenn man die Helligkeit oder die Dichtigkeit der Strahlen von KH mit derjenigen in $M\mu$ multiplicirt, sodass man hat

$$\eta = d \cdot \delta\,.$$

. . . .

[**310**] 671. Man denke sich z. B. den Mond als einen vollkommen reflectirenden sphärischen Spiegel. Setzt man seinen Halbmesser $CQ = 1$, so wird der Halbmesser der Mondbahn $QS = \operatorname{cosec} 16' = 215$, und die entsprechende Oberfläche $= 184900\,\pi$. Die Menge der Sonnenstrahlen, welche auf die Mondfläche auffällt, ist $= \pi$, und da sich dieselbe über jene ganze Oberfläche gleichmässig verbreitet, so muss die Dichtigkeit derselben verkleinert werden im Verhältniss $184900\,\pi : \pi = 184900$. Bestimmt man nun mit Hilfe der früher mitgetheilten Formeln die Helligkeit der Kugel in s, wo sie ihr Maximum erreichen möge, so wird $v = 0$, $a = \infty$ und mithin (648) Fig. 60

$$MP = MR = \tfrac{1}{2} = CP$$
$$RK = PK = 215 - \tfrac{1}{2} = 214\tfrac{1}{2}\,.$$

Wegen (652)

$$\lambda = \frac{\Delta}{4PK \cdot RK}$$

wird also

$$\lambda = \frac{\Delta}{4 \cdot 214\frac{1}{2}^2}\,.$$

Aus einer roheren Rechnung fanden wir (670)

$$\lambda = \frac{\varDelta}{4 \cdot 215^2}.$$

Also beträgt die Differenz kaum $\frac{1}{215}$ des Betrags.

672. Bei der Behandlung der Concav- oder Brennspiegel wird man sich kürzer fassen dürfen, [**311**] da man die Helligkeit des Bildes im Brennpunkt auf dieselbe Art wird berechnen können, wie früher bei den Convexlinsen. Sei also ACB ein

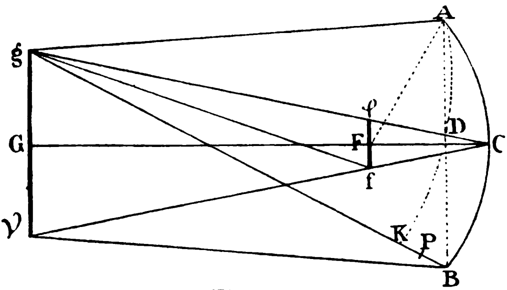

Fig. 64.

vollkommen reflectirender Concavspiegel, GC seine Axe, $gG\gamma$ das kreisförmige Object, φFf das Bild desselben. Die Strahlenmenge, welche das Object $g\gamma$ auf den Spiegel ausbreitet, sei $= q$, die mittlere Helligkeit des Bildes $= \eta$, der Durchmesser der Kugel $= 4a$, die Entfernung des Gegenstandes $GC = \delta$; dann hat man nach den Sätzen der Katoptrik

$$CF = \frac{a\delta}{\delta - a}.$$

673. Setzt man $AC = CB$, zieht sodann gA, gB, macht $gK = gA$ und halbirt KB in P, so werden nach der oben (495) gegebenen Definition gA und gB die Seiten des äussersten Kegels sein, und gP deren arithmetisches Mittel, mithin ist (222)

$$q = \frac{\pi^2 AD^2 \cdot Gg^2}{gP^2}.$$

Wegen

$$\eta = q : \pi Ff^2$$

wird dann

$$\eta = \frac{\pi AD^2 \cdot Gg^2}{Ff^2 \cdot gP^2}.$$

Dies ist also die gesuchte mittlere Helligkeit des Bildes.

674. Wenn AC nicht mehrere Grad beträgt, so wird man $DC = 0$ setzen dürfen und $AD = AC$; hierdurch wird näherungsweise

$$\eta = \frac{\pi AC^2 \cdot Gg^2}{Ff^2 \cdot gP^2}.$$

[312] Da aber

$$Gg : Ff = CG : CF,$$

so wird

$$\eta = \frac{\pi AC^2 \cdot GC^2}{CF^2 \cdot gP^2}.$$

675. Setzt man wie früher (499)

$$GC : gP = \cos\omega,$$

so wird

$$\eta = \pi \operatorname{tg}^2 AFC : \sec^2 \omega.$$

Aus diesen Formeln ergeben sich fast bis auf den Wortlaut dieselben Sätze, welche früher aus den entsprechenden Gleichungen für die Convexlinsen abgeleitet wurden (500 fgde). Deswegen unterlassen wir hier, sie zu wiederholen.

676. Wird das Bild φf durch ein Blatt Papier oder einen anderen Gegenstand aufgefangen, so wird eben durch diesen Gegenstand ein Theil der Strahlen, welche sonst auf den Spiegel hätten fallen müssen, aufgefangen und dadurch die Helligkeit des Bildes vermindert. Ist φF der Halbmesser des Blattes, so werden diejenigen Strahlen aufgefangen, welche der Gegenstand durch die unendlich vielen Einfallskegel auf den Raum $\pi\varphi F^2$ ausbreitet. Nennt man ihre Menge q' und zieht man gf, so wird (222)

$$q' = \frac{\pi^2 gG^2 \varphi F^2}{\left(\frac{g\varphi + gf}{2}\right)^2}.$$

Mithin wird die Menge der Strahlen, welche auf den Spiegel auffallen

$$q - q' = \frac{\pi^2 AC^2 \cdot gG^2}{gP^2} - \frac{\pi^2 g G^2 \cdot \varphi F^2}{\left(\frac{g\varphi + gf}{2}\right)^2}$$

und hierdurch ergibt sich also leicht die Abnahme der Helligkeit, welche das Bild durch ein dazwischengesetztes Blatt [313] oder den Gegenstand $f\varphi$ erfährt. In ähnlicher Weise bestimmt man die Abnahme der Helligkeit dann, wenn ein Spiegel genommen wird, welcher im Centrum durchbohrt ist, wie man sie für die katoptrischen Fernröhre und Mikroskope braucht.

677. Das bisher Gesagte gilt, wenn man die Spiegel als vollkommen reflectirend ansieht. Da es aber solche Spiegel kaum gibt, so muss man diejenige Abnahme der Helligkeit zu bestimmen suchen, welche durch die geringere Reflexionsfähigkeit verursacht wird. Wenn die Spiegel oder glatten Körper eben sind, so ist es nicht schwer, die betreffenden Versuche anzustellen . . . . .

678. **Versuch 24.** In L befand sich eine Kerze, welche ihre Strahlen senkrecht auf die vollständig weisse Mauer A warf, in C stand ein dunkler Körper, welcher den Theil B der Mauer beschattete. Sodann stellte ich in M, N, P, Q vier mit Quecksilber überzogene Glasspiegel auf, welche das Licht der Kerze nach derselben Stelle B der Mauer reflectirten. An dieser Bedingung festhaltend bestimmte ich dann durch Versuche diejenige Entfernung der Spiegel, [**314**] bei welcher der von ihnen beleuchtete Raum B dieselbe Helligkeit hatte, wie der andere Theil A der Mauer, welcher direct von der Kerze beleuchtet wurde. Ferner wurde darauf gehalten, dass das Licht sowohl auf den Spiegel wie auf B nahezu unter einem rechten Winkel auffiel, und dass die Flamme der Kerze möglichst kegelförmig war (312). Sodann wurden die Entfernungen der Spiegel von der Kerze und der Stelle B der Mauer gemessen, und ebenso die Entfernung der Kerze von der Mauer in A, und es fand sich in Zollen und Linien des Pariser Fusses:

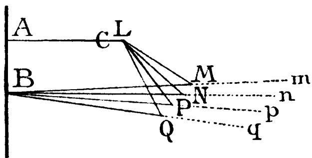

Fig. 65.

$$
\begin{aligned}
AL &= 81''\ 11''' \\
BM &= 95\quad 4 \\
LM &= 26\quad 2 \\
BN &= 97\quad 10 \\
LN &= 23\quad 8 \\
BP &= 98\quad 7 \\
LP &= 21\quad 8 \\
BQ &= 97\quad 11 \\
LQ &= 18\quad 5\,.
\end{aligned}
$$

679. Dieser Versuch wurde in folgender Weise rechnerisch behandelt. Es seien m, n, p, q die Bilder der Kerze; dann weiss man aus dem Früheren, dass man dieselben durch ebensoviele Kerzen ersetzen kann, und ferner ist nach den Sätzen der Katoptrik $Mm = ML$, $Nn = NL$, $Pp = PL$, $Qq = QL$. Wären nun die Spiegel M, N, P, Q vollkommen reflectirend, so würde die Wirkung dieselbe sein, wie wenn man die Bilder m, n, p, q durch vier Kerzen ersetzen würde, welche der Kerze L an Grösse und Helligkeit gleich wären, und da die Beleuchtung durch jede einzelne sich umgekehrt verhält wie [**315**] das Quadrat der Entfernung (48), so ist folglich in diesem Fall

$$\frac{1}{LA^2} = \frac{1}{Bm^2} + \frac{1}{Bn^2} + \frac{1}{Bp^2} + \frac{1}{Bq^2}.$$

Die Entfernungen, welche der Versuch gibt, sind jedoch zu klein, um dieser Gleichung zu genügen. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} AL &= 983''' \\ Bm &= 1458 \\ Bn &= 1458 \\ Bp &= 1443 \\ Bq &= 1396\,. \end{aligned}$$

Wegen

$$1 = \left(\frac{LA}{Bm}\right)^2 + \left(\frac{LA}{Bn}\right)^2 + \left(\frac{LA}{Bp}\right)^2 + \left(\frac{LA}{Bq}\right)^2$$

wird also

$$\begin{aligned} (LA : Bm)^2 &= 0.4546 \\ (LA : Bn)^2 &= 0.4546 \\ (LA : Bp)^2 &= 0.4641 \\ (LA : Bq)^2 &= 0.4958 \\ \text{also ist die Summe} &= 1.8691 \\ \text{während sie sein sollte} &= 1.0000\,. \end{aligned}$$

Die von den Spiegeln reflectirte Lichtmenge 1.8691 ist also in dem Verhältniss 1.8691 : 1.0000 zu verkleinern, wenn sie der directen Beleuchtung in A, welche $= 1.0000$ ist, gleich werden soll. Es ist aber $1.8691 : 1.0000 = 1 : 0.5352$. Bezeichnet man also die auf den Spiegel auffallende Lichtmenge mit 1, so wird dieselbe keineswegs vollständig reflectirt, sondern die reflectirte Lichtmenge ist nur gleich 0.5352 sodass mithin vom Spiegel der Theil 0.4648 absorbirt wird. Die reflectirte Lichtmenge ist also kaum mehr als die Hälfte der einfallenden.

[**316**] 680. Hätte man also nur zwei Spiegel genommen, so hätte man sie sehr nahe an die Kerze heranrücken müssen, um in B eine Helligkeit zu erzeugen, welche der directen Helligkeit in A gleich würde. Man sieht aber, dass man die Spiegel aus dem Grunde weiter von der Kerze entfernen muss, weil es besser ist, wenn der beleuchtete Raum in B klein ist, und wenn die Einfallswinkel des Lichts auf die Spiegel sich wenig von einem rechten unterscheiden. Man sieht von selbst, dass man aus diesem Grunde die Anzahl der Spiegel vermehren muss.

681. In derselben Weise, wie in dem erläuterten Beispiel, kann man die Reflexionsfähigkeit anderer glatten und ebenen Körper prüfen. Man muss sich jedoch hier daran erinnern, dass es Fälle gibt, in welchen sich das reflectirte Licht mit dem farbigen vermischt (623, 624), und da man das letztere davon nicht trennen kann, so muss es besonders bestimmt werden, wenn man darauf Rücksicht nehmen will.

. . . .

Kapitel II.

Experimentelle Vergleichung zwischen der Helligkeit der Lichtquelle oder des leuchtenden Gegenstandes und der Helligkeit eines beleuchteten dunkelen Körpers, dessen Oberfläche rauh und weniger glatt ist.

[**321**] 696. Im Eingang des vorigen Kapitels (622, 623) wurde bereits angegeben, dass das Licht beim Auftreffen auf die Oberfläche eines dunkelen Körpers dort in vier Theile gespalten wird, welche rechnerisch zu verfolgen sind; und zwar haben wir denjenigen Theil, welchen man *κατ᾽ ἐξοχήν* als *reflectirten* bezeichnet, in der Weise betrachtet, dass ein hinreichendes Material vorliegt, falls jemand Neigung und Musse hat, jenen Betrag für die einzelnen verschiedenen Körper durch Versuche zu bestimmen. Wir wenden uns jetzt zu den drei anderen Theilen, welche ganz unerörtert gelassen wurden, und wollen untersuchen, in welcher Weise das zerstreute, das farbige und absorbirte Licht zu bestimmen ist.

. . . .

[**322**] 699. In diesem Fall habe ich es für das beste gehalten, die ganze Angelegenheit experimentell zu behandeln, wenngleich hierdurch das gesammte Licht, welches auf irgend eine Weise zurückgeworfen wird, in die Rechnung eingeht, und es dabei unklar bleibt, welcher Antheil jeder einzelnen Ursache entspricht.

Nur darauf will ich aufmerksam machen, dass ich bei diesen Versuchen [**323**] die Körper als in keiner Weise geglättet und als in den kleinsten Theilen durchaus rauh ansehe; denn dann darf man annehmen, dass alles einfallende Licht vollständig zerstreut wird und dass keine glänzenden Theilchen übrig bleiben, welche durch ihr reflectirtes Licht das farbige und aus dem Innern zurückgeworfene Licht beeinflussen.

700. **Versuch 25.** Auf einen Tisch wurden zwei Blätter AB und AC gestellt, welche in A einen beliebigen Winkel bildeten, der jedoch beträchtlich kleiner als zwei rechte sein sollte; in L wurde eine Kerze aufgestellt, welche von beiden Blättern gleichweit entfernt war, sodass die Dreiecke ABL und ACL congruent waren, und je die Punkte auf beiden Blättern, welche von A gleichweit abstanden, gleichstark erleuchtet wurden. Hierauf entfernte ich mich von der Kerze rückwärts in beliebiger schiefer Richtung, brachte in DE eine Sammellinse an und fing das Bild beider Blätter im Brennpunkte $f\varphi$ auf. Fiel nun das Bild des Punktes A nach F, so sah ich, dass entsprechende Punkte beiderseits von F gleich hell erleuchtet waren. Dasselbe fand ich auch, wenn ich die Stellung der Linse so abänderte, dass der Winkel LAF bald grösser, bald kleiner wurde.

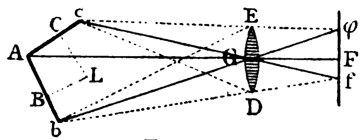

Fig. 67.

701. Wenn der Winkel LAF grösser wurde, so vergrösserte sich auch der Emanationswinkel FAB, während sich der Winkel FAC verkleinerte, unter welchem das Licht aus dem Blatt AC austrat, um auf die Oberfläche der Linse DE zu gelangen. Da aber die Bilder $F\varphi$ und Ff beider Blätter dennoch gleich hell waren, so hängt diese Helligkeit offenbar nicht vom Emanationswinkel ab, wenn nicht, wie man aus dem Früheren weiss, absichtlich das Verhältniss zwischen [**324**] den Distanzen bG, AG, cG als beträchtlich angenommen ist. Da aber dann die einzelnen Theile des Bildes verwaschen erscheinen, so leuchtet von selbst ein, dass solche Fälle zu vermeiden sind.

702. Sei also AB eine Linse, FCG ihre Axe, und man denke sich in Gg und $G\gamma$ zwei Ebenen, welche unendlich klein oder unendlich weit entfernt sind, sodass die Winkel gCG und $GC\gamma$ möglichst klein werden. Die erstere Gg stehe senkrecht auf der Axe, während $G\gamma$ gegen dieselbe unter einem

beliebigen Winkel geneigt sei; beide mögen aber gleich hell sein. Vom Punkte γ aus ziehe man senkrecht zur Axe die Ge-

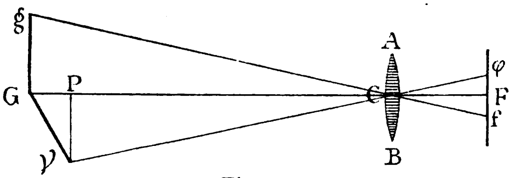

Fig. 68.

rade γP und es sei $Gg = G\gamma$. Fängt man dann die Bilder beider Flächen in φFf auf und zieht die Geraden gCf und $\gamma C\varphi$, so ist offenbar

$$\varphi F : P\gamma = Ff : Gg \,.$$

Da aber beide Bilder gleich hell sind, und zugleich die Oeffnung und die Entfernung der Linse für beide dieselbe ist, so müssen sich folglich die Mengen der auf die Linse auffallenden Strahlen verhalten wie φF zu Ff und mithin wie $P\gamma$ zu Gg. Ersetzt man also die Linse durch ein Blatt von derselben Grösse, so sieht man, dass die Beleuchtung dieses Blattes durch beide Ebenen Gg und $G\gamma$ in dem Verhältniss steht wie gG zu γP. Nimmt man $Gg = G\gamma$ als Einheit an, so wird γP der Sinus des Emanationswinkels sein. *Daher nimmt die Beleuchtung direct ab, wie der Sinus des Emanationswinkels.* Dies ist der Satz, für welchen früher (74 fgde.) ein genauerer Beweis in Aussicht gestellt wurde.

. . . .

[**326**] 707. Wenn man nun eine Lichtquelle nur dann als weiss bezeichnet, wenn sie die farbigen Strahlen in einem solchen Verhältniss aussendet, wie es zur Zusammensetzung des weissen Lichtes (albedo) erforderlich ist, so bezeichnet man auch nichtselbstleuchtende Körper, welche das Licht in demselben Verhältniss zurückwerfen, als weiss. Und da in diesem letzten Falle die Weisse (albedo) nur vom zurückgeworfenen Licht abhängt, so ist es mithin gleichgiltig, ob das Licht in dem Verhältniss, wie es zur Zusammensetzung des weissen Lichts erforderlich ist, auffällt, oder ob das Verhältniss zwischen den Farben des Lichts ein anderes war.

. . . .

[**327**] 713. Sei AB eine unendlich ausgedehnte leuchtende Ebene, ihr gegenüber stehe die Ebene DE, welche eine vollkommene Albedo besitze; dann empfängt offenbar jeder Punkt

dieser Ebene eine absolute Beleuchtung (100). [**328**] Die Helligkeit der Ebene AB heisse L, und der Inhalt des Elements F sei $= 1$. Man denke sich ferner mit einem beliebig genommenen Radius einen Kreis beschrieben, dessen Durchmesser $= QR$ sei und dessen Centrum C senkrecht über F liege; dann ist nach dem Früheren offenbar die Menge der durch den Kegel QFR auf F auffallenden Strahlen $= \pi L \sin^2 QFC$ (121) und daher die Menge, welche von der ganzen Ebene AB aus auf das Element F auffällt, $= \pi L$.

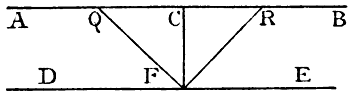

Fig. 69.

714. Sei ferner die Helligkeit des Elementes F bei der absoluten Beleuchtung $= \lambda$, so wird nach dem Früheren (125) die Strahlenmenge, welche durch den Kegel QFR auf den Kreis QR auffällt, $= \lambda \pi \sin^2 QFC$ sein, und ebenso diejenige Menge, welche auf die ganze Ebene zurückgeworfen wird, $= \lambda \pi$. Da aber die Ebene DE eine vollkommene Albedo besitzen sollte, so wird diese Menge dieselbe sein wie diejenige, welche auf das Element auffiel, und welche, wie wir sahen, $= \pi L$ war. Hieraus folgt

$$\lambda \pi = L \pi$$
$$\lambda = L,$$

und ebenso findet man wegen

$$\lambda \pi \sin^2 QFC = L \pi \sin^2 QFC$$

den folgenden

715. **Lehrsatz 31.** *Empfängt ein Körper von vollkommener Albedo eine absolute Beleuchtung, so ist seine Helligkeit dieselbe wie die der Lichtquelle oder des leuchtenden Gegenstandes.*

716. **Lehrsatz 32.** *Empfängt ein Körper von vollkommener Albedo durch einen beliebigen leuchtenden Gegenstand eine absolute Beleuchtung, so ist die Menge der Strahlen, welche auf ein gegebenes Stück des leuchtenden Körpers zurückgeworfen werden, dieselbe wie diejenige, welche von diesem Stück aus auf den weissen Körper aufgefallen war.*

[**329**] Beweis: Es ist nämlich die Menge, welche vom Kreis QR aus auf F auffällt, $= \pi L \sin^2 QFC$, die zurückgeworfene Menge $= \pi \lambda \sin^2 QFC$. Wir haben jedoch gesehen, dass $L = \lambda$. Der Satz ist also bewiesen für den Fall, dass das

leuchtende Stück QR ein Kreis ist. Dies lässt sich verallgemeinern, wenn man durch Differentiation die Strahlenmenge sucht, welche einem beliebigen Element des Kreises in beiden Fällen entspricht. Denn man sieht leicht, dass man beidemale denselben Ausdruck zu differenziren hat. Aus den Differentialen lässt sich aber jedes beliebige Stück zusammensetzen.

717. Die Helligkeit der Ebene AB haben wir mit L bezeichnet und damit angenommen, dass sie unabhängig sei von der Verschiedenheit der Strahlen, aus welchen sie zusammengesetzt ist. Da nämlich der Ebene DE eine vollkommene Albedo zukommt, so wird sie alle Strahlen ohne Unterschied vollständig zurückwerfen, und dies wird stattfinden, sowohl wenn das einfallende Licht vollkommen weiss, als auch, wenn es beliebig farbig ist. War also die Ebene AB roth, gelb, grün etc., so wird offenbar die Ebene DE, wenn sie eine vollkommene Albedo besitzt, nur solche Strahlen, welche aufgefallen sind, zurückwerfen können und im Fall der absoluten Beleuchtung ebenso intensiv roth, gelb, grün etc. erscheinen, wie die leuchtende Ebene AB. Dies sieht man z. B. an der Camera obscura, wo allerdings das Blatt, auf welchem man die Bilder auffängt, nicht vollkommen weiss und auch nicht absolut beleuchtet ist; dennoch sieht man aber die Bilder in derselben Farbe, welche die Gegenstände zeigen.

718. Die Helligkeit und die Farbe der Ebene AB ist also gleichgiltig, wenn die Ebene DE eine [**330**] vollkommene Albedo besitzt und absolut beleuchtet ist; dies verhält sich jedoch anders, wenn die Ebene DE nicht vollkommen weiss ist. Die hieraus entspringende Abnahme der Helligkeit ist aber eine zweifache: in diesem Fall wird nämlich ein gewisser Theil des Lichts von der Ebene DE absorbirt werden, und die letztere wird zwar weiss erscheinen, aber dunkeler oder weniger hell sein. Ist sie ausserdem farbig, so kommt eine zweite Abnahme der Helligkeit hinzu, indem nur solche Strahlen, aus welchen diese Farbe zusammengesetzt ist, und auch diese nicht alle, zurückgeworfen werden, und indem sich unter die zurückgeworfenen Strahlen auch solche von ganz anderer Farbe mischen. Dass aber die natürlichen Körper diese Eigenschaft haben, weiss man schon längst aus Versuchen mit dem Prisma.

719. Man weiss durch viele bekannte Versuche, dass die farbigen Strahlen ihrer Natur nach, hinsichtlich ihrer Helligkeit, Brechbarkeit und Reflexionsfähigkeit verschieden sind. Aber man weiss noch nicht, welche Leuchtkraft jeder einzelnen

Strahlengattung zukommt und welches Verhältniss zwischen den verschiedenartigen Strahlen bestehen muss, wenn sie weisses Licht erzeugen sollen. Man muss indessen vorläufig jedenfalls annehmen, dass ihre Dichtigkeit und Menge in derselben Weise zu definiren ist, wie es oben (42 fgde.) für diese beiden Begriffe geschehen ist. Von dieser Unterscheidung werden wir also nun Gebrauch machen.

720. Die Einheit, in welcher die Strahlenmenge, wie man diese auch verstehen mag, ausgedrückt werden kann, ist, wie man früher (43) gesehen hat, vollkommen willkürlich. Hieraus folgt von selbst, dass auch diejenigen Einheiten, in welchen man die Menge der farbigen Strahlen ausdrückt, [**331**] willkürlich sind. Wir werden dieselben also, je nachdem die Bedingungen des Problems es erfordern, in verschiedener Weise bestimmen, jedoch immer so, dass das Gesetz der Homogeneität gewahrt bleibt.

721. Bezeichnet man beispielsweise eine Menge vollkommen weissen Lichtes mit 1, so steht nichts im Wege, auch die Menge der rothen oder grünen Strahlen, für sich betrachtet, durch so viel Einheiten auszudrücken, wie es für die Eleganz der Rechnung erforderlich ist.

722. Ferner nehmen wir die Strahlen verschiedener Farbe als heterogen an, da man nicht wohl beweisen kann, dass sie homogen sind. Aber gerade dadurch wird die Vergleichung, welche man zwischen der Helligkeit der verschiedenen Strahlen anzustellen hätte, bedeutend schwieriger. Es gibt jedoch einen Fall, wo diese Vergleichung möglich ist. *Wenn nämlich bei einer gemischten Farbe zwischen den verschiedenfarbigen Strahlen ein constantes Verhältniss besteht, so lassen sich verschiedene Intensitäten dieser Farbe leicht mit einander vergleichen.* Denn diese Farbe ändert sich nur nach Quantität, und nicht nach Qualität. Man muss also die Fälle aufsuchen, in welchen dies stattfindet.

723. Man habe einen Körper von gemischter Farbe, er sei z. B. roth oder gelb, und man nehme an, er werde von einer Lichtquelle beleuchtet, deren Helligkeit = 1 sei. Wenn diese Lichtquelle vollkommen weiss ist, so werden Strahlen von jeder Art auf die Oberfläche des Körpers auffallen, jedoch werden nur die rothen oder gelben entweder allein, oder in stärkerem Maasse, als die anderen, zurückgeworfen werden. Nimmt man also an, dass die Hälfte der auffallenden Strahlen zurückgeworfen wird, so wird man hoffentlich zugeben, *dass auch dann*

die Hälfte zurückgeworfen wird, wenn nur rothe oder gelbe Strahlen auffallen, und dass ihre Menge sich verdoppelt, wenn sich die Menge der auffallenden Strahlen [**332**] *verdoppelt.* Denn einerseits beeinträchtigen sich die auffallenden Strahlen gegenseitig nicht (50 fgde.), andererseits ändern diejenigen, welche roth sind, nicht die ihnen eigene Farbe. Dies ist durch Versuche hinlänglich bewiesen.

724. Bei gleichbleibender Oberfläche des Körpers steht also die Menge der Strahlen von beliebiger Farbe, welche zurückgeworfen wird, in einem constanten Verhältniss zur Menge der auffallenden Strahlen.

725. Ein vollkommen weisser Körper besitzt, wie man gesehen hat (715), im Fall der absoluten Beleuchtung dieselbe Helligkeit, wie die Lichtquelle, durch welche er beleuchtet wird; man kann diese daher als Einheit ansehen, auf welche die übrigen Stufen der Albedo zu beziehen sind; wir bezeichnen also die Albedo eines dunkelen Körpers dann als 1, wenn die auffallenden Strahlen alle zurückgeworfen werden, und eine andere Albedo wird offenbar um so kleiner sein, je weniger Strahlen zurückgeworfen werden. Setzt man also die Menge der einfallenden Strahlen $= 1$, die der zurückgeworfenen $= q$, so wird die Albedo des Körpers $= q$ sein. Man sieht leicht, dass man auf dieselbe Weise auch den Grad der rubedo, viredo, und die Reflexionsfähigkeit der anderen Farben zu bezeichnen hat.

726. In L befinde sich nun eine Lichtquelle, welche wir der eleganteren Rechnung wegen als kugelförmig annehmen; ihr Halbmesser sei $= 1$, ihre Helligkeit $= \lambda$; die Strahlen derselben mögen senkrecht auf die vollkommen weisse Ebene G auffallen,

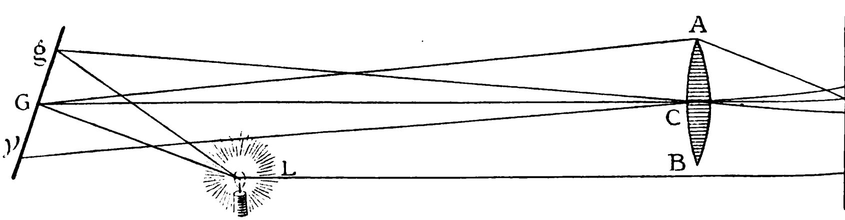

Fig. 70.

dann wird die Helligkeit der letzteren im Fall der absoluten Beleuchtung ebenfalls $= \lambda$ sein (715); da sich aber wegen der grösseren Entfernung der Lichtquelle die Menge der einfallenden Strahlen vermindert, so wird die fragliche Helligkeit nur $= \lambda : GL^2$ (115).

[**333**] 727. Nimmt man dagegen an, die Albedo der Ebene $gG\gamma$ sei nicht vollkommen, sondern nur $= A$, sodass also $1 : A$ das Verhältniss der einfallenden Strahlenmenge zur zurückgeworfenen darstellt, so wird sich die Helligkeit $\lambda : GL^2$ in derselben Weise vermindern, sodass man also hat $A\lambda : GL^2$. Hieraus folgt

728. **Lehrsatz 33.** *Wird eine weisse Ebene von einer kugelförmigen Lichtquelle senkrecht beleuchtet, so verhält sich ihre Helligkeit direct wie das Product aus der Helligkeit der Lichtquelle und der Albedo der beleuchteten Ebene, dagegen umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung des Centrums der leuchtenden Kugel.*

729. Nimmt man nun an, in D befinde sich eine zweite Ebene, welche durch dieselbe Lichtquelle senkrecht beleuchtet wird, und bezeichnet man ihre Albedo mit a, so wird ihre Helligkeit offenbar $= a\lambda : LD^2$ sein.

730. Ist also die Helligkeit der Ebene $G = C$ und die der Ebene $D = c$, so wird

$$C = A\lambda : LG^2$$
$$c = a\lambda : LD^2 .$$

731. Man nehme an, die Ebene G sei selbstleuchtend mit einer Helligkeit $= C$, und es möge eine andere Ebene durch sie absolut beleuchtet werden. Die Albedo dieser Ebene sei $= a$, also gleich der Albedo der Ebene D; dann folgt wieder, dass die Helligkeit dieser Ebene $= Ca = aA\lambda : LG^2$ sein wird. Hiervon werden wir in folgender Weise Gebrauch machen.

732. Auf DF stehe senkrecht die Axe GF einer Linse AB, welche die von der Ebene G ausgehenden Strahlen in der Weise sammelt, dass sie sich auf der Ebene F vereinigen und dort das Bild $fF\varphi$ der Ebene $gG\gamma$ erzeugen. Nimmt man nun an, die Linse AB lasse alle Strahlen durch, so wird offenbar die centrale Helligkeit des Bildes in F abhängig [**334**] sein von der Helligkeit C der Ebene G und von der oben (500) bestimmten Beleuchtung, für welche wir fanden

$$\eta = \pi \frac{\mathrm{tg}^2 AFC}{\sec^2 AGC} .$$

733. Es ist aber π die absolute Beleuchtung, und diese

fanden wir $= aC = aA\lambda : LG^2$; setzt man diesen Werth also ein, so wird die centrale Helligkeit des Bildes

$$\eta = \frac{aA\lambda \operatorname{tg}^2 AFC}{LG^2 \sec^2 AGC}.$$

734. Nun ist aber die Linse nicht vollkommen durchsichtig, sodass auch Strahlen reflectirt und zerstreut werden; daher nehmen wir an, die einfallenden Strahlen verhalten sich zu denjenigen, welche in das Bild gelangen, wie $1 : \varkappa$, dann ist offenbar

$$\eta = \frac{\varkappa a A\lambda \operatorname{tg}^2 AFC}{LG^2 \sec^2 AGC}.$$

Bezeichnet man der Kürze wegen $\varkappa$ als den Grad der Durchsichtigkeit der Linse, so liefert diese Gleichung den folgenden

735. **Lehrsatz 34.** *Wird eine Ebene G von der kugelförmigen Lichtquelle L beleuchtet, und wird das durch die Linse AB erzeugte Bild dieser Ebene in F auf der weissen Ebene DF aufgefangen, so findet man die centrale Helligkeit des Bildes F, wenn man das Product aus der Durchsichtigkeit der Linse, der Helligkeit der Lichtquelle L, der Albedo beider Ebenen und dem Quadrat der Tangente des Winkels AFC dividirt durch das Product aus dem Quadrat der Entfernung LG der Lichtquelle und dem Quadrat der Secante des Winkels AGC.*

736. Dieser Satz gilt, wenn, wie in unserem Falle, der Halbmesser der Lichtquelle $L = 1$ gesetzt wird (726). Uebrigens sind bekanntlich die Winkel AFC [**335**] und AGC die scheinbaren Halbmesser der Linse AB, von F und G aus gesehen. Man hätte also in den vorigen Lehrsatz auch diese Begriffe einführen können, um alles lediglich in Worten auszudrücken.

737. Ist die Distanz GC etwa das zehnfache der Brennweite der Linse AB, so wird der Winkel AGC sehr klein sein, und der Winkel AFC wird sich bei einer Veränderung oder Vergrösserung der Distanz GC nur wenig ändern, sodass in diesen Fällen die Helligkeit des Bildes nahezu constant ist. Die Helligkeit der Ebene D dagegen, wenn letztere direct durch die Lichtquelle beleuchtet wird, und welche wir $=$

$$c = a\lambda : LD^2$$

fanden (730), ist sehr veränderlich; denn sie verwandelt sich in die absolute Helligkeit, wenn die Ebene D und die Lichtquelle L einander bis zur Berührung beider Flächen genähert werden

(100); wogegen sie verschwindet, wenn die Ebene D von der Lichtquelle L bis ins Unendliche entfernt wird. Es wird also eine gewisse Distanz geben, bei welcher die Helligkeit des Bildes in F der Helligkeit in D, welche aus der directen Beleuchtung hervorgeht, gleich wird.

738. Man nehme nun an, diese Distanz sei GF oder LF, so wird $\eta = c$ und mithin (730, 734)

$$\frac{\varkappa a A \lambda \operatorname{tg}^2 AFC}{LG^2 \sec^2 AGC} = \frac{a\lambda}{LD^2}.$$

Durch Reduction dieser Gleichung wird

$$\frac{\varkappa A \operatorname{tg}^2 AFC}{LG^2 \sec^2 AGC} = \frac{1}{LD^2},$$

also

$$A = \frac{LG^2 \sec^2 AGC}{LD^2 \varkappa \operatorname{tg}^2 AFC}.$$

Diese Gleichung spricht sich aus in dem folgenden

[**336**] 739. **Lehrsatz 35.** *Wird eine Ebene G von der Lichtquelle L senkrecht beleuchtet und wird ihr durch die Linse AB erzeugtes Bild F auf der Ebene DF in einer solchen Entfernung aufgefangen, bei welcher die centrale Helligkeit des Bildes gleich ist der Helligkeit der Ebene in D im Fall der directen Beleuchtung durch die Lichtquelle L, so findet man die Albedo der Ebene G, wenn man das Product aus dem Quadrat der Entfernung LG der Lichtquelle und dem Quadrat der Secante des Winkels AGC dividirt durch das Product aus der Durchsichtigkeit der Linse, dem Quadrat der Entfernung LD der Lichtquelle und dem Quadrat der Tangente des Winkels AFC.*

740. Dieser Satz ist wegen seiner sehr grossen Wichtigkeit für die Photometrie eingehender zu discutiren. Man erinnere sich zunächst (727), dass die Albedo A, welche man mit Hilfe dieses Satzes bestimmt, die Menge der zurückgeworfenen Strahlen in dem Falle darstellt, wenn die Menge der auffallenden Strahlen $= 1$ gesetzt wird; ist also die Ebene G, um deren Albedo es sich handelt, vollkommen weiss, so ist $A = 1$ (§ cit.).

741. Ferner wurde die Grösse $\varkappa$ der Kürze wegen als die Durchsichtigkeit des Glases bezeichnet (734); ihre wahre, oben (734) schon ausgesprochene Bedeutung ist jedoch die, dass, wenn man die Menge der Strahlen, welche auf die Linse

auffallen, mit 1 bezeichnet, $\varkappa$ diejenige Menge bedeutet, welche nach F gelangt und dort die Helligkeit des Bildes bestimmt. Wie man diese Grösse durch Versuche genauer bestimmen kann, ist schon früher (517 fgde.) gezeigt worden.

742. Ferner bemerke man, dass die Grössen a und λ in die gefundene Formel (738)

$$A = \frac{LG^2 \sec^2 AGC}{LD^2 \varkappa \operatorname{tg}^2 AFC}$$

[**337**] nicht eingehen. *Daher ist für diese Art der Bestimmung der Albedo A die Helligkeit der Lichtquelle L und die Albedo der Ebene DF, welche sowohl das Bild wie das directe Licht auffängt, gleichgiltig.* Eine hellere Lichtquelle ist jedoch, um weniger grosse Fehler befürchten zu müssen, vorzuziehen (270). Ferner ist es gut, wenn das Blatt oder die Ebene DF in Rücksicht auf die Albedo und besonders auch auf die Farbe sich möglichst gleich verhält wie die Ebene Gg (308 fgde.).

743. Aus demselben Grunde ist es von Vortheil, die Entfernung LG in gewissen Grenzen zu halten. Ist sie nämlich zu gross, so wird die Helligkeit des Blattes G sehr klein werden und dies muss man, wie mehrfach erwähnt, vermeiden. Indessen darf die Distanz LG auch nicht zu klein sein. Es wurde nämlich früher (265 fgde.) gezeigt, dass es einen gewissen Raum $g\gamma$ gibt, welcher merklich gleich hell erscheint, so lange der Winkel gLG das Maximum von 10 Grad nicht überschreitet; und da hier nur die centrale Helligkeit des Bildes in Betracht kommt, so muss offenbar das Bild φFf des Raumes $gG\gamma$ eine solche Helligkeit haben, welche der centralen Helligkeit gleich ist. Man muss also verhüten, dass der Raum φf so klein wird, dass er schwer zu sehen ist. Ist dies der Fall, so ist die Entfernung GL zu klein und muss also vergrössert werden. Uebrigens bestimmt sich dies im gegebenen Fall leicht durch Versuche.

744. Vergrössert sich die eine der beiden Entfernungen LG oder LD, so vergrössert sich auch die andere, da die Albedo A dieselbe bleibt und sich gleichzeitig direct wie LG^2 und umgekehrt wie LD^2 verhält. Wenn sich also bei einer Vergrösserung der Entfernung LG der Raum Gg vergrössert, so wird sich doch wegen der gleichzeitigen Vergrösserung der Entfernung LD die Fläche des Bildes Ff verkleinern. Deshalb muss man auch aus diesem Grunde die Entfernung LG so be-

stimmen, dass der Raum, innerhalb dessen die Helligkeit gleich der centralen ist, [338] leicht sichtbar wird und zugleich die Helligkeit beträchtlich ist.

745. Ferner wird der Winkel AGC zumeist nicht mehr als einen Grad betragen, und deshalb kann man ohne beträchtlichen Fehler setzen

$$AG = GC \quad \text{und} \quad \sec AGC = 1 .$$

Dann wird

$$A = \frac{LG^2 \cdot CF^2}{LD^2 \cdot AC^2 \cdot \varkappa} .$$

Hierdurch ist also die Albedo A durch blosse Distanzen gegeben.

746. Die Lichtquelle L wurde als kugelförmig angenommen, um eine elegantere Endformel zu erzielen. Denn dadurch wurde erreicht, dass die directe Beleuchtung beider Ebenen G und D sich einfach umgekehrt verhielt wie die Quadrate der Entfernungen GL und DL. Man kann aber die Sache ohne Schwierigkeit allgemeiner erledigen. Bezeichnet man nämlich die directe Beleuchtung von G mit I, die von D mit i, so wird

$$A = \frac{i \cdot CF^2}{I \cdot AC^2 \cdot \varkappa} .$$

Man findet aber das Verhältniss $i : I$ für jede beliebige Figur der Lichtquelle L leicht durch diejenigen Sätze, durch welche im Früheren (Th. I, Kap. II) die directe Beleuchtung für beliebige Fälle bestimmt wurde. Eine solche genauere Rechnung ist jedoch dann nicht erforderlich, wenn die Entfernung GL mehrfach grösser ist, als der Durchmesser oder die Breite der Lichtquelle. Nimmt man z. B. an, L sei eine Kerzenflamme, so wird ihre Gestalt nahezu kegelförmig sein, ihre scheinbare Figur wird jedoch von einem Dreieck nicht sehr abweichen. Ist also die Entfernung GL gleich dem Vierfachen der Höhe des Kegels oder noch grösser, so folgt aus [339] Lehrsatz 12 (145), dass man ohne merklichen Fehler setzen darf

$$I : i = LD^2 : LG^2,$$

woraus man erhält

$$A = \frac{LG^2 \cdot CF^2}{LD^2 \cdot AC^2 \cdot \varkappa} .$$

Uebrigens muss man sich bei der Ausführung von Versuchen an die früher (312, 311, 309) angeführten Vorsichtsmaassregeln halten, da die Vergleichung zwischen der directen Helligkeit in D und derjenigen des Bildes F aus mehrfachen Gründen schwierig ist. Zu diesen Vorsichtsmaassregeln kommen insbesondere noch jene, welche für den vorliegenden Fall bereits beschrieben wurden (742 fgde.).

747. **Versuch 26.** In $gG\gamma$ wurde eine Lage ganz weissen Papiers aufgestellt und in L eine gut abgeputzte Kerze angebracht, deren Flamme nach allen Seiten hin gleich hell und gleich kegelförmig erschien, und deren Strahlen senkrecht in G auffielen. Ferner wurde eine Linse, deren Durchsichtigkeit nach dem Versuch 19 (517) bestimmt und $= \varkappa = \frac{5}{6}$ gefunden worden war (741), in AB so aufgestellt, dass das auf einem weissen Blatt in F aufgefangene Bild in derselben Helligkeit erschien, welche das Blatt in D zeigte, wo es von dem Licht der Kerze direct beleuchtet wurde. Sodann war selbstverständlich durch Versuche die Distanz GC oder LC zu bestimmen. Nachdem diese gefunden war, wurden die Distanzen LD und LG, vom Centrum der Kerzenflamme aus verstanden, gemessen und zwar in Pariser Zollen. Da ich nun wusste, dass die Focaldistanz der Linse für den Fall paralleler Strahlen $= 6\frac{1}{3}''$ betrug, so bestimmte ich durch Rechnung die Entfernung CF des Bildes, welche der Distanz GC entsprach. [**340**] Endlich fand ich den Halbmesser der Oeffnung $AC = 0.93$ Zoll. Diese Werthe wurden in die Formel (745, 746)

$$A = \frac{LG^2 \cdot CF^2}{LD^2 \cdot AC^2 \cdot \varkappa}$$

eingesetzt und eine elfmalige Anstellung des Versuchs ergab die folgende Tabelle:

Versuch:	durch Beobachtung: GL	LD	durch Rechnung: CF	A
1	5	68	7.04	0.4080
2	6	78	6.89	0.3898
3	$6\frac{1}{4}$	79	6.88	0.4110
4	7	86	6.84	0.4300
5	7	90	6.81	0.3891
6	7	88	6.81	0.4071
7	8	96	6.80	0.4454
8	8	110	6.72	0.4172
9	10	122	6.68	0.4159
10	10	125	6.67	0.3950
11	12	147	6.60	0.4041

748. Summirt man die Werthe von A, so erhält man 4.5126, und dividirt man diese Summe durch die Anzahl 11 der Beobachtungen, so ergibt sich der Mittelwerth 0.4102. Schliesst man jedoch den siebenten Versuch aus, da seine Abweichung am grössten ist, so ist die Summe der übrigen Zahlen = 4.0672, und hieraus ergibt sich ein Mittelwerth = 0.4067, welcher von dem vorigen Mittelwerth 0.4102 um 0.0035 abweicht, d. h. um $\frac{1}{116}$ des Betrages 0.4067, sodass er sich auch von der Wahrheit kaum um mehr entfernen wird (294).

[**341**] 749. Da mithin die Albedo der Papierlage sehr nahe = 0.4102 oder in runder Zahl = $\frac{2}{5}$ beträgt, so sieht man, *dass sie von der vollkommenen Albedo weit entfernt ist und weniger als die Hälfte derselben beträgt.*

750. Ferner folgt hieraus, *dass die Helligkeit dieses Blattes für den Fall der absoluten Beleuchtung nur $\frac{2}{5}$ der Helligkeit der leuchtenden Lichtquelle beträgt.*

751. Ebenso sieht man, *dass die Papierlage $\frac{3}{5}$ der auffallenden Strahlen absorbirt und nur $\frac{2}{5}$ zurückwirft.*

. . . .

754. **Versuch 27.** Aus ganz weissem Bleiweiss, dem sog. Kremserweiss, wurde ein Farbstoff bereitet, und mit demselben ein weisses Blatt von Königspapier derart bestrichen, dass kein Licht mehr durchdringen konnte. Hierauf wurde das auf diese Weise gefärbte Blatt in G aufgestellt und auf dieselbe Weise diejenige Distanz der Linse AB bestimmt, [**342**] bei welcher das Bild F ebenso hell erschien, wie das direct beleuchtete Blatt in D. Der Versuch wurde siebenmal ausgeführt und sodann berechnet. Ich fand

Versuch:	durch Beobachtung: GL	LD	durch Rechnung: CF	A
1	$4\frac{3}{4}''$	$60''$	$7''.14$	0.4567
2	$4\frac{5}{6}$	$61\frac{1}{2}$	7.08	0.4295
3	$4\frac{5}{6}$	65	7.05	0.3812
4	6	$76\frac{1}{2}$	6.91	0.4074
5	6	69	6.99	0.5125
6	7	90	6.81	0.3892
7	$8\frac{1}{6}$	95	6.80	0.4740

755. Nimmt man also wieder aus diesen Werthen der Albedo A das Mittel, so wird dieselbe = 0.4358; oder, wenn

man den fünften Versuch unterdrückt, da der Werth 0.5125 alle anderen beträchtlich übersteigt, so ergibt sich als Mittel aus den übrigen 0.4230; dieser Werth weicht von dem Mittel aus der Gesammtheit um den Betrag 0.0128 ab oder um $\frac{1}{34}$ jenes Werthes. Mithin ist die Albedo des Bleiweisses, mit welchem das Blatt bestrichen war, sehr nahe = 0.4230. Nun fanden wir im vorigen Versuche die Albedo einer Lage Papier = 0.4067. Beide Werthe unterscheiden sich also sehr wenig, denn die Differenz beträgt nur 0.0163 oder $\frac{1}{26}$ der Albedo des Bleiweisses.

756. **Versuch 28.** Zwei Blätter wurden mit Mennige bestrichen, das eine in G, das andere [**343**] in F aufgestellt und dann wurde ebenso wie in den beiden vorigen Versuchen die Distanz GC oder GF bestimmt. Der Versuch wurde achtmal ausgeführt und dann ebenso berechnet wie früher. Ich fand

Versuch:	durch Beobachtung: GL	LD	durch Rechnung: CF	A
1	4″	59″	7″.14	0.3250
2	5	72	6.97	0.3250
3	$5\frac{1}{4}$	80	6.88	0.2828
4	6	83	6.85	0.3401
5	6	86	6.83	0.3150
6	7	108	6.73	0.2639
7	8	120	6.68	0.2753
8	10	151	6.60	0.2656

Die Summe der Grössen A, welche die Versuche ergaben, ist = 2.3927, mithin das Mittel = 2.3927 : 8 = 0.2991. Verwirft man jedoch den vierten Versuch, welcher sich am meisten von den anderen entfernt, so wird das Mittel aus den übrigen A = 0.2932, mithin ist der Unterschied beider Mittel = 0.0059 oder ungefähr $\frac{1}{50}$ des Werthes 0.2991.

757. **Versuch 29.** Es wurden wieder zwei Blätter genommen, welche mit Kreuzbeersaft bestrichen waren, und das eine in G, das andere in DF aufgestellt, und ebenso wie bei den vorigen Versuchen die Distanzen LD und LG aufgesucht, bei welchen das Bild F und das Blatt in D gleichstark gelb erschienen, ungefähr in der Farbe des Safrans. [**344**] Der Versuch wurde achtmal angestellt und es ergab sich

Versuch:	durch Beobachtung: GL	LD	durch Rechnung: CF	A
1	$3\frac{1}{2}''$	$58''$	$7''.17$	0.2597
2	4	60	7.14	0.3143
3	$4\frac{1}{2}$	69	7.01	0.2899
4	5	78	6.90	0.2714
5	5	82	6.86	0.2428
6	$5\frac{1}{2}$	80	6.83	0.2472
7	6	99	6.82	0.2868
8	6	99	6.81	0.2363

Die Summe der Grössen A ist hier = 2.1483, mithin das Mittel = 2.1483 : 8 = 0.2685. Schliesst man den zweiten Werth aus, welcher von den übrigen am meisten abweicht, so ergibt sich die Summe der übrigen = 1.8340, mithin ist der Mittelwerth von A = 1.8340 : 7 = 0.2620, und mithin die Differenz beider Mittelwerthe = 0.0065 oder ungefähr $\frac{1}{40}$ des Werthes 0.2620.

758. **Versuch 30.** In ähnlicher Weise wurde ein Blatt mit Grünspan gefärbt und in der Weise überzogen, dass es auf der Vorderseite gleichmässig grün erschien, und sodann in G aufgestellt, während ein ebenso gefärbtes Blatt in DF angebracht wurde; sodann wurde ebenso wie in den vorigen Versuchen die betreffende Entfernung bestimmt. Der Versuch wurde neunmal ausgeführt und ich fand [**345**]

Versuch:	durch Beobachtung: GL	LD	durch Rechnung: CF	A
1	$3''$	$63''$	$7''.09$	0.1518
2	3	75	6.96	0.1075
3	$3\frac{1}{2}$	86	6.85	0.1078
4	4	93	6.81	0.1190
5	4	89	6.84	0.1311
6	4	97	6.80	0.1091
7	$4\frac{1}{2}$	111	6.73	0.1017
8	5	116	6.70	0.1156
9	6	131	6.66	0.1219

Die Summe der Grössen A ist hier = 1.0772, mithin das Mittel = 0.1197. Schliesst man jedoch den ersten Versuch aus, welcher von den übrigen zu sehr abweicht, so wird die Summe = 0.9191, mithin das Mittel = 0.9191 : 8 = 0.1149; die Differenz zwischen beiden Mittelwerthen ist $= 0.0048$ oder $\frac{1}{24}$ des Werthes 0.1149. Uebrigens wurde bei diesen Versuchen die Distanz GL kleiner genommen, damit die Distanz LD nicht zu gross wurde; man musste dies vermeiden, um die Vergleichung der Helligkeit beider Farben in F und D zu erleichtern (743).

759. Es wird genügen, nur anzudeuten, dass sich bei den drei letzten Versuchen der Buchstabe A nicht auf die Albedo, sondern auf die Färbung des Blattes F bezieht. Man erkennt aber leicht, welche Bedeutung hier der Einheit, auf welche sich die Werthe von A beziehen, zukommt. Wenn jedoch bei Versuch 28 (756) das mit Mennige bestrichene Blatt derartig eine rein rothe Färbung besässe, dass es ausser den rothen Strahlen keine anderen zurückwürfe, welche von verschiedener Farbe und verschiedener Art sind, so würde ich dennoch kein Bedenken tragen, mit Ausschluss der letzteren [**346**] jene allein als Einheit zu bezeichnen, indem also die Menge der rothen Strahlen, welche auf das Blatt auffielen, durch die Einheit, die Menge der zurückgeworfenen Strahlen durch A auszudrücken wäre. Denn in diesem Fall könnte man die übrigen Strahlen, da sie sämmtlich absorbirt wurden, als nicht einfallend betrachten.

760. Hier liegen jedoch die Verhältnisse wesentlich anders. Denn man wird keineswegs annehmen dürfen, dass die Mennige alle Strahlen von anderer Farbe absorbirt und nur die rothen zurückwirft, wenn die letzteren auch in grösserer Menge zurückgeworfen werden. Da ferner das Licht der Kerze gelblich ist, so erkennt man leicht, dass es die gefärbten Strahlen nicht in demjenigen Verhältniss enthält, welches für das rein weisse Licht erforderlich ist. Ferner wird jede bestimmte Strahlenart von dem gefärbten Blatt in einem ihm eigenthümlichen Verhältniss zurückgeworfen und mithin ist das Verhältniss zwischen denjenigen, welche auf das Bild F auffallen, nachdem sie in G schon eine Zurückwerfung erlitten haben, ganz verschieden von demjenigen Verhältniss, in welchem sie direct in G und D auffallen.

761. Eine ausführliche Erörterung dieser Frage werden wir später mittheilen, wenn von den Farben die Rede ist. Hier jedoch soll folgendes bemerkt werden, um die Bedeutung des Verhältnisses $1 : A$ einigermaassen deutlich zu machen.

762. Dass die Strahlen von verschiedener Farbe heterogen sind, wurde schon früher (718 fgde.) erwähnt. Da sie indessen in irgend einer Mischung eine bestimmte zusammengesetzte Farbe erzeugen, so darf man sie doch nicht in der Weise als heterogen betrachten, als ob sie jeder gegenseitigen Vergleichung wider-

strebten und sich nicht in eine Summe vereinigen liessen. Obwohl man aber bis jetzt keine Einheit zur Verfügung hat, auf welche ihre Menge und Intensität zu beziehen wäre, so kann man dennoch durch [**347**] Versuche auf mehrfache Art ihre Summe bilden. Denn behält man bei den zuletzt beschriebenen Versuchen dieselbe Kerze bei, so besteht zwischen den ausgestrahlten Farben ein bestimmtes Verhältniss, und wenn man gleichzeitig dasselbe Blatt beibehält, so besteht auch zwischen den zurückgeworfenen Strahlen verschiedener Farbe ein bestimmtes Verhältniss, und mithin auch zwischen denjenigen Strahlen, welche in das Bild F gelangen. Die Gesammtheit dieser Strahlen kann man jedenfalls in derjenigen Einheit ausdrücken, welche im Fall der absoluten Beleuchtung vorhanden ist, obwohl man nicht weiss, welchen Theil von dieser Summe die einzelnen Strahlen ausmachen. So wird das Blatt DF, wenn es von dem Blatt G eine absolute Beleuchtung empfängt, einen bestimmten Theil der einfallenden Strahlen zurückwerfen, welche man ebenfalls in eine Summe zusammenfassen darf, obwohl man die Antheile der einzelnen Farben, welche diese Summe erzeugen, noch nicht kennt. Man wird später sehen, dass diese Summe $= A$ ist, und es wird sich zugleich zeigen, *dass, wenn man die Menge der gemischten, in F einfallenden Strahlen $= 1$ nennt, die Anzahl der von F reflectirten $= A$ sein wird, gleichgiltig, in welchem Verhältniss sie gemischt waren.*

763. Ein Farbstoff, welcher beispielsweise roth sein möge, wird, wenn er ganz dünn auf ein Blatt aufgetragen wird, Strahlen von jeder Art zurückwerfen, auch wenn seine Färbung noch so rein war. Sobald nämlich die übrigen Strahlen, welche der Farbstoff absorbirt, auf die Oberfläche des Blattes selbst auffallen, werden sie von derselben zum grossen Theil zurückgeworfen. Da jedoch der Farbstoff wegen seiner sehr geringen Dicke fast durchsichtig ist (617) und den Durchgang der Strahlen keineswegs verhindert, so gelangen die meisten derselben wieder in die Luft. Ein Beispiel hierfür bieten die beiden [**348**] Versuche 28 und 29. Da nämlich das Blatt nicht mit dem Farbstoff getränkt, sondern nur bestrichen war, so wurde hierdurch die Menge des zurückgeworfenen Lichtes so beträchtlich vermehrt, dass sie ein Viertel bis ein Drittel des einfallenden Lichtes betrug. Für das rothe Blatt war nämlich $A = 0.2932$, für das gelbe $A = 0.2620$. Dagegen war bei Versuch 30, bei welchem das Blatt mit Grünspan getränkt war, die zurückgeworfene Menge kaum der neunte Theil der auffallenden. Es war nämlich $A = 0.1149$.

764. **Versuch 31.** In G wurde wieder ein mit Bleiweiss gefärbtes Blatt aufgestellt, in DF dagegen der Reihe nach ein weisses Blatt, ein rothes, ein gelbes, ein grünes und ein dunkelblaues. Dann wurde, während die Entfernung GL festgehalten wurde, diejenige Entfernung bestimmt, bei welcher das Bild F gleich hell erleuchtet schien, wie das Blatt in D. Bei jedem Versuch war das Bild in derselben Farbe sichtbar, wie das auffangende Blatt. Die Entfernung GL betrug fortwährend 5 Zoll, und die Entfernung LD fand sich für ein weisses, rothes, grünes und dunkelblaues Blatt DF immer ungefähr zu 64 Zoll. Für das gelbe Blatt dagegen musste diese Entfernung um 2 oder 3 Zoll verkleinert werden.

765. Das von dem gelben Blatt aufgefangene Bild war also heller. Diese Verschiedenheit konnte, wie man früher (742) gesehen hat, weder von der Lichtquelle L noch von dem Blatt DF abhängig sein und ist also allein dem Blatt G zuzuschreiben. Obwohl also das aufgestrichene Bleiweiss vollkommen weiss war, so scheint dennoch hieraus zu folgen, dass seine Albedo mit dem Fehler behaftet war, [**349**] die gelben Strahlen stärker zurück zu werfen. Dies genauer zu untersuchen, ist später der Ort. Wir kehren jetzt zu den weissen Körpern zurück.

[**349**] 766. Kennt man die Albedo eines beliebigen Körpers, so ist es nicht schwer, seine Helligkeit, wenn er von einer beliebigen Lichtquelle beleuchtet wird, zu vergleichen mit der Helligkeit der Lichtquelle selbst. Setzt man nämlich die Helligkeit der Lichtquelle $= 1$, die Albedo des beleuchteten Gegenstandes $= A$, so ergeben sich die folgenden Lehrsätze:

767. **Lehrsatz 36.** *Die Helligkeit einer Lichtquelle verhält sich zur Helligkeit eines von ihr absolut beleuchteten weissen Gegenstandes wie* 1 *zu* A.

Beweis: Besässe der Gegenstand eine vollkommene Albedo, so würde seine Helligkeit im Fall der absoluten Beleuchtung nicht verschieden sein von der Helligkeit der leuchtenden Lichtquelle selbst (710, 715), da alle auffallenden Strahlen zurückgeworfen werden. Da wir aber annehmen, die Albedo sei geringer, so werden nicht alle Strahlen zurückgeworfen werden, und da die Helligkeit abnimmt im Verhältniss der zurückgeworfenen Strahlen, so muss sie offenbar kleiner werden im Verhältniss wie 1 zu A (727).

768. **Lehrsatz 37.** *Bezeichnet man die Helligkeit der leuchtenden Lichtquelle mit* 1, *so erhält man die Helligkeit*

eines Gegenstandes, welcher absolut beleuchtet wird, aus der absoluten Beleuchtung, wenn man in letzterer statt π die Albedo A substituirt.

[**350**] Beweis: Die Helligkeit eines Gegenstandes nimmt mit der Beleuchtung ab. Um also aus der letzteren die erstere zu bestimmen, muss man statt π setzen A (123). Denn in allen früher abgeleiteten Formeln wurde die absolute Beleuchtung durch π ausgedrückt.

769. Da sich alle anderen Fälle der Beleuchtung, welche im Früheren einzeln behandelt wurden, auf die absolute Beleuchtung zurückführen lassen, *so werden durch den vorstehenden Lehrsatz die Helligkeiten selbst auf Helligkeiten der Lichtquelle zurückgeführt.* Da nun die Substitution, welche dieser Lehrsatz vorschreibt, sehr leicht ist, so kann man es hier mit vollem Recht unterlassen, die einzelnen Fälle nochmals durchzusprechen.

770. Ein beleuchteter Körper kann wiederum die Stelle eines leuchtenden vertreten (703), wenn ihm ein anderer dunkeler Körper gegenübersteht. Ist aber die Albedo beider gegeben, so kann man leicht sowohl die Helligkeit beider unter einander als auch dieselbe mit der Helligkeit der Lichtquelle vergleichen. *Man kann also die Helligkeiten aller weissen Körper auf diese Weise in jedem einzelnen Fall gegenseitig vergleichen.*

771. **Lehrsatz 37.** *Wenn zwei Körper bei derselben Stellung gegen dieselbe Lichtquelle gleichstark beleuchtet erscheinen, so besitzen beide dieselbe Albedo.*

Beweis: Da sie auf dieselbe Weise beleuchtet werden, so ist die Strahlenmenge, welche auf ein gegebenes Element auffällt, für beide Körper dieselbe. Deshalb kann die Helligkeit nur verschieden sein in Rücksicht auf die [**351**] Strahlenmenge, welche zurückgeworfen wird. Da aber beide Körper dieselbe Helligkeit zeigen, so wird für beide das Verhältniss zwischen den auffallenden und den zurückgeworfenen Strahlen dasselbe sein, das heisst aber: die Albedo wird dieselbe sein (727). Mithin ergibt sich der Satz.

772. Man kann also gleich weisse Körper leicht mit einander vergleichen, da man sie nur derselben Lichtquelle in derselben Weise gegenüberzustellen braucht. Erscheinen sie dann gleich hell, so kann ihre Albedo nicht sehr verschieden sein.

773. Ergibt sich dagegen eine ungleiche Helligkeit, so kann man entweder die Entfernung der Lichtquelle oder den Einfallswinkel so lange ändern, bis Gleichheit stattfindet. *Dann verhält*

sich die Albedo direct wie das Quadrat der Entfernung oder umgekehrt wie der Sinus des Einfallswinkels, je nachdem man die erstere oder den letzteren geändert hat. Da übrigens das Urtheil des Auges einigermaassen von der Wahrheit abweichen kann, so empfiehlt es sich, den Versuch mehrmals anzustellen, um aus allen das Mittel zu nehmen, welches sich weniger von der Wahrheit entfernen wird (294, 276).

774. Hat man also irgend eine Albedo nach dem Versuch 26 (747) bestimmt, so wird sich auf diese Weise ohne Schwierigkeit die Albedo jedes beliebigen anderen Körpers ergeben; man würde dann finden, dass eine übertünchte Wand, der Gyps, ganz weisses Papier, ein aus Kremserweiss bereiteter Anstrich, in der Sonne gebleichtes Leintuch, ganz weisse Kreide nahezu dieselbe Albedo besitzen.

775. Wie man also auf diese Weise die Albedo der Körper vergleichen kann, welche durch dieselbe Lichtquelle beleuchtet werden, so kann man auch die Helligkeit oder Intensität der Lichtquellen selbst gegenseitig vergleichen, [**352**] wenn man denselben eine weisse Fläche gegenüber stellt, oder ihre Bilder unter Anwendung einer Sammellinse auffängt. Es verhält sich nämlich die Helligkeit der Lichtquelle direct wie der Inhalt der Oeffnung der Linse und umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung der Bilder, wenn diese gleich hell gemacht worden sind.

776. Ist ferner die Albedo eines Gegenstandes gegeben, so kann man seine Helligkeit direct mit der Helligkeit des leuchtenden Gegenstandes vergleichen mit Hilfe des Lehrsatzes 37 (768 fgde.).

777. Sei z. B. diejenige Helligkeit der Sonne, wie man sie durch die Atmosphäre hindurch erblickt, $= L$, ihr scheinbarer Halbmesser $= 16'$, und sei ihrem Licht bei senkrechter Gegenüberstellung eine Ebene oder ein Blatt ausgesetzt, welches mit Kremserweiss bestrichen ist, dessen Albedo oben (755) $= 0.4230$ $= A$ gefunden wurde. Bezeichnet man dann ihre Helligkeit mit η, so wird (121, 768)

$$\frac{\eta}{L} = 0.4230 \sin^2 16' = 0.000009163\,;$$

oder

$$L = 109\,137\,\eta\,.$$

Um so viel übertrifft also die Helligkeit der Sonne die Helligkeit des von ihr beleuchteten Blattes, vorausgesetzt, dass man die Sonne durch dieselbe Atmosphäre hindurch gesehen denkt, durch welche die Strahlen auf das ihr zugewandte Blatt senkrecht einfallen.

778. Man ist also nahe daran, die Helligkeiten der Lichtquellen und der weissen Körper auf ein absolutes Maass zurückführen zu können. Wenigstens sieht man, dass die Albedo der Körper bloss für sich und ohne Zuhilfenahme eines anderen Grades der Albedo ausdrückbar ist, indem man jede Albedo nur einfach mit der vollkommenen Albedo [**353**] zu vergleichen braucht, und sich dieselbe durch das Verhältniss zwischen den auffallenden und zurückgeworfenen Strahlen ausdrücken lässt (740). Dieses Verhältniss ist aber ein unabhängiges.

779. Dies verhält sich jedoch, wie schon früher bemerkt (709), hinsichtlich der Helligkeit anders. Denn hier gibt es keine absolute Einheit, auf welche man die anderen Helligkeiten beziehen könnte. Die niedrigste Stufe ist daher = 0, da man die Stärke der Helligkeit und des Lichts so zu rechnen hat, dass man von der absoluten Finsterniss ausgeht. Ein Maximum der Helle kommt in der Natur nicht vor, da man bis ins Unendliche fortgehen kann.

780. Da diese Einheit mithin willkürlich ist, so muss man eine solche wählen, welche stets nahezu gleich gefunden wird. Meiner Ansicht nach ist es vortheilhaft, mehrere solche anzunehmen. Für sehr intensives Licht werden wir die *Helligkeit der Sonne* als Einheit nehmen. Als zweite Einheit, nämlich für weniger helles Licht, werden wir die scheinbare *Helligkeit des Vollmondes* wählen, oder was besser ist, *die Helligkeit einer vollkommen weissen Mauer, welche von der Sonne bei einer bestimmten Entfernung derselben beleuchtet wird.* Endlich als dritte Einheit kann diejenige Helligkeit gelten, welche eine solche Ebene zeigt, wenn sie vom Vollmond oder von der in hunderttausendfacher Entfernung gedachten Sonne beschienen wird.

781. Es gibt aber zwei Umstände, welche diese Einheiten unsicher oder unbequem machen können. Es ist nämlich nicht gewiss, ob die Helligkeit der Sonne immer dieselbe ist, auch wenn man von den Flecken, welche ihre Scheibe bisweilen bedecken, wegen ihres unbeträchtlichen Einflusses absieht. Denn da alles im Universum sehr veränderlich ist, so kann man kaum [**354**] annehmen, dass die Sonne allein von dieser Veränderlichkeit unberührt bleibt. Jedoch will ich, wenn dies jemand bestreitet, zugeben, dass diese Veränderlichkeit sehr gering ist.

782. Der andere Umstand, welcher jene Einheit unbequem macht, ist die Veränderlichkeit der Atmosphäre der Erde, durch welche die Sonnenstrahlen wandern müssen, bevor sie sich uns sichtbar machen. Da aber gerade hierdurch die scheinbare Helligkeit der Sonne stark beeinflusst wird, so muss man in den einzelnen Fällen die Theorie, welche später auseinandergesetzt wird, zuziehen, um eine constante Einheit zu bestimmen.

783. Für diesen Mangel, welcher, wie früher (11) erwähnt, der Photometrie noch anhaftet, bin ich noch nicht im Stande gewesen eine Abhilfe zu schaffen, und deshalb kann man die Helligkeitsstufen nur näherungsweise auf ein gewisses gemeinsames Maass reduciren.

Vierter Theil.

Die Empfindung des Lichts und die subjective Helligkeit, experimentell und theoretisch betrachtet.

Kapitel I.

Theoretische Grundlagen für die Bestimmung derjenigen Helligkeit, welche das Auge den Gegenständen beimisst.

[**355**] 784. Wir beginnen jetzt denjenigen Theil der Photometrie, welcher den anderen eigentlich hätte vorangehen müssen, wenn diese Reihenfolge nicht gestört würde durch den logischen Zirkel, welcher früher (2, 8) für den Beweis der photometrischen Gesetze als unvermeidlich bezeichnet wurde, und welcher jetzt geschlossen werden soll, nachdem wir wieder dahin gelangt sind, von wo wir ausgingen. Man sieht aber, dass wir die Sache so behandelt haben, dass an der Hand der Erfahrung nur solche Sätze über die scheinbare oder die subjective Helligkeit aufgestellt wurden, welche zur Bestimmung der wahren Helligkeit des Lichts und der wahren Beziehungen derselben nothwendigerweise zu Grunde gelegt werden mussten, und welche jetzt erst, nachdem die photometrischen Gesetze genauer entwickelt sind, klargestellt werden können, um darzuthun, [**356**] inwiefern sich die wahre Helligkeit von derjenigen unterscheidet, welche wir infolge des Urtheils des Auges den Gegenständen beilegen.

785. Sei also AF das Auge, $GAFM$ seine Axe, in G befinde sich der Gegenstand, welchen wir der Kürze wegen als kreisförmig annehmen, und dessen Halbmesser Gg sei. Vom Punkte G, welcher sich auf der Axe befinden möge, gehe ein Strahl GB aus, welcher in B so gebrochen wird, dass er, wenn keine neue Brechung hinzukäme, die Axe in M treffen würde. cC sei die Oeffnung der Pupille, und GB sei der äusserste

derjenigen Strahlen, welche durch die Pupille dringen. Dieser Strahl gelangt bei D in die Linse und wird dort so gebrochen, dass er ohne Hinzukommen einer neuen Brechung nach N gelangen würde. Da er jedoch die hintere Fläche der Linse in E trifft, so erleidet er dort eine dritte Brechung und trifft die Axe in F, wenn sich der Gegenstand in der deutlichen Sehweite befindet. Im anderen Fall liegt der Punkt F nicht auf der Netzhaut, sondern entweder innerhalb oder ausserhalb des Auges, jenachdem der Gegenstand zu weit entfernt oder zu nahe war.

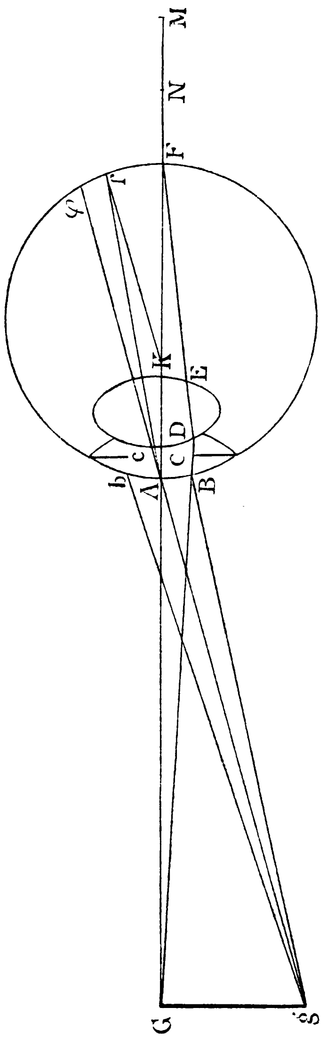

Fig. 71.

786. Ferner sei gB ein schief einfallender Strahl; dann wird dieser ebenfalls nach einer dreifachen Brechung auf die Netzhaut in f gelangen; mithin wird Ff das Bild des ganzen Halbmessers Gg.

787. Verlängert man die Gerade gA bis nach φ, so folgt aus den Sätzen der Dioptrik, dass sehr nahe $fF = \frac{2}{3}\varphi F$ ist. Macht man also $KF = \frac{2}{3}AF$ und zieht Kf parallel zu $gA\varphi$, so ist Ff das Bild der Geraden oder des Halbmessers Gg. Ist also der scheinbare Halbmesser des Gegenstandes oder der Winkel $GAg = \varphi AF$ gegeben, so ergibt sich auch der Halbmesser Ff des Bildes.

[**357**] 788. Man mache $Ab = AB$ und ziehe die Gerade gb, dann wird bgB der äusserste Strahlenkegel sein (495) und derselbe wird diejenigen Strahlen umfassen, welche vom Punkte g

aus durch die Oeffnung der Pupille in das Bild f dieses Punktes gelangen.

789. Mit Hilfe früherer Sätze folgt hieraus ohne Schwierigkeit die Strahlenmenge q, welche von der ganzen Fläche des Gegenstandes ausgehend auf einen kreisförmigen Raum vom Durchmesser Bb gelangen. Es wird nämlich (222)

$$q = \frac{\pi^2 Gg^2 \cdot AB^2}{\left(\frac{gb + gB}{2}\right)^2};$$

oder kürzer, da die Strecken gb und gB wenig von einander verschieden sind:

$$q = \frac{\pi^2 Gg^2 \cdot AB^2}{gA^2}.$$

790. Bezeichnet man ferner die mittlere Helligkeit des Bildes Ff mit η, so wird (497)

$$\eta = \frac{\pi Gg^2 \cdot AB^2}{gA^2 \cdot Ff^2}.$$

791. Es ist aber sehr nahe

$$Gg : gA = F\varphi : AF,$$

also hat man durch Substitution

$$\eta = \frac{\pi F\varphi^2 \cdot AB^2}{Ff^2 \cdot AF^2}.$$

Wegen

$$F\varphi : Ff = 3 : 2$$

wird aber kurz:

$$\eta = \tfrac{9}{4}\pi \operatorname{tg}^2 BFA.$$

792. **Lehrsatz 38.** *Die absolute Beleuchtung verhält sich zur Beleuchtung des Bildes auf der Netzhaut des Auges, wie $\frac{4}{9}$ zum Quadrat der Tangente des Winkels AFB.*

[**358**] 793. **Lehrsatz 39.** *Die absolute Beleuchtung verhält sich zur Beleuchtung des Bildes auf der Netzhaut des Auges, wie eine Kreisfläche vom Halbmesser KF zum Inhalt der Oeffnung bAB.*

Beweis: Es ist nämlich (791):

$$\eta = \frac{\pi F\varphi^2 \cdot AB^2}{Ff^2 \cdot AF^2}.$$

Man hat aber (787) gesehen, dass

$$F\varphi : Ff = AF : KF\,,$$

also wird durch Substitution

$$\eta = \frac{\pi AB^2}{KF^2}\,,$$

woraus

$$\pi : \eta = \pi KF^2 : \pi AB^2\,.$$

πKF^2 und πAB^2 sind aber die Kreisflächen, von welchen im Lehrsatz die Rede ist.

794. Hieraus folgt also, dass die Helligkeit des Bildes von der Entfernung des Gegenstandes unabhängig ist; ausgenommen ist der Fall, dass die letztere sehr klein ist, dann ist aber das Bild Ff nicht mehr deutlich und man muss eine ähnliche Rechnung anstellen, wie sie früher für Sammellinsen gegeben wurde (538 fgde.).

795. Die Helligkeit des Bildes ist aber auch abhängig von der Durchsichtigkeit der Flüssigkeiten des Auges, besonders der Krystallinse, welche bei zunehmendem Alter gelblich wird. Ferner wird eine gewisse Strahlenmenge beim Auffallen auf die brechenden Flächen B, D und E von denselben reflectirt; ich vermuthe, dass dies im Mittel ungefähr der sechste Theil der auffallenden Strahlen ist. Soweit man jedoch diesen Betrag als constant annehmen darf, wird die Helligkeit des Bildes [**359**] im zusammengesetzten Verhältniss der Pupillenfläche und der absoluten Beleuchtung stehen. Da die letztere aber allein von der Helligkeit des Gegenstandes abhängt, so folgt, *dass bei gleichbleibender Oeffnung der Pupille der Gegenstand um so heller erscheint, je heller er in Wirklichkeit ist, und dass insofern die subjective Helligkeit mit der wahren übereinstimmt.* Dies verhält sich jedoch anders, wenn sich diese Oeffnung bei zunehmender Helligkeit oder Grösse der Lichtquelle verkleinert, und deshalb werden wir später die Beziehungen zu ermitteln suchen, welche zwischen diesen drei Grössen bestehen. Zunächst aber wollen wir die Helligkeit bestimmen, welche dann entsteht, wenn das Auge mit einer Brille bewaffnet ist. Wir können uns bei diesen Untersuchungen kürzer fassen, da man viele und sehr allgemeine Sätze hierüber schon in den optischen Schriften von *Smith* und *Kaestner* vorfindet.

796. Sei also PF das Auge, EPF seine Axe und Pp der Halbmesser der Pupille. Der Halbmesser Gg des Gegenstandes

stehe senkrecht zur Axe und der Gegenstand selbst möge durch die Linse AB hindurch deutlich gesehen werden. EP sei die deutliche Sehweite des unbewaffneten Auges. Zieht man die

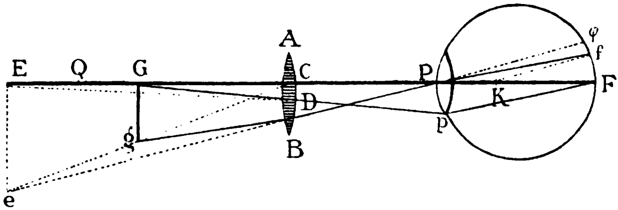

Fig. 72.

Gerade Ep, welche die Linse in D trifft, so wird GDp der Weg des äussersten Strahles sein, welcher noch in die Pupille gelangt; und alle Strahlen, welche vom Punkte G ausgehen und in das Auge gelangen, sind innerhalb eines Kegels enthalten, dessen Axe GC ist und dessen Grundfläche einen Halbmesser $=$ CD hat.

797. Man sieht aber leicht, dass sich dieser Kegel infolge der Brechung ändert, und dass die Strahlen so in das Auge eintreten, als ob sie vom Punkte E ausgingen und als ob sie einen Kegel bildeten, dessen Axe EP ist und dessen Grundfläche einen Halbmesser $= Pp$ hat.

[**360**] 798. Durch das Centrum P der Pupille ziehe man die Gerade PBe, sodass senkrecht zur Axe das Stück Ee abgeschnitten wird; die Punkte e und C verbinde man durch die Gerade egC; dann wird gBP den Weg des Lichts vom Punkte g des Gegenstandes aus bis in das Auge darstellen und der Gegenstand Gg wird durch die Linse so gesehen, als ob er sich ohne die Linse bei vergrösserter Fläche in Ee befände.

799. Man bezeichne der Kürze wegen Ee als das Bild des Gegenstandes Gg. Dann ist offenbar jeder Theil desselben vergrössert in dem Verhältniss der Strecken GC und EC. Denkt man sich nun in G ein Flächenelement vom Inhalt 1, so wird der Flächeninhalt seines Bildes in $E = EC^2 : GC^2$ sein. Nun steht aber die Strahlenmenge, welche auf die kreisförmige Fläche der Linse, deren Durchmesser $= 1$ sei, auffällt, im umgekehrten Verhältniss wie das Quadrat der Strecken GC und EC, dagegen im directen Verhältniss wie die Inhalte der Elemente G und E. Die letzteren verhalten sich aber direct wie jene Quadrate und folglich zerstören sich diese Verhältnisse gegenseitig. Es gelangt

also in den Raum CD dieselbe Strahlenmenge, gleichgiltig ob sie von einem Element $G=1$ oder von dessen Bild $E=EC^2:GC^2$ ausgeht. Da ferner diese Menge auch in beiden Fällen in die Pupille P des Auges gelangt, so folgt hieraus:

800. **Lehrsatz 40.** *Betrachtet man einen Gegenstand Gg durch die Linse AB, so ist seine Helligkeit dieselbe, wie wenn er auf directem Wege in Ee gesehen würde.*

Beweis: Vom Element G aus gelangt dieselbe Strahlenmenge durch die Pupille in die Netzhaut des Auges, wie von dem Bilde E; und beide nehmen auf der Netzhaut [**361**] denselben Raum ein, da man durch die Linse nicht den Gegenstand, sondern dessen Bild sieht. Man findet aber die Helligkeit oder Beleuchtung der Netzhaut, wenn man die Menge der Strahlen durch die Fläche, auf welche sie auffallen, dividirt. Beide sind aber in beiden Fällen einander gleich, und mithin folgt der Satz.

Zweiter Beweis: Sei der Halbmesser des Elementes $G=1$, der seines Bildes $=r$; vom Punkte G aus falle auf die Kreisfläche CD die Strahlenmenge q, vom Punkte E aus die Menge Q; dann wird, da die Elemente unendlich klein sind (222):

$$q = \pi^2 CD^2 : GD^2$$
$$Q = \pi^2 r^2 CD^2 : ED^2$$
$$1 : r = GD : ED\,,$$

also wird

$$Q = \frac{\pi^2 CD^2}{GD^2} = q\,.$$

Es fällt also in beiden Fällen dieselbe Strahlenmenge auf dasselbe Element der Netzhaut. Also hat man dieselbe Beleuchtung und dieselbe scheinbare Helligkeit.

801. Dieser zweite Beweis wurde zugefügt, um zu zeigen, wieweit sich dieser Lehrsatz ohne beträchtlichen Fehler ausdehnen lässt. Es wurde nämlich gesetzt

$$1 : r = GD : ED\,,$$

während man eigentlich setzen sollte

$$1 : r = GC : EC\,.$$

Der Satz kommt demnach offenbar der Wahrheit hinreichend nahe, solange CD gegenüber der Entfernung GC klein genug ist, um $GC = GD$ und $EC = ED$ setzen zu können. Dies ist aber immer erlaubt, wenn nicht AB das Segment [**362**] einer äusserst kleinen Kugel ist. In anderen Fällen ausser diesem ist der Fehler wohl verschwindend; man braucht sich auch den Gegenstand nicht in E zu denken, da, wie man früher gesehen hat, seine scheinbare Helligkeit constant ist. Es ist jedoch besser, wenn er sich in der deutlichen Sehweite befindet.

. . . .

804. Ein Auge PQ, dessen Axe GPQ sein möge, beobachte durch die zwei Linsen bc und BC den Gegenstand Gg. Man bestimme die scheinbare Helligkeit desselben. [363] Hierzu sei PD die Weite des deutlichen Sehens, Pp der Halbmesser

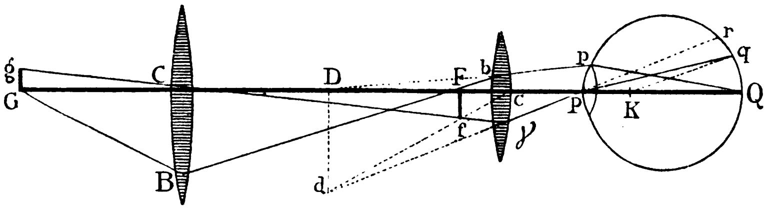

Fig. 73.

der Pupillenöffnung, Ff das erste Bild des Gegenstandes, $GBFbp$ der Weg eines Lichtstrahles, welcher vom Punkt G ausgeht und auf den Rand der Pupille trifft; dann wird CB die Oeffnung der Objectivlinse, bc die Oeffnung der Ocularlinse sein müssen, wenn alle Strahlen, welche nach ihrer Brechung in die Pupille eintreten können, wirklich eintreten sollen und wenn bei einer Vergrösserung der Oeffnung sich die Anzahl der in die Pupille eintretenden Strahlen nicht vermehren soll. Ist dagegen die eine der Oeffnungen kleiner, so ändert sich die Sachlage; denn dann bedeutet Pp nicht mehr die ganze Oeffnung der Pupille, sondern nur denjenigen Theil, welchen die vom Punkte G kommenden Strahlen bei ihrem Eintritt in das Auge ausfüllen. Die Dioptrik zeigt in jedem gegebenen Falle, wie man diejenige Oeffnung leicht bestimmen kann, welche einen Verlust erleidet. Unter den vom Punkte G der Axe ausgehenden Strahlen ist für uns hier der Strahl $GBFbp$ der äusserste von denen, welche in das Auge gelangen.

805. Um nun die centrale Helligkeit zu bestimmen, sei Gg der Halbmesser eines unendlich kleinen Flächenstückes; zieht man dann gCf, so wird Ff das Bild desselben sein, der Strahl gf gelangt sodann nach γ, wird dort gebrochen, geht nach P, wird dort von neuem gebrochen und trifft dann auf den Punkt q der Netzhaut. Verlängert man γP bis nach r, so wird nahezu

$Qq = \frac{2}{3} Qr$, oder, wenn man $QK = \frac{2}{3} QP$ macht und Kq zieht, so wird diese Gerade zu Pr parallel sein, sodass also Qq das Netzhautbild des Gegenstandes Gg darstellt. Zieht man endlich die Senkrechte Dd und verlängert $P\gamma$ bis zu d, so wird der Punkt d auf der Verlängerung der Geraden cf liegen.

806. Man lasse wieder die Lichtmenge ausser Betracht, welche vom Auge und von den Linsen reflectirt und zerstreut wird, und nehme an, dass alles Licht, welches vom Element Gg aus auf die Oeffnung CB auffällt, auch in das [**364**] Bild Qq gelange. Dann findet man die Helligkeit des Bildes, wenn man jene Menge durch den Raum Qq dividirt. Bezeichnet man also jene Menge mit q, so wird (222)

$$q = \frac{\pi^2 Gg^2 \cdot CB^2}{GB^2}.$$

Der Inhalt des Elementes Qq ist aber $= \pi Qq^2$; setzt man also die Helligkeit in $Q = \eta$, so wird

$$\eta = \frac{\pi Gg^2 \cdot CB^2}{GB^2 \cdot Qq^2}.$$

807. Bezeichnet man den Winkel CGB mit φ, so wird $GB = GC \sec\varphi$; und da man ferner hat

$$Gg : GC = Ff : CF,$$

so wird

$$\frac{Gg}{GB} = \frac{Gg}{GC \sec\varphi} = \frac{Ff}{CF \sec\varphi}.$$

Durch Substitution dieses Werthes erhält man:

$$\eta = \frac{\pi Ff^2 \cdot CB^2}{CF^2 \cdot \sec^2\varphi \cdot Qq^2}.$$

808. Setzt man ferner die Winkel

$$GCg = FCf = \omega$$
$$CP\gamma = rPQ = v,$$

so wird

$$Ff : CF = \operatorname{tg}\omega$$
$$Qq : QK = \operatorname{tg} v,$$

also erhält man durch Substitution

$$\eta = \frac{\pi \operatorname{tg}^2\omega \cdot CB^2}{\sec^2\varphi \cdot \operatorname{tg}^2 v \cdot QK^2}.$$

809. Sei c die scheinbare Helligkeit des Gegenstandes Gg, wenn derselbe mit blossem Auge gesehen wird; dann ist (793)

$$c = \frac{\pi Pp^2}{QK^2},$$

[365] woraus

$$1 : QK^2 = \frac{c}{\pi Pp^2}.$$

Mithin hat man wieder durch Substitution:

$$\eta = \frac{c \operatorname{tg}^2 \omega \cdot CB^2}{\sec^2 \varphi \cdot \operatorname{tg}^2 v \cdot Pp^2}.$$

810. Ferner ist

$$Dd = PD \cdot \operatorname{tg} v = Ff \cdot Dc : Fc,$$

woraus

$$\operatorname{tg} v = Ff \cdot cD : DP \cdot Fc.$$

Da aber

$$\operatorname{tg} \omega = Ff : CF,$$

so wird

$$\eta = \frac{c \cdot CB^2 \cdot DP^2 \cdot Fc^2}{\sec^2 \varphi \cdot Pp^2 \cdot Dc^2 \cdot CF^2}.$$

Es ist aber

$$DP : Pp = Dc : cb$$
$$bc : CB = Fc : CF,$$

mithin erhält man durch Substitution schliesslich

$$\eta = c \cos^2 \varphi.$$

Hieraus folgt:

811. **Lehrsatz 41.** *Hat die Pupille eine solche Oeffnung, welche dem äussersten Strahl $GBFbp$ noch genügt, so verhält sich die scheinbare Helligkeit des Gegenstandes beim directen Anblick zur scheinbaren Helligkeit desselben beim Anblick durch beide Linsen, wie die Einheit zum Quadrat des Cosinus des Winkels BGC.*

812. *Beide Helligkeiten sind also gleich, wenn der Gegenstand unendlich weit entfernt ist.* Man muss jedoch wohl bemerken, dass wir mit dem Ausdruck »Oeffnung der Pupille« hier der [366] Kürze wegen diejenige Kreisfläche bezeichnen, deren Halbmesser Pp vom äussersten Strahl $GBFbp$ ausgeschnitten wird. Diese Fläche kann, wie man gesehen hat, der wahren Oeffnung der Pupille bisweilen gleich, niemals aber grösser als dieselbe sein.

813. Da die scheinbare Helligkeit bei dieser Pupillenöffnung im Fall des directen Sehens gleich (809)

$$c = \frac{\pi P p^2}{Q K^2}$$

ist, so hat man durch Substitution

$$\eta = \frac{\pi P p^2}{\sec^2 \varphi \cdot Q K^2}.$$

814. Diese Kreisfläche Pp ist jedoch die Grundfläche eines Strahlenkegels, welcher diejenigen Strahlen umfasst, die vom Punkte G ausgehend auf die Netzhaut gelangen, dessen Gestalt sich jedoch in Folge der Brechung so geändert hat, dass sein Scheitel sich jetzt in D befindet. Ist ferner der Gegenstand unendlich weit entfernt, so wird $\sec \varphi = 1$, und mithin

815. **Lehrsatz 42.** *Die Beleuchtung der Netzhaut Q verhält sich zur absoluten Beleuchtung, wie die Grundfläche des Kegels DPp zur Fläche eines Kreises vom Halbmesser QK, vorausgesetzt dass der Gegenstand unendlich weit entfernt ist. Im anderen Falle ist die Beleuchtung der Netzhaut noch zu verkleinern im quadratischen Verhältniss des Cosinus des Winkels BGC.*

816. Sei jetzt der wahre Halbmesser der Pupillenöffnung $= p$, und die Helligkeit des Gegenstandes, mit blossem Auge gesehen, $= C$, so wird (793)

$$C = \frac{\pi p^2}{Q K^2},$$

[**367**] mithin

$$C : \eta = p^2 : P p^2 \cos^2 \varphi .$$

Hieraus folgt

817. **Lehrsatz 43.** *Die scheinbare Helligkeit des Gegenstandes bei directem Sehen verhält sich zu derjenigen unter Anwendung zweier Linsen, wie der Flächeninhalt der Pupille zum Product aus dem Quadrat des Cosinus des Winkels BGC und dem Inhalt der Grundfläche des Kegels PDp.*

818. Stellt Cc ein astronomisches Fernrohr dar, so ist, wenn man bei Nacht den Mond beobachtet, die Grundfläche des Kegels PDp weit kleiner als die Oeffnung der Pupille. Obwohl sich also wegen der bedeutenden scheinbaren Grösse des Mondes die Pupille verengt, so wird sie doch nur in seltenen Fällen so eng werden, dass die Schiefe des äussersten Strahles nicht von der

Oeffnung der Objectivlinse, sondern von der Oeffnung der Pupille selbst abhängt.

819. Auch bei diesen Untersuchungen wurden diejenigen Strahlen unberücksichtigt gelassen, welche von den Oberflächen der Linsen und des Auges reflectirt und zerstreut werden, da man ihre Menge nach früheren Sätzen (Th. 2, Kap. 3 und 4) ohne Schwierigkeit bestimmen kann. Selbstverständlich braucht man übrigens auf diejenige Menge, welche an den Oberflächen der Flüssigkeiten des Auges reflectirt wird, nur dann Rücksicht zu nehmen, wenn es sich darum handelt, die Beleuchtung der Netzhaut mit der absoluten Beleuchtung zu vergleichen. Handelt es sich jedoch um eine gegenseitige Vergleichung scheinbarer Helligkeiten, so kann man von dieser Menge absehen, da in beiden Fällen dieselbe Verminderung eintritt.

820. Da die scheinbare Helligkeit von der Grösse des Bildes Ff unabhängig ist, so gelten dieselben [**368**] Sätze offenbar auch für mehr als zwei Linsen oder Spiegel. Da dieser Gegenstand jedoch von *Smith* und *Kaestner* eingehend behandelt ist, so schliesse ich diese Betrachtungen.

Kapitel II.

Experimentelle und theoretische Bestimmung der Beziehungen zwischen der Oeffnung der Pupille, der subjectiven Helligkeit und der Grösse der Lichtquelle.

. . . .

[**370**] 828. . . . . Die einzelnen im Folgenden erwähnten Wahrnehmungen [**371**] werden nicht für jedes beliebige Auge Geltung haben; ich werde jedoch die Methode, nach der ich diese Untersuchungen angestellt habe, beschreiben, damit sie jeder, der an seinem Auge Versuche anstellen will, mit Sicherheit benutzen kann.

829. Die Zusammenziehung der Pupille hängt nicht von derjenigen Lichtmenge ab, welche auf die Iris auffällt, sondern vorzugsweise von derjenigen, welche durch die Pupille hindurch auf die Netzhaut gelangt. Dies kann man auf folgende Art beweisen.

830. **Versuch 32.** Dieselbe Linse, welche bei Versuch 26 und fgdn. verwendet worden war und welche AB heissen möge,

wurde zwischen der Kerzenflamme L und dem Auge PO so aufgestellt, dass die Entfernung LA ungefähr etwas mehr als

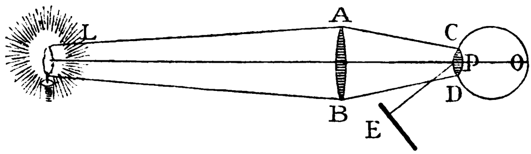

Fig. 74.

das dreifache der Brennweite betrug und dass die Oberfläche des einen Auges mit dem Bild der Kerze zusammenfiel, wovon man sich mit Hilfe eines Spiegels in E leicht überzeugen konnte. Sodann wurde Sorge getragen, dass sich das Bild der Spitze der Flamme auf der Iris selbst darstellte, ohne dass auch Licht in die Pupille gelangte. Wurden sodann die Bilder beider Augen in dem Spiegel betrachtet, so sah man, dass beide Pupillen merklich gleichweit geöffnet waren. Wurde jedoch die Stellung der Linse oder des Auges so verändert, dass auch nur der kleinste Theil des Bildes der Flamme in die Pupille gelangte, so zog sich die Pupille augenblicklich zusammen und sie wurde sogar dreimal so klein, wenn das ganze Bild auf dieselbe fiel. Der Versuch wurde mehrfach wiederholt und immer mit demselben Erfolg.

831. Aus diesem Versuch scheint hervorzugehen, *dass die einzige oder wenigstens hauptsächliche Ursache der ciliaren Processe auf dem Grunde der Netzhaut zu suchen ist und dass also die Zusammenziehung der Pupille nicht unmittelbar von der wirklichen Helligkeit des Gegenstandes abhängt*, [**372**] *sondern nur von der Helligkeit, welche das Bild auf der Netzhaut besitzt.* Da die letztere umgekehrt von der Oeffnung der Pupille abhängt, so sieht man, *dass die Abhängigkeit eine gegenseitige ist.*

832. Hiernach kann man leicht die folgenden Sätze aufstellen: *Bei gleichbleibender Grösse des Bildes ist die Oeffnung der Pupille eine Function der Helligkeit desselben.* Denn in beiden Fällen sind es dieselben Fibrillen, welche durch das Licht in Erregung versetzt werden. Da nun eine beliebige Fibrille um so mehr zur Bewegung angeregt wird, je intensiver das Licht ist, welches auf sie auffällt, und je heller also das Bild war, so ergibt sich hieraus der Satz.

833. Der Zufluss des Lichtes in das Auge ist continuirlich, und daher werden auch die Fibrillen auf der Netzhaut continuirlich durch die Lichtstrahlen erschüttert. Die hierdurch entstehende Bewegung muss sich also weiter verbreiten und man kann sich vorstellen, dass sich dieselbe so anhäuft, dass diese Fibrillen durch die Stösse des Lichtes nicht bloss erregt werden, sondern auch in der schwingenden Bewegung, oder welcher Art dieselbe sonst sein mag, eine Zeit lang beharren. Die tägliche Erfahrung beweist dies auf das deutlichste. Blickt man nämlich in die Sonne, und wendet die Augen schnell wieder weg, so sieht man das Bild derselben in den verschiedensten Farben. Ebenso sieht man, wenn ein Faden oder ein Stab sehr schnell um seine Axe oder seinen Mittelpunkt gedreht wird, den dadurch beschriebenen Kreis in seiner ganzen Fläche. Hierher kann man auch den Versuch rechnen, welchen *Kästner* in seinem vorzüglichen System der Optik S. 430 beschreibt, nämlich eine derartige sehr schnelle Kreisbewegung zur Darstellung der Farbenmischungen anzuwenden. Man kann dasselbe auch beobachten, wenn man bei Nacht ein Kerzenlicht anblickt [**373**] und das Auge dann schnell wegwendet; dann sieht man nämlich die Flamme geschwänzt, obzwar das schwache Licht des Schweifes sehr rasch verschwindet.

834. Diese Fortsetzung des Zustandes der schwingenden Bewegung ist zum grossen Theil die Ursache dafür, dass die Veränderung der Pupille nicht momentan erfolgt. Denn wenn sich die Helligkeit des Lichts vergrössert, so wird sich diese Bewegung nur allmählich steigern, um in einen beharrlichen Zustand überzugehen; und ebenso wird sich bei Verminderung des Lichts jene Anhäufung, welche nunmehr zu gross ist, nur allmählich verlieren. Hieraus leuchtet aber von selbst ein, dass jene Function der Helligkeit des Bildes, durch welche sich die Oeffnung der Pupille ausdrückt, keineswegs einfach ist. Wir werden sie deshalb im Folgenden durch die Ordinaten einer gewissen Curve ausdrücken.

. . . .

[**375**] 840. **Lehrsatz 47.** *Bei der doppelten, dreifachen, n-fachen Intensität des Lichts wird die Zusammenziehung der Pupille nicht so stark sein, dass ihre Oeffnung die Hälfte, ein Drittel, ein n-tel der früheren beträgt, sondern ihre Oeffnung wird grösser sein.*

Beweis: Fände nämlich das erstere statt, so würde die Helligkeit des Bildes constant sein, da die letztere sich immer verhält wie das Product aus der Helligkeit des Gegenstandes und der Oeffnung der Pupille. Setzt man also jene $= n$, diese $= \frac{1}{n}$, so erhält man $n \cdot \frac{1}{n} = 1$. Da jedoch die Zusammenziehung der Pupille von der Helligkeit des Bildes abhängt, so muss sich die letztere bei zunehmender Helligkeit des Gegenstandes vergrössern. Setzt man also die Helligkeit des Gegenstandes $= n$, so muss die Oeffnung der Pupille $> \frac{1}{n}$ sein.

841. Dieser Satz gilt in Bezug auf das n-fache sowohl der Helligkeit wie der scheinbaren Grösse des Bildes wie auch des Productes aus beiden; und er ergibt sich schon daraus, [**376**] dass $\frac{1}{n}$ niemals grösser werden kann, als der Flächeninhalt der Iris.

. . . .

[**377**] 847. Nach diesen Vorbemerkungen bezeichne man die Oeffnung der Pupille bei ihrer grössten Grösse mit a; dann wird a dem Flächeninhalt der ganzen Iris genau oder nahezu gleich sein. Das Auge möge nun eine Lichtquelle oder irgend einen Gegenstand anschauen, und es sei

die Helligkeit dieses Gegenstandes . . . . $= \varkappa$
der Flächeninhalt des Bildes auf der Netzhaut $= \eta$
der entsprechende Flächeninhalt der Pupille . $= x$
die Helligkeit des Bildes . . . . $= y$

[**378**] Dann ist $y = \varkappa x$, und die Zusammenziehung der Pupille $= a - x$, welche gleich der Summe aller partiellen Zusammenziehungen sein wird.

848. Eine beliebige partielle Zusammenziehung findet man nun folgendermaassen: Man hat gesehen, dass dieselbe eine Function der Intensität des Lichts ist, welches die Fibrillen erschüttert; diese Intensität wurde mit y bezeichnet. Da diese Function jedoch ganz unbekannt ist, so denken wir uns eine Curve AMN von der Art, dass für eine Abscisse $AP = y$ die Ordinate PM jene Function, d. h. die irgend einer Fibrille

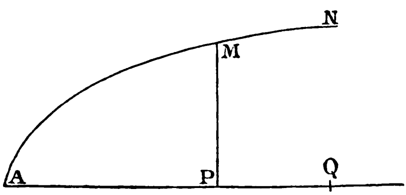

Fig. 75.

entsprechende Zusammenziehung darstellt. Entspricht einer Fibrille der Flächeninhalt $d\eta$, so wird die entsprechende Zusammenziehung $= - dx$ sein, und mithin

$$-dx = PM \cdot d\eta\,,$$

also

$$a - x = \eta \cdot PM\,.$$

849. Es ist aber

$$AP = y = \varkappa x\,,$$

also

$$x = \frac{AP}{\varkappa}\,,$$

mithin wird durch Substitution

$$a - \frac{AP}{\varkappa} = \eta \cdot PM\,.$$

850. Nimmt man nun eine Abscisse $AQ = a\varkappa$, so wird

$$a = \frac{AQ}{\varkappa}\,,$$

mithin

$$\frac{AQ - AP}{\varkappa} = \eta \cdot PM.$$

Hieraus wird

$$\frac{PQ}{PM} = \eta\varkappa = \operatorname{cotg} MQP\,.$$

[**379**] *Ist also die Curve construirt, so findet man ohne Schwierigkeit die Oeffnung der Pupille, welche einer gegebenen Helligkeit des Gegenstandes und einer gegebenen scheinbaren Grösse desselben entspricht.* Macht man nämlich $AQ = a\varkappa$, trägt den Winkel MQA an, dessen Cotangente $= \eta\varkappa$ ist, zieht QM und fällt von M die Senkrechte MP, so ist der Flächeninhalt der Pupille $x = AP : \varkappa$.

851. Hierzu hat man das Corollar: Wenn die Helligkeit $\varkappa$ des Gegenstandes constant ist, so ist AQ constant, da letzteres $= a\varkappa$ sein muss; daher entsprechen einem beliebigen Inhalt η des Bildes solche Winkel MQA, deren Cotangenten $= \eta\varkappa$ sind, und folglich sind die entsprechenden Oeffnungen der Pupille $x = AP : \varkappa$. Um nun diesen Fall durch einen Versuch zu prüfen, legen wir zu Grunde das folgende

852. **Lemma 1.** „*Betrachtet das Auge AB durch den Spiegel CD sein eigenes Bild, so wird der Durchmesser der Pupille pq gleich der Hälfte des wahren Durchmessers AB sein oder gleich dem wahren Halbmesser.*

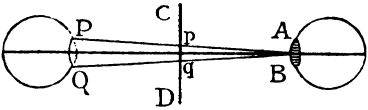

Fig. 76.

Beweis: Die Entfernung Pp des Bildes ist nämlich dieselbe wie die des Auges Ap, also wird $AP : Ap = 2 : 1$. Ferner ist $PQ = AB$, mithin wird $pq = \frac{1}{2} PQ = \frac{1}{2} AB$.

853. **Versuch 33.** In einem gut verschlossenen und gut verdunkelten Zimmer wurde im Fenster eine einzige kreisförmige Oeffnung gelassen mit einem Durchmesser = 0.302 eines Fusses, so dass das Licht des wolkenlosen Himmels von der Seite einfiel,

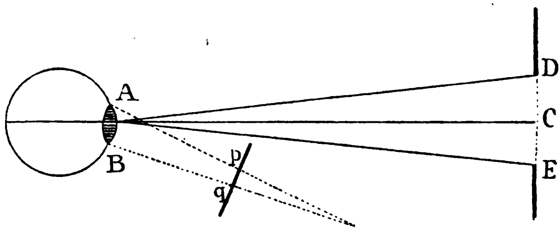

Fig. 77.

welche von der Sonne abgewendet war. Sodann entfernte ich mich vom Fenster, nahm einen [**380**] Spiegel pq, und betrachtete das Licht des Himmels durch die Oeffnung DE so lange, bis die Pupille die dieser Lichtquelle entsprechende Oeffnung angenommen hatte. Dann wurde mit einem bereit gehaltenen Zirkel auf der Oberfläche des Spiegels der Durchmesser dieser Oeffnung genommen. Es wurde darauf gehalten, dass diese Messung schnell geschah und sodann nachträglich verificirt wurde, indem ich den Versuch auf dieselbe Weise wiederholte und nachsah, ob sie constant geblieben war oder nicht. Der Versuch wurde bei derselben Distanz mehrmals wiederholt und aus allen das Mittel genommen, wobei ungefähr der dritte Theil der Versuche verworfen wurde, weil sie eine grössere Oeffnung der Pupille angaben als die übrigen. Denn es stand zu befürchten, dass sich die Pupille aus einem zweifachen Grunde wieder erweitern könnte, einmal weil das Bild des Auges im Spiegel dunkeler war, sodann weil, um die Messung des Halbmessers pq auszuführen, das Auge angestrengt werden musste. Unter diesen Vorsichtsmaassregeln wurde nun die Distanz AC in der Weise geändert, dass sie der Reihe nach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 Fuss betrug, und jedesmal wurde der Versuch in derselben Weise wiederholt. Endlich wurde, um den scheinbaren Halbmesser der Oeffnung DCE zu bestimmen, der wahre Halbmesser $DC = 0.151$ durch die Distanz AC dividirt, und so die Tangente des Winkels DAC und sodann der Winkel selbst ermittelt. Den Halbmesser pq nahm ich in Pariser Linien und deren Decimaltheilen. Hieraus entstand die folgende Tabelle: [**381**]

Distanz AC:	Winkel DAC:	Beobachteter Durchmesser AB der Pupille:	Verbesserter Durchmesser AB:
Fuss		Lin.	Lin.
1	8°36′	1.14	1.13
2	4 20	1.50	1.44
3	2 53	1.70	1.70
4	2 10	1.89	1.93
5	1 44	2.08	2.15
6	1 26½	2.31	2.36
7	1 14	2.53	2.56
8	1 5	2.78	2.75
9	0 58	2.89	2.93
10	0 52	3.15	3.10

Den Durchmesser der ganzen Iris fand ich = 4.70. Die verbesserten Durchmesser der Pupille bestimmte ich auf dieselbe Weise, wie man nach dem Früheren (396 fgde.) verfahren muss, um die unvermeidlichen Beobachtungsfehler einem homogenen Gesetz anzuschmiegen.

854. Da bei diesen Versuchen die Gestalt der Pupille, des Bildes und der Iris kreisförmig ist, und da man den Durchmesser des Bildes dem scheinbaren Halbmesser des Gegenstandes proportional setzen kann, so

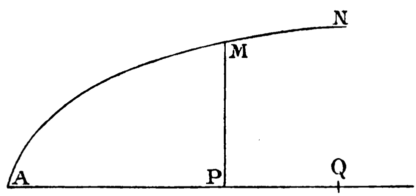

Fig. 75.

werden wir die Flächeninhalte der Bilder einfach durch die Quadrate der Durchmesser ersetzen, da es hier nur auf das Verhältniss zwischen den entsprechenden Inhalten der Pupille und des Bildes ankommt. Setzt man daher $a = 4.70^2$, so ergibt sich aus der vorigen Tabelle die nachstehende, für welche die verbesserten Durchmesser der Pupille zur Verwendung kamen: [**382**]

Distanz	x	η	$a - x$	PM
1	127.69	2663.56	2071.31	0.777
2	207.36	676.00	2001.64	2.961
3	289.00	299.29	1920.00	6.414
4	372.49	169.00	1836.51	10.866
5	462.25	108.16	1746.75	16.150
6	556.96	74.82	1652.04	22.080
7	655.36	54.74	1553.64	28.371
8	756.25	42.25	1452.75	34.384
9	858.49	33.64	1350.51	40.146
10	961.00	27.04	1248.00	46.154

Da nämlich in diesem Fall die Helligkeit $\varkappa$ des Gegenstandes constant ist, so setzen wir sie $= 1$, und dann wird $AQ = a = 2209.00$, $AP = x$, $PQ = a - x$ und daher $PM = PQ : \eta$ (850). *Auf diese Weise ergibt sich also das Verhältniss zwischen der Intensität des Lichts, welches auf die Netzhaut fällt, und der Zusammenziehung, welche der getroffenen Fibrille oder einem Element der Netzhaut entspricht.* Die Zusammenziehung ist nämlich $= PM$, und wegen $\varkappa = 1$ und der Intensität des Lichts $y = \varkappa x$ wird $y = x$.

855. Um jetzt die Zahlen dieser Tabelle auf bestimmte Einheiten zu beziehen, setze man:

die Helligkeit AQ des unbewölkten Himmels $= 1$
den Flächeninhalt a der Iris . . . . . . $= 1$
den Inhalt der Pupille . . . . $= x$
eine beliebige Helligkeit Aq . . . . . . $= \varkappa$
den scheinbaren Halbmesser des Gegenstandes $= s$
mithin wird der Inhalt des Bildes . . . . $\eta = \frac{1}{\mu} \sin^2 s$.

Sind nun die Abscissen AP der Curve $AMN = y = \varkappa x$, und stellen die entsprechenden Ordinaten PM die Zusammenziehung dar, welche einer beliebigen Fibrille oder einem [**383**] Element der Netzhaut entspricht, so wird $PM = (1 - x) : \eta$ und daher kurz:

$$PM = \frac{(1-x)\mu}{\sin^2 s}$$

und

$$x = \frac{AP}{Aq},$$

woraus

$$PM = \frac{Pq \cdot \mu}{Aq \cdot \sin^2 s}$$

und hieraus ferner

$$\frac{\mu}{\sin^2 s} = \mu \operatorname{cosec}^2 s = \frac{Aq \cdot PM}{Pq} = Ap\,.$$

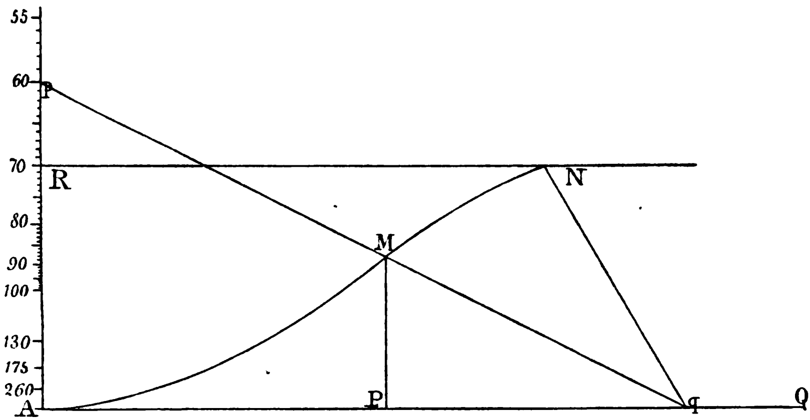

Fig. 78.

856. Der Coefficient μ kann durch eine einzige Beobachtung und durch den angenommenen Maassstab für die Construction der Curve bestimmt werden. Hierauf kann man auf der Geraden Ap die scheinbaren Halbmesser des Gegenstandes auftragen und dann lassen sich die einzelnen Fälle, welche vorkommen können, durch eine leichte Construction lösen.

857. *Sei beispielsweise der Halbmesser* $Ap = 60'$ *und die Helligkeit des Gegenstandes* $= Aq$, *so ziehe man* pMq *und von* M *die Senkrechte* MP, *dann wird die Oeffnung*

der Pupille $= AP : Aq$ *sein.* Die Curve, welche Fig. 78 darstellt, ist in dieser Weise construirt worden; der Geraden Ap ist eine Scala der Halbmesser des Gegenstandes beigefügt, so weit sich diese nach der vorigen Tabelle ausdehnen liess. Ich werde nun diese Tabelle in einer Form, in der sie auf die vorher festgesetzten Einheiten reducirt ist, hier mittheilen. [**384**]

Entfernung des Gegenstandes	Oeffnung x der Pupille	Scheinbarer Halbmesser s des Gegenstandes	Flächeninhalt des Bildes $= \eta = \pi \sin^2 s$	$PM = (1 - x) : \eta$
1	0.0578	8° 36′	0.07025	13.43
2	0.0938	4 20	0.01794	50.51
3	0.1308	2 53	0.007954	113.96
4	0.1686	2 10	0.004492	193.52
5	0.2092	1 44	0.002875	289.17
6	0.2525	1 26½	0.002011	393.10
7	0.2962	1 14	0.001456	513.52
8	0.3423	1 5	0.001123	626.81
9	0.3886	0 58	0.0008942	735.50
10	0.4350	0 52	0.0007188	850.58

. . . .

[**386**] 863. Als eine Gleichung, welche sowohl der Tabelle § 857 als auch den Eigenschaften der Curve genügt, habe ich folgende gefunden: Es heisse $PM = z$, dann wird wegen $AP = y = x$ nahezu

$$z = \frac{\nu y^2}{\alpha + y^2} = \frac{\nu x^2}{\alpha + x^2}.$$

Die Coefficienten ν und α dieser Gleichung wurden durch diejenigen Beobachtungen bestimmt, welche in Tabelle § 857 den Distanzen 6 und 10 entsprechen, jedoch so, dass gesetzt wurde $PM = 1000\,z$. Hieraus fand sich

$$0.85058 \cdot (0.4350)^2 + 0.85058\,\alpha = 0.4350^2 \cdot \nu$$
$$0.39310 \cdot (0.2525)^2 + 0.39310\,\alpha = 0.2525^2 \cdot \nu\,,$$

mithin

$$\alpha = 0.27383$$
$$\nu = 2.08145\,,$$

also

$$z = \frac{2.08145 \cdot x^2}{0.27383 + x^2},$$

oder

$$z = \frac{2.08145 \cdot y^2}{0.27383 + y^2}.$$

Die letztere Gleichung ist allgemeiner, weil nur dann $y = x$ ist, wenn $x = 1$ ist oder wenn die Helligkeit gleich derjenigen des unbewölkten Himmels ist. [**387**]

. . . .

Fünfter Theil.

Die Zerstreuung des Lichts beim Durchgang durch durchsichtige Körper und besonders durch die Atmosphäre der Erde.

Kapitel I.

Die Schwächung des Lichts auf dem Weg durch weniger durchsichtige Mittel, besonders die Atmosphäre der Erde.

[**388**] 865. Sowohl im Früheren, wie besonders auch in dem schon mehrfach erwähnten Buche von *Bouguer* begegnet man mehreren Bemerkungen, welche sich auf die Bestimmung der Lichtschwächung in durchsichtigen Mitteln beziehen; indessen müssen wir hier doch von vorn beginnen, um die Sache nicht nur in allgemeinerer Weise zu erledigen, sondern auch um die Anwendung auf speciellere Fälle zu zeigen.

866. Wie früher (320, 322, 323, 466 fgde.) schon öfter bemerkt wurde, wird die Zerstreuung des Lichts durch diejenigen heterogenen Theilchen bewirkt, welche in grösserer oder geringerer Anzahl in den durchsichtigen Körpern enthalten sind. Man kann dieselben daher als Hindernisse ansehen, welche das Licht auf seinem Wege vorfindet und durch welche es aufgefangen wird. Solche Hindernisse sind im Glase die Bläschen oder Hohlräume, wie sie sich auch im Eis in ungeheurer [**389**] Anzahl vorfinden. Ohne Zweifel befinden sich solche auch im Innern des Wassers und der anderen Flüssigkeiten, da sie sich sichtbar machen, sobald die darinnen enthaltene Luft durch Erwärmung ausgedehnt wird. Zu diesen Bläschen kommen die festen und die vielen anderen heterogenen Theilchen, welche alle dem Licht auf seinem Wege mehr oder weniger hinderlich sind, je nach der Grösse der Oberfläche, welche sie demselben

darbieten. So ist auch, wie allgemein bekannt ist, die Luft fortwährend erfüllt mit einer grossen Menge von Dämpfen und anderen Theilchen, welche von den irdischen Körpern ausgehen.

867. Das Licht wird beim Auffallen auf die Oberflächen solcher Theilchen in der verschiedensten Weise aufgefangen und zerstreut, und daher kommt es, dass nicht alles Licht, welches angekommen war, auf dem geraden Wege weitergehen kann. Die Art und Weise, wie die Zerstreuung erfolgt, werden wir im Folgenden kennen lernen; dagegen handelt es sich zunächst darum, die Menge zu bestimmen, welche aufgefangen wird und welche von der geradlinig fortschreitenden Lichtmenge in Abzug kommt.

868. Man denke sich ein solches Theilchen in kugelförmiger Gestalt; dann sieht man leicht, dass dasselbe alles dasjenige Licht auffangen wird, welches senkrecht auf eine Kreisfläche auffallen würde, deren Durchmesser gleich ist dem Durchmesser der Kugel. Denn die Verschiedenheit des Einfallswinkels beeinflusst nur die Zerstreuung des Lichts, nicht aber auch die Menge, welche aufgefangen wird.

869. Nimmt man nun ausserdem an, dass das Licht, wenn es in der Nähe der Oberfläche eines solchen Theilchens vorbeigeht, aus irgend einem Grunde eine Ablenkung erleidet, so wird also auch ein weiterer Theil desselben zerstreut werden, sodass man ihn nicht mehr zu dem Rest, welcher geradlinig weitergeht, als zugehörig ansehen kann.

[**390**] 870. Auf diese beiden Ursachen würde man genauer eingehen müssen, wenn es sich um eine gesonderte Betrachtung jedes einzelnen Theilchens handeln würde. Aber es tritt hier eine solche Mannigfaltigkeit in Gestalt, Grösse und den Beugungsverhältnissen auf, dass eine rechnerische Verfolgung geradezu unmöglich ist. Deshalb werden wir nur diejenigen Fälle betrachten, denen man ein allgemeineres Gesetz anpassen kann; und als Grundlage für diesen Zweck bemerken wir folgendes.

871. Erstens kann man nämlich die beiden vorigen Arten der Zerstreuung sehr bequem zusammenfassen, wenn man sich statt des Theilchens, welches das Licht auffängt, ein anderes Theilchen denkt, welches so gross ist, um alles Licht, welches zerstreut wird, auffangen zu können. Denn auf diese Weise wird alles zerstreute Licht auf einen Schlag getrennt von demjenigen, welches zum Ziel gelangt und dessen Menge zu bestimmen ist.

872. Zweitens muss man, obwohl die das Licht auffangenden Theilchen eines durchsichtigen Körpers gegenseitig ausserordentlich verschieden sind, dennoch die Annahme machen, dass sie im durchsichtigen Medium vollkommen oder nahezu gleichmässig vertheilt sind; denn sonst müsste man auf jede Rechnung verzichten.

873. So nimmt man beispielsweise für das Glas, das Wasser und überhaupt für Flüssigkeiten, welche gleichmässig dicht und gut gemischt sind, eine gleichmässige Vertheilung der Theilchen an, wie wir es für das Glas schon früher (466 fgde.) gethan haben. Dagegen muss man für die Luft eine ungleichmässige Vertheilung annehmen, sobald man verschiedene Schichten der Atmosphäre mit einander vergleicht. Betrachtet man dagegen dieselbe Schicht, so kann man die Vertheilung in ihr als gleichmässig ansehen und diese Annahme ist ohne beträchtlichen Fehler immer dann **[391]** statthaft, wenn man nicht sehr weit von einander entfernte Theile derselben Schicht mit einander vergleicht.

874. *Die Menge des aufgefangenen Lichtes ist um so grösser, je grösser die Anzahl der in demselben Raumtheil vorhandenen Theilchen und je grösser die Oberfläche der einzelnen Theilchen ist.* Sieht man diesen Raumtheil als unendlich klein an, so wird sich die aufgefangene Lichtmenge verhalten, wie die Summe der Hindernisse oder der entgegenstehenden Oberflächen. Diese Summe, durch das Raumelement dividirt, werden wir *die Dichtigkeit der Hindernisse* nennen, und es ist selbstverständlich, dass dieselbe *die Undurchsichtigkeit des durchsichtigen Mittels* ausdrückt.

875. Es sei jetzt CB das durchsichtige Mittel, das Licht falle in dasselbe ein in der Richtung AB und die Dichtigkeit des auffallenden Lichts sei $= 1$. Nachdem das Licht bis P gelangt ist, sei die noch übrigbleibende Dichtigkeit $= v$, der zurückgelegte Weg $AP = x$, das Element $Pp = dx$, die Dichtigkeit der Hindernisse in diesem Element $= \delta$, die ihm entsprechende Schwächung des Lichts $= - dv$; dann wird (467)

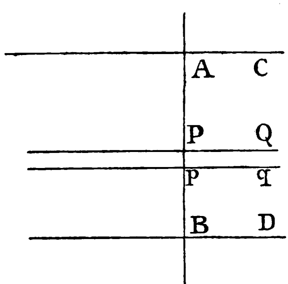

Fig. 79.

$$- dv = v \delta \cdot dx ,$$

und mithin

$$\log \frac{1}{v} = \int \delta \cdot dx .$$

Es ist aber $\int \delta \cdot dx$ die Summe der Hindernisse, welche das Licht auf seinem Weg durch AP antrifft; hieraus folgt:

876. **Lehrsatz 48.** *Der Logarithmus der Lichtmenge, welche übrig bleibt, wenn das Licht in einem weniger durchsichtigen Mittel geschwächt wird, verhält sich wie die Summe aller Hindernisse, welche das Licht auf seinem Wege vorfindet, wie auch die Hindernisse in dem fraglichen Mittel vertheilt sein mögen und wie auch die Bahn gekrümmt sein mag.*

[**392**] Beweis: Es ist nämlich $\delta \cdot dx$ das Product aus einem unendlich kleinen Stück des durchlaufenen Weges und der Dichtigkeit der Hindernisse; da man nun die Menge der Hindernisse findet, wenn man ihre Dichtigkeit δ mit dem Wegelement dx multiplicirt, so wird $\delta \cdot dx$ die Menge der Hindernisse für das durchlaufene Wegstück dx, und mithin ist $\int \delta \cdot dx$ die Summe aller Hindernisse, welche sich auf dem ganzen Wege x befinden. Da diese Summe $= \log \frac{1}{v}$ ist, so folgt der Satz.

877. **Lehrsatz 49.** *Sind die Theilchen, welche das Licht auffangen, gleichmässig vertheilt, so ist der Logarithmus der Schwächung des Lichts gleich dem Product aus der Undurchsichtigkeit des Mittels und dem durchlaufenen Weg.*

Beweis: In diesem Fall ist nämlich δ constant und die gefundene Formel

$$\log \frac{1}{v} = \int \delta \cdot dx$$

geht in die folgende über

$$\log \frac{1}{v} = \delta \cdot x ,$$

woraus der Satz folgt.

878. Sei nun AE die Oberfläche der Erde, C das Centrum derselben, AB die Höhe der Luft, so weit sie Licht auffängt, $PMmp$ eine beliebige Schicht der Luft; fällt dann das Licht in A auf in der Richtung DMA, so werden wir diesen Weg, da seine Krümmung sehr klein ist, als geradlinig ansehen. Sei ferner [**393**]

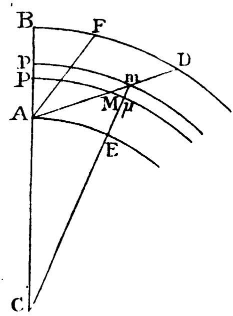

Fig. 80.

der Halbmesser der Erde . . $CA = 1$
der zu durchlaufende Weg . . $AM = x$
die Dichtigkeit der Hindernisse in $M = \delta$
die Dichtigkeit des Lichts in M . . $= v$.

Dann wird (876)

$$\log v = \int \delta \cdot dx .$$

Ferner bezeichne man

den Winkel . . $BAD = \gamma$
die Höhe der Schicht $EM = y$

so wird

$$\cos\gamma + x = \sqrt{\cos^2\gamma + 2y + y^2},$$

woraus

$$dx = \frac{(1+y)\,dy}{\sqrt{\cos^2\gamma + 2y + y^2}}$$

oder, wenn man der Kürze wegen $2y + y^2 = z^2$ setzt, so wird

$$dx = \frac{z\,dz}{\sqrt{\cos^2\gamma + z^2}},$$

und mithin

$$\log v = \int \frac{\delta \cdot z\,dz}{\sqrt{\cos^2\gamma + z^2}} .$$

879. Setzt man ferner $CM = r$, so wird $r^2 = 1 + 2y + y^2 = 1 + z^2$, und daher geht die Formel durch Ausführung dieser leichten Substitution über in

$$\log v = \int \frac{\delta \cdot z\,dz \sec\gamma}{\sqrt{r^2 + z^2 \operatorname{tg}^2\gamma}}$$

oder, wenn man die Wurzel auszieht,

$$\log v = \sec\gamma \int \frac{\delta \cdot z\,dz}{r} - \frac{\sec\gamma \operatorname{tg}^2\gamma}{2} \int \frac{\delta \cdot z^3\,dz}{r^3}$$
$$+ \frac{1 \cdot 3 \sec\gamma \operatorname{tg}^4\gamma}{2 \cdot 4} \int \frac{\delta \cdot z^5\,dz}{r^5} - \cdots$$

[**394**] 880. Die Integrale dieser Reihe sind Functionen der Höhe EM der Schicht und sind unabhängig vom Neigungswinkel BAD. Sucht man also nur die Schwächung des Lichts für den Fall, dass es die ganze Atmosphäre oder den Weg DA

durchläuft, so kann man diese Integrale als constante Coefficienten ansehen. Setzt man daher

$$\int \frac{\delta \cdot z\,dz}{r} = A$$

$$\int \frac{\delta \cdot z^3\,dz}{r^3} = B$$

$$\int \frac{\delta \cdot z^5\,dz}{r^5} = C$$

$$\vdots$$

so wird

$$\log\frac{1}{v} = A\sec\gamma - \tfrac{1}{2}B\sec\gamma\,\mathrm{tg}^2\gamma + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}C\sec\gamma\,\mathrm{tg}^4\gamma$$
$$- \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}D\sec\gamma\,\mathrm{tg}^6\gamma + \cdots$$

881. Diese Reihe convergirt sehr stark. Denn die ganze Höhe AB der Atmosphäre, so weit sie Licht auffängt, ist gegenüber dem Halbmesser AC der Erde verschwindend klein und beträgt kaum mehr als $\frac{1}{30}$ des Werthes desselben. Da also $y < \frac{1}{30}$ ist, so wird $z^2 < \frac{1}{30}$; und da $r > 1$ ist, so wird die Reihe stärker convergiren, als eine geometrische Reihe mit dem Exponenten $\frac{1}{30}$. So lange daher jener Winkel nicht mehr als 80 Grad beträgt, wird das erste Glied der gefundenen Reihe die erwünschte Genauigkeit liefern. Man hat also [**395**]

$$\log\frac{1}{v} = A\sec\gamma\,.$$

Dieselbe Formel würde man gefunden haben, wenn man die Schichten der Luft als eben angesehen hätte.

882. Die Coefficienten A, B, C... ändern sich fortwährend, da der Zustand der Luft äusserst veränderlich ist. Auch wird die gleiche Menge von Dämpfen das in die Atmosphäre einfallende Licht in grösserem oder geringerem Maasse auffangen und zerstreuen, jenachdem sie entweder in Gestalt von Wolken sichtbar oder bei heiterem Himmel unsichtbar sind. Obwohl man also hier kaum etwas allgemeines festsetzen kann, wollen wir doch ein Beispiel anführen zur Erläuterung der Methode, durch welche man die Coefficienten A, B, C bestimmen

kann und welche auf beliebige gegebene Einzelfälle anwendbar ist. Zunächst werden wir aber die einfachere Formel

$$\log \frac{1}{v} = A \sec \gamma .$$

beibehalten, welche für fast alle Winkel γ hinreichend ist.

883. Die Lichtmenge, welche in D auffällt, haben wir $= 1$ gesetzt; dies ist also das Sonnenlicht vor seinem Eintritt in die Atmosphäre. Auf seinem Wege bis zu A wird es geschwächt in dem Verhältniss $1 : v$. Dieses Verhältniss kann man jedoch nicht durch directe Versuche bestimmen und deshalb muss man die Sache in folgender Weise behandeln.

884. Die Lichtmenge, welche in der Richtung DA nach A gelangt, sei $= v$, diejenige in der Richtung FA sei $= V$; dann wird man das Verhältniss zwischen v und V auf verschiedene Weise durch Versuche bestimmen können, wenn man die zugehörigen Winkel BAD und BAF als gegeben annimmt. Da man nun hat [**396**]

$$- \log v = A \sec BAD$$
$$- \log V = A \sec BAF ,$$

so wird

$$A = \log \frac{V}{v} : (\sec BAD - \sec BAF) .$$

Auf diese Weise ergibt sich also der Coefficient A.

885. *Bouguer* hat für diesen Zweck Versuche angestellt und gefunden, dass die Intensität des Sonnenlichts bei einer Höhe von 66° sich zu derjenigen bei einer Höhe von 19° verhält wie 3 zu 2. Es war also

$$V : v = 3 : 2$$
$$BAD = 24^{\circ}$$
$$BAF = 71^{\circ} .$$

Also ist

$$A = \log \tfrac{3}{2} : (\sec 71^{\circ} - \sec 24^{\circ}) .$$

Hieraus folgt, wenn man Briggische Logarithmen zu Grunde legt,

$$A = 0.089073 .$$

Also wird

$$- \log v = 0.089073 \cdot \sec \gamma .$$

886. Ist der Einfallswinkel ein Rechter, so ist $\sec\gamma = 1$ und mithin

$$-\log v = 0.089073$$

oder

$$v = 0.8146 .$$

Es wird also, wenn das Sonnenlicht vertical in die Atmosphäre einfällt, ungefähr der fünfte Theil desselben durch die Luft aufgefangen. Dies scheint indessen zu wenig zu sein, da *Bouguer* seine Versuche an der Oberfläche des Meeres, also in der tiefsten aller die Erde bedeckenden Luftschichten angestellt hat. Hingegen habe ich in *Chur*, wo der mittlere Barometerstand 26 Pariser Zoll beträgt, [**397**] diese Schwächung bedeutend grösser gefunden. Eine Beschreibung des Versuchs werde ich in der *Pyrometrie* geben, da die Principien, auf welche er sich stützt, hier fehlen. Der Versuch nun wurde einen ganzen Tag lang fortgesetzt, und dabei fand sich, dass das Licht, wenn es vertical in Atmosphäre eintritt, geschwächt wird in dem Verhältniss 100 zu 59 oder ungefähr 5 : 3; daher behaupte ich mit gutem Recht, dass die Schwächung desselben an der Oberfläche des Meeres jedenfalls nicht geringer sein kann. Für den Winkel $\gamma = 0$ ist also $v = 0.59$ und daher

$$\log v = \log 0.59 = -0.229148$$
$$A = 0.229148 .$$

Also

$$\log\frac{1}{v} = 0.229148 \cdot \sec\gamma ,$$

oder, was hier gleichbedeutend ist,

$$\log\frac{1}{v} = 0.23 \sec\gamma .$$

Hieraus habe ich folgende Tabelle berechnet, welche als Beispiel dienen möge:

Höhe des Gestirns	Geschwächtes Licht $= v$	Höhe des Gestirns	Geschwächtes Licht $= v$
90°	0.5889	40°	0.4387
80	0.5841	30	0.3467
70	0.5692	20	0.2126
60	0.5425	10	0.0476
50	0.5009	Licht ausserhalb der Atmosphäre	1.0000

887. Die übrigen Coefficienten der gefundenen Reihe (880) muss man successiv bestimmen und dies kann ungefähr nach derselben [**398**] Methode geschehen, nach welcher ich in der Abhandlung: *Les propriétés remarquables de la route de la lumière par les airs* die Coefficienten derjenigen Reihe bestimmt habe, welche die astronomische Strahlenbrechung darstellt. Nimmt man nämlich nach einander immer grössere Winkel γ, so werden auch die Glieder der Reihe, welche auf das erste folgen, successiv so beträchtlich werden, dass sie nicht mehr vernachlässigt werden dürfen. Man bestimmt also den Coefficienten A und, wenn dieser gegeben ist, den Coefficienten B, worauf man den Coefficienten C findet u. s. w.

888. Da der Logarithmus der Lichtschwächung proportional der Summe der Hindernisse ist, welche das Licht auf seinem Wege antrifft, und da hierbei die Krümmung der Bahn und die Vertheilung der Hindernisse gleichgiltig ist (876), so darf man sich vorstellen, die Luft sei in der Weise verschoben, dass jene Vertheilung gleichmässig wird. Hierdurch wird der Weg des Lichts kürzer, da die Hindernisse sich gegenseitig näher kommen und diejenige Dichtigkeit haben, welche an der Oberfläche der Erde stattfindet.

889. Um also zu sehen, in welcher Weise sich dieser Weg für die verschiedenen Einfallswinkel verkürzt, nehmen wir zunächst an, die verschobenen Schichten seien concentrisch mit den wahren Schichten und mit der Oberfläche der Erde. Sei also C das Centrum der Erde, AR die Oberfläche derselben, AB die natürliche Höhe der Atmosphäre, $PMmp$ eine beliebige natürliche Schicht. Nach der Verschiebung befinde sich dieselbe in $QNnq$. Man bezeichne

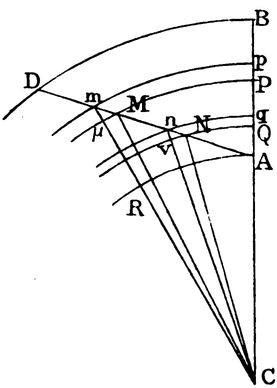

Fig. 81.

$$CA = 1$$
$$CP = r$$
$$CQ = \varrho$$
$$\text{Winkel } BAD = \gamma$$

Die Dichtigkeit in M oder in P sei $= \delta$, die Dichtigkeit an der Oberfläche der Erde $= 1$; dann ist offenbar

$$d\varrho = \delta \cdot dr \,.$$

[399] Denn die Schicht Pp erleidet eine solche Verschiebung, dass die Hindernisse in Qq dieselbe Dichtigkeit haben wie in A.

890. Ebenso muss offenbar $Nn = \delta \cdot Mm$ sein, da das Licht längs des Wegelements nN dieselbe Schwächung erleiden muss, wie wenn es das Element mM durchläuft. Nun lässt sich aber leicht zeigen, dass $Nn > \delta \cdot Mm$ ist. Es ist nämlich

$$AM = \sqrt{r^2 - \sin^2\gamma} - \cos\gamma$$

$$AN = \sqrt{\varrho^2 - \sin^2\gamma} - \cos\gamma\ .$$

Also hat man durch Differentiation

$$Mm = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - \sin^2\gamma}}$$

$$Nn = \frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - \sin^2\gamma}}\ .$$

891. Nun soll aber das Licht beim Durchlaufen beider Wegelemente dieselbe Schwächung erleiden; da also die Dichtigkeit in $M = \delta$ und in $N = 1$ ist, so wird

$$\frac{\delta \cdot r\,dr}{\sqrt{r^2 - \sin^2\gamma}} = \frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - \sin^2\gamma}}\ .$$

Aber wegen

$$Qq = \delta \cdot Pp$$

wird

$$d\varrho = \delta \cdot dr\ .$$

Hieraus sollte man durch Substitution eigentlich erhalten:

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 - \sin^2\gamma}} = \frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - \sin^2\gamma}}\ ,$$

mithin

$$1 - \frac{\sin^2\gamma}{r^2} = 1 - \frac{\sin^2\gamma}{\varrho^2}$$

oder

$$r = \varrho\ .$$

Es ist aber

$$r > \varrho\ .$$

[400] Deshalb wird auch sein

$$Nn > \delta \cdot Mm\ .$$

892. Sind also die Schichten verschoben, so muss der Weg des Lichts entweder verkürzt oder gekrümmt werden. Im ersten Fall wird die Oberfläche der verschobenen Luft mit der Oberfläche der Erde nicht concentrisch sein, da ein beliebiger Weg AN kürzer werden muss, als wenn das Centrum des Kreises QN, welcher hier diese Oberfläche bezeichnen möge, mit dem Centrum C der Erde zusammenfiele. Wäre also diese Oberfläche QN zufällig sphärisch, so würde der Durchmesser derselben kleiner sein, als der Durchmesser der Erde.

893. Im zweiten Fall werden die Schichten der verschobenen Luft concentrisch sein dürfen; man kann aber leicht zeigen, dass der Weg des Lichts sich so krümmen muss, dass er kürzer wird. Man setze also

$$\text{den Winkel } Mm\mu = \omega$$
$$Nn\nu = \varphi ,$$

dann wird

$$\text{das Element } Mm = dr \cdot \sec\omega$$
$$Nn = d\varrho \cdot \sec\varphi .$$

Es soll aber sein

$$Nn = \delta \cdot Mm ,$$

also wird

$$\delta \cdot dr \cdot \sec\omega = d\varrho \cdot \sec\varphi .$$

Es ist aber

$$\delta \cdot dr = d\varrho ,$$

also wird

$$\sec\omega = \sec\varphi ,$$

oder

$$\omega = \varphi .$$

Ist also der Weg des Lichts in der Atmosphäre eine logarithmische Spirale, so bleibt der Weg in der verschobenen Luft derselbe. Denn in diesem Fall würde $\omega = \varphi$ sein.

[**401**] 894. Es gibt noch einen zweiten Fall, wo $\omega = \varphi$ ist, nämlich wenn die einzelnen Schichten eben sind und der Weg durch dieselben geradlinig ist.

895. Wenn das Verhältniss des Sinus des Neigungswinkels zum Sinus des Brechungswinkels bei der Fortpflanzung von der Luft in M zur Luft in $A = m : 1$ ist, so wird der Weg des Lichts in der natürlichen Luft so verlaufen, dass

$$\sin\omega = \frac{m}{r} \sin\gamma .$$

Nimmt man ferner an, dass der Weg des Lichts in der verschobenen Luft geradlinig verlaufe, so wird

$$\sin\varphi = \frac{\sin\gamma}{\varrho}.$$

Es soll aber $\varphi = \omega$ sein, also würde

$$\frac{m}{r} = \frac{1}{\varrho}$$

oder

$$m : 1 = r : \varrho .$$

Wenn also das Verhältniss zwischen den Halbmessern r und ϱ dasselbe wäre wie zwischen dem Sinus des Neigungswinkels und des Brechungswinkels des Lichtstrahles beim unmittelbaren Uebergang aus der Luft des Punktes M in die Luft des Punktes A, so wäre der Weg des Lichts auch in der verschobenen Luft geradlinig. Nun ist aber das erste Verhältniss weit grösser, also muss man sich den Weg in der verschobenen Luft in der Weise gekrümmt denken, dass er concav liegt gegen die Gerade AB und kürzer wird als die Gerade AN.

896. Es ist aber bequemer, den Weg des Lichts in der verschobenen Luft geradlinig anzunehmen. Man untersuche also, in welcher Weise derselbe verkürzt werden muss. Sei C das Centrum der Erde, CA der Halbmesser derselben, AB die natürliche Höhe der Luft, deren Oberfläche BMQ mit der Oberfläche der Erde concentrisch sei. Ferner sei AP die verticale Höhe der verschobenen Luft, PNR die Oberfläche derselben, PE der Radius desjenigen Kreises, welcher die Curve PNR [402] im Punkte P osculirt. Nimmt man nun an, dass das vertical einfallende Licht längs der Geraden PA im Verhältniss $1 : V$, und dass das unter einem schiefen Winkel längs der Geraden NA einfallende Licht im Verhältniss $1 : v$ geschwächt wird, so wird (877)

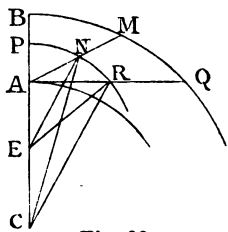

Fig. 82.

$$\log\frac{1}{V} = n \cdot AP$$

$$\log\frac{1}{v} = n \cdot AN,$$

also

$$AP : AN = \log \frac{1}{V} : \log \frac{1}{v} \cdot$$

897. Da nun die Verhältnisse $1 : V$ und $1 : v$ durch die Versuche bekannt sind, so ergibt sich auch das Verhältniss zwischen AP und der beliebigen Strecke AN und mithin kann man beliebig viele einem beliebigen Winkel PAN entsprechende Grössen AN aus den Beobachtungen ableiten.

898. Ist z. B. $1 : V = 5 : 3$ und für das horizontale Licht RA $1 : v = 2000 : 1$, so wird

$$AP : AR = \log \tfrac{5}{3} : \log 2000 \;,$$

und mithin

$$AP : AR = 0.2218488 : 3.3010300 \;.$$

Nimmt man an, die Punkte P und R liegen auf einem Kreis, dessen Centrum sich in E befinde, und setzt man $AE = a$, $EP = ER = b$, so wird

$$AP = b - a$$
$$AR = \sqrt{b^2 - a^2}\,,$$

woraus

$$AP : AR = 1 : \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}$$

$$\sqrt{b-a} : \sqrt{b+a} = 0.2218488 : \;\; 3.3010300$$
$$(b-a) : (b+a) = 0.0491226 : 10.8967991$$
$$b : a = 1.0090568 \;,$$

[**403**] also ist der Winkel

$$AER = 7^0\, 41' \;.$$

Ist also die Curve PNR ein Kreis, so beträgt der Bogen zwischen dem Zenith P und dem Horizont R : $7\frac{2}{3}$ Grad. Da diese Krümmung hinreichend klein ist, und da die Schwächung des Lichts bei den verschiedenen Einfallswinkeln ziemlich gleichmässig wächst, so kann man diese Curve ohne merklichen Fehler statt der wahren Curve substituiren.

899. Der Halbmesser dieses Kreises ist, wie schon früher (892) bemerkt wurde, beträchtlich kleiner als der Erdradius. Jedoch ist es sehr schwer, das Verhältniss zwischen beiden durch Versuche zu bestimmen. Indessen nehme ich auf Grund sorgfältiger Abschätzungen an, dass die Höhe AP nicht mehr als eine deutsche Meile beträgt. Da also

$$b : a = 1.009 : 1 \ ,$$

so wird

$$(b - a) : a = 9 : 1000 = 1 : 111 \ ,$$

sodass also der Halbmesser oder besser die Entfernung AE des Centrums von der Oberfläche der Erde ungefähr 111 deutsche Meilen beträgt. Der Erdradius enthält ungefähr 860 deutsche Meilen, ist also etwa achtmal so gross.

Kapitel II.

Ueber die Helligkeit der durchsichtigen Körper, besonders der irdischen Atmosphäre, infolge des darin zerstreuten Lichts.

900. Unter den durchsichtigen Mitteln, welche infolge des zerstreuten Lichts farbig sichtbar erscheinen, sind die wichtigsten [**404**] das Meerwasser und die Luft. Ersteres zeigt bekanntlich eine grüne Farbe, letztere eine blaue und bisweilen, nämlich wenn sich die Sonne im Horizont befindet, eine hochrothe Färbung. Diese beiden Fälle kann man, wie sich von selbst versteht, mit Hilfe einer und derselben Theorie behandeln. Daher wollen wir besonders den zweiten Fall erörtern und diesen, soweit es möglich ist, auf den früheren als den leichteren zurückführen.

901. Um jedoch nicht gleich anfangs alle Schwierigkeiten, welche hier vorkommen, in die Rechnung einzuführen, wollen wir zuerst annehmen, die Luftschichten seien eben, und auf Grund dieser Annahme bauen wir zunächst folgende rohere Rechnung auf.

902. Sei AB die beliebig weit verlängerte Oberfläche der Erde, CD die zu AB parallele Oberfläche der Atmosphäre. Auf dieselbe mögen die Sonnenstrahlen auffallen in der Richtung CA oder DB. Ihre Menge bei senkrechtem Auffallen auf CD sei $= 1$, dagegen bei einem Incidenzwinkel CAB sei sie $= q$. Dann wird

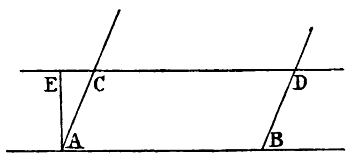

Fig. 83.

$$q = \sin CAB \ .$$

Ferner bezeichne man die Summe der Hindernisse auf der verticalen Geraden AE mit δ; dann ist die Summe derjenigen, welche das Licht auf seinem Wege antrifft, $= \delta \cdot \sec EAC$. Hierdurch werde das Licht geschwächt im Verhältniss $1 : v$; mithin wird (876)

$$\log \frac{1}{v} = \delta \cdot \sec EAC,$$

oder wenn man $\log e = 1$ setzt, so wird

$$v = e^{-\delta . \sec EAC}.$$

903. Setzt man den Winkel $EAC = \gamma$, so wird nach Ausführung der Substitution die Lichtmenge, [405] welche direct nach AB gelangt, und welche wir mit λ bezeichnen wollen,

$$\lambda = \cos\gamma \cdot v$$

oder

$$\lambda = \cos\gamma \cdot e^{-\delta : \cos\gamma}.$$

904. Mithin ist die in der Luft zerstreute Lichtmenge

$$q - \lambda = \cos\gamma \left(1 - e^{-\delta : \cos\gamma}\right).$$

Diese Lichtmenge zerstreut sich nun in folgender Weise: Ein erster Theil geht nach oben, ein zweiter Theil gelangt auf die Oberfläche der Erde, ein dritter Theil wird in der Weise von den Lufttheilchen aufgenommen, dass er für zerstört gelten kann, wenn auch dieser Theil nach meiner Ansicht äusserst klein sein muss.

905. Da das Licht in der Luft unendlich viele Reflexionen erleidet, so werden die beiden ersten Theile gegenseitig nahezu gleich sein. Setzt man also die Lichtmenge, welche nach unten gelangt, gleich der Hälfte des zerstreuten Lichts, so wird

$$l = \tfrac{1}{2} \cos\gamma \left(1 - e^{-\delta : \cos\gamma}\right).$$

906. Denkt man sich nun die Oberfläche AB unendlich verlängert, so wird diese ganze Lichtmenge auf sie gelangen und die hieraus entstehende Helligkeit wird überall gleich sein. Man kann sie daher ausdrücken durch

$$l = \tfrac{1}{2} \cos\gamma \left(1 - e^{-\delta : \cos\gamma}\right).$$

Dagegen ist diejenige Helligkeit, welche durch die Lichtmenge entsteht, welche auf directem Wege nach AB gelangt (903)

$$\lambda = \cos\gamma \cdot e^{-\delta : \cos\gamma}.$$

Also wird das Verhältniss zwischen beiden

$$\lambda : l = 2 e^{-\delta : \cos\gamma} : \left(1 - e^{-\delta : \cos\gamma}\right).$$

[**406**] 907. Wird die Lichtmenge, welche auf directem Wege nach AB gelangt, durch eine Ebene aufgefangen, die zur Richtung der Strahlen senkrecht ist, und bezeichnet man die Helligkeit dieser Ebene mit L, so wird

$$L = e^{-\delta : \cos\gamma}$$

und mithin

$$L : l = 2e^{-\delta : \cos\gamma} : \cos\gamma \left(1 - e^{-\delta : \cos\gamma}\right).$$

908. Aus diesen Formeln berechnet sich, wenn man wie früher (886)

$$-\log v = 0.23 \cdot \sec\gamma$$

setzt, die folgende Tabelle:

Höhe der Sonne	L	λ	l
90°	0.5889	0.5889	0.2060
80	0.5841	0.5752	0.2048
70	0.5692	0.5348	0.2024
60	0.5425	0.4698	0.1981
50	0.5009	0.3837	0.1911
40	0.4387	0.2820	0.1804
30	0.3467	0.1734	0.1633
20	0.2126	0.0727	0.1346
10	0.0476	0.0082	0.0827

909. Diese Tabelle wurde, gleich der vorigen (886), nur des Beispiels halber mitgetheilt. Die erste Columne gibt die Höhe der Sonne an in Graden, die zweite die Beleuchtung einer Ebene, welche senkrecht steht zu den durch die Atmosphäre geschwächten Sonnenstrahlen, die dritte die Beleuchtung einer Ebene, welche dem Horizont parallel ist und nur von den directen Sonnenstrahlen beleuchtet wird, die vierte die Beleuchtung einer Ebene, soweit dieselbe lediglich durch die Halbkugel des heiteren Himmels hervorgebracht wird.

[**407**] 910. Diese Tabelle beruht auf drei Hypothesen, und deshalb ist zu untersuchen, inwiefern sie der Wahrheit nahe kommt. Erstens haben wir der Luft eine solche Undurchsichtigkeit beigelegt, dass das vertical einfallende Licht im Verhältniss 5 : 3 geschwächt wird. Dies findet aber keineswegs immer statt, da die Durchsichtigkeit der Luft sehr veränderlich ist; und wenn sich dieselbe nur um ein Minimum ändert, so

ändern sich die Zahlen der Tabelle und das Verhältniss derselben sehr beträchtlich. Nimmt man z. B. an, dass die verticale Lichtschwächung sich wie 3 : 2 verhalte, so wird für eine Höhe der Sonne von $90^\circ : L = \lambda = 0.6666$ und $l = 0.1666$; also wird die Grösse L schon um den achten Theil grösser, l dagegen um den vierten Theil kleiner als in der Tabelle. Also ist in diesem Fall $L : l = 4 : 1$, dagegen ist in der Tabelle $L : l < 3 : 1$. Nach *Bouguer* war $v = 0.8146$ (886). Hat also die Luft diesen Grad der Durchsichtigkeit, so wird für eine Höhe der Sonne von $90^\circ : L = \lambda = 0.8146$ und $l = 0.0927$, also $L : l = 9 : 1$. Dieses Verhältniss ist dreimal so gross als das vorige.

911. Hieraus folgt, dass man für jede Constitution der Luft diese Tabelle eigens construiren muss, vorausgesetzt, dass die beiden anderen Hypothesen statthaft sind. Die eine davon war die, dass das zerstreute Licht in der Luft sich so spaltet, dass die eine Hälfte nach oben, die zweite Hälfte nach unten austritt. Wenn sich dies anders verhält, so ändert sich die Beleuchtung l, welche allein von dieser Hypothese abhängig ist; nimmt man also an, dass der Theil n nach unten austrete, so muss man setzen

$$l = n \cdot \cos\gamma\,(1 - L)\,.$$

Indessen kommt die Annahme $n = \frac{1}{2}$ der Wahrheit um so näher, je kleiner der Einfallswinkel CAB war, [**408**] und dieselbe wird sogar genau richtig sein, wenn sich die Sonne im Horizont befindet. Denn die Zerstreuung des Lichts durch die Lufttheilchen, die man alle hier als kugelförmig annehmen kann, erfolgt in kegelförmigen Räumen, deren Axen zur Richtung der Strahlen parallel sind. So sieht man, dass die Helligkeit der Luft, welche dem Sonnenbild näher ist, in der Weise abnimmt, dass sie um so kleiner wird, je grösser die scheinbare Entfernung vom Centrum des Bildes ist. Sofern also nach Maassgabe dieser Entfernung eine Ungleichheit der Zerstreuung stattfindet, während die Sonne im Horizont steht, wird die unterhalb der Axe liegende Hälfte eines jeden Kegels nach unten gerichtet sein und mithin die Hälfte der zerstreuten Strahlen nach unten gelangen. Ist die Höhe der Sonne beträchtlich genug, so wird $n > \frac{1}{2}$, und deshalb wird sich die Helligkeit der Atmosphäre zugleich mit der Beleuchtung l vergrössern. In dieser Hinsicht sind die Werthe der Columne l Minimalwerthe.

912. Die dritte Hypothese hat nur dann einen störenden Einfluss auf die darauf gegründete Theorie, wenn die Sonne sehr nahe am Horizont steht. Es wurde nämlich angenommen,

dass die Luftschichten eben seien. Hierdurch wird aber der Weg des Lichts in der Nähe des Horizonts beträchtlich verlängert und er wächst ins Unendliche, wenn die Höhe der Sonne $= 0$ wird. Da dies aber in Wirklichkeit nicht der Fall ist, so wird man die Tafel nicht weiter ausdehnen dürfen, als bis zu $\gamma = 70^{\circ}$ oder 75°. Ferner werden auch in denjenigen Fällen, wo der Winkel BAM kleiner ist, die dem Horizont AQ (Fig. 82) näher liegenden Theilchen in Wirklichkeit eine kleinere Lichtmenge zerstreuen, da die Länge der Geraden AQ kleiner ist als in dem Falle, dass die Schichten eben sind und sich bis ins Unendliche erstrecken. Indessen werden durch diese Verminderung die Zahlen der Tabelle nur wenig verändert. Denn erstens fällt das Licht, welches von den Theilchen [**409**] ausgeht, die dem Horizont sehr nahe liegen, unter einem sehr schiefen Winkel auf und trägt eben deshalb wenig zur Beleuchtung einer horizontalen Ebene bei, und zweitens wird das in A auffallende Licht, wenn es von solchen Theilchen ausgeht, die von der Ebene A weiter entfernt sind, infolge des längeren Weges so geschwächt, dass sein Betrag verschwindend klein wird, und mithin ist es gleichgiltig, ob die Luftschichten sich bis ins Unendliche erstrecken, oder ob diese Theilchen überhaupt nicht da sind. In dieser Hinsicht bleiben also die Zahlen der vierten Columne, welche grösseren Höhen der Sonne entsprechen, giltig.

913. Man nehme nun aus den vorhin (910) bestimmten Verhältnissen

$$\begin{aligned} L : l &= 3 : 1 \\ &= 4 : 1 \\ &= 9 : 1 \end{aligned}$$

das Mittel und setze die mittlere Helligkeit des unbewölkten Himmels gleich derjenigen, welche auf einer horizontalen Ebene den sechsten Theil derjenigen Beleuchtung hervorbringt, welche stattfindet, wenn dieselbe Ebene den Strahlen der Sonne bei einer Höhe von 90 Grad in normaler Stellung ausgesetzt ist. Dann wird diese mittlere scheinbare Helligkeit folgendermaassen bestimmt werden.

914. Die Beleuchtung einer Ebene durch die ganze Himmelshalbkugel ist eine absolute Beleuchtung (100), die wir daher $= \pi$ setzen. Setzt man den Halbmesser der Sonnenscheibe $= 16'$ und denkt sich Fig. 11 in D eine Kugelcalotte, deren Halbmesser ebenfalls $= 16'$ ist, so entsteht hieraus in C eine Beleuchtung

$$\eta = \pi \sin^2 16' = 0.00002166\,\pi\ .$$

Die Beleuchtung, welche von der Sonne direct ausgeht, ist aber $= 6\pi$; setzt man dieselbe also $= J$, so wird

$$\eta : J = 0.00002166 : 6$$

oder [410]

$$\eta : J = 1 : 277000 \,.$$

Um so viel ist also bei mässig reiner Luft die Helligkeit der Sonne in der Nähe des Zeniths grösser als die mittlere Helligkeit des unbewölkten Himmels.

915. Man hat früher (755) gesehen, dass die Albedo eines Blattes, welches mit Bleiweiss angestrichen war, $= 0.4230$ beträgt. Wenn man daher dasselbe in normaler Stellung den Sonnenstrahlen aussetzt, so wird seine Helligkeit, die Helligkeit bei absoluter Beleuchtung $= 6 \cdot \pi \cdot 0.4230$ gesetzt, gleich

$$i = 6\pi \sin^2 16' \cdot 0.4230$$

oder

$$i = 0.00005498\,\pi$$

und mithin

$$\eta : i = 1 : 2.538 = 2 : 5 \,.$$

Befindet sich also die Sonne in einer Höhe von 60°, so zeigt ein mit Bleiweiss angestrichenes Blatt in normaler Stellung eine Helligkeit, welche $2\frac{1}{2}$ mal so gross ist als diejenige des heiteren Himmels.

916. Nach diesen allgemeinen Bemerkungen wenden wir uns einer eingehenderen Betrachtung zu; und um auch hier vom Leichteren zum Complicirteren fortzuschreiten, machen wir zunächst die beiden Annahmen, dass die Luft in horizontale Ebenen geschichtet sei und dass die das Licht auffangenden Theilchen vollkommen reflectirend seien. Die erste Annahme ist, wie man schon gesehen hat (912), für grössere Elevationswinkel ohne beträchtlichen Fehler zulässig. Die zweite dagegen weicht von der Wirklichkeit ab, und deshalb werden wir später untersuchen, inwieweit sie statthaft ist.

917. Da man also die das Licht auffangenden Theilchen als vollkommen reflectirend ansieht, so kann man dieselben als äusserst kleine sphärische Spiegel betrachten. Infolge dieser Annahme erhellt aus dem Früheren, *dass die Helligkeit des zerstreuten Lichts*, *vorausgesetzt*, *dass es nicht wieder* [411] *aufgefangen wird, in gleicher Entfernung von der Kugel gleich gross ist, ferner dass man diese Theilchen als schwach leuchtende Punkte ansehen kann und dass sich die Beleuchtung umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung verhält* (654).

918. Die Lichtmenge, welche ein Theilchen nach allen Seiten hin verbreitet, ist dieselbe wie diejenige, welche auf seine Oberfläche auffällt, und besteht also zum Theil aus dem directen Sonnenlicht, zum Theil aus demjenigen Licht, welches von den anderen Theilchen und beleuchteten Gegenständen auf sie reflectirt wird. Da das directe Licht bei weitem das dichteste ist, so werden wir zunächst dieses allein betrachten, und dann auf dasjenige Licht, welches durch Reflexion hinzukommt, Rücksicht nehmen.

919. Da der Logarithmus der übrigbleibenden Lichtmenge in demselben Verhältniss steht, wie die Summe der Hindernisse, welche das Licht auf seinem Wege antrifft (876), so folgt, wenn man die Luftschichten als eben ansieht, *dass die Anzahl der Hindernisse sich verhält wie die Secante der Zenithdistanz.* Hierbei kann man sich die Luft in der Weise verschoben denken, dass alle Hindernisse gleichmässig vertheilt sind. *Demnach verhält sich der Logarithmus der Lichtschwächung überall wie der zurückgelegte Weg.* (877)

920. So oft also der zurückgelegte Weg derselbe ist, wird auch das Licht in demselben Verhältniss geschwächt sein, welches auch die Intensität desselben beim Einfallen gewesen sein mag. Sei also die Höhe der verschobenen Atmosphäre $AC = 1$ und M ein beliebiges Theilchen, welches von A aus betrachtet und welches von den in der Richtung FM einfallenden Sonnenstrahlen beleuchtet wird. Nun ist aber von selbst klar, *dass erstens die Intensität der Sonnenstrahlen längs des Weges FM eine Schwächung erleidet* [**412**] *und dass zweitens das vom Theilchen M nach A hin reflectirte Licht auf seinem Wege längs MA geschwächt wird.*

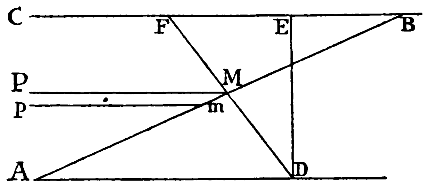

Fig. 84.

921. Nimmt man beispielsweise an, das Sonnenlicht werde längs FM geschwächt in dem Verhältniss $1 : n$, so wird seine Intensität in $M = n$ sein; und in demselben Verhältniss nimmt auch die Leuchtkraft des Theilchens M ab, ebenso wie die von hier aus nach A reflectirte Lichtmenge. Das Theilchen M strahle also eine Lichtmenge $= n \cdot m$ aus; wird dieselbe dann auf dem

Wege längs MA geschwächt im Verhältniss $1:p$, so wird die Helligkeit des Theilchens, von A aus gesehen, $= nmp$ sein.

922. Wenn sich das Theilchen in F befunden hätte und wenn die von ihm ausgehende Lichtmenge m den Weg FMA, welcher gleich der Summe beider Wege ist, zurückgelegt hätte, so wäre die Helligkeit dieselbe gewesen. Man muss jedoch bemerken, dass hier von der scheinbaren Helligkeit die Rede ist, auf welche die Distanz keinen Einfluss hat (794).

923. **Lehrsatz 50.** *Fallen die Sonnenstrahlen in der Richtung FM auf das Theilchen M auf, so ist die scheinbare Helligkeit desselben diejenige, wie wenn sich das Theilchen in F befinden würde und sein Licht längs der Summe der Wege FMA nach A gelangen würde.*

Beweis: Das Theilchen wird nämlich in F so erleuchtet, dass seine Helligkeit $= m$ ist; wenn aber das Licht den Weg FM zurücklegt, wird es geschwächt, sodass seine Lichtmenge noch $= m \cdot n$ beträgt, und diese wird, nachdem noch der Weg MA zurückgelegt ist, $= mnp$. Da dies dieselbe Helligkeit ist, wie im vorigen Fall, so ergibt sich der Satz.

924. Hieraus folgt: *Wenn man annimmt, dass für jedes Theilchen M die Lichtmenge m die Summe der Wege $FM + MA$ zurücklegt, so entsteht dieselbe Helligkeit, welche in Wirklichkeit bei M sichtbar ist.*

[**413**] 925. Auf Grund hiervon bestimmen wir die Helligkeit aller Theilchen, welche sich auf der Geraden AB befinden. Sei also die frühere Lichtmenge $m = 1$, die Höhe AC der verschobenen Luft $= 1$,

$$\begin{aligned} \text{die Abscisse } CP &= x \\ \text{Winkel } CAB &= \gamma \\ \text{Winkel } FDE &= \omega\,. \end{aligned}$$

Ferner bezeichne man die von den Theilchen nach A gelangende Lichtmenge mit v und setze die Subtangente der logarithmischen Curve $= \gimel$; dann wird (919)

$$\begin{aligned} -\log v &= (FM + MA) : \gimel \\ FM &= x \sec \omega \\ MA &= (1 - x) \sec \gamma \end{aligned}$$

und mithin

$$-\log v = (x \sec \omega + (1 - x) \sec \gamma) : \gimel$$

oder wenn man $\log e = 1$ setzt

$$v = e^{[x(\sec\gamma - \sec\omega) - \sec\gamma] : \mathfrak{y}}.$$

926. Ist nun die Anzahl der Theilchen, welche sich auf der verticalen Geraden AC befinden, $= 1 : \mathfrak{y}$, so wird die Anzahl derjenigen, welche sich längs Mm befinden, $= dx \sec\gamma : \mathfrak{y}$. Setzt man ferner die von ihnen in A erzeugte Helligkeit $= d\lambda$, so wird

$$d\lambda = e^{(x\sec\gamma - x\sec\omega - \sec\gamma) : \mathfrak{y}} \cdot dx \sec\gamma : \mathfrak{y},$$

also wird durch Integration und Hinzufügung der erforderlichen Constanten

$$\frac{\sec\gamma - \sec\omega}{\sec\gamma}\lambda = e^{(x\sec\gamma - x\sec\omega - \sec\gamma) : \mathfrak{y}} - e^{-\sec\gamma : \mathfrak{y}}.$$

Diese Lichtmenge entspricht allen Theilchen, welche auf der Strecke BM liegen. Denn die Constante wurde so bestimmt, dass x und λ gleichzeitig verschwinden.

927. Setzt man nun $x = 1$, so erhält man die Lichtmenge, welche längs der ganzen Strecke AB sichtbar ist: [**414**]

$$L = \frac{e^{-\sec\omega : \mathfrak{y}} - e^{-\sec\gamma : \mathfrak{y}}}{(\sec\gamma - \sec\omega) : \sec\gamma}$$

oder, wenn man den Numerus eines Logarithmus mit νl bezeichnet:

$$L = \frac{\nu l(-\sec\omega : \mathfrak{y}) - \nu l(-\sec\gamma : \mathfrak{y})}{(\sec\gamma - \sec\omega) : \sec\gamma}.$$

928. Für $\gamma = \omega$ wird diese Formel unbrauchbar. Durch Differentiation findet man aber für diesen Fall

$$L = e^{-\sec\gamma : \mathfrak{y}} \cdot \sec\gamma : \mathfrak{y}$$

oder

$$L = \nu l(-\sec\gamma : \mathfrak{y}) \cdot \sec\gamma : \mathfrak{y}.$$

929. Sei die Höhe AC der verschobenen Luft $= 1$; AB die Oberfläche der Erde, und CD die logarithmische Curve, deren Subtangente $= \mathfrak{y}$ ist. Sei ferner $AP = \sec\omega$, $AQ = \sec\gamma$, so sind PM und QN die Numeri, welche diesen Logarithmen entsprechen. Man ziehe NR und MS parallel zur Asymptote AB, und durch die Punkte M und N ziehe man die Gerade NMT, dann wird

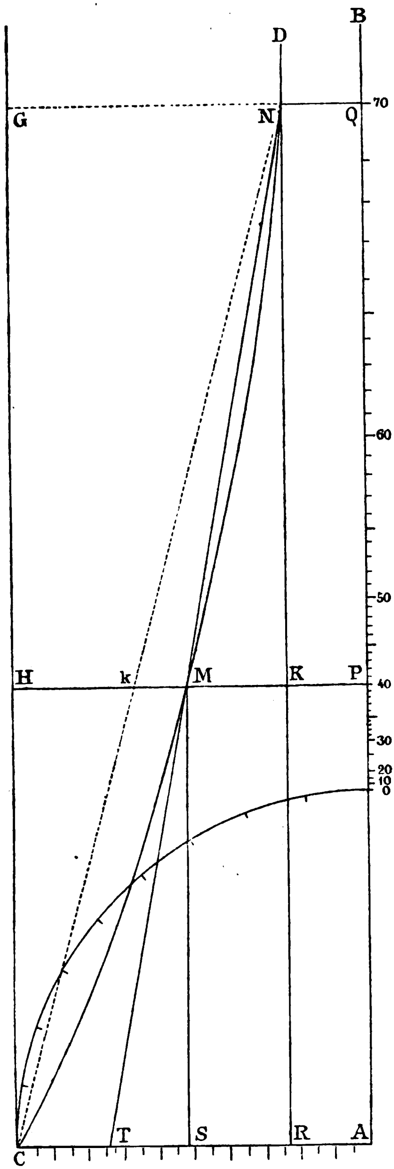

Fig. 85.

$$PM = e^{-\sec\omega : \mathfrak{y}}$$
$$QN = e^{-\sec\gamma : \mathfrak{y}}$$
$$PQ = \sec\gamma - \sec\omega$$
$$MK = PM - QN$$

und daher

$$L = \frac{MK \cdot AQ}{PQ} = RT.$$

Mithin wird die Helligkeit, welche einer gegebenen Elevation der Sonne und der gegebenen Höhe eines Punktes am Himmel entspricht, durch eine sehr elegante Construction gefunden.

[**415**] 930. Da also der Abschnitt RT die Helligkeit der Luft ist, so wird diese ein Maximum, wenn $\gamma = 90^\circ$ und wenn $\gamma = \omega$ ist. Um dies zu zeigen, setze man der Kürze wegen

$$\sec\omega : \mathfrak{y} = a = \text{Const.}$$
$$\sec\gamma : \mathfrak{y} = z$$

dann wird

$$L = \frac{z\left(e^{-a} - e^{-z}\right)}{z - a}.$$

Differentiirt man also und setzt $dL = 0$, so erhält man

$$a : z = (z - a)e^{-z} : \left(e^{-a} - e^{-z}\right).$$

Diese Gleichung findet statt, wenn $z = a$ oder $\gamma = \omega$ ist, und dann wird (928)

$$L = e^{-\sec\gamma : \mathfrak{y}} \cdot \sec\gamma : \mathfrak{y}.$$

Die Gleichung findet aber auch dann statt, wenn $\gamma = 90^0$ oder $z = \infty$ ist. In diesem Fall ist einfach

$$L = e^{-\sec\omega : \mathfrak{z}}.$$

Das eine Helligkeitsmaximum findet also statt im Horizont, das andere in der Höhe der Sonne.

931. Diese beiden Helligkeiten sind von der Höhe der Sonne abhängig und folglich in dieser Hinsicht variabel. Die erstere, nämlich die horizontale, wird ein Maximum für $\omega = 0$, und in diesem Fall wird

$$L = e^{-1 : \mathfrak{z}}.$$

Die letztere, welche also in der Höhe der Sonne stattfindet, wird wieder dann ein Maximum, wenn $\sec\gamma = \sec\omega = \mathfrak{z}$ ist; dann wird

$$L = e^{-1}.$$

[**416**] Die Einheit, auf welche sich alle diese Helligkeiten beziehen, ist die Helligkeit eines Theilchens, welches ausserhalb der Atmosphäre von der Sonne beschienen wird und auch ausserhalb derselben gesehen wird (924).

932. Man untersuche jetzt, welche Helligkeit die Atmosphäre besitzt, wenn sie von B aus betrachtet wird. Hält man an derselben Bezeichnung fest, mit der Ausnahme, dass v jetzt die von B aus gesehene Helligkeit des Theilchens M bezeichnet, so wird, Fig. 84,

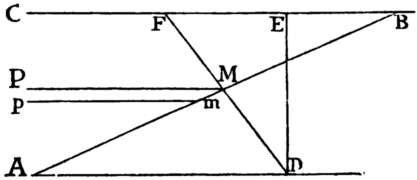

Fig. 84.

$$-\log v = (FM + MB) : \mathfrak{z}$$
$$FM = x \sec\omega$$
$$MB = x \sec\gamma\,,$$

also

$$-\log v = x(\sec\omega + \sec\gamma) : \mathfrak{z}$$

und daher

$$v = e^{-x(\sec\omega + \sec\gamma) : \mathfrak{z}}.$$

Ferner ist

$$d\lambda = v\,dx \sec\gamma : \mathfrak{z}.$$

Hieraus folgt endlich

$$-\frac{\sec\gamma + \sec\omega}{\mathfrak{y}}\lambda = e^{-x(\sec\gamma+\sec\omega):\mathfrak{y}} \cdot \sec\gamma : \mathfrak{y} - \sec\gamma : \mathfrak{y}\,.$$

933. Setzt man nun $x = 1$, so wird

$$L = \frac{1 - e^{-(\sec\gamma+\sec\omega):\mathfrak{y}}}{(\sec\gamma + \sec\omega) : \sec\gamma}\,.$$

Dies ist die Helligkeit der ganzen Strecke AB, von B aus gesehen.

934. Man ziehe nun CG parallel zu AQ (Fig. 85) und setze

$$AP = \sec\gamma = CH$$
$$PQ = \sec\omega\,,$$

[417] sodann verlängere man die Ordinaten QN und PM zu QG und PH und ziehe NC; dann wird

$$L = kH\,.$$

Es ist nämlich

$$AQ = \sec\gamma + \sec\omega = CG$$
$$NQ = e^{-(\sec\gamma+\sec\omega):\mathfrak{y}}$$
$$GN = 1 - NQ\,,$$

also wird durch Substitution

$$L = \frac{NG \cdot CH}{CG} = kH\,.$$

935. Die Helligkeit der Luft bestimmt sich also in diesem Fall ganz anders als im vorigen. Für $\gamma = \omega$ wird

$$L = \tfrac{1}{2}\left(1 - e^{-2\sec\gamma:\mathfrak{y}}\right),$$

und wenn man ausserdem $\gamma = \omega = 0$ setzt, so wird

$$L = \tfrac{1}{2}\left(1 - e^{-2:\mathfrak{y}}\right).$$

936. Bisher wurde angenommen, die Geraden AB und FD (Fig. 84) befänden sich in derselben Verticalebene. Dies ist jedoch keineswegs erforderlich, da für dasselbe Theilchen M auch die Länge beider Strecken FM und MA oder FM und MB dieselbe bleibt. Daher wird der Winkel $CAM = \gamma$ allgemein die Zenithdistanz der Geraden AB oder der auf ihr liegenden Punkte sein und der Winkel $FDE = \omega$ wird allgemein die Zenithdistanz der Sonne sein, und mithin ist es gleichgiltig,

ob die Geraden AB und FD in demselben oder in verschiedenen Azimuthen liegen, wenn nur die beiden Hypothesen, welche wir dieser Theorie zu Grunde gelegt haben, nicht zu sehr von der Wahrheit abweichen (916).

[**418**] 937. Ferner ist die scheinbare Helligkeit L die lineare Helligkeit, welche mit der scheinbaren zusammenfällt. Da jedoch die hierdurch entstehende Beleuchtung von der Distanz abhängig ist und sich umgekehrt verhält, wie das Quadrat derselben, so ist genauer zu untersuchen, ob hierdurch eine Aenderung entsteht.

938. Wenn man die Luft als ein durchsichtiges Mittel ansieht, so befinden sich alle Theilchen, welche ihr Licht nach derselben kreisförmigen Stelle der Netzhaut hinsenden, auf einem Kegel, dessen Spitze in der Pupille und dessen Grundfläche in der äusseren Begrenzung der Atmosphäre liegt. Schneidet man nun diesen Kegel an irgend einer Stelle mit einer Ebene senkrecht zur Axe, und denkt sich die Grundfläche dieses Kegels unendlich klein, so haben die Theilchen dieser Schnittfläche diejenige Helligkeit, welche wir vorher bestimmt haben. Da nun ihre Anzahl direct wächst wie das Quadrat der Entfernung, während die irgend einem Theilchen entsprechende Beleuchtung sich umgekehrt verhält wie eben dasselbe Quadrat, so heben sich beide Verhältnisse gegenseitig auf, und die Beleuchtung verhält sich also einfach wie die lineare Helligkeit L und wächst wie das Quadrat des Sinus des scheinbaren Halbmessers. Um dies evident zu machen und um ausserdem zu zeigen, dass die Verschiebung der Luft keinen Einfluss auf die Beleuchtung hat, entwickeln wir die Sache folgendermaassen.

939. Sei AC die natürliche Höhe der Atmosphäre und AP eine beliebige Höhe; und es mögen die Ordinaten PN der Curve CNG die Dichtigkeit der lichtauffangenden Theilchen bezeichnen. Dann bestimme man zuerst die Helligkeit des

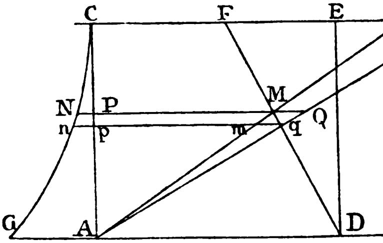

Fig. 86.

Theilchens M, wenn es von A aus gesehen wird und von den Strahlen der Sonne in der Richtung FM beschienen ist. Hierbei werden wir aber dieselben zwei Hypothesen zu Grunde legen, deren wir uns früher (916) bedienten.

[**419**] 940. Man setze wie früher

$AC = 1$	Winkel $CAM = \gamma$
$CP = x$	Winkel $FDE = \omega$
$PN = y$	die Subtangente der logarithmischen Curve $= \mathfrak{y}$

dann wird gleichfalls (919)

$$-\log v = (CNP \cdot \sec\omega + GNPA \cdot \sec\gamma) : \mathfrak{y} \, .$$

Es stellt nämlich der Raum CNP die Summe der Hindernisse dar längs der Strecke CP, und der Raum $GNPA$ dieselbe Summe längs PA. Also ist die Summe der Hindernisse längs $FM = CPN \sec\omega$ und längs $MA = GNPA \cdot \sec\gamma$.

941. Da also

$$v = e^{-(CNP \,.\, \sec\omega + GNPA \,.\, \sec\gamma) : \mathfrak{y}}$$

ist, so wird für $\omega = \gamma$ der ganze Raum $GCA = A$ und mithin

$$v = e^{-A \sec\gamma : \mathfrak{y}} \, .$$

Es ist aber

$$CNP = \int y\,dx$$

$$GNPA = A - \int y\,dx \, ,$$

also

$$v = e^{-[\int y\,dx (\sec\omega - \sec\gamma) + A \sec\gamma] : \mathfrak{y}} \, .$$

Hieraus würde man wieder genau dieselbe lineare Helligkeit L finden wie früher (927). Es handelt sich aber hier um die Lichtmenge, welche einem Kegel entspricht, dessen Spitze in A liegt und dessen Axe AB ist.

942. Sei Ab eine Seite des Kegels, welche der Axe AB unendlich benachbart ist; dann wird der Winkel $BAb = d\gamma$. Ferner ist

$$AP = (1 - x)$$

$$PM = (1 - x) \operatorname{tg}\gamma$$

$$MQ = (1 - x)\, d \operatorname{tg}\gamma$$

$$\text{Element } MQqm = (1 - x)\, dx\, d \operatorname{tg}\gamma$$

$$\text{Anzahl der Theilchen} = (1 - x)\, dx\, d \operatorname{tg}\gamma \cdot y : \mathfrak{y} \, .$$

[**420**] 943. Lässt man nun das Dreieck PAM um die Axe AC rotiren, so beschreibt das Element $MQqm$ einen körperlichen Ring, dessen

$$
\begin{aligned}
\text{Radius} &= PM = (1 - x)\,\mathrm{tg}\,\gamma \\
\text{Volumen} &= \pi(1 - x)^2\, dx\, d\,\mathrm{tg}^2\gamma \\
\text{Anzahl der Theilchen} &= \pi(1 - x)^2\, dx\, d\,\mathrm{tg}^2\gamma \cdot y : \gamma\,.
\end{aligned}
$$

Da nun die einem Theilchen entsprechende Beleuchtung $= v : AM^2 = v : (1 - x)^2 \sec^2\gamma$ ist, so wird, wenn man die Beleuchtung mit η bezeichnet:

$$d^2\eta = \frac{\pi\, d\,\mathrm{tg}^2\gamma}{\sec^2\gamma}\, e^{-A\sec\gamma : \gamma} \cdot e^{-\int y\, dx(\sec\omega - \sec\gamma) : \gamma} \cdot y\, dx : \gamma\,.$$

Das Integral hiervon wird nach Hinzufügung der erforderlichen Constanten

$$d\eta = \frac{\pi\, d\,\mathrm{tg}^2\gamma}{\sec^2\gamma}\, e^{-A\sec\gamma : \gamma} \cdot \frac{1 - e^{-\int y\, dx(\sec\omega - \sec\gamma) : \gamma}}{\sec\omega - \sec\gamma}\,.$$

Um nun die vollständige Beleuchtung zu erhalten, muss man $\int y\, dx = A$ setzen, dann wird

$$d\eta = \frac{\pi\, d\,\mathrm{tg}^2\gamma}{\sec^2\gamma} \cdot \frac{e^{-A\sec\gamma : \gamma} - e^{-A\sec\omega : \gamma}}{\sec\omega - \sec\gamma}\,.$$

944. Um nun aus dieser Formel die scheinbare Helligkeit abzuleiten, muss man die Beleuchtung $d\eta$ durch die scheinbare Grösse des Ringes dividiren. Es ist aber die scheinbare Breite desselben $= d\gamma$ und sein scheinbarer Halbmesser $= \sin\gamma$, also sein Flächeninhalt $= 2\pi\sin\gamma\, d\gamma$. Also ist die scheinbare Helligkeit

$$L = \frac{e^{-A\sec\gamma : \gamma} - e^{-A\sec\omega : \gamma}}{\sec\omega - \sec\gamma}\sec\gamma\,.$$

[**421**] Diese Gleichung stimmt mit der früher (927) gegebenen genau überein, wenn man $A = 1$ setzt.

945. Für die Subtangente $\gamma = 2.171473$ habe ich nachstehende Tabelle für die scheinbare Helligkeit der Geraden AB, von A aus gesehen, berechnet (Fig. 85)

Winkel ω und γ	Abscissen AQ und AP	Ordinaten NQ und MP	Helligkeit in der Höhe der Sonne	Helligkeit im Zenith
0°	1.0000	0.6310	0.2906	0.2906
10	1.0154	0.6265	0.2923	0.2897
20	1.0642	0.6126	0.3002	0.2864
30	1.1547	0.5876	0.3123	0.2805
40	1.3054	0.5482	0.3248	0.2710
50	1.5557	0.4885	0.3500	0.2562
60	2.0000	0.3972	0.3666	0.2338
70	2.9238	0.2602	0.3503	0.1927
80	5.7588	0.0705	0.1870	0.1178

946. Mit Hilfe dieser Tabelle und der Formel (927)

$$L = \frac{AQ(MP - NQ)}{AQ - AP}$$

findet man nun die Helligkeit der Luft für beliebige Winkel γ und ω. Ferner weist die dritte Columne die Helligkeit im Horizont nach (930), welche, wie man früher gesehen hat, ein Maximum ist. Die vierte Columne gibt das andere Maximum der Helligkeit an. nämlich diejenige Helligkeit, welche in der Höhe der Sonne stattfindet und welche fast immer kleiner ist als die Helligkeit im Horizont. Die fünfte Columne, welche die Helligkeit im Zenith nachweist, ist beigefügt worden zum Zweck eines Vergleichs mit den beiden Maxima der Helligkeif.

[**422**] 947. Da die Helligkeit in der Höhe der Sonne, wenn $AQ = \mathfrak{z}$ (931), ein Maximum ist und da in unserer Tabelle $\mathfrak{z} = 2.171473$ ist, so wird $\mathfrak{z} = \sec 62^\circ\, 35'$, also die entsprechende Höhe der Sonne $= 27^\circ\, 25'$ und die zugehörige Helligkeit $= e^{-1} = 0.3679 =$ der Helligkeit, welche dann im Horizonte stattfindet = dem geschwächten Licht, wenn dasselbe eine Strecke gleich der Subtangente $\mathfrak{z}$ in der verschobenen Atmosphäre durchlaufen hat. Die Einheit, auf welche sich alle diese Zahlen beziehen, ist schon früher angegeben worden (931).

948. Diese Tabelle und die bisher entwickelten Formeln würden dann giltig sein und sich von der Wahrheit nicht allzuweit entfernen, wenn die das Licht auffangenden Theilchen vollkommen reflectirend wären, wenn keine Beugung hinzukäme und wenn jedes Theilchen nur diejenige Helligkeit zeigte, welche durch das direct einfallende Licht der Sonne entsteht. . . . .

. . . .

[**435**] 974. Sei nun (Fig. 83) AB die Oberfläche der Erde, ED die Oberfläche der verschobenen Luft, beide unendlich

weit verlängert gedacht. Die Sonnenstrahlen mögen in der Richtung CA und DB einfallen und es sei ihre Menge vor dem Eintritt in die Atmosphäre $= 1$, und beim Auffallen auf die Oberfläche $AB = n$; dann ist die Menge derjenigen, welche in der Luft zerstreut werden, $= 1 - n$. Nimmt man nun, wie früher (905) an, dass die Hälfte davon abwärts nach AB verläuft, so wird die Summe dieser beiden Arten der auf AB einfallenden Strahlen $= n + (1 - n) : 2 = \frac{1}{2}(1 + n)$.

975. Setzt man nun die Albedo der Erdoberfläche $= A$ (727), so wird $\frac{1}{2} A (1 + n)$ die Menge der reflectirten Strahlen. Von diesen tritt ein Theil aus der Atmosphäre aus, um nie wieder in dieselbe zurückzukehren; bezeichnet man ihre Menge mit m, so ist die Menge derjenigen Strahlen, welche in der Luft zerstreut werden, $= \frac{1}{2} A (1 + n)(1 - m)$. Von diesen kehrt wieder die Hälfte $= \frac{1}{4} A (1 + n)(1 - m)$ auf die Oberfläche der Erde zurück.

[436] 976. Von dieser Menge reflectirt die Erde wieder den Theil: $\frac{1}{4} A^2 (1 + n)(1 - m)$; und hiervon tritt aus der Atmosphäre aus der Theil: $\frac{1}{4} A^2 (1 + n)(1 - m) m$, während in der Luft zerstreut wird die Menge: $\frac{1}{4} A^2 (1 + n)(1 - m)^2$. Mithin gelangt wieder auf die Erde zurück der Betrag: $\frac{1}{8} A^2 (1 + n)(1 - m)^2$.

977. Wenn man auf dieselbe Weise die Zerstreuung und Reflexion des übrigbleibenden Lichtes weiter berechnet, so ist schliesslich die Summe des ganzen Lichts, durch welches die Oberfläche der Erde beleuchtet wird,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}(1 + n) + \frac{1}{4} A (1 + n)(1 - m) + \frac{1}{8} A^2 (1 + n)(1 - m)^2 + \frac{1}{16} A^3 (1 + n)(1 - m)^3 + \cdots$$

oder, wenn man diese Reihe summirt:

$$\mathcal{A} = \frac{1 + n}{2 - A(1 - m)}.$$

978. Die Einheit, auf welche sich diese Lichtmenge bezieht, ist diejenige Menge des Sonnenlichts, welche auf CD auffällt. Da dieselbe aber mit dem Sinus der Höhe der Sonne abnimmt, so wählen wir als Einheit diejenige Strahlenmenge, welche in normaler Richtung auf CD auffällt. Bezeichnet man also den Winkel EAC mit γ, so wird

$$\mathcal{A} = \frac{(1 + n)\cos\gamma}{2 - A(1 - m)}.$$

Ferner ist

$$n = e^{-\sec\gamma : ϥ}.$$

Also wird durch Substitution

$$A = \frac{\left(1 + e^{-\sec\gamma : ϥ}\right)\cos\gamma}{2 - A(1 - m)}.$$

979. Die Menge m verhält sich wie die Menge der austretenden Strahlen und wie die Schwächung derselben bei ihrem Wege durch die Luft. Bezeichnet man die Menge aller Strahlen, welche überhaupt [**437**] austreten, mit π, und bezeichnet man die Menge derjenigen, welche durch einen Kegel austreten, dessen Seite AC ist, nämlich $\pi\sin^2\gamma$ (125), mit q, so wird

$$dq = 2\pi\sin\gamma\, d\sin\gamma$$

oder

$$dq = -\tfrac{1}{2}\pi\, d\cos 2\gamma,$$

und mithin

$$dm = -\tfrac{1}{2}\, d\cos 2\gamma \cdot e^{-\sec\gamma : ϥ}$$

$$m = -\tfrac{1}{2}\int e^{-\sec\gamma : ϥ}\, d\cos 2\gamma.$$

980. Auf dem Durchmesser $AC = 1$ stehe der Halbkreis ANC; man vervollständige das Quadrat $ABDC$ und beschreibe

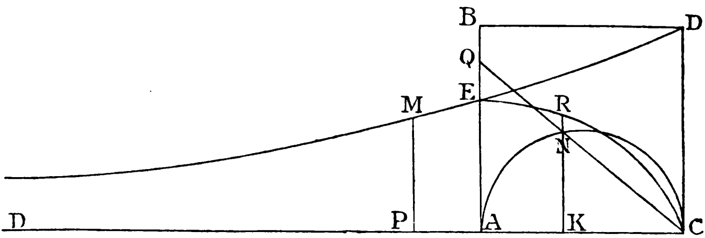

Fig. 89.

die logarithmische Curve DEM, deren Subtangente $= ϥ$ ist. Sodann ziehe man eine beliebige Secante CQ so, dass der Winkel $QCA = \gamma$ wird, und fälle die Sinuslinie NK, ferner mache man $CP = CQ$ und errichte PM. Vervollständigt man dann das Rechteck $PMRK$, so ist R ein Punkt der zu construirenden Curve. Ferner ist der ganze Raum $ERCAE = m$ und daher

$$ERCDB = 1 - m$$

981. Beide Räume sind ungefähr gleich, wenn $\gamma = 2$ ist. Setzt man daher $m = 1 - m = \frac{1}{2}$, so wird in diesem Fall

$$A = \frac{\left(1 + e^{-\sec\gamma : 2}\right)\cos\gamma}{2 - \frac{1}{2}A}.$$

982. Die Menge des Sonnenlichts, welche direct auf die Erde auffällt, ist

$$\lambda = \cos\gamma \cdot e^{-\sec\gamma : 2}.$$

Subtrahirt man dieselbe von der vorigen Menge, so bleibt dasjenige Licht übrig, welches von der Luft allein auf die Erde gesandt wird,

$$l = \frac{\cos\gamma - \left(1 - \frac{1}{2}A\right)\cos\gamma\, e^{-\sec\gamma : 2}}{2 - \frac{1}{2}A}.$$

[**438**] 983. Dies ist also die Helligkeit einer Ebene, welche von der Atmosphäre absolut beleuchtet wird, vorausgesetzt dass ihre Helligkeit dann $= 1$ ist, wenn sie sich ausserhalb der Atmosphäre befindend von der Sonne beleuchtet wird. Setzt man nun die Helligkeit der Sonne $= 1$ und den Halbmesser ihrer Scheibe $= 0^\circ 16'$, so wird die mittlere Helligkeit der Atmosphäre

$$\eta = l \sin^2 16',$$

oder
$$\eta = \frac{\left[\cos\gamma - \left(1 - \frac{1}{2}A\right)\cos\gamma \cdot e^{-\sec\gamma : 2}\right]\sin^2 16'}{2 - \frac{1}{2}A}.$$

984. Die Albedo der Erdoberfläche, wenn sie nicht mit Schnee bedeckt ist, erreicht kaum den Betrag $\frac{1}{12}$. Setzt man also $A = \frac{1}{12}$, so wird

$$\eta = \frac{\left(24 - 23\, e^{-\sec\gamma : 2}\right)\cos\gamma \cdot \sin^2 16'}{47}.$$

In diesem Fall wird also die Helligkeit der Atmosphäre nur wenig vergrössert durch das Licht, welches die Erde reflectirt. Dieser Zuwachs wird beträchtlicher, wenn man $A = \frac{4}{5}$ setzt, was ungefähr der Albedo des Schnees entspricht. Dann wird nämlich

$$\eta' = \frac{\left(1 - 0.8\, e^{-\sec\gamma : 2}\right)\cos\gamma \sin^2 16'}{1 \cdot 8}.$$

985. Um die dann entstehenden Grössen l mit denjenigen vergleichen zu können, welche in einer früheren Tabelle (908) aufgeführt wurden, setzen wir die Grössen $\lambda = \cos\gamma\, e^{-\sec\gamma : 2}$ den dort gefundenen gleich. [**439**] Dann wird

Höhe der Sonne	λ	l	l'
90	0.5889	0.2225	0.2938
80	0.5752	0.2214	0.2915
70	0.5348	0.2182	0.2844
60	0.4698	0.2123	0.2723
50	0.3837	0.2034	0.2550
40	0.2820	0.1902	0.2317
30	0.1734	0.1708	0.2007
20	0.0728	0.1390	0.1577
10	0.0082	0.0847	0.0928

986. Die erste Columne gibt wieder die Höhe der Sonne in Graden an, die zweite enthält die Helligkeit λ einer horizontalen Ebene, welche allein von der Sonne beleuchtet ist, die dritte gibt die Helligkeit l derselben Ebene bei absoluter Beleuchtung allein durch die Atmosphäre und zwar für den Fall $A = \frac{1}{12}$, die vierte endlich dieselbe Helligkeit l' für $A = \frac{2}{5}$. Indessen kommt der letztere Fall bei grösseren Sonnenhöhen kaum vor, etwa abgesehen von den Peruanischen und Afrikanischen Gebirgen. Die Einheit, auf welche sich diese Zahlen beziehen, ist dieselbe wie früher (902, fgde.), d. h. die Helligkeit der nämlichen Ebene, wenn sich dieselbe ausserhalb der Atmosphäre befindet und normal von den Sonnenstrahlen beleuchtet wird. Da übrigens diese Zahlen von der Subtangente γ und mithin von der Durchsichtigkeit der Atmosphäre abhängen, so folgt selbstverständlich, dass dieselben sehr veränderlich sind. Diese Tabelle ist also ähnlich, wie die anderen, welche in diesem Theil der Photometrie vorkommen, nur als ein Beispiel zu betrachten.

Kapitel III.

Naturgeschichte der Dämmerung.
Die Aufeinanderfolge der Erscheinungen beim Uebergang von der Nacht zum Tag und vom Tag zur Nacht.

[**440**] 987. Schon die ältesten Astronomen haben für den ersten Anfang und das letzte Ende der vollständigen Finsterniss, welche bei Nacht Himmel und Erde bedeckt, eine Depression der Sonne unterhalb des Horizonts im Betrag von 18 bis 19 Grad gefunden und hieraus die Höhe der Atmosphäre bestimmt, soweit dieselbe das Sonnenlicht reflectirt, und zwar unter der Voraussetzung, dass nur eine einmalige Reflexion stattfände und der Weg des Lichts in der Luft geradlinig wäre. Alle späteren

Untersuchungen indessen reduciren sich auf wenige Kapitel. *Varenius* ist, so viel ich weiss, der erste, welcher eine doppelte Reflexion angenommen hat und hierdurch die Höhe der Luft, welche sich bei einer einmaligen Reflexion zu 11 deutschen Meilen ergeben hatte, auf ungefähr den vierten Theil erniedrigt hat. Den Weg des Lichts in der Luft nahm er gleichfalls geradlinig an, und da ihm auch diese Höhe noch zu gross schien, so überliess er die ganze Sache der Erörterung der Späteren. *Halley* nahm auf die Krümmung des Weges Rücksicht, behielt aber nur eine einzige Reflexion bei, wodurch sich die Höhe der Luft zu $9\frac{1}{2}$ deutschen Meilen ergab. Auch *Smith* und *Kaestner* gaben in den schon öfter erwähnten Werken eine Berechnung. *Joh. Bernoulli* bestimmte den Tag der kürzesten Dämmerung und *Kaestner* gab dem nämlichen Problem eine allgemeinere Behandlung. Die letztere Aufgabe hat es lediglich mit der Depression der Sonne unter dem Horizont zu thun und lässt sich deshalb leichter behandeln als die frühere, nämlich die Bestimmung der Höhe der Atmosphäre.

[**441**] 988. Dies ungefähr ist es, was bisher über die Dämmerung geschrieben ist. Wie gewöhnlich werden wir die betreffenden Sätze anführen, um sodann weiter zu gehen und einiges Neue hinzuzufügen. Die erste Aufgabe soll also die folgende sein: *Für eine gegebene Polhöhe ist diejenige Declination eines Gestirns zu bestimmen, bei welcher dasselbe in der kürzesten Zeit bis zu einer gegebenen Höhe über oder einer gegebenen Depression unter dem Horizont gelangt.*

989. Sei $HZON$ der Meridian, P und Q die beiden Pole, ADE der Aequator, HDO der Horizont, $MSRL$ ein Parallelkreis zum Aequator, ebenso wie der unendlich benachbarte Kreis $msrl$. Sei ferner $HC = OK$ eine gegebene Depression, dann möge der zum Horizont parallele Kreis CSK derjenige sein, bis zu welchem

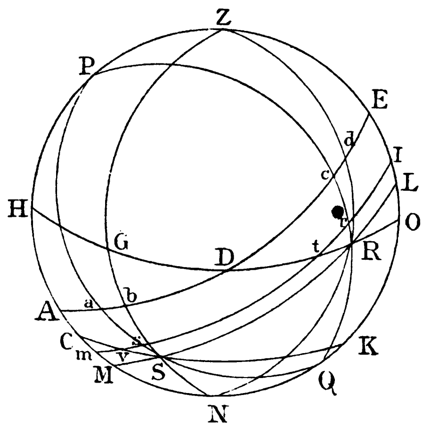

Fig. 90.

das Gestirn auf seinem Wege längs $LRSM$ in der kürzesten Zeit gelangen soll.

990. Durch die Schnittpunkte R und S ziehe man die Declinationskreise $PrRQ$ und $PsSQ$; dann verhält sich die Zeit, während welcher das Gestirn den Bogen RS durchläuft, wie der Winkel RPS oder wie die Anzahl der Grade, welche der Bogen rs enthält. Wenn sich dagegen das Gestirn auf dem Parallelkreis $lrsm$ bewegt, so verhält sich dieselbe Zeit offenbar wie die Grade des Bogens tv. Entsprechend den Eigenschaften der Maxima und Minima müssen aber beide Bögen gleich sein. Es wird also

$$rs = tv$$

$$tr = sv\ .$$

Nun ist aber

$$sS = rR$$

$$\text{Winkel } vsS = trR = 90^\circ\ .$$

Also sind die Dreiecke vsS und trR congruent. Zieht man daher die Verticalkreise ZSN und ZRN, so wird

$$PSZ = PRZ = rtR = svS\ ,$$

[**442**] oder

$$NSQ = NRQ\ .$$

Ferner hat man wegen $NR = 90^\circ$ und $QR = QS$ nach den Sätzen der Trigonometrie

$$\cos NQ = \sin QR \cos NRQ$$

$$\cos NQ = \cos NS \cos QS + \sin NS \sin QS \cos NRQ\ ,$$

also wird durch Substitution

$$\cos NQ = \cos NS \cos QS + \sin NS \cos NQ\ ,$$

woraus

$$\cos QS = \frac{\cos NQ\,(1 - \sin NS)}{\cos NS}\ ,$$

oder kurz

$$\cos QS = \cos NQ \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} SG\ .$$

991. *Es verhält sich also die Einheit zum Sinus der Polhöhe wie die Tangente der halben gegebenen Depression zum Sinus der Declination des Gestirns, welches diese Depression in der kürzesten Zeit erreicht.*

992. Ferner ist in den Dreiecken PSZ und PRZ, welche die Seite PZ gemeinsam haben

$$PS = PR$$
$$PSZ = PRZ\ ,$$

also ist

$$\sin SZP = \sin RZP\ .$$

Da diese Winkel aber nicht gleich sind, so ist der eine das Supplement des anderen, und mithin

$$SZP = RZE$$
$$HG = OR$$
$$GD = DR\ .$$

Also stehen die Verticalkreise SZ und RZ, zwischen welchen der Weg RS in der kürzesten Zeit zurückgelegt wird, vom Ost- oder Westpunkt gleichweit ab.

[**443**] 993. Aehnlich wird

$$\sin PZ : \sin PRZ = 1 : \sin ZPR = \sin SZ : \sin ZPS\ ,$$

mithin

$$\sin ZPS = \sin ZPR \sin SZ\ .$$

Es ist aber

$$\cos ZPR = -\operatorname{cotg} PZ \operatorname{cotg} PR\ .$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich also der halbe Tagbogen Ec und die Dauer der Dämmerung ca.

994. Ferner ist

$$\text{Winkel } aSb = cRd$$
$$\text{»} \quad Sab = Rcd$$
$$Sa = Rc\ ,$$

also sind die Dreiecke aSb und cRd congruent und mithin

$$ab = cd$$
$$ac = bd$$
$$Sb = Rd\ .$$

995. Ebenso sind wegen

$$GD = DR \quad (992)$$
$$\text{Winkel } GDb = dDR$$
$$\text{»} \quad bGD = dRD = 90^\circ$$

die Dreiecke GDb und dDR congruent, mithin

$$Db = Dd$$
$$Gb = Rd .$$

Man hat aber gesehen (994), dass

$$Rd = Sb ,$$

also wird

$$Sb = Gb = \tfrac{1}{2} GS .$$

Demnach wird die Depression GS des Gestirns durch den Aequator $EDbA$ in b halbirt. Man hat also (991)

$$\sin aS = \cos PZ \operatorname{tg} bS .$$

[**444**] 996. Ferner ist

$$ac = bd \qquad (994)$$
$$Db = Dd \qquad (995)$$

also ist

$$ac = 2bD .$$

In dem Dreieck GDb ist also die Hypotenuse gleich der halben Dauer der Dämmerung, die Kathete Gb gleich der halben Depression der Sonne am Ende der Dämmerung, die andere Kathete GD gleich dem Azimuth der Sonne, der Winkel GDb die Höhe des Aequators. Mithin ergibt sich auf diese Weise die Dauer der kürzesten Dämmerung als unabhängig von der Declination der Sonne; denn es ist:

$$\sin Db = \sin Gb : \sin AH .$$

997. Sei beispielsweise

die Höhe des Aequators $AH = 41^\circ 37'$
die Depression der Sonne $GS = 18 \;\; 30$

dann findet man durch Rechnung (991, 996) für die Zeit der kürzesten Dämmerung

Südliche Declination der Sonne . $Sa = \;\; 6^\circ \, 59' \, 36''$
Bogen der halben Dauer . . . $Db = 14 \;\; 0 \;\; 23$
Azimuth. . . . . $GD = 10 \;\; 34 \;\; 0$.

Also ist der Ort der Sonne: ♎ $+ 17^\circ 47\tfrac{1}{2}'$
und die Dauer der Dämmerung $1^h \; 52^m \; 3^s$.

998. Sei jetzt CA der Halbmesser der Erde, AT die Oberfläche derselben, AB die Höhe der Atmosphäre, soweit sie das Licht reflectirt, und BD die Oberfläche der letzteren. Die Sonnenstrahlen fallen in der Richtung SD ein, werden in D von ihrer Richtung abgelenkt, um in der Richtung DE weiterzugehen und in E die Oberfläche der Erde zu berühren; gehen sodann längs EF weiter und treten in F wieder aus der Atmosphäre aus. In F befindet sich also das letzte der Theilchen, welche direct von der Sonne beschienen werden. Wenn nun das Licht in F so reflectirt wird, dass ein beliebiger Strahl den Weg FA durchläuft und in A die Oberfläche der Erde wieder berührt, so ist A der letzte Punkt der Erdoberfläche, [**445**] von wo aus ein Theil der direct erleuchteten Atmosphäre DF sichtbar ist. Die Dämmerung, welche längs der Strecke EA stattfindet, wollen wir als *primäre Dämmerung* bezeichnen.

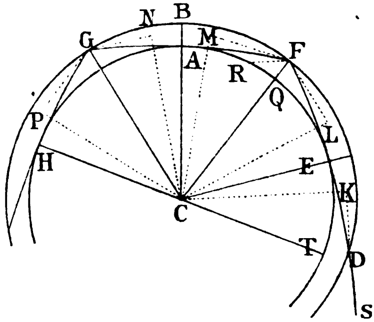

Fig. 91.

999. Der Strahl FA gehe weiter längs AG und trete in G wieder aus der Atmosphäre aus; dann wird G das letzte Theilchen der Atmosphäre sein, welches von den reflectirten Sonnenstrahlen beleuchtet wird, und die Dämmerung, welche längs AH stattfindet, wollen wir als *secundäre Dämmerung* bezeichnen. Ebenso kann man sich eine tertiäre Dämmerung denken, eine quartäre, u. s. w.

1000. Man ziehe die Tangenten DK, FL, FM, GN und fälle auf dieselben vom Centrum der Erde aus die Normalen CK, CL, CM, CN, CP; dann werden die Winkel KCE, ECL, MCA, ACN, PCH, gleich sein der Krümmung der Wege DE, EF, FA, AG, GH und die astronomische Strahlenbrechung darstellen, vorausgesetzt, dass die Höhe der reflectirenden und der lichtbrechenden Atmosphäre gleich ist, was man ohne beträchtlichen Fehler annehmen darf. Ferner ist das Verhältniss der Strecken $CK : CE = CL : CE = CM : CA = CN : CA = CP : CH$ gleich dem Verhältniss zwischen dem Sinus des Neigungswinkels des einfallenden und des gebrochenen Strahles, wenn das Licht aus dem luftleeren Raum in die Luft der Punkte E, A, H eintritt; und man hat anderweitig gefunden, dass dieses Verhältniss $= 1.0003054 : 1$ ist. Da dasselbe jedoch veränderlich ist, so setzen wir es $= 1.0003 : 1$.

1001. Ist nun die Depression der Sonne beim Beginn der Morgendämmerung $= 18\frac{1}{2}^\circ$ und nimmt man an, dass F der letzte Punkt ist, welcher am Horizont noch beleuchtet erscheint, so ist der Winkel $ACK = 18^\circ\, 30'$, und mithin [**446**]

$$2\,MCF + 3\,ACM = 18^\circ\, 30'$$
$$MCF = \tfrac{1}{2}(18^\circ\, 30' - 3\,ACM)$$

Setzt man ferner $CA = 1$, so ist $CM = 1.0003$ und

$$CB = 1.0003 \sec MCF\,.$$

Nimmt man dann die Horizontalrefraction $ACM = 0^\circ\, 32'$, so wird

$$\begin{aligned} MCF &= \tfrac{1}{2}(18^\circ\, 30' - 1^\circ\, 36') = 8^\circ\, 27' \\ \sec MCF &= 1.01097 \\ CB &= 1.01127 \\ AB &= 0.01127 = \tfrac{1}{89}\,AC = 9.6 \text{ deutsche Meilen.} \end{aligned}$$

1002. Ist dagegen G das letzte Theilchen, welches in der Dämmerung sichtbar ist, so wird $HCK = 18^\circ\, 30'$ und mithin

$$\begin{aligned} 4\,MCF + 5\,ACM &= 18^\circ\, 30' \\ MCF &= \;\;3\;\; 57\tfrac{1}{2} \\ \sec MCF &= 1.00239 \\ CB &= 1.00269 \\ AB &= 0.00269 = \tfrac{1}{372}\,AC = 2\tfrac{1}{3} \text{ deutsche Meilen.} \end{aligned}$$

1003. Man denke sich nun die Sonne unbeweglich in S stehend und untersuche, in welcher Helligkeit die Atmosphäre erscheint, wenn man vom Punkte E in der Richtung A, H fortschreitet. Ein Beobachter in E sieht also die Sonne gerade aufgehen oder untergehen, und die Atmosphäre DF erscheint, soweit sie sichtbar ist, von den Sonnenstrahlen direct erleuchtet, jedoch so, dass sie in D weit heller erscheint als in F.

1004. Geht man nach L weiter, so wird ein gewisser Theil der helleren Luft, welcher sich bei D befindet, gleichsam untergehen, während der Theil bei F sich erhebt. Man erblickt also oberhalb des Horizonts einen solchen Theil, welcher nur von den [447] Lufttheilchen der primären Dämmerung beleuchtet wird und mithin beträchtlich dunkler erscheint.

1005. Wenn der Beobachter nach *Q* gelangt, so befindet sich der Endpunkt der primären Dämmerung im Zenith, welcher natürlich infolge der Kürze der Geraden *QF* sehr dunkel erscheinen muss. Indessen wird diese Helligkeit dadurch vergrössert, dass die Luft, welche sich im Raume *QFE* befindet, von dem ganzen Raum *FK* erleuchtet wird.

1006. Schreitet man nach *R* fort und denkt sich die Gerade *RF* gezogen, so erscheint der Endpunkt der primären Dämmerung sowohl deutlicher, wie auch heller. Allmählich jedoch, wenn man weiter fortgeht, wird er durch die secundäre Dämmerung verwischt, welche allein übrig bleibt, sobald der Beobachter nach *A* gelangt ist.

1007. Das Sonnenlicht wird auf seinem Wege längs der Curve *DE* geschwächt in dem Verhältniss von etwa 2000 : 1, mithin wird dasselbe auf dem ganzen Wege *DF* geschwächt im Verhältniss 4000000 : 1; es wird also dasjenige Licht, welches in den Endpunkt *F* direct einfällt, ungefähr zehn mal schwächer sein als das Licht des Vollmondes, wenn derselbe vertical über dem Punkt *F* stehen würde. Daher wird der wirkliche Endpunkt *F* der primären Dämmerung kaum oder gar nicht sichtbar sein und er wird vielmehr zwischen *F* und *L* zu liegen scheinen. Den Endpunkt *G* der secundären Dämmerung wird man folglich noch viel weniger sehen können; höchstens wird man noch den Mittelpunkt *B* derselben erkennen können, wenn derselbe allein über dem Horizont übrig geblieben ist. Denn solange sich der Beobachter in *Q* oder in *R* befindet, wird jener Punkt offenbar infolge der beträchtlichen Helligkeitsdifferenz durch die anderen Theile überstrahlt.

1008. Sei *AFB* der Verticalkreis, auf welchem sich die Sonne befindet, *AB* der Horizont, *F* der Zenith, so dass also *AFBD* die obere Hälfte des Himmels darstellt, so weit sie einem Beobachter im Centrum *C* sichtbar ist. Ich werde nun hier [448] die Variationen der Dämmerung beschreiben, wie ich sie am Abend des 19. November 1759 in *Augsburg* auf der Sternwarte des Mechanikers *G. F. Brander* beobachtet habe.

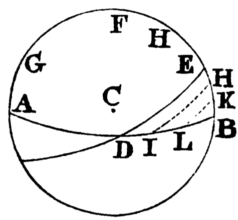

Fig. 92.

4 Uhr 26 Minuten: Die Sonne ging in B unter.

» 29 » Scheinbarer Untergang derselben, Beginn der primären Dämmerung, Depression der Sonne $= 0^\circ\, 33'$.

» 36 » Der Himmel verdunkelt sich im Osten A in der Nähe des Horizonts, jedoch nimmt die Tageshelligkeit nur schwach ab.

5 Uhr 0 Minuten: Die Nacht rückt rasch heran. Am Osthimmel sind Fixsterne sichtbar, ebenso Jupiter, der den Meridian schon überschritten hat.

» 5 » Der Himmel ist gegen Osten bis zum Zenith F mit Dunkelheit bedeckt. Die östlichen Fixsterne glänzen hell.

» 12 » Die Dunkelheit verbreitet sich jenseit des Zenithes, und es lässt sich in H ihre Grenze ziemlich erkennen, jedoch nicht genau genug, um die Scheitelhöhe der Dämmerung messen zu können.

» 19 » Die Scheitellinie der Dämmerung in E ist zweifellos zu erkennen, sie stellt ungefähr einen grössten Kugelkreis ED dar, da der Abstand BD längs des Horizontes auf beiden Seiten des Verticalkreises AFB etwa 90° beträgt. Die Scheitelhöhe BE beträgt $8^\circ\, 30'$, die Depression der Sonne $8^\circ\, 3'$.

» 25 » Scheitelhöhe $BE = 7^\circ\, 15'$, Depression der Sonne $= 8^\circ\, 59'$, Entfernung BD dieselbe.

[449] » 31 » Scheitelhöhe $BE = 7^\circ\, 0'$, Depression der Sonne $= 9^\circ\, 55'$.

» 36 » Scheitelhöhe $BE = 6^\circ\, 20'$, Depression der Sonne $= 10^\circ\, 42'$.

» 43 » Scheitelhöhe $BE = 5^\circ\, 45'$, Depression der Sonne $= 11^\circ\, 48'$.

» 48 » Scheitelhöhe $BE = 5^\circ\, 0'$, Depression der Sonne $= 12^\circ\, 35'$. Die Entfernung BD wird kleiner.

3 Uhr 54 Minuten: Scheitelhöhe $BE = 4^{\circ}30'$, Depression der Sonne $= 13^{\circ}31'$.

» 59 » Scheitelhöhe $BE = 3^{\circ}40'$, Depression der Sonne $= 14^{\circ}18'$.

6 Uhr 4 Minuten: Scheitelhöhe $BE = 3^{\circ}15'$, Depression der Sonne $= 15^{\circ}5'$. Die Entfernung BI beträgt kaum 40 Grad.

Allmählich vermischt sich auch das Dämmerungslicht mit dem Zodiakallicht; die Beobachtung wurde aus diesem Grunde, ebenso wegen der zunehmenden Kälte, abgebrochen.

1009. Uebrigens ist zu bemerken, dass die Höhen BE eher zu gross als zu klein angesetzt sind. Es ist dies geschehen, um der wahren Höhe näher zu kommen.

1010. Sei jetzt CA der Halbmesser der Erde, AK ihre Oberfläche, HD die Oberfläche der das Licht reflectirenden Luft. Dann befindet sich zur Zeit des scheinbaren Sonnenunterganges der Endpunkt der Dämmerung in B. Dieser Punkt rückt successiv fort nach H, D, und man sieht leicht, dass der Winkel BCD gleich ist der Depression der Sonne unter dem Horizont, eben weil von ihr das Fortrücken der Dämmerung abhängig ist. Man nehme nun an, dass sich um 5 Uhr 19 Minuten der Scheitel der Dämmerung in D befunden habe, dann war also seine Höhe $DAK = 8^{\circ}30'$ und die [450] entsprechende Depression der Sonne $= 8^{\circ}3'$; zieht man hiervon die Depression zur Zeit des scheinbaren Unterganges $= 0^{\circ}33'$ ab, so wird

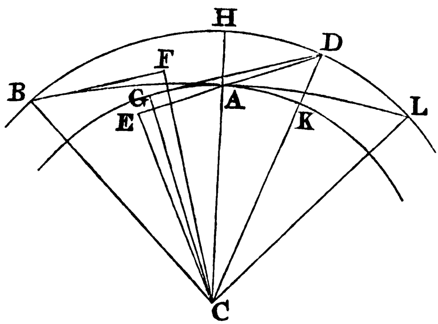

Fig. 93.

$$BCD = 7^{\circ}30' .$$

1011. Zieht man die Tangenten BF, DG und ausserdem AE, und fällt hierzu die Senkrechten CF, CG, CE, so wird

$$
\begin{array}{lrl}
 & ECA = & 8^\circ 30' \\
\text{Refraction} & ECG = & 0 \quad 6 \\
\text{mithin} & GCA = & 8 \quad 24 \\
\text{ferner} & BAC = & 90 \quad 0 \\
\text{Refraction} & FCA = & 0 \quad 33 \\
 & GCF = & 7 \quad 51\,.
\end{array}
$$

1012. Setzt man nun $CA = 1$, so wird (1000)

$$
\begin{aligned}
CF : CA = CG : CE &= 1.0003054 : 1 \\
CE = \cos ECA &= 0.9890158 \\
CG &= 0.9893178 \\
CF &= 1.0003054.
\end{aligned}
$$

1013. Da ferner

$$BCF + GCD = BCD + GCF = 15^\circ 17'$$

ist, so kennt man die Summe der Winkel BCF und GCD, ebenso das Verhältniss zwischen den Katheten CF und CG der beiden rechtwinkligen Dreiecke CBF und CDG, deren Hypotenusen CB und CD einander gleich sind; es wird also

$$\operatorname{tg} BCF = \frac{CG - CF \cos(BCF + GCD)}{CF \sin(BCF + GCD)},$$

und wenn man die Rechnung ausführt, so folgt

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg} BCF &= 0.092498 \\
BCF &= 5^\circ 17' \\
GCD &= 10^\circ \; 0'\,.
\end{aligned}
$$

1014. Es ist aber

$$CB = CF \sec BCF\,.$$

Also wird

$$CB = 1.0045735$$

$$AH = 0.0045735 = \tfrac{1}{220} AC = 3.9 \text{ deutsche Meilen.}$$

[451] Dies ist also nach unserer Rechnung die Höhe der das Licht reflectirenden Atmosphäre.

1015. Da man hat

$$
\begin{aligned}
BCF &= 5^\circ 17' \\
FCA &= 0 \quad 33 \\
BCD &= 7 \quad 30
\end{aligned}
$$

so wird

$$BCA = 5^\circ 50'$$
$$ACD = 1\ \ 40$$

Da aber die Depression der Sonne zur Zeit des scheinbaren Unterganges $= 0^\circ 33'$ ist, so wird zu derjenigen Zeit, wo sich der End- oder Scheitelpunkt der Dämmerung im Zenith H befindet, diese Depression sein $= BCA + 0^\circ 33' = 6^\circ 23'$. Dies fand bei unserer Beobachtung um 5 Uhr 8 Minuten statt.

1016. Wegen $BCA = ACL = 5^\circ 50'$ wird $BCL = 11^\circ 40'$; mithin geht der Endpunkt der primären Dämmerung unter, wenn die Depression der Sonne unter dem Horizont $= 11^\circ 40' + 0^\circ 33' = 12^\circ 13'$ beträgt. Nun ist aber die Depression der Sonne am Ende der Dämmerung $= 18^\circ 30'$, da also die Differenz $18^\circ 30' - 12^\circ 13' = 6^\circ 17'$ ist, so wird dies die Distanz der beiden Endpunkte der primären und secundären Dämmerung sein. Es wird also (Fig. 91)

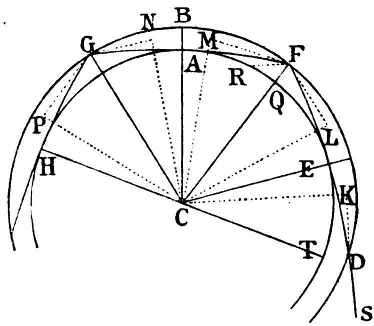

Fig. 91.

$$ECD = 5^\circ 50'$$
$$FCD = 11\ \ 40\ ,$$

daher wird, da man zu FCD noch $6^\circ 17'$ hinzufügen muss, der letzte Endpunkt der secundären Dämmerung ungefähr nach N fallen, und mithin entzieht sich der übrige Theil NG derselben unserem Anblick, dadurch dass dieser Theil so schwach ist, dass er durch das Licht, welches die Fixsterne in der Atmosphäre verbreiten, verwischt wird.

1017. Die Helligkeit der Luft, z. B. in der Richtung RF ist um so grösser, je mehr sich lichtzerstreuende Theilchen dort befinden und je heller dieselben sind. [**452**] Die Anzahl der Theilchen vergrössert sich, wenn sich der Winkel RFQ vergrössert. Hieraus ergibt sich in folgender Weise die Aehnlichkeit und der Unterschied zwischen beiden Dämmerungen.

1018. Die primäre Dämmerung wird nicht allein durch die directen Sonnenstrahlen erzeugt, sondern es kommt auch von allen Theilchen, welche im Gebiet LT liegen und welche bedeutend heller sind, eine gewisse Lichtmenge hinzu; sie ist daher gleichsam an sich sichtbar, und diese Sichtbarkeit ist von der Länge der Strecke RF in geringerem Grade abhängig, wenn auch ihre Helligkeit zugleich mit dieser Strecke zunimmt.

1019. Dagegen ist die Sichtbarkeit der secundären Dämmerung fast vollständig abhängig von der Länge der Geraden RF, in deren Richtung man sie sieht. Daher kommt es, dass sie nur in der Nähe des Horizonts sichtbar ist, wo sie sich mit der untergehenden primären Dämmerung vermischt.

1020. Die Gestalt der primären Dämmerung, deren Grenzlinie als ein grösster Kugelkreis bezeichnet wurde, ist rein optisch. Sei $ADBE$ die Oberfläche der das Licht reflectirenden Atmosphäre. Die Sonne stehe über dem Punkte A und gehe unter auf dem Kreise DE, welcher sich auf der Oberfläche der Atmo-

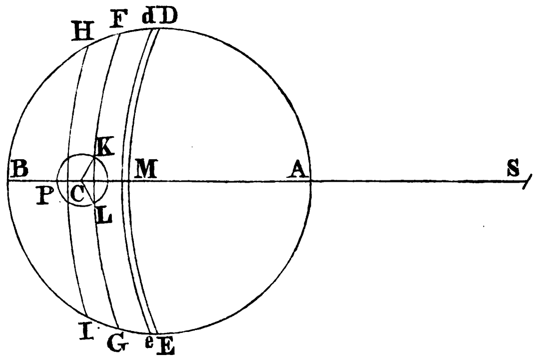

Fig. 94.

sphäre befinde; dann wird sie infolge der Refraction auf einem Kreise de unterzugehen scheinen, welcher dem DE parallel ist, wenn man sich beide auf der Oberfläche der Erde denkt, und es wird der Winkel $dD = 0^\circ 33'$ sein.

1021. Aber in Folge der Durchsichtigkeit der Atmosphäre gelangen noch Sonnenstrahlen auf directem Wege bis zum Kreise FG, welcher die Grenzlinie der primären Dämmerung bezeichnet und welcher vom Kreise de um einen Winkel $= 5^\circ 50'$ entfernt ist (1015), sodass also $FD = 6^\circ 23'$ ist.

1022. Die Grenzlinie der secundären Dämmerung bildet den Kreis HI, welcher den früheren Kreisen gleichfalls parallel ist [**453**], und es ist $HF = 6^\circ 17'$ (1016) und mithin $HD = 12^\circ 40'$.

1023. Nun ist aber (Fig. 93) der Bogen der Atmosphäre BH, welchen ein Beobachter vom Punkte A der Erdoberfläche aus erblickt, $= BCA = 5^\circ 50'$ (1015). Befindet sich also (Fig. 94) ein Beobachter in C, so beschreibe man mit dem Halbmesser $CK = 5^\circ 50'$ um den Punkt C als Pol den Kreis PKL, dann wird die Peripherie desselben den für den Beobachter sichtbaren Horizont darstellen und der Punkt C wird sich im Zenith befinden; zugleich wird der Bogen KL des Kreises $FKLG$ die sichtbare Grenze der primären Dämmerung sein, und da er nicht mehr als 12 Grad beträgt, so wird er fast geradlinig erscheinen. Für den Anblick nimmt er jedoch dieselbe kreisförmige Gestalt an, in welcher sich das ganze Himmelsgewölbe darbietet.

1024. Nimmt man (1014) (Fig. 93)

$$CB = CH = 1.0045735$$
$$AH = 0.0045735\,,$$

so ergeben sich aus den Winkeln HCD leicht die Winkel HAD, und hieraus wird man bestimmen können, in welcher Weise der Scheitelpunkt D der Dämmerung sich vom Zenith zu entfernen oder sich ihm zu nähern scheint. Da es sich jedoch nicht der Mühe lohnt, diese Aufgabe durch eine trigonometrische Rechnung zu lösen, so habe ich sie durch Construction erledigt. Ferner wurde angenommen, die primäre Dämmerung besitze eine constante Helligkeit, und ihre Begrenzung sei ein grösster Kreis; dann wurde nach Lehrsatz 12 (145) die Beleuchtung bestimmt, welche eine horizontale Ebene durch die Dämmerung erhält; da diese $1 \pm \sin HAD$ ist, so wird, wenn man die Scheitelhöhe DAK mit a bezeichnet, die Beleuchtung $= 1 \pm \cos a$ sein. Hieraus ergab sich leicht die folgende Tabelle: [**454**]

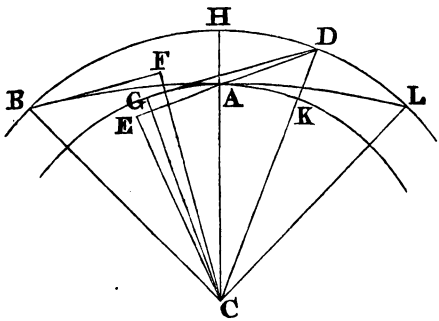

Fig. 93.

I Zeit in Minuten:	II Depression der Sonne:	III Höhe der östlichen Dämmerung:	IV Beleuchtung:
0	0° 0′	—	—
3	0 33	0° 0′	2.000
17	2 36	2 45	1.999
22	3 21	3 0	1.998
27	4 5	5 30	1.995
32	4 50	8 30	1.989
33	5 1	10 0	1.985
34	5 10	11 30	1.980
35	5 19	13 0	1.974
36	5 28	15 30	1.964
37	5 37	17 45	1.955
38	5 46	22 30	1.924
39	5 56	29 30	1.870
40	6 5	41 30	1.749
41	6 14	60 0	1.500
42	6 23	90 0	1.000

I Zeit in Minuten:	II Depression der Sonne:	III Höhe der westlichen Dämmerung:	IV Beleuchtung:
42	6° 23′	90° 0′	1.000
43	6 32	60 0	0.500
44	6 41	41 30	0.251
45	6 50	29 30	0.130
46	6 59	22 30	0.075
47	7 9	17 45	0.045
48	7 18	15 30	0.036
49	7 27	13 0	0.026
50	7 36	11 30	0.020
51	7 45	10 0	0.015
52	7 54	8 40	0.011
57	8 41	5 30	0.005
62	9 27	3 0	0.002
67	10 14	2 45	0.001
81	12 13	0 0	0.000

1025. Die in der ersten Columne dieser Tafel angegebenen Zeiten sind die Minuten, welche am 19. November seit Sonnenuntergang verflossen waren. Die Tafel darf also nicht auf alle Tage des Jahres bezogen werden. Aus diesem Grunde wurde die zweite Columne beigefügt, welche die Depression der Sonne unter dem Horizont, wie sie einer jeden Höhe der Dämmerung entspricht, nachweist. Denn von der ersteren allein ist die letztere abhängig. Aus der vierten Columne ergibt sich, dass der Eintritt der Nacht fast plötzlich erfolgt, nämlich zur Zeit, wenn die Sonne vom sechsten zum siebenten Grad unter dem Horizont hinabsinkt. Diejenige Zeitdauer aber, innerhalb welcher die Sonne bei einer Polhöhe $= 48^{\circ}\,23'$ bis zu einer Tiefe von $6^{\circ}\,23'$ gelangt, beträgt, vom astronomischen Untergang ab gerechnet: [**455**]

für ⊙♋	$0^{h}\,51^{m}\,38^{s}$	und zwar zur Zeit	$8^{h}\,48^{m}\,45^{s}$
» ⊙♑	0 45 42	» » » »	4 48 35
» ⊙♈♎	0 38 32	» » » »	6 38 32 .

1026. Wenn auch die Zahlen der vierten Columne die Beleuchtung einer horizontalen Ebene nicht ganz richtig darstellen, so weichen sie dennoch nicht so weit von der Wahrheit ab, dass die Zeit des raschen Einbruchs der dichteren Dunkelheit wesentlich von der durch die Tabelle angezeigten abweichen könnte, welche einer Depression der Sonne $= 6\frac{1}{2}^{\circ}$ entspricht. Man kann dies leicht täglich durch Beobachtung bestätigen.

1027. Der Endpunkt der secundären Dämmerung eilt dem Zenith zu, wenn derjenige der primären Dämmerung untergeht. Da er also gleich rasch fortschreitet, so kommt dann zur ersten nächtlichen Verdunkelung eine zweite, die jedoch kaum mehr leicht bemerkbar ist. Vollständige Finsterniss tritt ein, sobald diese zweite Dämmerung unter den Horizont hinabsinkt.

1028. Das Fortschreiten der primären Dämmerung hängt von der Höhe AH ab. Würde man hierfür diejenige Grösse nehmen, welche oben (1001) auf Grund einer einzigen Reflexion abgeleitet wurde, nämlich

$$AH = 0.01127\ ,$$

so würde die Dämmerung weit langsamer nach H gelangen und sogar an dem Tage, wo ihre Dauer ein Minimum ist, fast eine volle Stunde brauchen (997). Man hat jedoch (1025) gesehen, dass dies innerhalb der Zeit von $38\frac{1}{2}$ Minuten geschieht. Nimmt man dagegen die Höhe $AH = 0.00269$ (1002), so würde die Grenze der primären Dämmerung innerhalb 14 Minuten seit

Sonnenuntergang bis zum Zenith gelangen. Beides widerspricht der täglichen Erfahrung, und mithin wird der Betrag, welchen wir aus unserer Rechnung für die Höhe der das Licht reflectirenden Luft [456] fanden, nämlich 0.0045735 oder vier deutsche Meilen, der Wahrheit viel näher kommen.

1029. Die Geschwindigkeit des Einbruchs der Nacht hängt von der Geschwindigkeit ab, mit welcher die Grenzlinie der Dämmerung durch den Scheitel geht, und mithin von der Geschwindigkeit, mit welcher sich die Sonne bei einer Depression von $6^\circ 23'$ vom Horizont entfernt. Es sei

$$\begin{array}{ll} \text{die Zenithdistanz des Poles} & = a \\ \text{die Poldistanz des Gestirns} & = y \\ \text{die Zenithdistanz desselben} & = z \\ \text{der Stundenwinkel desselben} & = x\,, \end{array}$$

dann ist $\cos z = \cos y \cos a + \sin y \sin a \cos x$.

Lässt man x und z variiren, so findet sich durch Differentiation

$$\sin z\, dz = \sin y \sin a \sin x\, dx\ .$$

Wegen

$$\sin x = \sqrt{\sin^2 y \sin^2 a - (\cos z - \cos y \cos a)^2} : \sin y \sin a$$

wird also

$$\sin z\, dz = dx \sqrt{\sin^2 y \sin^2 a - (\cos z - \cos y \cos a)^2}\ .$$

Lässt man nun dx und y variiren, so wird

$$d\left(\frac{\sin z\, dz}{dx}\right) = 0 =$$

$$\frac{\sin^2 a \sin y \cos y\, dy - (\cos z - \cos y \cos a) \cos a \sin y\, dy}{\sqrt{\sin^2 y \sin^2 a - (\cos z - \cos y \cos a)^2}}\,,$$

also $\sin^2 a \cos y - \cos a \cos z + \cos y \cos^2 a = 0$

$$\cos y = \cos a \cos z\ .$$

[457] *Die Sonne muss sich also auf einem Verticalkreis befinden, welcher den Aequator im Horizont schneidet, oder ihr Azimuth muss* $= 90^\circ$ *sein.* Ferner: *Der Sinus der Depression der Sonne von* $6^\circ 23'$ *verhält sich zum Sinus ihrer Declination, welche in diesem Fall eine südliche ist, wie die Einheit zum Sinus der Polhöhe.* Unter der Polhöhe $48^\circ 23'$ ist diese Declination $- 4^\circ 46'$ und fällt in $12^\circ 2' 22''$ ♎ und $17^\circ 57' 38''$ ♓, also auf den 5. October und 7. März. An diesen Tagen tritt also die Nacht am schnellsten ein.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

LAMBERT'S

PHOTOMETRIE.

(PHOTOMETRIA SIVE DE MENSURA ET GRADIBUS LUMINIS, COLORUM ET UMBRAE.)

(1760.)

Deutsch herausgegeben

von

E. Anding.

Drittes Heft:

Theil VI und VII. — Anmerkungen.

Mit 8 Figuren im Text.

LEIPZIG

VERLAG VON WILHELM ENGELMANN

1892.

Sechster Theil.

Theorie der Beleuchtung des Planetensystems.

Kapitel I.

Theorie der Lichtstärke der Mondphasen.

. . . .

[**460**] 1035. Die Unregelmässigkeiten würden die Theorie äusserst complicirt machen, wenn man auf alles Einzelne Rücksicht nehmen wollte. Man muss jedoch hierbei ein gewisses Maass innehalten. Man darf nämlich die Berge und Thäler ausser Acht lassen; denn da sie gegenüber der ganzen Oberfläche in einem fast verschwindenden Verhältniss stehen, so haben sie keinen störenden Einfluss auf die Menge Sonnenlichtes, welches auf die ganze Oberfläche des Mondes auffällt. Was ferner die verschiedene Helligkeit der einzelnen Theile betrifft, so kann man hieraus einen Mittelwerth bilden und diesen einfach als die *Albedo des Planeten* bezeichnen.

. . . .

[**461**] 1039. Sei nun $AFBG$ der Mond oder ein Planet und C das Centrum desselben; ferner denke man sich durch die Centra der Sonne, der Erde und des Mondes eine Ebene gelegt, und [**462**] derjenige grösste Kreis, welcher in diese Ebene fällt, sei FDG. Die Centra des Mondes und der Erde mögen durch die Gerade CE, die Centra des Mondes und der Sonne durch CD verbunden sein; die Erde

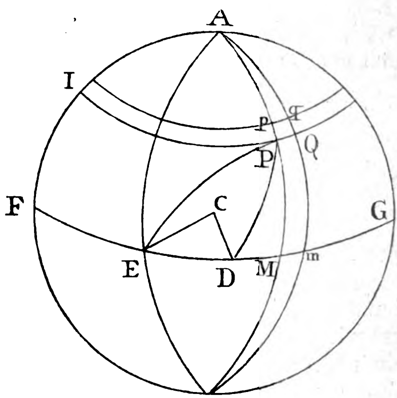

Fig. 95.

stehe also im Zenith des Punktes E, die Sonne im Zenith des Punktes D; befindet sich nun der letztere Punkt in der Mitte des Halbkreises FDG, so wird $FAGB$ diejenige Halbkugel des Mondes sein, welche von der Sonne beschienen wird. Durch die Pole A und B des Kreises FDG denke man die Kreise AEB und ADB gezogen, welche durch die Punkte E und D gehen, ebenso ziehe man zwei beliebige andere Kreise AMB und AmB, welche einander unendlich benachbart sind. Man bestimme nun die mittlere scheinbare Helligkeit des sphärischen Zweiecks $AFBMA$, von der Erde aus gesehen.

1040. Man betrachte das Bogenelement Pp, ziehe um den Pol A die Parallelkreise pq und PQ und bestimme nun die Beleuchtung und die scheinbare Grösse des Elementes $PpqQ$. Setzt man also den Halbmesser des Mondes $CE = 1$ und ferner

$$AP = x \qquad FE = a$$
$$FM = y \qquad EM = y - a\,,$$

so wird das Element

$$PQqp = dy \sin x\, dx\;.$$

Die scheinbare Grösse desselben verhält sich aber wie

$$\cos EP = (\cos a \cos y + \sin a \sin y) \sin x\;,$$

also wird, wenn man diese scheinbare Grösse mit d^2z bezeichnet,

$$d^2z = dx \cdot \sin^2 x (\cos a \cos y\, dy + \sin a \sin y\, dy)\;.$$

Setzt man nun y und dy constant, so folgt

$$dz = \tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{2}\sin 2x)(\cos a \cos y\, dy + \sin a \sin y\, dy)\;.$$

Hält man sodann x constant und addirt schliesslich die erforderliche Constante, so ergibt sich

$$z = \tfrac{1}{2}(x - \tfrac{1}{2}\sin 2x)[\sin(y - a) + \sin a]\;.$$

Dies ist die scheinbare Grösse des Segmentes IAP.

[**463**] 1041. Das auf das Element $PQqp$ auffallende Licht nimmt ab mit dem Sinus des Incidenzwinkels und verhält sich also wie $\cos DP = \sin y \sin x$; bezeichnet man demnach den scheinbaren Halbmesser der Sonne, vom Mond aus gesehen, mit s, die Albedo des Mondes mit A (1035, 727), die Helligkeit der Sonne mit 1, so ist die Helligkeit des Elementes $PQqp = A \sin y \sin x \sin^2 s$ (109, 137, 767).

1042. Um aber die Summe der scheinbaren Helligkeiten zu erhalten und den Mittelwerth aus denselben zu bilden, muss man die gefundene Helligkeit multipliciren mit der scheinbaren Grösse $d^2 z$ des Elementes. Bezeichnet man also jene Summe mit q, so wird

$$d^2 q = A \sin^2 s \sin^3 x \, dx \, (\cos a \cos y \sin y \, dy + \sin a \sin^2 y \, dy) .$$

Integrirt man diesen Ausdruck ebenso wie den früheren, so findet sich für die Summe der Helligkeiten des Stückes IAP:

$$2q = A \sin^2 s \, (\tfrac{2}{3} - \cos x + \tfrac{1}{3} \cos^3 x) \, [y \sin a + \sin y \sin (y - a)] .$$

1043. Dehnt man dies auf das ganze Zweieck $AFBMA$ aus, so ist

$$x = 180^\circ = \pi \; ; \qquad \sin x = 0 \; ; \qquad \cos x = -1 \; ,$$

also wird

$$z = \tfrac{1}{2} \pi [\sin (y - a) + \sin a]$$
$$q = \tfrac{2}{3} A \sin^2 s [y \sin a + \sin y \sin (y - a)] .$$

1044. Für den Vollmond ist $a = 90^\circ$, also findet man in diesem Fall für ein beliebiges Zweieck

$$z = \tfrac{1}{2} \pi (1 + \cos MG)$$
$$q = \tfrac{2}{3} A \sin^2 s (FM + \sin MG \cos MG) .$$

1045. Es bezeichne jetzt der Sector $AFBMA$ die ganze Phase des Mondes; dann wird

$$EM = y - a = 90^\circ$$
$$\sin EM = 1$$
$$FM = a + 90^\circ = a + \tfrac{1}{2}\pi = \pi - ED$$
$$\sin FM = \cos a = \sin ED \; .$$

[**464**] Hierbei ist ED die Entfernung des Mondes von der Opposition. Setzt man diese Werthe in die Formeln § 1043 ein, so wird

$$z = \tfrac{1}{2} \pi (1 + \cos ED)$$
$$q = \tfrac{2}{3} A \sin^2 s [\cos ED \, (\pi - ED) + \sin ED] .$$

1046. Die mittlere Helligkeit der ganzen Phase erhält man, wenn man die Summe q der Helligkeiten durch z dividirt. Bezeichnet man also die mittlere Helligkeit mit η, so wird

$$\eta = \frac{q}{z} .$$

1047. Setzt man $\pi - ED = v$, so ist v die Entfernung des Mondes von der Sonne oder von der Conjunction. Setzt man diesen Werth also ein, so erhält man:

$$z = \tfrac{1}{2}\pi(1 - \cos v)$$
$$q = \tfrac{2}{3} A \sin^2 s\,(\sin v - v \cos v)$$

und hieraus

$$\eta = \frac{4 A \sin^2 s(\sin v - v \cos v)}{3\pi(1 - \cos v)}\,.$$

Dies ist also die mittlere scheinbare Helligkeit der Phase. Durch eine leichte Rechnung findet sich

$$\eta = A \sin^2 s\left(\frac{4 \operatorname{cotg} \frac{1}{2} v}{3\pi} - \frac{4\, v \operatorname{cotg} v \operatorname{cotg} \frac{1}{2} v}{3\pi}\right).$$

1048. Für den Vollmond ist $v = 180^{\circ} = \pi$, $\sin v = 0$, $\cos v = -1$, also

$$\eta = \tfrac{2}{3} A \sin^2 s\,.$$

Setzt man also die Albedo A des Mondes $= \frac{1}{4}$ und den Halbmesser $s = 0^{\circ}\,16'$, so wird

$$\eta = \tfrac{1}{6} \sin^2 16'$$

oder

$$\eta : 1 = 1 : 277000\,.$$

So viel mal würde also die Helligkeit der Sonne grösser sein als die mittlere Helligkeit des Vollmondes, wenn die Albedo $A = \frac{1}{4}$ die richtige wäre. Dieses Ergebniss weicht allerdings nicht sehr ab von demjenigen Verhältniss, welches [465] *Bouguer* durch Versuche gefunden hat und welches derselbe abgerundet im Mittel $= 1 : 300000$ setzt, und ausserdem stimmt es überein mit den Behauptungen von *Smith*, der die Helligkeit des Mondes der mittleren Helligkeit des wolkenlosen Himmels gleichsetzt, für welche oben (914) genau dieselbe Zahl gefunden wurde; indessen ist meiner Ansicht nach die Helligkeit des Mondes geringer. Denn die Albedo $A = \frac{1}{4}$, welche wir dem Mond hier beigelegt haben, ist sehr beträchtlich. Man hat früher (754) gesehen, dass die Albedo des Bleiweisses nur $\frac{2}{5}$ beträgt, also würde die mittlere Albedo des Mondes grösser sein als die Hälfte dieser Zahl. Bedenkt man nun, dass der Mond viele Flecken zeigt, so müssten die helleren Theile ziemlich dieselbe Albedo haben, wie das Bleiweiss, und dies ist kaum oder gar nicht anzunehmen, wenngleich uns die Beschaffenheit der Mondoberfläche vollständig unbekannt ist. Und obwohl ferner der Werth $A = \frac{1}{4}$ ziemlich mit demjenigen übereinstimmt, welcher im Versuch 29 (757) für ein gelbes Blatt gefunden wurde, so wurde doch bereits (763) der Grund angegeben, warum diese Grösse in diesem Fall beträchtlicher wird. Dieser Grund ist aber auf die Oberfläche des Mondes kaum anwendbar.

1049. Da ich bis jetzt keine Gelegenheit gehabt habe, *Bouguer's* Versuch zu wiederholen, so muss ich den Werth von A hier in Unsicherheit lassen und will nun zu solchen Gegenständen zurückkehren, welche gewisser sind. Da nämlich dieser Werth die Helligkeiten der verschiedenen Phasen in derselben Weise beeinflusst, so kann man dieselben offenbar unabhängig von jenem Werth gegenseitig vergleichen.

1050. Wir bemerken hier ferner, dass $A \sin^2 s$ gleich der Helligkeit des Punktes D ist, also gleich der centralen Helligkeit des [**466**] Vollmondes, sodass also die Bedeutung dieser Grösse hierdurch klargelegt ist. Setzt man diese Helligkeit gleich der Helligkeit der Erde, wenn dieselbe normal von der Sonne beleuchtet wird — so wie es *Smith* in seiner Entwickelung stillschweigend annimmt — so setzt man hiermit die Albedo des Mondes und der Erde gleich, wozu man keineswegs mit Sicherheit berechtigt ist. Wir setzen diese Helligkeit jetzt = 1 und werden mit Hilfe der Formel § 1047 die mittlere Helligkeit der Hauptphasen in dieser Einheit ausdrücken.

Elongation v von ☾ und ☉:	Mittlere scheinbare Helligkeit η der Phase:	Elongation v von ☾ und ☉:	Mittlere scheinbare Helligkeit η der Phase:
0°	0.0000	90°	0.4244
10	0.0494	100	0.4657
20	0.0986	110	0.5048
30	0.1475	120	0.5413
40	0.1959	130	0.5747
50	0.2437	140	0.6043
60	0.2907	150	0.6294
70	0.3366	160	0.6490
80	0.3814	170	0.6619
90	0.4244	180	0.6666

1051. Die Zahlen dieser Tabelle drücken die scheinbare Helligkeit der Phase aus, und die Einheit, auf welche sie sich beziehen, ist die centrale Helligkeit des Vollmondes oder die mittlere scheinbare Helligkeit derjenigen Stelle, auf welche die Sonnenstrahlen senkrecht auffallen. Die Zahlen sind also nicht abhängig von der geocentrischen Entfernung [467] des Mondes (794), dagegen sind sie sehr wohl abhängig von der Entfernung der Sonne, weil wir die Grösse $A \sin^2 s$ als Einheit angenommen haben und weil diese Grösse in mehrfacher Weise variabel ist.

1052. Fasst man nämlich eine bestimmte Phase, z. B. die des Vollmondes ins Auge, so wird die Helligkeit derselben eine jährliche Variation zeigen, da der Mond, ebenso wie die Erde, zur Zeit des Perihels der Erde der Sonne näher ist, als zur Zeit des Aphels. Daher ist dieselbe Mondphase im Winter etwa um ein Dreissigstel heller als im Sommer.

1053. Ferner ist bei gleichbleibender Entfernung zwischen Erde und Sonne die angenommene Einheit zur Zeit des Vollmondes kleiner als zur Zeit des Neumondes, da der Vollmond weiter von der Sonne entfernt ist, als der Neumond. Man nehme an, dass der Mond während der Zeit einer Drehung um seine Axe denselben Weg in seiner Bahn durchläuft, welchen die Erde in ihrer Bahn während der Zeit einer Drehung um ihre Axe beschreibt — was man zwar noch nicht beweisen kann, was aber von der Wahrheit wenig entfernt sein wird. Nun vollzieht sich die Axendrehung des Mondes während der Zeit eines synodischen Umlaufs, diejenige der Erde dagegen während der Zeit eines Tages, also wird die Peripherie der Mondbahn gleich sein dem mittleren täglichen Bogenstück der Erdbahn, und die mittlere Entfernung des Mondes von der Erde wird sich zu der mittleren Entfernung zwischen Erde und Sonne verhalten wie die Zeit eines mittleren natürlichen Tages zur Zeit eines Jahres, also ungefähr wie $1 : 365\frac{1}{4}$. Dieser merkwürdige Satz hängt vielleicht mit der nicht minder merkwürdigen Rotationsbewegung des Mondes zusammen und verdient gewiss, genauer geprüft zu werden.

1054. Es verhält sich also die heliocentrische Distanz des Vollmondes zu derjenigen des Neumondes wie $364\frac{1}{4}$ zu $366\frac{1}{4}$, und da sich die angenommene Einheit umgekehrt verhält, wie das Quadrat der Entfernung von der Sonne, so wird, wenn man diese Einheit [468]

$$\text{für die Quadraturen} = 1.0000$$

setzt, dieselbe

$$\text{für den Vollmond} = 0.9945$$

$$\text{für den Neumond} = 1.0055$$

$$\text{und für jede beliebige andere Phase} = 1 + 0.0055 \cos v \ ,$$

vorausgesetzt, dass man von Kleinigkeiten absehen darf.

1055. Ferner sei die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne $= 1$, die Excentricität der Erdbahn $= \varepsilon = 0.017$, die mittlere Anomalie $= \alpha$; dann ist die entsprechende Entfernung nahezu

$$= 1 + \varepsilon \cos \alpha + \varepsilon^2 \sin^2 \alpha$$

oder

$$= 1 + 0{,}017 \cos \alpha + 0.000289 \sin^2 \alpha \ .$$

Unterdrückt man also wieder die belanglosen Abweichungen, so drückt sich die Einheit, auf welche sich die Zahlen der vorstehenden Tabelle beziehen, für eine beliebige Mondphase und eine beliebige Anomalie der Erde aus durch

$$1 - 0.034 \cos \alpha + 0.0055 \cos v \ .$$

Mit dieser Grösse muss man also in einem beliebigen gegebenen Fall die aus der vorigen Tabelle entnommene Zahl multipliciren, wenn man die mittlere Helligkeit in derjenigen Einheit ausgedrückt erhalten will, welche gleich ist der centralen Helligkeit des Vollmondes für die Zeit, zu welcher die heliocentrische Entfernung desselben $= 1$ oder gleich der halben grossen Axe der Erdbahn ist.

1056. Nachdem nun die Beziehungen zwischen den Helligkeiten der Mondphasen, ausserhalb der Atmosphäre gesehen, bestimmt worden sind, wollen wir jetzt die Beleuchtung untersuchen, welche hieraus für eine gleichfalls ausserhalb der Atmosphäre befindliche und dem Mond normal zugewandte Ebene hervorgeht. Dieselbe ist jedenfalls von der früheren Helligkeit durchaus verschieden, da sie von der scheinbaren Grösse der Phase und mithin von der geocentrischen Distanz des Mondes abhängig ist, während die scheinbare Helligkeit hiermit nur in einem äusserst geringen Maasse in Zusammenhang steht, welcher mit vollem Recht vernachlässigt wird.

[**469**] 1057. Wir beginnen mit dem Vollmonde und setzen die Helligkeit der Sonne $= 1$; dann ist, wie man gesehen hat (1047), die mittlere Helligkeit einer beliebigen Phase

$$\eta = \frac{4\, A \sin^2 s \,(\sin v - v \cos v)}{3\, \pi \,(1 - \cos v)}$$

und hieraus ergab sich die mittlere Helligkeit des Vollmondes

$$\eta = \tfrac{2}{3} A \sin^2 s \,.$$

Sei also der Halbmesser der Sonne, von der Erde aus gesehen, $= S$ und der Halbmesser des Mondes $= \sigma$; ferner habe die Ebene, deren Albedo wir $= 1$ annehmen, die Helligkeit C, wenn sie von der Sonne, und die Helligkeit c, wenn sie vom Vollmond beleuchtet wird. Dann ist (109, 715)

$$C = \sin^2 S$$
$$c = \tfrac{2}{3} A \sin^2 s \sin^2 \sigma \,,$$

also

$$C : c = \sin^2 S : \tfrac{2}{3} A \sin^2 s \sin^2 \sigma \,.$$

Ist also die mittlere Albedo A des Mondes gegeben, so findet man hieraus leicht das Verhältniss zwischen den beiden durch die Sonne und den Mond hervorgebrachten Beleuchtungen.

1058. Befindet sich dagegen der Mond ausserhalb der Syzygien, so nimmt die dementsprechende Beleuchtung ab im zusammengesetzten Verhältniss der mittleren scheinbaren Helligkeit und der Flächengrösse der Phase. Das erstere Verhältniss ist

$$= \tfrac{2}{3} A \sin^2 s : \frac{4 A \sin^2 s (\sin v - v \cos v)}{3 \pi (1 - \cos v)} \,,$$

das letztere dagegen

$$= 2\pi : \pi (1 - \cos v) \,.$$

Nun muss sich die durch den Vollmond hervorgebrachte Helligkeit der Ebene

$$c = \tfrac{2}{3} A \sin^2 s \sin^2 \sigma$$

nach Maassgabe dieser beiden Verhältnisse verkleinern, **[470]** und deshalb wird jetzt

$$c = \frac{2 A \sin^2 s \sin^2 \sigma (\sin v - v \cos v)}{3 \pi}$$

und mithin

$$C : c = \sin^2 S : \frac{2 A \sin^2 s \sin^2 \sigma (\sin v - v \cos v)}{3 \pi}$$

$$c = \frac{2 A \sin^2 s \sin^2 \sigma \, C (\sin v - v \cos v)}{3 \pi \sin^2 S} \,.$$

1059. Wählt man also auch hier die Grösse

$$\frac{A \sin^2 s \sin^2 \sigma \, C}{\sin^2 S}$$

als Einheit, weil sie von dem Phasenwinkel des Mondes unabhängig ist, so wird

$$c = \frac{2(\sin v - v \cos v)}{3\pi}.$$

Hieraus berechnet sich die folgende Tabelle, welche man mit der vorhergehenden vergleichen kann: [**471**]

Elongation v zwischen ☾ und ☉:	Beleuchtung c einer Ebene durch die Mondphase:	Elongation v zwischen ☾ und ☉:	Beleuchtung c einer Ebene durch die Mondphase:
0°	0.0000	90°	0.2122
10	0.0004	100	0.2733
20	0.0030	110	0.3387
30	0.0099	120	0.4060
40	0.0229	130	0.4720
50	0.0435	140	0.5336
60	0.0727	150	0.5872
70	0.1107	160	0.6294
80	0.1576	170	0.6569
90	0.2122	180	0.6666

1060. Die Zahlen dieser Tabelle verhalten sich zu den entsprechenden Zahlen der vorigen Tabelle wie die Phasenbreite des Mondes zum scheinbaren Durchmesser; also steht weder die Helligkeit noch die Beleuchtung im einfachen Verhältniss der Phase, sondern jene nimmt viel langsamer, die letztere dagegen schneller ab.

1061. Ferner ist die Einheit, auf welche sich die Zahlen dieser Tabelle beziehen, nämlich

$$\frac{A \sin^2 s \cdot \sin^2 \sigma \cdot C}{\sin^2 S}$$

in vierfacher Weise veränderlich. Nun ist aber $C : \sin^2 S$ die Albedo der Ebene, auf welche das Licht der Phase senkrecht auffällt. Bezeichnet man dieselbe mit a, so wird unsere Einheit =

$$A a \sin^2 s \cdot \sin^2 \sigma$$

und ist also noch in zweifacher Weise veränderlich. Um nun beide Variationen auf eine constante Einheit zu beziehen, nehmen wir an, der Mond befinde sich [**472**] in einer Entfernung von der

Sonne gleich der halben grossen Axe der Erdbahn und zugleich in seiner mittleren Entfernung von der Erde. Dann wird also

$$s = 0^\circ\ 32'\ 10''$$
$$\sigma = 0\ \ 31\ \ 30\,.$$

1062. Nimmt man nun an, dass die Zahlen der Tabelle sich auf diesen Fall beziehen, so sieht man sofort, in welchem Verhältniss sie in anderen Fällen zu vergrössern oder zu verkleinern sind. So lange nämlich der scheinbare Halbmesser σ des Mondes derselbe bleibt, muss man diese Zahlen mit der Grösse (1055)

$$1 - 0.034 \cos\alpha + 0.0055 \cos v$$

multipliciren, um ihren Werth zu finden, so weit derselbe von der heliocentrischen Entfernung des Mondes abhängig ist. Setzt man dann ferner die mittlere geocentrische Entfernung des Mondes $= 1$ und diejenige für eine beliebige Zeit $= \delta$, so muss man die vorstehenden Zahlen noch dividiren durch δ^2. Hierbei sehen wir natürlich von belanglosen Kleinigkeiten ab; denn wenn man diese in die Rechnung einführen wollte, so müsste man die Halbmesser s und σ für jeden gegebenen Augenblick aus den Mondtafeln entnehmen, um die fragliche Einheit auf das schärfste zu bestimmen. Denn man sieht, dass dieselbe von der Parallaxe des Mondes und mithin von der Höhe desselben über dem Horizont abhängig ist.

1063. In dieser Rechnung wurde absichtlich der Mittelwerth aller partiellen Helligkeiten gesucht. Wegen der unregelmässigen Gestalt der Mondoberfläche treten nämlich alle Einfallswinkel fast überall auf, was nicht stattfinden würde, wenn der Mond, wie wir der Concinnität der Rechnung halber angenommen haben, vollkommen kugelförmig wäre. Bei unserer Auffassungsweise wurden alle Incidenzwinkel an diejenige Stelle der Mondoberfläche übertragen, wo sie in Wirklichkeit stattfinden würden, wenn die angenommene Gestalt die wahre [**473**] wäre. Auf diese Weise werden also die Abweichungen gewissermaassen compensirt. So fallen beispielsweise beim Vollmond die Sonnenstrahlen auf die Abhänge derjenigen Berge, welche am Rande der Mondscheibe liegen, unter einem weniger schiefen Winkel auf; dagegen treffen sie unter einem schieferen Winkel auf die Abhänge solcher Berge und Thäler, welche nahe beim Centrum der Mondscheibe liegen. Auf diese Weise werden aber die Helligkeiten der Theile des Vollmondes zu einer gegenseitigen Annäherung hinneigen, und hierher kommt es, dass die Mondscheibe zur Zeit des Vollmondes heller erscheint, als sie sein würde, wenn die Oberfläche vollkommen kugelförmig wäre.

1064. Man untersuche jetzt, wie sich die Beleuchtung einer Ebene gestalten würde, wenn der Mond im vorigen Fall vollkommen weiss wäre und wenn er einen vollkommen reflectirenden sphärischen Spiegel darstellen würde. Als Einheit der Helligkeit nehme man die Helligkeit des normal von der Sonne beleuchteten Vollmondes; dann wird die Helligkeit einer Ebene, deren Albedo wir uns als eine vollkommene denken, zur Zeit des Vollmondes sein (1057):

$$c = \tfrac{2}{3} \sin^2 \sigma \ .$$

Wenn dagegen der Mond ein vollkommen reflectirender Spiegel wäre, so hätte man (671)

$$c' = \tfrac{1}{4} \sin^2 \sigma \ .$$

Also ist

$$c : c' = \tfrac{2}{3} : \tfrac{1}{4} = 8 : 3 \ .$$

Mithin verhält sich die Beleuchtung im Fall einer vollkommenen Albedo zu derjenigen, welche durch einen Spiegel entsteht, wie 8 zu 3. Die erstere findet statt, wenn sich der Mond in Opposition befindet. Man hat jedoch früher gesehen, dass die Beleuchtung einer Ebene durch einen Spiegel von der Stellung des Mondes gegenüber der Sonne fast ganz unabhängig ist (654); dagegen ist die Beleuchtung durch den Mond veränderlich, wenn er als dunkeler Körper mit beliebiger Albedo gedacht wird. Wie man aus der Tabelle § 1059 sieht, beträgt dieselbe in [**474**] den Quadraturen nur noch den dritten Theil, sodass man in diesem Falle hat:

$$c : c' = \tfrac{2}{9} : \tfrac{1}{4} = 8 : 9 \ .$$

Obwohl also in beiden Fällen dieselbe Strahlenmenge auf den Mond auffällt und dieselbe in ihrem ganzen Betrag reflectirt und zerstreut wird, so folgt doch hieraus, dass die Reflexion, welche durch einen Spiegel erzeugt wird, wesentlich verschieden ist von der Zerstreuung, welche ein Körper mit absoluter Albedo hervorbringt.

1065. Man weiss aus der Erfahrung, dass der dunkele Theil der Mondscheibe, wenn der Mond der Conjunction nahe ist, noch ein zartes Licht zeigt, welches in den astronomischen Fernröhren sichtbar ist. Es unterliegt aber gar keinem Zweifel, dass dieses Licht von der Erde aus auf den Mond reflectirt wird, da dieselbe zu dieser Zeit fast ihren ganzen von der Sonne erleuchteten

Theil dem Monde zuwendet. Jenes Licht scheint nämlich in ungefähr demselben Verhältniss abzunehmen, wie die vom Mond aus sichtbare Phase der Erde. Dieses Licht werden wir nun in folgender Weise rechnerisch bestimmen.

1066. Wegen der sehr grossen Entfernung der Sonne kann man den Phasenwinkel der Erde, vom Mond aus gesehen, betrachten als das Supplement des Phasenwinkels des Mondes, von der Erde aus gesehen. Ferner ist klar, dass die Beleuchtung des Mondes durch die Erde, wenn man von der Erdatmosphäre absieht, durch dieselbe Rechnung gefunden wird, mit Hilfe deren wir vorhin die Beleuchtung der Erde durch den Mond bestimmt haben, vorausgesetzt, dass man die Verschiedenheit der Albedo und des scheinbaren Halbmessers in Rücksicht zieht. Ebenso sieht man leicht, dass die Art, wie das Licht der Erdphase auf den Mond auffällt, dieselbe ist, wie wenn das Licht der Sonne auf den Vollmond auffällt. Wir bestimmen daher zuerst die Helligkeit, welche hierdurch in der Mitte der Mondscheibe entsteht.

[**475**] 1067. Sei also die Albedo der Erde $= a$, ihr scheinbarer Halbmesser, vom Mond aus gesehen, $= \Sigma$, die Entfernung des Mondes von der Conjunction $= v$, seine Entfernung von der Opposition $= \pi - v$, die Helligkeit im Centrum der Mondscheibe infolge der Beleuchtung durch die Erde $= \varkappa$; dann hat man in der früher gefundenen Formel (1058)

$$c = \frac{2(\sin v - v \cos v) A \sin^2 s \sin^2 \sigma}{3\pi}$$

folgende Substitutionen zu machen:

1) statt der Albedo A des Mondes hat man die Albedo a der Erde,
2) statt des Mondhalbmessers σ hat man den Erdhalbmesser Σ zu setzen,
3) da der Phasenwinkel der Erde das Supplement zum Phasenwinkel des Mondes ist, so hat man

statt	v	zu setzen	$\pi - v$
»	$\sin v$	»	$\sin(\pi - v) = \sin v$
»	$+\cos v$	»	$-\cos v$,

4) den Halbmesser s der Sonne behalten wir bei, da wir belanglose Kleinigkeiten hier ausser Acht lassen,

5) da c die Helligkeit einer Ebene von vollkommener Albedo ist (1057), so muss man, um die Helligkeit des Mondes zu erhalten, den vorigen Ausdruck mit der Albedo A des Mondes multipliciren. Hierdurch wird

$$\varkappa = \frac{2}{3\pi} a A \sin^2 s \sin^2 \Sigma [\sin v + (\pi - v) \cos v] .$$

Dies ist also die Helligkeit des Mondcentrums infolge der Beleuchtung durch die Erdphase, und dieselbe ist jedenfalls der Maximalwerth, da das Licht hier senkrecht einfällt. Die Einheit der Helligkeit ist bei dieser Rechnung ebenso wie früher (1041 fgde.) die Helligkeit der Sonne.

[**476**] 1068. Hieraus findet man nun leicht die mittlere Helligkeit des dunkelen Theils der Mondscheibe. Sei $AMBFA$ der dunkele Theil des Mondes, so wird

$$FM = y = \pi - v$$
$$FE = a = \tfrac{1}{2}\pi .$$

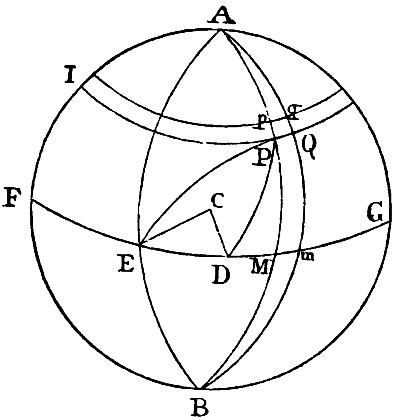

Fig. 95.

Nun wird aber das Zweieck $AMBF$ von der Erde in derselben Weise beleuchtet, wie zur Zeit des Vollmondes von der Sonne; setzt man also in den Formeln (1044), welche für dieses Zweieck gefunden wurden,

$$z = \tfrac{1}{2}\pi (1 + \cos MG)$$
$$q = \tfrac{2}{3} A \sin^2 s (FM + \sin MG \cos MG)$$

statt der normalen Beleuchtung des Mondes, welche durch die Sonne entsteht, diejenige, welche durch die Erdphase entsteht und welche $= \varkappa$ ist (1067), so wird, wie früher (1046), die mittlere Helligkeit des Zweiecks $AMBF$ oder des dunkelen Theiles des Mondes $= q : z$; bezeichnet man diese also mit K, so erhält man:

$$K = \frac{4\varkappa(\pi - v + \sin v \cos v)}{3\pi(1 + \cos v)}$$

oder nach einer leichten Reduction

$$K = \varkappa \left(\frac{4(\pi - v) \operatorname{tg} \frac{1}{2} v}{3\pi \sin v} + \frac{4 \operatorname{tg} \frac{1}{2} v \cos v}{3\pi} \right).$$

1069. Die folgende Tabelle gibt für die verschiedenen Phasenwinkel vom Neumond an bis zu den Quadraturen die Helligkeit η der Mondphase, die centrale Helligkeit des dunkelen Theiles und die mittlere Helligkeit desselben. [**477**]

v	$\frac{K}{\varkappa}$	$\frac{\varkappa}{aA \sin^2 s \sin^2 \Sigma}$	$\frac{K}{aA \sin^2 s \sin^2 \Sigma}$	$\frac{c}{A \sin^2 s}$
0°	0.6666	0.6666	0.4444	0.0000
10	0.6710	0.6569	0.4408	0.0494
20	0.6877	0.6294	0.4328	0.0986
30	0.6949	0.5872	0.4080	0.1475
40	0.7055	0.5336	0.3765	0.1959
50	0.7134	0.4720	0.3367	0.2437
60	0.7151	0.4060	0.2903	0.2907
70	0.7088	0.3387	0.2401	0.3366
80	0.6930	0.2733	0.1894	0.3814
90	0.6666	0.2122	0.1415	0.4244

1070. Die erste Columne dieser Tabelle enthält die Elongation des Mondes von der Sonne in Graden; die zweite, welche aus der Formel § 1068 abgeleitet wurde, gibt das Verhältniss zwischen der mittleren Helligkeit K des dunkelen Theiles der Mondscheibe und der centralen Helligkeit $\varkappa$ derselben. Die dritte Columne, welche sich aus der Formel § 1067 oder, was auf dasselbe hinauskommt, aus der Tabelle § 1059 berechnet, stellt die Abnahme derselben centralen Helligkeit dar. Die vierte Columne, welche durch Multiplication der Zahlen der zweiten und dritten entsteht, gibt dieselbe Abnahme für die mittlere Helligkeit K. Die fünfte gibt die Helligkeit der Mondphase infolge der Beleuchtung durch die Sonne und wurde aus § 1050 entnommen. Um die Zahlen der drei letzten Columnen auf die nämliche Einheit zu reduciren, ist die dritte und die vierte Columne zu multipliciren mit dem Product aus der Albedo A des Mondes, der Albedo a der Erde und dem Quadrat der Halbmesser s der Sonne und Σ der Erde; die fünfte dagegen ist zu multipliciren mit dem Product aus der Albedo des Mondes [**478**] und dem Quadrat des Halbmessers der Sonne; dann ist die fragliche Einheit die Helligkeit der Sonne, ausserhalb der Atmosphäre gesehen. Da sich also die dritte und die vierte Columne in demselben Verhältniss ändern, so sind die Zahlen, welche sie enthalten, auch ohne jene Multiplication mit einander vergleichbar. Man sieht aber aus der zweiten Columne, dass sie nahezu in demselben Verhältniss abnehmen.

1071. Nicht eben so leicht kann man die vierte und die fünfte Columne mit einander vergleichen, da nur die erstere von der mittleren Albedo der Erde abhängig ist. Durch Versuche kann man aber die Sache kaum erledigen. Denn wenn man auch jedes der beiden Augen mit einem Fernrohr bewaffnen wollte, um sodann dasjenige Verhältniss zwischen den Oeffnungen der Objectivlinsen zu bestimmen, bei welchem die Helligkeit der Phase und des dunkelen Theiles einander gleich werden, so würde doch die Oeffnung der einen Linse so klein werden müssen, dass man den Durchmesser kaum mehr genau messen könnte. Dazu kommt die Frage, ob dieselbe Helligkeit auch mit beiden Augen als gleich empfunden wird, was keineswegs zu unterschätzen ist. Da endlich jenes Licht so ausserordentlich schwach ist, so tritt noch eine weitere Schwierigkeit ein: man hat nämlich früher (270) gesehen, dass das Urtheil des Auges um so unsicherer ist, je kleiner die Helligkeiten sind, welche man zu vergleichen hat.

1072. Die Albedo der Erde ist nicht sowohl von der Erdoberfläche selbst, als vielmehr von der Atmosphäre abhängig. Nun wirft die Oberfläche des Wassers nur einen kleinen Theil des Lichts zurück und die Farbe des Meerwassers ist äusserst schwach. Auch die Festländer werfen, wenn man von den mit Schnee bedeckten Gegenden absieht, nur einen kleinen Theil des Lichts zurück (753, 758). Dagegen hat man gesehen, dass die Helligkeit der Atmosphäre beträchtlicher ist (908, 909, 985, 986) und dass dieselbe zur Helligkeit [**479**] einer Bleiweissfläche, welche von der Sonne bei einer Höhe von 60 Grad normal beleuchtet wird, in dem Verhältniss 2 zu 5 steht (915). Da nun die Albedo des Bleiweisses $= 0.4$ beträgt (755), und da die Sonnenstrahlen bei einer Höhe von 60 Grad auf ihrem Wege durch die Atmosphäre geschwächt werden wie 5 zu 3, so wird sich die Helligkeit einer Ebene von vollkommener Albedo zur mittleren Helligkeit der Atmosphäre verhalten wie $(\frac{5}{3} \cdot \frac{5}{2}) : \frac{2}{5} = 125 : 12 = 10\frac{1}{2} : 1$. Die Atmosphäre hat also diejenige Helligkeit, welche eine von den Sonnenstrahlen ausserhalb der Luft normal erleuchtete Ebene, deren Albedo $= \frac{2}{21}$ ist, zeigen würde. Die

Albedo der Erde würde daher, wenn kein anderes Licht von der Erde aus auf den Mond zurückgeworfen würde, $= \frac{1}{10}$ betragen. Wenn man nun annehmen darf, dass dieselbe durch die Oberfläche der Erde um ein Drittel oder ein Viertel vergrössert wird, so wird diese Albedo $\frac{1}{8}$ bis $\frac{1}{7}$ betragen. Auch die Albedo des Mondes wird kaum grösser sein, obwohl *Bouguer*'s Versuche einen grösseren Werth zu ergeben scheinen (1048). Uebrigens ist diese Albedo der Erde sehr veränderlich infolge der starken Veränderlichkeit der Atmosphäre (910).

1073. Setzt man jedoch beispielsweise $a = \frac{1}{7}$, $s = 16'$, $\Sigma = 1^\circ$, so wird

$$a \sin^2 \Sigma = 0.00004351235 .$$

Multiplicirt man diese Grösse mit den Zahlen der dritten und vierten Columne der letzten Tabelle, so erhält man leicht die folgende: [**480**]

v	$\frac{x}{A \sin^2 s}$	$\frac{K}{A \sin^2 s}$	$\frac{c}{A \sin^2 s}$
0°	0.00002901	0.00001934	0.0000
10	0.00002858	0.00001918	0.0494
20	0.00002739	0.00001903	0.0986
30	0.00002555	0.00001887	0.1475
40	0.00002322	0.00001538	0.1959
50	0.00002054	0.00001465	0.2437
60	0.00001767	0.00001164	0.2907
70	0.00001474	0.00001045	0.3366
80	0.00001189	0.00000824	0.3814
90	0.00000923	0.00000615	0.4244

1074. Die Zahlen dieser Tabelle sind auf die centrale Helligkeit des Vollmondes als Einheit reducirt (1051). Die vierte Columne gibt nämlich die mittlere Helligkeit der Mondphase, die dritte Columne die mittlere Helligkeit des dunkelen Theiles, die zweite die centrale Helligkeit desselben Theiles, und die erste gibt die Entfernung des Mondes von der Conjunction.

1075. **Versuch 34.** Der Tisch *FE* wurde bei Nacht an

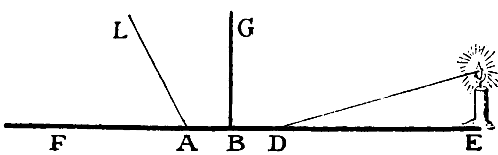

Fig. 96.

ein offenes Fenster gestellt, durch welches das Licht des Vollmondes bei einer Höhe von 63 Grad eindrang. Horizontal auf dem Tisch lag eine weisse Fläche AD, in deren Mitte B eine schwarze Tafel BG so aufgestellt wurde, dass der Schatten von Seiten des Mondes auf den Theil BD, von Seiten einer in C stehenden Kerze auf den vorderen Theil BA fiel; der letztere wurde also allein durch den Mond, jener allein durch die Kerze erleuchtet. Sodann [**481**] wurde diejenige Stellung der Kerze aufgesucht, bei welcher beide Theile AB und BD gleich hell erschienen, und hierbei ergab sich DE zu 3 Pariser Fuss, CE oder die Höhe des Centrums der Kerzenflamme zu 8 Zoll. Die Kerze war von Unschlitt, und es wurde darauf gesehen, dass sie möglichst gleichmässig hell war, dass die Flamme gestreckt und kegelförmig und dass der Faden gut abgeputzt war. Die Höhe oder die Axenlänge der Flamme betrug 18 Linien und der grösste Durchmesser betrug 3 Linien, welche Zahlen die Mittelwerthe aus mehreren sind. Der Halbmesser des Mondes betrug $33\frac{1}{4}'$.

1076. Es war also

$$CE : DE = 2 : 9 = 0.22222$$
$$\text{Winkel } CDE = 12^\circ 32'$$
$$LAF = 63 \quad 0 .$$

Die Fläche der Flamme darf man hier als ein gleichschenkliges Dreieck betrachten, dessen Inhalt = 27 Quadratlinien betrug; verwandelt man diese Fläche in einen Kreis, so hat derselbe einen Radius $= 2'''.3$, also ist der scheinbare Halbmesser, in D gesehen, ein Winkel, dessen Tangente

$$= 2.3 : DC = \frac{23}{4425} = 0.0051977,$$

also ist der Halbmesser selbst $= 0^\circ 17' 53''$.

1077. Sei nun die Helligkeit des Vollmondes $= L$, diejenige der Kerze $= C$; dann ist die Beleuchtung der Ebene AB

$$= L \sin^2 16\tfrac{5}{8}' \sin 63^\circ$$

und die Beleuchtung der Ebene BD

$$= C \sin^2 17' 53'' \cdot \sin 12^\circ 32' .$$

Beide Helligkeiten sind aber gleich, also wird

$$\frac{L}{C} = \frac{\sin^2 17' 53'' \cdot \sin 12^\circ 32'}{\sin^2 16' 37'' \cdot \sin 63^\circ}$$
$$L : C = 1 : 3.545 .$$

[482] Nun wird aber das Licht des Mondes durch die Atmosphäre geschwächt ungefähr im Verhältniss 5 : 3, also wird das Verhältniss zwischen der Helligkeit des Vollmondes und der Kerze

$$\tfrac{3}{5} L : C = 1 : 3.545$$

oder

$$L : C = 1 : 2.127 .$$

Demnach ist die Lichtstärke einer Unschlittkerze doppelt so gross als diejenige des Vollmondes. In beiden Fällen handelt es sich um die scheinbare Helligkeit; indessen besteht dabei folgender Unterschied: die Helligkeit des Mondes hängt einfach von der Oberfläche desselben ab, welche das Sonnenlicht zurückwirft, dagegen ist die Flamme der Kerze etwas durchsichtig und daher kommt es, dass nicht nur die Oberfläche, sondern auch die inneren Theile Licht aussenden, wodurch das Licht der Oberfläche beträchtlich vermehrt wird.

1078. Nimmt man in runder Zahl an, dass das Sonnenlicht 500000 mal intensiver sei als das Licht des Vollmondes — was sich von der Wahrheit nicht weit entfernen kann (1072, 1048) — so wird die Intensität des Sonnenlichts 250000 mal so gross sein als die Intensität einer Unschlittkerze.

Kapitel II.

Theorie der Lichtstärke der Hauptplaneten.

1079. Die allgemeinen Bemerkungen des vorigen Capitels über das Licht der Planeten und dessen Modificationen lassen sich ohne Schwierigkeit auf jeden einzelnen anwenden, sobald man die Albedo in allen Fällen gleichsetzt oder als gegeben betrachtet. Wir werden die Sache so behandeln, dass wir die erstere Annahme verfolgen und diejenigen Zahlenwerthe darstellen, [483] welche durch Multiplication mit der Albedo des zugehörigen Planeten sich in die wahren Helligkeiten verwandeln, vorausgesetzt, dass man die Albedo jemals bestimmen kann.

1080. Die Beleuchtung der Erde durch jeden einzelnen Planeten zu bestimmen, würde überflüssig sein, wie schon daraus folgt, dass sogar die Beleuchtung, welche durch die Gesammtheit aller Planeten entsteht, einen Betrag von verschwindender Kleinheit ausmacht. Es wird also genügen, durch dieses eine

Beispiel auf die Kleinheit dieses Betrags hingewiesen zu haben. Dagegen wird man die scheinbare Helligkeit derselben um so ausführlicher behandeln müssen, da alle mit Ausnahme des Saturn in einem Licht erglänzen, welches dem Licht der Fixsterne nicht nachsteht.

1081. Die scheinbare Helligkeit der Planeten ist jedenfalls verschieden, jenachdem man dieselben mit dem blossen Auge oder durch ein astronomisches Fernrohr betrachtet. Im ersteren Fall hängt die Helligkeit des Planeten nicht nur von der Oeffnung der Pupille ab, sondern sie wird auch um so schwächer, je mehr das Auge myopisch ist (1038). Im letzteren Fall dagegen vermag man die einzelnen Theile der Planetenoberfläche zu übersehen und die Lichtmenge, welche durch die Theilchen der Luft infolge der Beugung und durch andere Ursachen zerstreut wird, hat einen kleineren Betrag, und ausserdem lässt das Fernrohr sich jedem einzelnen Auge anpassen; daher verschwinden jene vom Auge abhängigen Anomalien fast vollständig, und wenn man also jeden Planeten mit demselben Fernrohr betrachtet, so kann man seine Helligkeit durch die Rechnung genau ebenso bestimmen, wie im vorigen Capitel die scheinbare Helligkeit des Mondes bestimmt wurde.

1082. Um also mit dieser Berechnung zu beginnen, machen wir, wie früher (1051), die Bemerkung, dass die scheinbare Helligkeit eines Planeten in diesem Fall von seiner Distanz unabhängig ist. Sie ist dagegen sehr [**484**] wohl abhängig von seiner heliocentrischen Entfernung und von der Stellung der Erde, insofern nämlich, als die Planeten, besonders die unteren, die Gestalt solcher Phasen zeigen, wie der Mond sie zeigt.

1083. Die Dichtigkeit des Sonnenlichts, wenn es normal auf die Oberflächen der Planeten auffällt, verhält sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung (115, 117), und ebenso verhält sich auch die centrale Helligkeit zur Zeit der Opposition.

1084. Ferner ist in eben diesem Fall, wenn also der Planet in der ganzen Ausdehnung seiner Scheibe leuchtet, die mittlere Helligkeit der ganzen Scheibe $= \frac{2}{3}$ der centralen Helligkeit (1048), und die mittlere scheinbare Helligkeit bei anderen Phasenwinkeln nimmt in demselben Verhältniss ab, wie die Zahlen der Tabelle § 1050. Hat man also die centrale Helligkeit eines Planeten für den Fall bestimmt, dass derselbe in Opposition steht, so findet man durch eine leichte Rechnung die mittlere Helligkeit jeder Phase, indem man die erstere einfach mit derjenigen Zahl jener Tabelle, welche der betreffenden Phase entspricht, multiplicirt.

1085. Sei also die centrale Helligkeit der Erde, in diesem Sinn genommen, $= 1$, ihre mittlere Helligkeit also $= \frac{2}{3}$, und entnimmt man die grössten, mittleren und kleinsten Entfernungen der Planeten aus den Tafeln von *Lahire*, so berechnet man ohne Schwierigkeit die folgende Tabelle: [**485**]

Planet:	Scheinbare centrale Helligkeit bei der Opposition		
	grösste:	mittlere:	kleinste:
♄	0.0120	0.0110	0.0099
♃	0.0408	0.0370	0.0334
♂	0.5234	0.4307	0.3608
♁	1.0134	1.0000	0.9672
♀	1.9396	1.9113	1.8856
☿	10.5760	6.6735	4.5560

1086. Wenn man also die Zahlen dieser Tabelle mit den Zahlen der Tabelle § 1050 multiplicirt, so ergibt sich hinsichtlich der Phase des Planeten die mittlere Helligkeit desselben, dagegen hinsichtlich der heliocentrischen Entfernung die grösste, mittlere und kleinste Helligkeit.

1087. Die unteren Planeten bieten den Bewohnern der Erde den Anblick aller Phasengestalten, welche der Mond zeigt. Sei *S* die Sonne, *T* die Erde und *PCQ* ein unterer Planet. Man verbinde die Centra *S*, *T* und *C* durch die Geraden *ST*, *TC* und *CS* und ziehe die Normalen *QP* und *KL*, dann wird *QNP* der beleuchtete Theil der Planetenoberfläche sein, den wir als Halbkugel betrachten, obwohl er etwas grösser ist. *KML* ist die der Erde zugewandte Halbkugel und mithin ist *KNP* die von der Erde aus sichtbare Phase, *M* das Centrum der Kreisscheibe und *PL* der dunkele Theil. Da nun die Bögen $QN = NP = KM = ML = 90^0$

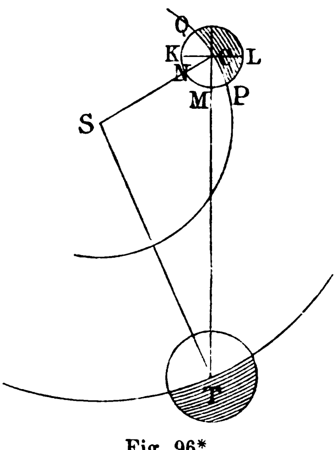

Fig. 96*.

sind, so wird $PL = MN$, $PCL = SCT$ und $KCP = CST + STC$. Der Bogen KNP ist aber derjenige, welcher früher (1047) mit v bezeichnet wurde, also wird

$$v = CST + STC = 180^\circ - SCT$$

oder gleich der Summe aus der geocentrischen Elongation des Planeten von der Sonne und der heliocentrischen Elongation des Planeten von der Erde. [**486**] Bezeichnet man ferner den scheinbaren Halbmesser der Sonne, vom Planeten aus gesehen, mit s, die mittlere Albedo des Planeten mit A und die mittlere Helligkeit der Phase mit η, so wird (§ cit.)

$$\eta = \frac{4\,A \sin^2 s\,(\sin v - v \cos v)}{3\,\pi\,(1 - \cos v)}\,.$$

1088. Die oberen Planeten dagegen zeigen uns nicht den Anblick aller Phasen. Ist nämlich C die Erde und T ein oberer Planet, so beweist man auf dieselbe Art, dass der Winkel STC dem fehlenden Stück der Phase entspricht. Dieser Winkel beträgt im Fall seines Maximums für Mars niemals mehr als 50 Grad, für Jupiter 12 Grad, für Saturn $6\frac{1}{2}$ Grad. Die Bewohner der Erde werden also nur den Mars in deutlicher Phasengestalt sehen können, während Jupiter und Saturn immer in einer nahezu vollen Kreisscheibe zu leuchten scheinen.

1089. Daher ist die Helligkeit der Phase, wenn dieselbe ihre kleinste Grösse hat, nur sehr wenig vermindert. Bei gleichbleibender Entfernung des Planeten von der Sonne wird nämlich das Verhältniss zwischen den Helligkeiten der vollen und der kleinsten Phase

für ♄ $= 1 : 0.998$
» ♃ $= 1 : 0.990$,

dagegen

für ♂ $= 1 : 0.862$.

1090. Die Grösse der kleinsten Phase hängt vom Winkel STC ab, und man würde denselben leicht bestimmen können, wenn beide Planeten sich in concentrischen Kreisen bewegten. Dann würde nämlich TC die Tangente des Kreises in C sein, und mithin wäre $SC : ST$ der Sinus des Winkels STC, wenn letzterer ein Maximum ist. Die Sachlage ändert sich aber, wenn sich die Planeten in Ellipsen bewegen, welche hinsichtlich ihrer Lage und Dimension in mehr als einer Hinsicht verschieden sind. [**487**] Hierdurch wird die Lösung des folgenden Problems sehr verwickelt: *die grösste Elongation eines unteren Planeten von der Sonne, von einem oberen Planeten aus gesehen, zu bestimmen, oder das Maximum des Winkels STC zu finden.* Da die Lösung dieser Aufgabe, so viel ich weiss, von anderen weder durchgeführt noch versucht worden ist, so will ich dasjenige mittheilen, was sich mir bei der Behandlung derselben dargeboten hat, obzwar ich nicht zum Ziel zu gelangen vermocht habe.

. . . .

[**499**] 1126. Die Helligkeit eines Planeten, mit dem blossen Auge betrachtet, verhält sich direct wie die in das Auge eindringende Lichtmenge und umgekehrt wie der Flächeninhalt des wahrgenommenen Bildes. Nimmt man die Oeffnung der Pupille als constant an, so ist diese Lichtmenge proportional der normalen Beleuchtung und wird sich mithin verhalten

1) umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung des Planeten von der Sonne, oder direct wie das Quadrat des Sinus des scheinbaren Halbmessers der Sonne, vom Planeten aus gesehen, mithin so, wie die Zahlen der Tabelle § 1085.
2) direct wie das Quadrat des Sinus des scheinbaren Halbmessers des Planeten, von der Erde aus gesehen.
3) so, wie die mittlere Helligkeit der Phase sich verhält zur centralen Helligkeit des Planeten bei der Opposition, mithin so, wie die Zahlen der Tabelle § 1050.
4) umgekehrt wie sich der Flächeninhalt der ganzen Scheibe zum scheinbaren Flächeninhalt der Phase verhält.
5) endlich wie die mittlere Albedo des Planeten.

1127. Auf diese Weise ergibt sich also die Helligkeit, welche einer beliebigen Stellung des Planeten entspricht. Man suche z. B. die Beziehungen zwischen den oberen Planeten, wenn sie sich in Opposition und zugleich in der mittleren Entfernung sowohl von der Erde wie von der Sonne befinden. Hierbei sei (1085)

für	die centrale Helligkeit:	der scheinbare Durchmesser:
♄	0.0110	18″
♃	0.0370	46
♂	0.4307	30

[**500**] Dann wird sich die Beleuchtung verhalten wie das Product aus der centralen Helligkeit und dem Quadrat des scheinbaren Durchmessers, und mithin wie die folgenden Zahlen

♄	3.56	
♃	78.79	2
♂	387.63	

oder ungefähr wie 1 : 22 : 108.

1128. Ebenso wird für Venus und Mercur, wenn sie gerade halberleuchtet erscheinen,

	die centrale Helligkeit:	der scheinbare Durchmesser:
♀	1.9113	30″
☿	6.6735	9

Multiplicirt man dann die centrale Helligkeit mit dem Quadrat des Durchmessers und verkleinert das Product in dem Verhältniss 6666 : 4244 (1050), so werden sich die Beleuchtungen verhalten wie die folgenden Zahlen

♀	1095.06	1
☿	344.11 5	

Demnach verhalten sich die Beleuchtungen der oberen Planeten bei der Opposition und der unteren Planeten bei halber Beleuchtung wie die Zahlen

♄	1
♃	22
♂	108
♀	307
☿	97

1129. Diese Grössen sind noch von der Albedo der einzelnen Planeten abhängig und werden sich also von der Wahrheit nicht weit entfernen, wenn es gestattet ist, die Albedo als nahezu gleich anzunehmen. Macht man diese Annahme, so werden obige Zahlen das Verhältniss ausdrücken zwischen der Helligkeit des Bildes im Auge (1108, 1117) und der Strahlenmenge, welche durch die Oeffnung der Pupille auf die Netzhaut auffällt, [**501**] und sie werden übergehen in die wahre Helligkeit des mit blossem Auge gesehenen Planeten, wenn man sie durch den Flächeninhalt des wahrgenommenen Bildes jedes einzelnen Planeten dividirt.

1130. Da dieser Flächeninhalt für jeden einzelnen Planeten verschieden ist, so folgt leicht, dass ihre Helligkeiten, mit dem blossen Auge gesehen, sich nicht verhalten können wie diese Zahlen, sondern der gegenseitigen Gleichheit näher kommen. Nimmt man z. B. für die scheinbaren Durchmesser der Planeten diejenigen Werthe, welche die älteren Astronomen gegeben haben, so wird nach dem System des *Tycho de Brahe* für den gegenwärtigen Fall

	Durchmesser der Bahn:	Wahrer Durchmesser des Planeten:	Scheinbarer Durchmesser:	Helligkeit:
♄	$9\frac{3}{4}$	$\frac{8}{15}$	2′	1
♃	$3\frac{1}{2}$	$\frac{7}{15}$	6	$2\frac{1}{4}$
♂	$1\frac{2}{3}$	$\frac{4}{49}$	$4\frac{1}{3}$	23
☉	1	1	32	—
♀	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{19}$	5	50
☿	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{180}$	$2\frac{2}{3}$	54

1131. Wenn auch diese Helligkeiten sich von der gegenseitigen Gleichheit nicht so weit entfernen wie die Beleuchtungen, so kommen sie doch den wahren Helligkeiten keineswegs nahe. Es scheint, dass man den Durchmesser des *Jupiter* und der *Venus* verkleinern muss, um die Helligkeit beider zu vergrössern. Da sich aber hier kaum etwas genaues festsetzen lässt, so will ich die Sache auf eine andere Weise versuchen.

1132. Man darf mit Sicherheit annehmen, dass ein Planet um so rascher aus den Sonnenstrahlen hervortaucht, je heller er ist. Seine Helligkeit wächst also, wenn der Bogen der Sichtbarkeit (arcus visionis) kleiner wird. Nimmt man nun hierfür diejenigen Winkel, welche *Ptolemaeus*, [**502**] *Kepler* und *Riccioli* mitgetheilt haben, so werden die Planeten hinsichtlich ihrer Helligkeit die nachstehende Ordnung befolgen:

Planet:	Winkel der Sichtbarkeit:
♀	5° 0′
☿	10 0
♃	10 0
♄	11 0
♂	11 30

1133. Hinsichtlich der Beleuchtung werden sie ungefähr ebendieselbe Ordnung befolgen. Denn sie befinden sich in diesem

Fall nahezu in Conjunction und sind der Reihe nach von der Sonne weiter entfernt. Daher wird

		Beleuchtung:		Scheinbarer Durchmesser:
♀	11	77	275.2	12″
☿	97	67	240.2	6
♃		15	35.55	31
♄		1	2.475	15
♂		7	15.50	6

1134. Diese Reihenfolge wird nur durch Saturn gestört, welcher eigentlich der letzte sein sollte. Einigen Einfluss hat der scheinbare Halbmesser und die röthliche Färbung des Mars, welcher aus eben diesem Grunde dunkeler erscheint als Jupiter, wenn sich beide in der kleinsten Entfernung von der Erde befinden. Uebrigens ist wohl zu beachten, dass der Bogen der Sichtbarkeit zu verschiedenen Jahreszeiten nothwendig verschieden ist, wenn man auch die Constitution der Atmosphäre als vollständig constant ansieht. Denn jedenfalls ist er von der Elongation des Planeten von der Sonne abhängig. Dies kann man auf folgende Weise zeigen.

. . . .

Kapitel III.

Ueber das Licht der Fixsterne und die Entfernung derselben.

[**504**] 1137. Die ungeheure Entfernung der Fixsterne lässt sich, wie hinlänglich bekannt ist, wohl durch Vermuthungen, nicht aber durch sichere Rechnungen durch ein bekanntes Maass ausdrücken, und man fand den Werth derselben immer grösser, je plausibler die Argumentationen wurden. Die alten Astronomen glaubten dieselbe kaum so gross annehmen zu dürfen, wie nach unserer jetzigen Kenntniss die Entfernung der Sonne ist. *Copernicus* liess ihren Werth unbestimmt. *Kepler* schrieb ihr eine Grösse von 60 000 000 Erdhalbmessern zu und setzte also ihre Entfernung 3000 mal so gross als die der Sonne. *Riccioli* nahm die jährliche Parallaxe der Fixsterne zu 10″ an und leitete aus dem von *Wendelin* angenommenen Radius der

Erdbahn = 14465.6 Erdhalbmessern die grösste Distanz der Fixsterne ab, welche sich aus den verschiedenen Annahmen der verschiedenen Astronomen ergab, nämlich = 604 589 312 Erdhalbmessern oder gleich 30 000 Radien der Erdbahn. Auf eine sehr scharfsinnige Weise fand *Huyghens* die Entfernung des *Sirius* etwa eben so gross, nämlich gleich 27 664 Halbmessern der Erdbahn. Aber alle diese Entfernungen machen eine äusserst grosse jährliche Parallaxe nöthig, und dem gegenüber setzte *Bradley* auf Grund jener äusserst genauen Beobachtungen, durch welche er die Aberration des Lichts entdeckte und genau bestimmte, als die obere Grenze ihres Werthes den Betrag von einer Secunde fest und gelangte so zu der Behauptung, dass die Entfernung der Fixsterne weit grösser sei und kaum weniger betragen könne als 400 000 Halbmesser der Erdbahn.

[**505**] 1138. Der erste Versuch, die Lichtmenge zu bestimmen, welchen der nächtliche gestirnte Himmel ausstrahlt, ist von *de Cheseaux* gemacht worden in seiner Abhandlung über den Cometen des Jahres 1744. Derselbe suchte zugleich schätzungsweise das Verhältniss zu bestimmen, in welchem das Fixsternlicht auf seinem Weg durch den Aether geschwächt wird. Er macht nämlich die Annahme, dass die Fixsterne von uns nicht nur ungleich weit entfernt sind, sondern auch, dass die Anzahl derjenigen, welche gleichweit von der Sonne abstehen, proportional diesem Abstand wächst. Nun nimmt er an, dass diese Abstände bis ins Unbegrenzte zunehmen, und zieht hieraus den Schluss, dass der nächtliche Himmel eigentlich in der Weise mit Sternen besäet erscheinen müsse, dass überhaupt jeder Punkt durch einen Fixstern bedeckt würde, wenn das Fixsternlicht nicht eine beträchtliche Schwächung erlitte.

1139. Nun wird zwar niemand leugnen, dass die Entfernungen der Fixsterne verschieden sind. Indessen darf man wohl nicht zugeben, dass dieselben in der Weise im Weltraum vertheilt sind, wie es dieser geistreiche Forscher annimmt. Denn woher kommt die *Milchstrasse?* Meiner Ansicht nach ist das System der Fixsterne, welches wir erblicken, keineswegs kugelförmig, sondern vielmehr scheibenförmig und platt, und die Milchstrasse halte ich sozusagen für die Ekliptik der Fixsterne. Denn niemand wird meiner Meinung nach behaupten wollen, dass diese endlose Zahl von Sternen, welche das Fernrohr in diesem Streifen des Himmels zeigt, hier derart vertheilt sei, dass die darin enthaltenen Sterne sämmtlich dem Volumen nach äusserst klein und zugleich einander sehr nahe benachbart sind, und dass ihre Entfernungen von unserer Sonne ungefähr gleich oder, genauer gesprochen, nicht unendlich verschieden seien.

[**506**] 1140. Wenn man nun alle diese Sterne, die das menschliche Auge zu erblicken vermag, in ein einziges System zusammenfasst, so wird dasselbe doch keineswegs einfach, sondern aus unzähligen kleinen Systemen zusammengesetzt sein. Es werden alle diejenigen Sterne, welche ausserhalb der Milchstrasse liegen, und die grösseren der in diesem Lichtstreifen selbst erglänzenden Sterne demjenigen System angehören, welches auch unsere Sonne umfasst. Unter den anderen Systemen sind die uns näheren in der Milchstrasse selbst vertheilt. Dass aber diese Vertheilung eine ungleichmässige ist, folgt schon aus der unregelmässigen Gestalt der Milchstrasse, und eben deshalb erscheint dieselbe getheilt und verzweigt. Dass sich unsere Sonne nicht im Centrum des Systems befindet, schliesse ich daraus, dass ein Kreis durch die Mitte der Milchstrasse kein grösster Kreis ist.

1141. Nimmt man also an, dass die Fixsterne in dieser Weise im sichtbaren Weltraum angeordnet und vertheilt sind — und dies wird sich nicht weit von der Wahrheit entfernen — so muss die Schwächung, welche das Fixsternlicht erleidet, bevor es zu uns gelangt, unendlich viel kleiner sein, als diejenige, welche *de Cheseaux* annimmt; sie muss sogar für die näheren Fixsterne ziemlich unmerklich sein, da man auch solche Sterne noch sieht, die wohl hunderttausendmal weiter entfernt sind.

1142. Bekanntlich sind ferner die Fixsterne an Intensität und Farbe verschieden. Diese Helligkeit ist von der wahren Grösse nicht abhängig, dagegen ist die scheinbare Grösse von der Helligkeit abhängig. Denn infolge der Anhäufung des Lichts auf der Netzhaut müssen die helleren Sterne als grösser erscheinen, wenn auch ihre Entfernung und wahre Grösse dieselbe ist. Es gibt Fixsterne, welche [**507**] man vor den übrigen als *lucidae* bezeichnet, obwohl sie kaum dritter Grösse sind. Ihre Grösse würde vielleicht zur sechsten oder einer noch weiteren Klasse herabsinken, wenn sie weniger hell wären. Wegen der verschiedenen Farbe schrieben ihnen die Astrologen einen verschiedenen Einfluss zu.

1143. Infolge dieser unendlichen Mannigfaltigkeit darf man annehmen, dass es Fixsterne gibt, welche unserer Sonne an Helligkeit und Grösse gleich sind. Ferner erscheinen, wie man mit blossem Auge sieht, und wie sich auch aus dem von *Ptolemäus* zu 12° bestimmten Bogen der Sichtbarkeit leicht ergibt, die Fixsterne erster Grösse in ungefähr derselben Helligkeit, wie die Planeten, Venus ausgenommen. Dasselbe gilt auch für die scheinbare Grösse, wie aus den Beobachtungen der älteren Astronomen hervorgeht und wie man auch auf den ersten Blick sieht. Denn dieselben schätzten die Durchmesser der Fixsterne mit dem blossen Auge.

1144. Auf Grund dieser Verhältnisse wollen wir eine Abschätzung der Entfernungen der nächsten Fixsterne versuchen mit Hilfe folgender Ueberlegung. Man weiss aus dem vorigen Capitel, dass man die scheinbare Helligkeit findet, wenn man die Beleuchtung durch den Flächeninhalt des wahrgenommenen Bildes dividirt. Wir denken uns also einen Fixstern, welcher dieselbe wahre Helligkeit hat wie die Sonne, und dieselbe scheinbare Helligkeit und Grösse, wie ein Planet. Dann wird der Flächeninhalt des wahrgenommenen Bildes derselbe sein, ebenso die in das Auge eindringende Lichtmenge, und mithin auch die Beleuchtung.

1145. Der scheinbare Halbmesser des Fixsterns sei $= s$, seine wahre Helligkeit, ebenso wie die Helligkeit der Sonne, sei $= 1$, der scheinbare Halbmesser des Planeten $= \sigma$, der Halbmesser der Sonne, vom Planeten aus gesehen, $= S$, [**508**] und die Albedo des Planeten sei $= A$; dann wird die centrale Helligkeit des Planeten in der Opposition, wenn man sie deutlich sehen könnte, $= A \sin^2 S$, die mittlere Helligkeit der Scheibe $= \frac{2}{3} A \sin^2 S$; hieraus entsteht die Beleuchtung $= \frac{2}{3} A \sin^2 S \cdot \sin^2 \sigma$. Dagegen ist die Beleuchtung, welche durch den Fixstern entsteht, $= \sin^2 s$. Da nun beide gleich sein sollen, so erhält man

$$\sin^2 s = \tfrac{2}{3} A \sin^2 S \sin^2 \sigma \, .$$

Statt dieser Gleichung kann man, wenn man nur den Halbmesser s sucht, die folgende setzen:

$$s^2 = \tfrac{2}{3} A \cdot \sigma^2 \cdot \sin^2 S$$

oder

$$s = \sigma \sin S \sqrt{\frac{2}{3} A} .$$

1146. Sei nun der mittlere Halbmesser der Sonne, von der Erde aus gesehen, $= 16'$, die halbe grosse Axe der Erdbahn $= 1$, die heliocentrische Entfernung des Planeten $= a$; dann wird sehr nahe

$$\sin S = \frac{\sin 16'}{a}$$

und mithin

$$\sin s = \sqrt{\frac{2A}{3}}\,\frac{\sin\sigma \sin 16'}{a}$$

$$s = \frac{\sigma \sin 16' \sqrt{2A}}{a\sqrt{3}}.$$

1147. Nimmt man nun die wahre Grösse eines Fixsterns gleich der Grösse der Sonne und setzt seine Entfernung $= x$, so wird

$$\sin s : \sin 16' = 1 : x$$

und daher

$$x = \frac{a}{\sin\sigma \sqrt{\frac{2A}{3}}}.$$

1148. Setzt man die Albedo A der Planeten $= \frac{1}{7}$, welchen Werth sie kaum übersteigen dürfte (1072), und legt man die mittleren Entfernungen der Planeten zu Grunde, ebenso ihre scheinbaren Durchmesser in der Conjunction, [509] und entweder der Opposition oder zu der Zeit, wenn sie halberleuchtet erscheinen, so erhält man hieraus die folgende Tabelle (1127, 1128, 1133)

Planet	Scheinb. Halbmesser	Entfernung des Fixsterns	Scheinb. Durchmesser des Fixsterns	
	in Conjunction			
♄	15″	425100	0‴	16⁗
♃	31	112100	1	1
♂	6	169700	0	41
♀	12	40290	2	51
☿	6	43020	2	41
	in Opposition			
♄	18	354200	0	19
♃	46	75570	1	32
♂	30	33950	3	24
	bei halber Phase			
♀	30	22790	5	9
☿	9	28900	3	52

1149. Unter diesen Distanzen kommt die kleinste demjenigen Werth nahe, welchen *Huyghens* aus seinem scharfsinnigen Versuch abgeleitet hat (1137). Aber dieser Werth ist, wie schon oben bemerkt wurde, noch zu klein, da hieraus eine sehr beträchtliche jährliche Parallaxe folgen würde. Die Beobachtungen zeigen nun, dass alle Planeten, vielleicht mit Ausnahme des Saturn, entweder heller oder grösser erscheinen, als die Fixsterne erster Grösse. Für Jupiter und Venus findet offenbar beides statt, während Mercur eine grössere Helligkeit zeigt als die Fixsterne, wogegen Mars bei der Opposition dieselben an [**510**] scheinbarer Grösse übertrifft. Die Entfernung des Fixsterns ist also, da er dunkler erscheint, noch zu vergrössern. Ausserdem scheint die Albedo des Mars weit kleiner zu sein, als die der anderen Planeten. Da wir aber bei dieser Rechnung die Albedo immer gleich gross angenommen haben, so folgt, dass die Entfernung des Fixsterns, welche durch die Vergleichung mit Mars gewonnen wurde, in entsprechendem Maasse zu vergrössern ist.

1150. Saturn ist also der einzige Planet, welchem eine solche Entfernung eines Fixsterns entsprechen würde, welche der Wahrheit näher kommt. Denn sein Bogen der Sichtbarkeit ist dem entsprechenden Winkel bei einem Fixstern erster Grösse nahezu gleich; *Ptolemäus* setzt den betreffenden Winkel im ersten Fall $= 11^\circ$, im letzteren $= 12^\circ$. Daher ist die Entfernung eines Fixsterns $= 425100$ Erdbahnhalbmessern eher zu klein als zu gross. Dies stimmt mit den sehr genauen Beobachtungen *Bradley*'s sehr gut überein (1137).

1151. Die Grösse der Fixsterne, mit blossem Auge gesehen, ist nicht nur von ihrer wirklichen Grösse und Entfernung, sondern in hohem Grad auch von ihrer Helligkeit abhängig. Denn je intensiver das Licht eines Fixsterns ist, um so grösser wird die empfindliche Fläche auf der Netzhaut des Auges, welche in ungefähr demselben Verhältniss wächst, wie die entsprechende Beleuchtung durch den Fixstern. Es ist also keineswegs absurd, anzunehmen, dass es unter den Fixsternen sechster Grösse auch solche gibt, welche uns ebenso nahe sind, als andere von der ersten Grösse. Dagegen können manche unter den letzteren weiter entfernt sein, so dass es also nicht möglich ist, von der scheinbaren Grösse der Fixsterne auf die Entfernung derselben einen allgemeinen Schluss zu ziehen.

[**511**] 1152. Setzt man jedoch die Entfernung des nächsten Fixsterns $= 500\,000$ und legt man ihm die Grösse und Helligkeit bei, die unsere Sonne hat, so wird sich die hieraus entstehende

Beleuchtung zur Beleuchtung durch die Sonne verhalten wie 1 zu 250 000 000 000. Und da man oben gesehen hat, dass die Beleuchtung, welche durch die Sonne entsteht, sich zu derjenigen, welche vom Vollmond ausgeht, verhält wie 500 000 zu 1, so folgt hieraus, dass das Licht, welches von diesem Fixstern auf die Erde gelangt, 500000 mal schwächer ist, als dasjenige, welches dem Vollmond entspricht. Also würden 500 000 Fixsterne erster Grösse die Nacht kaum so hell erleuchten, wie sie durch den Vollmond erleuchtet wird.

Siebenter Theil.

Die verschiedenen Arten und die Intensität des heterogenen und relativen Lichts oder der Farben und des Schattens.

[512] **Kapitel I.**

Die Helligkeit und die Verschiedenartigkeit der Farben, experimentell und theoretisch betrachtet.

. . . .

[**519**] 1173. **Versuch 35.** Auf ein schwarzes Blatt Papier wurde ein stärkeres weisses Blatt so aufgelegt, dass ersteres hervorragte und nirgends ganz von letzterem bedeckt wurde. Ferner wurde ein Stück ganz rothen Siegellacks so danebengelegt, dass das Licht in derselben Menge und Dichtigkeit auf dasselbe auffiel, wie auf das Blatt. Wenn nun das Blatt durch ein Glasprisma betrachtet wurde, so erschien der Rand des Blattes mit einem rothen Saum umgeben, und wenn man diese Farbe verglich mit der Farbe des Siegellacks, der mit blossem Auge betrachtet wurde, so liess sich kaum ein Unterschied in der Intensität der Färbung wahrnehmen. Das Prisma wurde immer so gestellt, dass das Bild des Blattes seine höchste oder seine tiefste Lage erhielt.

1174. Da also das weisse Blatt die rothen Strahlen ungefähr in derselben Menge zurückwarf, wie der Siegellack, welcher angewendet wurde, so folgt, dass die Albedo des Blattes und die Rubedo des Siegellacks nahezu gleich waren. Die erstere muss nämlich etwas grösser gewesen sein, weil ein Theil der Strahlen an beiden Oberflächen des Prismas reflectirt wird und im Glas selbst eine Zerstreuung stattfindet. Die Rechnung ergab mir, dass die Albedo ungefähr um ein Viertel grösser gewesen sein muss.

1175. Durch einen ähnlichen Versuch wird man die violette Farbe mit der Albedo eines Blattes vergleichen können. [**520**]
Sobald aber der violette Rand des Blattes heller erscheint, als die angewendete Farbe, so wird man entweder ein Blatt nehmen müssen, welches das Licht in geringerer Menge reflectirt, oder man wird die Entfernung desselben von der Kerze ändern müssen; das letztere muss auch dann geschehen, wenn der Rand des Blattes dunkeler erscheint.

1176. Für die zwischenliegenden prismatischen Farben kann man diesen Versuch nicht machen, da sich dieselben nicht in der Weise von den anderen trennen lassen, wie die beiden äusseren. Allgemeiner ist deshalb der folgende

1177. **Versuch 36.** In der Wand oder den Fensterläden eines gut verdunkelten Zimmers befinden sich zwei Oeffnungen

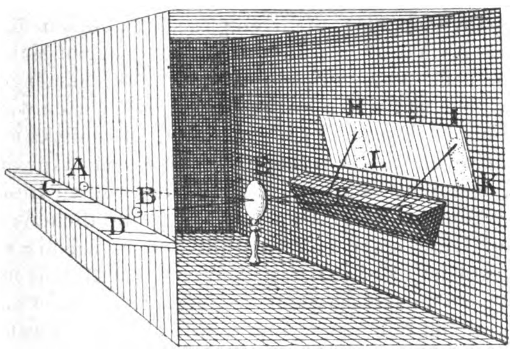

Fig. 102.

A und B; ihnen gegenüber stehe in C eine weisse, in D eine farbige, z. B. grüne Ebene; beide mögen von der Sonne gleich stark erleuchtet werden und durch die anliegende Oeffnung ihr Licht in das Zimmer werfen. Dieses Licht werde in E durch eine Sammellinse aufgefangen und hinter derselben stehe das Prisma FG, so dass die Strahlen, nachdem sie durch die Linse gebrochen sind, durch das Prisma getrennt werden.

Das längliche Bild beider Oeffnungen *A* und *B* oder der Strahlen, welche beide Ebenen *C* und *D* auf die Linse werfen, werde aufgefangen in *HI*. Dann wird man in *H* die einzelnen prismatischen Farben von einander getrennt sehen, dagegen werden in *I* die grünen Strahlen dichter erscheinen als die anderen. Wenn nun die grüne Farbe in beiden länglichen Bildern gleich hell ist, so wird man hieraus schliessen dürfen, dass diese Farbe von beiden Ebenen *C* und *D* in gleichem Grad zurückgeworfen wird; im anderen Falle muss man, um einen anderen Einfallswinkel zu erhalten, die Stellung der einen Ebene so lange ändern, bis die grüne Farbe in *H* und in *I* [**521**] gleich hell erscheint, und dann wird sich die Albedo der Ebene *C* zur Viredo der Ebene *D* umgekehrt verhalten wie der Sinus des Einfallswinkels.

1178. Man kann diesen Versuch auf verschiedene Weise abändern. So kann man beispielsweise zwei Linsen anwenden, von denen die eine das Licht der Oeffnung *A*, die andere das Licht der Oeffnung *B* auffängt. Ferner kann man die Oeffnungen der Linsen beliebig ändern. Auch kann man die Helligkeit beider Ebenen *C* und *D* vergrössern, wenn man die einfallenden Sonnenstrahlen durch eine Sammellinse verdichtet.

1179. Da man also die Helligkeit der beiden länglichen Bilder in dreifacher Weise ändern kann, so ergibt sich hieraus eine Methode, für eine gewisse Farbe die Strahlenmenge zu bestimmen, welche von einem Farbstoff zurückgeworfen wird. Obwohl nämlich die Ebene *D* grün aussieht, so erblickt man dennoch in *K* ein schwaches rothes Licht, und man wird daher die Helligkeit desselben mit der Helligkeit des rothen Bildes in *L* vergleichen können. Man verdichte die in *D* einfallenden Sonnenstrahlen mit Hilfe einer Convexlinse, und es sei die Oeffnung der Linse, welche das Licht der Oeffnung *B* auffängt, möglichst gross. Dagegen mögen die Sonnenstrahlen auf *C* ohne zwischengesetzte Linse auffallen, der Einfallswinkel möge, wenn erforderlich, verkleinert werden, ebenso auch die Oeffnung der Linse, welche das Licht von *A* auffängt, bis beide rothen Bilder gleich hell erscheinen; dann ergibt sich nach den früher bewiesenen Lehrsätzen das Verhältniss zwischen der Dichtigkeit der rothen Strahlen, welche einerseits von der weissen Ebene *C*, andererseits von der grünen Ebene *D* zurückgeworfen werden. Man sieht von selbst, dass der Gang derselbe ist, wenn die Farbe der Ebene *D* beliebig war und wenn man beliebige Theile der länglichen Bilder *H* und *I* [**522**] zu vergleichen hatte.

1180. Die Berechnung, welche hier anzustellen ist, erledigt sich in folgender Weise. Man nehme an, die Ebene C sei in dem Sinne vollkommen weiss, dass sie das Licht in demjenigen Verhältniss zurückwirft, welches zur Herstellung der weissen Farbe erforderlich ist. Auf Grund dieser Voraussetzung bezeichne man die Dichtigkeit der zurückgeworfenen Strahlen einer beliebigen Farbe als Einheit und bestimme in dieser Einheit die Dichtigkeit der Strahlen von beliebiger Farbe, welche durch den Farbstoff D zurückgeworfen werden. Man setze z. B. die Dichtigkeit der rothen Strahlen $= r$. Wenn nun das senkrecht einfallende Sonnenlicht $= 1$, der Sinus des Incidenzwinkels in $C = s$, in $D = S$ gesetzt wird, und wenn ferner das Licht in D durch eine Sammellinse verdichtet wird, so ergibt sich aus den Lehrsätzen 23, fgde. und den Formeln § 539, fgde. das Verhältniss, in welchem die Helligkeit der Ebene D vergrössert worden ist; wir setzen dasselbe $= 1 : m$. Hiernach wird diejenige Helligkeit der Ebene C, welche den rothen Strahlen entspricht, $= s$, und die Helligkeit der Ebene D, welche gleichfalls den rothen Strahlen entspricht, $= m\,Sr$. Nimmt man nun an, dass beide Linsen in E dieselbe Brennweite haben, und dass für beide die Stellung des Prismas dieselbe ist, so werden die Helligkeiten s und $m\,Sr$ nur noch von der Oeffnung der Linsen abhängig sein. Bezeichnet man also die Oeffnung derjenigen Linse, welche D entspricht, mit A, die Oeffnung der anderen Linse mit a, so wird das rothe Bild K eine Helligkeit $= AmrS$, das rothe Bild L eine Helligkeit $= as$ besitzen. Beide sind aber in dem Versuche gleich, also wird

$$AmrS = as$$

und mithin

$$1 : r = AmS : as \;.$$

[**523**] Hieraus folgt:

1181. **Lehrsatz 51.** *Die Dichtigkeit der Strahlen einer gegebenen Farbe, welche eine weisse Ebene C zurückwirft, verhält sich zur Dichtigkeit der Strahlen von derselben Farbe, welche eine farbige Ebene D zurückwirft, wie das Product aus der Dichtigkeit des Lichts, welches den Farbstoff der Ebene D erleuchtet, und der Oeffnung der Linse, welche das Bild auffängt, zum Product aus der Dichtigkeit des Lichts, welches die weisse Ebene C erleuchtet, und dem Flächeninhalt der Linse, welche das Bild derselben auffängt.*

Beweis: Es ist nämlich

$$1 : r = AmS : as \;,$$

mS und *s* sind aber die Dichtigkeiten des in *D* und *C* auffallenden Lichtes, *A* und *a* die Flächeninhalte der Oeffnung der entsprechenden Linsen; woraus der Satz folgt. Uebrigens sind die Grundlagen des Lehrsatzes in § 1180 schon erörtert worden.

. . . .

[**530**] 1198. Wir wollen nun sehen, wie sich die Helligkeit von Farben, welche sich gegenseitig beleuchten, theoretisch verfolgen lässt, und betrachten hierzu zunächst den Fall der absoluten Beleuchtung. Aus den bisher beigebrachten Versuchen erkennt man, dass ein beliebiger Farbstoff alle verschiedenen Farben in einer verschiedenen und ihm eigenthümlichen Weise zurückwirft. Ferner wurde früher bemerkt (1170 fgde.), dass für die Helligkeit eines Farbstoffs die Färbung eines Strahles und die Dichtigkeit der Strahlen gleicher Färbung maassgebend sind. Daher [**531**] drücken wir diese Helligkeit durch den Flächeninhalt einer gewissen Curve so aus, dass sie auf den bei der Rechnung benutzten Einheiten beruht.

1199. Die Abscissen *AP* mögen die Gattung der Strahlen darstellen, und zwar sei *AB* die kleinste, *AC* die grösste Abscisse; die Ordinaten *BD*, *PM* und *CE* sollen dagegen die Menge derjenigen Strahlen ausdrücken, welche von gleicher Färbung sind; dann ist offenbar der Raum *BDEC* gleich der Summe aller Kräfte, also gleich der Helligkeit, welche daraus entsteht und in welcher der Farbstoff sichtbar ist.

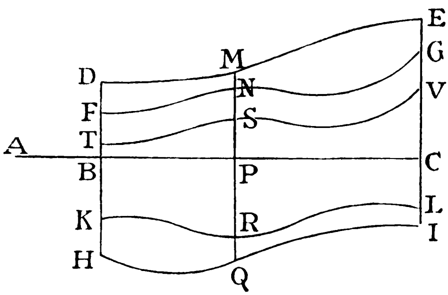

Fig. 105.

1200. Man nehme nun an, dass die Ordinaten, welche zur Curve *DME* gehören, diejenige Strahlenmenge bezeichnen, welche zur Herstellung des vollkommen weissen Lichtes erforderlich ist; in diesem Fall wird diese Curve ein Maassstab sein, vermöge dessen man die Helligkeit eines beliebigen Farbstoffes ausdrücken kann.

1201. Wird nämlich ein beliebiger Farbstoff einer vollkommen weissen Lichtquelle in der Weise zugewandt, dass derselbe durch letztere absolut beleuchtet wird, und denkt man sich die von einem gegebenen Flächenelement des Farbstoffes $= 1$ reflectirte Strahlenmenge dargestellt durch die Ordinaten FNG; so wird der Raum $FNGCB$ gleich der Summe aller Kräfte und mithin gleich der Helligkeit jenes Farbstoffes, sofern er durch eine vollkommen weisse Lichtquelle erleuchtet wird.

1201. Ferner wird das Verhältniss zwischen homologen Ordinaten beider Curven $PM : PN$ gleich dem Verhältniss zwischen den einfallenden und den zurückgeworfenen Strahlen sein; dasselbe ist also für jede bestimmte Strahlengattung constant.

1203. Denkt man sich daher jenen Farbstoff durch eine Lichtquelle beschienen, deren Helligkeit durch die Curve HQI dargestellt werden möge, und denkt man sich die Helligkeit des absolut beleuchteten Farbstoffes durch die Curve KRL ausgedrückt, so wird

$$PM : PN = PQ : PR .$$

[532] Sind also die drei Curven DME, FNG, HQI gegeben, so ergibt sich vermöge dieser Proportion eine vierte, deren Inhalt die Helligkeit des Farbstoffes darstellt, welcher durch die Lichtquelle HQI absolut beleuchtet wird.

1204. Wenn die Beleuchtung keine absolute war, so ist der ganze Raum $BKLC$ in demjenigen Verhältniss zu verkleinern, in welchem die Beleuchtung selbst kleiner ist. Dieses Verhältniss lässt sich aber leicht bestimmen mit Hilfe derjenigen Sätze, welche im ersten und zweiten Theil dieses Werkes bewiesen wurden.

1205. Den Raum der Curve $BDEC$, welcher die Helligkeit der vollkommen weissen Lichtquelle darstellt, betrachten wir hier als diejenige Einheit, auf welche die Inhalte der übrigen Curven bezogen werden müssen, um die dargestellten Helligkeiten durch eine und dieselbe Helligkeit auszudrücken. Diese Einheit ist nothwendigerweise willkürlich (709, 779) und kann daher für jeden Fall nach Belieben angenommen werden.

1206. Die beiden Curven DME und FNG lassen sich durch eine einzige ersetzen, wenn nur das Verhältniss zwischen den Ordinaten $PM : PN$ gesucht ist. Ist TSV diese Curve, so wird

$$PS = PN : PM$$
$$PR = PQ \cdot PS .$$

Die Ordinaten PS bezeichnen also das Verhältniss zwischen den Strahlen einer gewissen Gattung, welche auf einen gegebenen Farbstoff auffallen, und den von ihm zurückgeworfenen Strahlen.

1207. Nach diesen Vorbemerkungen stellen wir, um uns später kurz fassen zu können, die folgenden Begriffe fest:

1. Die Abscissen $AP = x$ werden wir einfach als *Strahlengattung* bezeichnen, weil dieselben die verschiedene Kraft ausdrücken, mit welcher die Strahlen die Netzhaut des Auges erregen. [**533**]
2. Die Ordinaten PS der Curve TSV werden wir als *die Reflexionsfähigkeit des Farbstoffes* bezeichnen, weil sie das Verhältniss zwischen den einfallenden und reflectirten Strahlen ausdrücken.
3. Bezeichnet man ferner die Ordinaten PQ, PR, PS mit λ, p, v, so werden sich die Flächenräume der entsprechenden Curven ausdrücken durch $\int \lambda\, dx$, $\int p\, dx$, $\int v\, dx$, und *es wird also* $\int \lambda\, dx$ *die Farbe der Lichtquelle*, $\int p\, dx$ *die Farbe des durch die erstere absolut beleuchteten Farbstoffes*, $\int v\, dx$ *die Summe der reflectirenden Kräfte des Farbstoffes sein.*

1207. Da also (1206)

$$p = v\lambda$$

ist, so wird

$$\int p\, dx = \int v\lambda\, dx$$

und mithin ist die Farbe des Pigmentes bestimmt durch die Farbe der Lichtquelle, von welcher dasselbe absolut beleuchtet wird, und die Reflexionsfähigkeit, welche dem Pigment eigen ist.

1208. Hierdurch kann man nun leicht die Bedeutung des Buchstabens A bestimmen, welcher in Versuch 28, fgde. angewendet und dessen Erklärung auf das gegenwärtige Kapitel verschoben wurde (762). Habe also in Fig. 70 alles die Bedeutung, wie in § 726, fgde. Die beiden Ebenen G und FD mögen mit demselben Farbstoff bestrichen sein. Die Summe der reflectirenden Kräfte des Farbstoffes heisse $\int v\, dx$, und die Farbe der Lichtquelle L, welch letztere wir hier gleichfalls als kugelförmig annehmen, sei $= \int \lambda\, dx$. Nimmt man dann an, dass das Pigment von jener Lichtquelle absolut beleuchtet werde, so wird die Farbe desselben offenbar $= \int v\lambda\, dx$ sein. Ebenso wird, wenn das Pigment FD durch das Pigment G absolut beleuchtet wird, die Farbe des Pigments FD sein $= \int v^2 \lambda\, dx$.

[**534**] 1209. Bei den vorliegenden Versuchen war aber die Beleuchtung keine absolute, mithin sind die Helligkeiten der Farben $\int v\lambda\, dx$ und $\int v^2 \lambda\, dx$ in entsprechender Weise zu ver-

kleinern, um diejenige Farbe zu finden, welche in den Punkten G, D und F vorhanden war. Bezeichnet man also die Durchsichtigkeit der Linse AB mit $\varkappa$ (741), so wird

die Farbe der Ebene $G = \int v\,\lambda\, dx : GL^2$

der Ebene $D = \int v\,\lambda\, dx : LD^2$

des Bildes $F = \dfrac{\varkappa \operatorname{tg}^2 AFC}{LG^2 \cdot \sec^2 AGC} \cdot \int v^2 \lambda\, dx$.

Bei dem Versuch waren aber die beiden Farben in D und F gleich hell, folglich wird

$$\frac{\int v\,\lambda\, dx}{LD^2} = \frac{\varkappa \operatorname{tg}^2 AFC}{LG^2 \cdot \sec^2 AGC} \cdot \int v^2 \lambda\, dx\,,$$

also hat man

$$\frac{LG^2 \cdot \sec^2 AGC}{LD^2 \cdot \varkappa \cdot \operatorname{tg}^2 AFC} = \frac{\int v^2 \lambda\, dx}{\int v\,\lambda\, dx} = A \quad (738).$$

Hiernach ist A das Verhältniss zwischen der Farbe der Ebene G, welche durch die Lichtquelle L absolut beleuchtet wird, und der Farbe der Ebene FD, welche durch die Ebene G absolut beleuchtet wird. Mithin ist, *wenn man die Menge der Strahlen, welche in dem Verhältnisse gemischt sind, wie sie in F einfallen,* = 1 *setzt, die Menge derjenigen Strahlen, welche von der Ebene F reflectirt werden,* = *A*, *wie dieselben auch unter einander gemischt sein mögen* (762). Man kann jedoch diesen Satz genauer aussprechen, wenn man statt Strahlenmenge sagt: Summe der Kräfte, da die letztere zur erstern nicht genau proportional ist (1161).

1210. Wenn man annehmen darf, dass die Strahlen derselben Farbe dieselbe Kraft besitzen, oder dass man aus der Summe von Kräften einen Mittelwerth bilden dürfe, so brauchen die Curven, welche Fig. 105 zeigt, nicht continuirlich zu sein, sondern man wird nur sieben Abscissen und [**535**] ebenso viele ihnen entsprechende Ordinaten haben. Man hat es daher mit einer Berechnung von discreten Grössen zu thun, welche man in folgender Weise eleganter darstellen kann.

1211. Die Mengen von rothen, orangefarbenen Strahlen u. s. w., aus welchen die Lichtquelle L (Fig. 70) besteht, mögen bezeichnet werden durch die Buchstaben R, A, F, V, C, P, W und die reflectirenden Kräfte der Pigmente G und D mögen in derselben Reihenfolge: r, a, f, v, c, p, w genannt werden. Dann wird die Farbe der Lichtquelle $= R + A + F + V + C + P + W$ und die Farbe des absolut beleuchteten Pigmentes G oder $D = rR + aA + fF + vV + cC + pP + wW$. Dieselbe heisse η'.

1212. Nimmt man an, dass durch das Pigment G ein ähnliches Pigment absolut beleuchtet wird, so wird die hieraus entstehende Farbe

$$\eta'' = r^2 R + a^2 A + f^2 F + v^2 V + c^2 C + p^2 P + w^2 W$$

und in ähnlicher Weise wird die Farbe eines dritten Pigmentes, welches von diesem zweiten absolut beleuchtet wird,

$$\eta''' = r^3 R + a^3 A + f^3 F + v^3 V + c^3 C + p^3 P + w^3 W.$$

1213. Wird dann in derselben Weise ein viertes Pigment durch das dritte, ein fünftes durch das vierte absolut beleuchtet, u. s. w., so wird die Farbe des $n$ten Pigmentes

$$\eta^n = r^n R + a^n A + f^n F + v^n V + c^n C + p^n P + w^n W.$$

Diese Formel soll nun auf einige Specialfälle in der Weise angewendet werden, dass sich die Ergebnisse leicht auf den vorhergehenden Fall, wo diese Farben durch Curven ausgedrückt wurden, übertragen lassen.

1214. Wenn das Pigment vollkommen weiss war, und wenn alle Strahlen in demselben Verhältniss, in welchem sie einfallen, auch reflectirt werden, so wird in diesem Fall $r = a = f = v = c = p = w$ sein, und daher

$$\eta^n = r^n (R + A + F + V + C + P + W).$$

[**536**] Stets wird also, so viel auch Reflexionen stattfinden mögen, das Pigment dieselbe Farbe zeigen, wie die Lichtquelle L, obwohl die Helligkeit derselben immer schwächer wird, wenn nicht das Pigment eine vollkommene Albedo besass; denn im letzteren Falle hat man $r = a = f = \cdots = 1$.

1215. *Ist eines unter den Verhältnissen r, a, f, u. s. w. beträchtlich grösser als die anderen, so wird sich der Farbstoff, je öfter sich die Reflexionen wiederholen, allmählich mehr und mehr derjenigen Farbe annähern, auf welche sich dieses Verhältniss bezieht.* Denn jedes einzelne Glied des Ausdrucks für η^n (1213) wächst wie die entsprechende Potenz der Verhältnisse r, a, f, ... und mithin um so schneller, je grösser diese Verhältnisse sind. Ist der Farbstoff z. B. Zinnober, so wird das Verhältniss r weit grösser sein als die anderen, und daher werden bei der vierten oder fünften Reflexion die Glieder der Formel (1213), welche auf das erste folgen, nahezu verschwinden. Dies zeigte sich deutlich bei Versuch 28 und den folgenden ähnlichen (1188). Denn als Flächen angewendet wurden, welche mit Mennige, Grünspan, Zinnober, Kreuzbeersaft bestrichen waren, so kam das Bild F, obwohl nur eine einzige Reflexion stattgefunden hatte, der einfachen prismatischen Farbe beträchtlich näher.

1216. Hieraus würde sich also eine Methode ergeben, die Hauptfarbe eines Pigmentes von den secundären Farben zu trennen, so dass sie schliesslich allein übrig bleiben würde, vorausgesetzt, dass man eine fortgesetzte Beleuchtung herstellen könnte, welche der absoluten Beleuchtung möglichst nahe kommt. Dies liess sich aber auf keinen Fall erreichen.

1217. Hätte man in einem gegebenen Fall $R = A = F = \cdots$, so würde die allgemeine Formel in die folgende übergehen:

$$\eta^n = R\,(r^n + a^n + f^n + v^n + c^n + p^n + w^n).$$

[**537**] Betrachtet man dann die Verhältnisse r, a, f, v ... als die Wurzeln einer Gleichung siebenten Grades

$$x^7 - \alpha x^6 + \beta x^5 - \gamma x^4 + \delta x^3 - \varepsilon x^2 + \zeta x - \varphi = 0$$

so erhält man durch die *Newton*'schen Relationen

$$\begin{aligned}
\eta' &= \Sigma x = \alpha \\
\eta'' &= \Sigma x^2 = \alpha \Sigma x - 2\beta \\
\eta''' &= \Sigma x^3 = \alpha \Sigma x^2 - \beta \Sigma x + 3\gamma \\
\eta'''' &= \Sigma x^4 = \alpha \Sigma x^3 - \beta \Sigma x^2 + \gamma \Sigma x - 4\delta \\
\eta^{\mathrm{V}} &= \Sigma x^5 = \alpha \Sigma x^4 - \beta \Sigma x^3 + \gamma \Sigma x^2 - \delta \Sigma x + 5\varepsilon \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Sind also die Farben η', η'', η''' ... η^{VII} durch Versuche gegeben, so folgen aus diesen Formeln leicht die Coefficienten α, β, γ, δ ... der Gleichung und hieraus ergeben sich die Wurzeln selbst, welche das Verhältniss zwischen den einfallenden und den zurückgeworfenen Strahlen darstellen. Da sich jedoch diese Verhältnisse durch den früher (1179, fgde.) beschriebenen Versuch bequemer bestimmen lassen, so werden wir nicht länger bei einer weiteren Erörterung dieser Methode verweilen. Andere hierher gehörige Versuche werden, da die Principien, auf welche sie sich gründen, hier fehlen, in der *Pyrometrie* vorkommen.

Kapitel II.

Theorie der verschiedenen Arten des Schattens und der Intensität desselben.

. . . .

[**538**] 1220. Sofern ein dunkeler Körper alle Strahlen auffängt, wird der Schatten *total* sein; wenn dagegen nur ein Theil der Strahlen aufgefangen wird, so hat man *Halbschatten*. Diese beiden Begriffe werden jedoch auf eine und dieselbe Lichtquelle bezogen; und wenn man dem gewöhnlichen Sprachgebrauch folgt, so muss diese Lichtquelle heller sein als die anderen, der Schatten und der Halbschatten müssen auffallend sein und die Gegenwart der Lichtquelle und des Körpers, welcher das Licht auffängt, muss offenkundig sein. Denn abgesehen vom Schatten kann nur ein verschiedener Grad der Helligkeit vorhanden sein, welcher durch die Veränderung des Einfallswinkels oder der Entfernung der Lichtquelle bedingt ist. Ferner pflegt man die Begriffe Schatten und Finsterniss einander so gegenüberzustellen, dass eine schattige Stelle noch nicht aller Helligkeit beraubt ist, während für die Finsterniss eine vollständige Abwesenheit des Lichts erforderlich ist. Indessen bezeichnet man im weiteren Sinne eine Stelle als mit Finsterniss bedeckt, wenn das Auge die Gegenstände nicht wahrzunehmen und von einander zu unterscheiden vermag.

1221. So verhält es sich wenigstens hinsichtlich des gewöhnlichen Sprachgebrauchs, für welchen [**539**] das Urtheil des Auges maassgebend ist. Dagegen muss in der wissenschaftlichen Optik und Photometrie ein theoretischer Gesichtspunkt maassgebend sein. Hierdurch werden diese Begriffe in engere Grenzen eingeschlossen, sodass ihre präcise Bedeutung klar wird. Man wird also jede Beeinträchtigung des Lichts als Schatten bezeichnen, gleichgiltig ob derselbe merkbar ist oder sich dem Auge entzieht, und man wird nur dann von Finsterniss sprechen, wenn die Beeinträchtigung und die Abwesenheit des Lichts eine absolute ist.

1222. Die verschiedenen Stufen der Helligkeit oder Dunkelheit des Schattens und Halbschattens sind abhängig von demjenigen Licht, welches anderweitig auf die beschatteten Stellen gelangt, sei es auf directem Wege, sei es durch Reflexion oder Brechung. Hierdurch wird also die Theorie der Intensität des Schattens mit einem Schlage zurückgeführt auf die Theorie der

Beleuchtung, welche im Früheren eingehend auseinandergesetzt wurde. Um daher hier nicht alles zu wiederholen, wollen wir die Sache durch einige Beispiele erläutern.

1223. Auf offenem Felde befinde sich die Mauer AB von unbegrenzter Länge, welche den Schatten der Sonne auf die

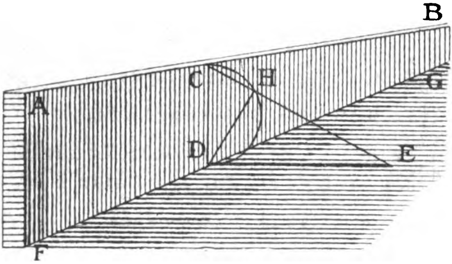

Fig. 106.

Seite DE wirft; man suche nun die Helligkeit des Schattens in einem beliebigen Punkte E, welcher lediglich durch den unbewölkten Himmel beleuchtet wird. Fällt man vom Punkte E aus das Perpendikel ED, errichtet die Senkrechte DC und zieht CE, so wird CED die scheinbare Höhe der Mauer in ihrem Maximum darstellen. Denkt man sich nun E als das Centrum einer Kugel und projicirt die Gerade AB auf die Oberfläche derselben, so wird diese Gerade einen grössten Kugelkreis ausschneiden, und einen ebensolchen Kreis schneidet auch die Basis FG der Mauer aus. Ist Fig. 15 QE der eine, BE der andere dieser Kreise, so wird EQB die Hälfte des von der Mauer bedeckten Stückes der Himmelshalbkugel sein. Daher ist das auf den gegebenen Punkt auffallende Licht des Himmels dasjenige, [**540**] welches vom übrigen Theil des Himmels $AEQC$ ausgeht, und dasselbe lässt sich mit Hilfe des Lehrsatzes 12 (145) in folgender Weise bestimmen.

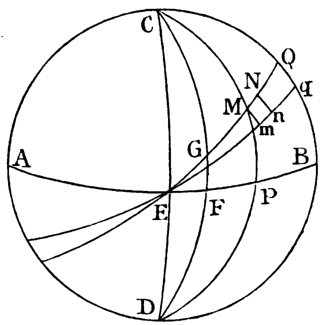

Fig. 15.

1224. Die mittlere Helligkeit des unbewölkten Himmels sei $= c$ und die Albedo des beschatteten Feldes $= A$; dann wird die Helligkeit des Feldes, wenn dasselbe von der ganzen Himmelshalbkugel, also absolut, beleuchtet wird, $= cA$ sein. Nun verhält sich aber die absolute Beleuchtung zur beiderseitigen Beleuchtung des Punktes durch die Fläche $ACQE$ wie π zu $\frac{1}{2}\pi(1 + \sin CQ)$, also wird die Helligkeit des gegebenen Punktes

$$u = \tfrac{1}{2}cA(1 + \sin CQ)$$

oder, wenn man zu Figur 106 zurückkehrt

$$u = \tfrac{1}{2}cA(1 + \cos CED)\ .$$

Setzt man die Verticale $CD = 1$, beschreibt auf ihr als Durchmesser den Halbkreis CHD, und zieht dann CH, so wird

$$u = \tfrac{1}{2}cA(CD + DH)\,,$$

oder da

$$\tfrac{1}{2}(1 + \cos CED) = \cos^2 \tfrac{1}{2} CED\ ,$$

so wird

$$u = \tfrac{1}{2}cA \cos^2 \tfrac{1}{2} CED\ .$$

Hieraus folgt:

1225. **Lehrsatz 52.** *Die Helligkeit des Schattens der Sonne, welcher auf offenem Felde durch eine horizontale Mauer von unbegrenzter Länge erzeugt wird, ist gleich dem Product aus der mittleren Helligkeit des Himmels, der Albedo des Feldes und dem Quadrat des Cosinus der halben grössten scheinbaren Elevation* CED *der Mauer.*

. . . .

[**542**] 1231. In ähnlicher Weise kann man den Sonnenschatten bestimmen, welcher einem beliebigen Theil der Himmelshalbkugel entspricht. Die mittlere Helligkeit des unbewölkten Himmels verhält sich, wie man gesehen hat, zur Helligkeit der Sonne wie 1 zu 277000 (914) und mit Hilfe dieses Werthes kann man die Helligkeit des Schattens und die Helligkeit einer von der Sonne beleuchteten Stelle gegenseitig vergleichen.

1232. Man nehme beispielsweise an, dass ein beliebiger Punkt einer horizontalen Fläche gegen die Sonne beschattet, [**543**] dagegen von der ganzen Himmelshalbkugel beleuchtet wird mit Ausnahme derjenigen Stelle, wo sich die Sonnenscheibe befindet. Dann findet also nahezu absolute Beleuchtung statt. Bezeichnet man dann die Helligkeit der Sonne mit C, die mittlere Helligkeit des wolkenlosen Himmels mit c und den scheinbaren Halbmesser der Sonne mit s, so stehen die Beleuchtung durch das Himmelsgewölbe und die Beleuchtung durch die Sonne in dem Verhaltniss wie c zu $C \sin^2 s$. Setzt man also $s = 16'$ und $c : C = 1 : 277000$, so wird dieses Verhältniss $= 1 : 6$. Mithin ist die Helligkeit, welche der Sonne entspricht, ungefähr das Sechsfache derjenigen, welche der unbewölkten Himmelshalbkugel entspricht, und mithin sind diejenigen Stellen, welche durch die Sonne und das ganze Himmelsgewölbe erleuchtet werden, ungefähr um ein Sechstel heller als diejenigen, welche allein von der Sonne beleuchtet werden. Man hat übrigens früher (910, 913) gesehen, dass dieses Verhältniss sehr veränderlich ist.

1233. Will man die Helligkeit des Halbschattens bestimmen, so unterscheidet sich diese Rechnung durchaus nicht von derjenigen, welche bisher durch Beispiele erläutert wurde. Denn die Beschattung einer beliebigen Stelle ist nur insofern eine partielle, als die Strahlen, welche die Lichtquelle bei Abwesenheit des Hindernisses hersenden würde, zum Theil aufgefangen werden; hierdurch ist der leuchtende Gegenstand nicht mehr in seiner ganzen Ausdehnung sichtbar, sondern wird zum Theil bedeckt. Dieser bedeckte Theil ist als nicht vorhanden zu betrachten, und man findet daher die Helligkeit des Halbschattens, wenn man die Beleuchtung bestimmt, welche dem nicht bedeckten Theil entspricht. Hieraus folgt also, dass auf diese Weise das Problem auf eine Aufgabe der directen Beleuchtung reducirt ist. Hierfür ein wichtiges Beispiel.

1234. Man bestimme die Helligkeit des Halbschattens, welcher bei einer Mondfinsterniss auftritt. S sei die Sonne, AB der Durchmesser derselben, TDV die Erde, PQ die Mondbahn. [**544**] Zieht man dann die Axe SDC und die Tangenten ATC, BVC, AVQ, BTP, so ist ACB der Schattenkegel, NO der Durchmesser des Kernschattens und PQ der Durchmesser des Halbschattens PQK. Ferner ist ATB der scheinbare Durchmesser der Sonne, von der Erde aus gesehen, TQV der scheinbare Durchmesser der Erde, vom Mond aus gesehen, oder die doppelte Horizontalparallaxe des Mondes. Es ist aber

$$\begin{aligned} PTQ &= TQV + ATB + TAV \\ ATB &= PTN, \end{aligned}$$

also wird, wenn man den Winkel TAV vernachlässigt,

$$PTQ = TQV + PTN.$$

Mithin ist der Durchmesser des Halbschattens gleich der Summe des Erddurchmessers, vom Mond aus gesehen, und des scheinbaren Sonnendurchmessers. Ferner ist der Winkel PTN die

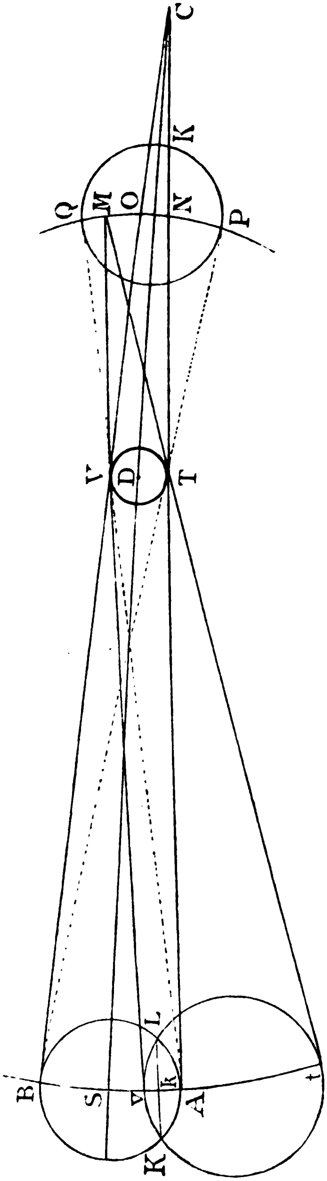

Fig. 109.

Differenz der Halbmesser des Kernschattens und des Halbschattens, und zwar ist er gleich dem scheinbaren Durchmesser der Sonne.

1235. Ist nun M ein Punkt der Mondoberfläche, und zieht man die Tangenten MTt und MVv, so stellt tv die Erdscheibe dar, und zwar vom Mond aus gesehen und auf die Sonnenscheibe projicirt; die Lunula BSv ist derjenige Theil der Sonnenscheibe, von welchem Strahlen nach M gelangen, während der linsenförmige Theil Av derjenige ist, welcher durch die Erde bedeckt wird und für das Auge eines Beobachters in M unsichtbar ist. Es ist aber

$$MVQ = AVv\ .$$

Daher ist der Elongationswinkel zwischen dem Punkte M und dem äusseren Ende Q des Halbschattens gleich der scheinbaren Breite des bedeckten Theiles Av.

1236. Nun verhält sich aber die Menge des in M auffallenden Lichtes wie der Flächeninhalt des nicht bedeckten Theiles der Sonnenscheibe oder wie die Lunula BSv; und es lässt sich ein Mittelwerth für dieselbe auf folgende Weise bestimmen.

1237. Man theile den Durchmesser AB der Sonnenscheibe in 12 gleiche Theile oder Zolle; dann [**545**] sieht man sofort, dass die Differenz PN oder OQ zwischen den beiden Halbmessern des Schattens in ebensoviel Theile zu theilen ist, und es enthält MQ ebensoviel Zoll, wie die Breite Av des bedeckten Theiles der Sonne.

1238. Ferner setze man den Inhalt der Sonnenscheibe $= 1$ und bezeichne die Helligkeit des Punktes M gleichfalls als Einheit für den Fall, dass derselbe nicht beschattet, und dass kein Theil der Sonnenscheibe bedeckt ist.

1239. Ist nun

der Durchmesser der Erde $tMv = 1^{\circ}\,52'$
der Sonne $ATB = 0\;\;32$,

so wird

der Durchmesser des Halbschattens $PTQ = 2^{\circ}\,24'$
des Kernschattens $= 1\;\;20$,

mithin ist

$$vt : AB = 7 : 2 \;.$$

1240. Zieht man die gemeinsame Sehne KL, so wird KvL das Segment der Erdscheibe, KAL das Segment der Sonnenscheibe, und die Summe von beiden ist gleich dem bedeckten Theil der Sonne. Aus dem angenommenen Inhalt des Kreises KBL, dem Verhältniss der Durchmesser AB, tv und aus der Breite Av findet man also den Flächeninhalt $AKvL$. Derselbe ist für jeden einzelnen Zoll der Länge von Av oder MQ in der folgenden Tabelle dargestellt: [**546**]

Bv und OM in Zollen:	Flächeninhalt $AKvL$ oder Helligkeit des Halbschattens:	Av oder QM in Zollen:
0	0.000	12
1	0.029	11
2	0.082	10
3	0.149	9
4	0.239	8
5	0.339	7
6	0.437	6
7	0.542	5
8	0.655	4
9	0.759	3
10	0.864	2
11	0.949	1
12	1.000	0

1241. Theilt man also die Differenz OQ der Breite beider Schatten in zwölf gleiche Theile (1237), so ergibt sich mit Hilfe dieser Tabelle für jeden beliebigen Punkt M der Mondscheibe die Helligkeit des Halbschattens. Man muss aber bemerken, dass die Schatten NO und PQ nicht diejenigen sind, welche beobachtet werden, sondern nur diejenigen, welche die Berechnung der Mondfinsterniss ergibt. Denn es lässt sich leicht zeigen, dass beide nothwendigerweise von einander verschieden sein müssen.

1242. Man sieht nämlich aus der vorigen Tabelle, dass der Anfang des Halbschattens oder diejenigen Stellen, welche dem Rande QP näher liegen, sich an Helligkeit nur äusserst wenig von der voll erleuchteten Mondscheibe unterscheiden, so dass das Auge einen Unterschied überhaupt nicht wahrzunehmen vermag (265 fgde.). Daher sind die beiden Grenzen des Halbschattens scheinbar nicht so weit von einander entfernt, wie sie es in Wirklichkeit sind.

[**547**] 1243. Ferner ist der Halbschatten in O und N dem Kernschatten so sehr ähnlich, dass das Auge den Anfang des vollen Schattens nicht zu erkennen vermag (270), gleichgiltig ob sich der letztere als vollkommene Finsterniss darstellt oder ob das durch die Atmosphäre gebrochene Licht auftritt. Daher wird nothwendigerweise ein gewisser Theil des Halbschattens mit zum Kernschatten gerechnet; wollte man also aus diesen Beobachtungen den Durchmesser der Erdatmosphäre, so weit diese den Mond verfinstert, bestimmen, so würde man denselben viel zu gross finden. Wenn man annimmt, dass das Auge diejenigen Helligkeiten als gleich betrachtet, welche um ein Dreissigstel ihres Betrags verschieden sind, so ergibt sich aus der Tabelle § 1240, dass $OM = 1$ Zoll ist, und setzt man den Durchmesser der Sonne $= 32'$, so werden einem Zoll $2\frac{2}{3}'$ entsprechen. Nun ist aber der scheinbare Erdhalbmesser $tv = 56'$. Mithin wird, wenn man den Halbschatten bis zu einer Helligkeit $= \frac{1}{30}$ mit zum Kernschatten rechnet, hierdurch der Halbmesser der Erde um den Theil $2\frac{2}{3} : 56 = \frac{1}{21}$ seines Betrags vergrössert. Uebrigens kann man Alles, was hier kurz über die Begrenzung des Schattens bemerkt wurde, bei Gelegenheit der Beobachtung von Verfinsterungen genauer studiren.

Anmerkungen.

I. Allgemeines.

Lamberts Leben und Schriften. *Johann Heinrich Lambert* wurde am 26. August 1728 zu Mülhausen im Elsass als Sohn eines Schneiders geboren. Seinen Anlagen und seinem Wissensdrang wurden von frühester Zeit her Schwierigkeiten in den Weg gestellt, die einen anderen erstickt hätten. Erst auf das eindringliche Zureden der Lehrer gestatteten endlich die Eltern, dass der Sohn zum geistlichen Stand ausgebildet werden sollte. Da aber eine Unterstützung von Seiten der Obrigkeit der Stadt nicht verwilligt wurde, so musste der Plan aufgegeben werden und der Knabe wurde gezwungen, das Schneiderhandwerk zu erlernen. Dabei las er an bildenden Schriften, was er sich verschaffen konnte, und lenkte bald die Aufmerksamkeit tüchtiger Männer auf sich, die ihm unentgeltlich Privatunterricht ertheilten. Da er sich überdies für das Handwerk nicht brauchbar zeigte, so suchte er einigen Erwerb in der Kanzlei eines Stadtschreibers. So schrieb er auch einst für *Rousseau* Noten ab. In seinem fünfzehnten Jahr wurde er Buchhalter bei *Lalance von Mümpelgard* und zwei Jahre später kam er zum Professor der Rechte *Iselin* zu *Basel*, welcher ihm den halben Tag zum Studiren frei liess. Diese Zeit benutzte *Lambert*, sich Kenntnisse in den Rechten anzueignen und namentlich philosophische Werke zu studiren. Von *Iselin* wurde er an den Grafen *Peter von Salis* in *Chur* empfohlen als Erzieher seines Enkels und zwei anderer Verwandten, deren einer der Vater des nachmaligen Dichters *v. Salis-Seewis* wurde. In diese Zeit des Aufenthalts in *Chur*, vom 17. Juli 1748 bis 1. October 1756, wohl die glücklichste Zeit seines Lebens, fällt seine wissenschaftliche Ausbildung. Seit dem Herbst 1756 begleitete er zwei seiner Zöglinge auf die Universität und auf wissenschaftliche Reisen, zunächst nach

4*

Göttingen, im folgenden Jahre nach *Utrecht*, machte inzwischen selbst zahlreiche kleinere Reisen, liess 1758 im Haag sein erstes Werk »*sur la route de la lumière*« drucken, besuchte dann mit seinen Zöglingen *Paris*, wo er *d'Alembert* kennen lernte, und kehrte nach kurzem Aufenthalt in verschiedenen französischen Städten 1759 nach *Chur* zurück.

Im Mai 1759 ging er nach *Zürich*, wo er sein Werk über die *freie Perspective* drucken liess, besuchte seine Mutter in *Mülhausen*, ging nach *Augsburg*, wo er die letzte Hand an die *Photometria* legte, und trat mit der in *München* sich bildenden kurfürstlich bayerischen Academie in Beziehungen, die sich aber bald lösten, da *Lambert* ständigen Aufenthalt in München zu nehmen sich weigerte. In dieser Zeit arbeitete er namentlich an seiner *Architectonik* und liess 1761 seine Abhandlung über den *Lauf der Cometen* und seine *kosmologischen Briefe* erscheinen. Er ging nach *Erlangen*, nach *Chur*, wieder nach *Zürich*, dann wieder längere Zeit (Sommer 1762 bis Herbst 1763) nach *Chur*, und nochmals nach *Augsburg*. Im Winter 1763 auf 64 ging er nach *Leipzig*, wo er sein *Neues Organon* erscheinen liess und langte im Februar 1764 in *Berlin* an.

Das Ziel seiner Reise war Russland. Da die *Petersburger* Academie Lust zeigte, ihn an sich zu ziehen, so kostete es seinen *Berliner* Freunden, insbesondere dem bekannten *Sulzer*, viele Mühe, ihn zu halten. Dies gelang und am 9. Januar 1765 trat er als ordentliches Mitglied bei der physikalischen Classe der *Berliner* Academie ein mit einem Gehalte von 500 Reichsthalern, welcher sich später auf 1100 Thaler erhöhte, als ihm unter dem Titel eines *Oberbaurathes* die Oberaufsicht über die Landesverbesserungen und das Landbauwesen übertragen wurde. Diese Stellung liess ihm vollkommen freie Zeit zu seinen wissenschaftlichen Arbeiten, beanspruchte ihn nur zu Gutachten und solchen Ausarbeitungen, die ihn selbst wissenschaftlich interessirten, und bot ihm die stets gern ergriffene Gelegenheit, jungen Talenten förderlich zu sein. Dazu kam der Verkehr mit den ersten Gelehrten Berlins; ausser mit *Sulzer* war er eng befreundet mit *Mendelssohn*, ferner stand er in regem wissenschaftlichen Verkehr mit *Euler* und *Lagrange*, ebenso mit *Bode*, der ihm seine Berufung an die Berliner Sternwarte verdankte und in ihm vielfache Unterstützung fand.

Lambert's Gesundheit war durch übermässiges Arbeiten untergraben, als er im Jahre 1775 von einem heftigen Schnupfen befallen wurde, der schliesslich in Schwindsucht überging. Er trotzte dem Uebel mit aller Kraft, wohnte noch am 18. September

1777 einer Academiesitzung bei und war thätig bis zum 25. desselben Monats, wo ein Schlagfluss sein Leben beendigte. Ein *Denkmal* in Berlin kam nicht zu Stande; dagegen hat seine Vaterstadt *Mülhausen* gelegentlich der Säcularfeier seines Geburtstages eine *Gedenksäule* errichtet auf dem Platze vor seinem *Geburtshaus*, welcher seitdem *Lambertsplatz* heisst; ebenso wurde an dem Hause eine Inschrift angebracht. Diese Erinnerungszeichen bestehen noch; doch ist die Säule in den sechziger Jahren wegen baulicher Veränderungen vor die Zeichenschule an der Belforter Vorstadtstrasse versetzt worden. Seit einigen Jahren trägt auch der *Lambert-Staden* seinen Namen. Die beste Quelle, sowie authentische Nachweise über seine Biographie sind enthalten in der Schrift »*Johann Heinrich Lambert nach seinem Leben und Wirken. Herausgegeben von Daniel Huber, Basel 1829.*

Lambert's Charakter und Gemüth wird von Allen als durchaus edel gerühmt. Gerade und ohne Falsch, ein Feind der Satire, niemals mürrischer Laune, war er stets ernsthaft bemüht, gerecht zu sein gegen andere, auch wenn es ihm Selbstverleugnung kostete. Ebenso energisch wusste er aber auch auf seinem Rechte zu bestehen. Seine geistvolle Physiognomie soll die erste gewesen sein, welche *Lavater* zu den bekannten Studien anregte. Sein Aeusseres war auffallend durch seinen komischen Geschmack und seine Gleichgiltigkeit gegen das Urtheil der Umgebenden. So zeugt auch seine Handlungsweise oft von geradezu kindlicher Naivetät, wie durch zahlreiche Anekdoten bestätigt wird. Er war fortwährend mit Problemen beschäftigt und knüpfte bei jeder Gelegenheit an jeden Gegenstand mathematische Aufgaben. Seine Gespräche waren ununterbrochen fliessende Abhandlungen.

Lambert war Autodidakt und hatte als solcher einen grossen Theil seiner Kenntnisse aus sich selbst geschöpft. Daher die vielgerühmte *Originalität* seiner Schriften. Hier ist wohl auch zum Theil die Ursache zu suchen für die *Weitläufigkeit*, mit der er sich oft über Dinge ausspricht, deren Klarlegung ihm selbst wohl einige Mühe gemacht hatte, die dem schulmässig gebildeten Fachmann dagegen längst geläufig waren. Da er bei der Untersuchung eines Gegenstandes planmässig zu Werke ging und einfach nach einem festen, selbstentworfenen Schema arbeitete (auseinandergesetzt: Lambert's gelehrter Briefwechsel, Bd. 1., Briefe an Kant, dritter Brief), so pflegt seine Behandlung die verschiedenen Seiten des Gegenstandes zu *erschöpfen*, aber eben deshalb verfällt er nicht selten in einen *Formalismus*, der bisweilen sogar in Pedanterie übergeht.

An dem Gegenstand, den er betrachtet, interessirt ihn vor Allem und fast ausschliesslich das *Allgemeine* und das Gesetz, welches den Erscheinungen zu Grunde liegt. Dagegen betrachtet er die Zahlenwerthe, welche den Verlauf der Naturerscheinungen charakterisiren, lediglich als Beispiele. Daher rührt die *Nachlässigkeit in seinen experimentellen Untersuchungen.* Beispielsweise besteht der ganze Instrumentenvorrath, mit Hilfe dessen die Photometrie aufgebaut ist, lediglich aus drei kleinen Spiegeln, zwei Linsen, ein paar Glasplatten und einem Prisma, und es verdient die Geschicklichkeit Anerkennung, wie er diesen kleinen rohen Instrumentenvorrath seinen vielseitigen Zwecken dienstbar zu machen weiss. Sogar noch in Berlin, wo ihm die besten Instrumente zur Verfügung standen, pflegte er immer noch hartnäckig an seinen früheren Hilfsmitteln festzuhalten.

Bewundernswerth ist die *Vielseitigkeit Lambert's* und seine Productivität. Auf zwei wesentlich verschiedenen Gebieten, einerseits auf dem der Philosophie, andererseits auf dem der Mathematik, Physik und Astronomie, hat er sich bleibende Verdienste erworben, und ebenso in verschiedenen solchen Zweigen der Technik, welche mit der Mathematik in Zusammenhang stehen, wie denn überhaupt die Anwendung der Mathematik der Grundzug seines wissenschaftlichen Charakters ist. Dabei war er ein tüchtiger Kenner der Geschichte, schrieb Anmerkungen zu den Pandekten, hatte es als Autodidakt in der lateinischen, griechischen, französischen und italienischen Sprache zu einer gewissen Vollkommenheit gebracht, und pflegte zeitweilig auch chemische Studien. Nicht weniger als sechzehn selbstständige Werke hat er selbst herausgegeben, und fünf weitere kamen nach seinem Tode zur Veröffentlichung. Die Memoiren der *Berliner Academie* enthalten von ihm 54 Abhandlungen, die Schriften der *Münchener Academie* 2, die *Acta Helvetica* 7. 50 Aufsätze sind enthalten im *Berliner astronomischen Jahrbuch*, zu dessen Gründung er den eigentlichen Impuls gegeben hatte, 6 Aufsätze in den Leipziger *Nova acta eruditorum*, 7 im Leipziger *Magazin für reine und angewandte Mathematik*, 6 im *Archiv der reinen und angewandten Mathematik, herausgegeben von Hindenburg.* Daneben führte er eine umfangreiche wissenschaftliche Correspondenz, welche von *Johann Bernoulli* herausgegeben wurde unter dem Titel: *Deutscher gelehrter Briefwechsel*, Berlin 1782 bis 1784. 5 Bände. In der That arbeitete *Lambert* sehr rasch. So schreibt er z. B. in einem Briefe vom 4. März 1777, dass er an der *Pyrometrie* seit 1756 wenig gearbeitet und noch gar nichts »ins Reine gebracht« habe. Und doch war bei seinem Tode am 25. September das Werk, welches einen grossen Quartband von 360 Seiten umfasst, bereits dem Verleger übergeben. Freilich steht hiermit die *Flüchtigkeit* in der äusseren Form seiner Schriften in Zusammenhang.

Es sollen nun die wichtigsten *Schriften Lambert's* namhaft gemacht werden.

Auf dem Gebiet der Philosophie arbeitete Lambert mit dem Bestreben, hier die Formen der Mathematik einzuführen und eine exacte Beweisführung zur Geltung zu bringen. *Kant* hielt ihn unter den Zeitgenossen für den bedeutendsten. Einer bestimmten Schule gehörte er nicht an, auch nicht der damals blühenden *Wolf*'schen. Die Hauptwerke sind:

1. *Neues Organon, oder Gedanken über die Erforschung und Bezeichnung des Wahren und dessen Unterscheidung vom Irrthum und Schein.* Leipzig 1764. 2 Bde. Das Werk ist eine Bearbeitung der Logik in vollständig neuer Gestalt. Der erste Theil behandelt das eigentliche Gebiet der gewöhnlichen Logik, der zweite handelt von den Kriterien der Wahrheit, der dritte von der Bezeichnung der Gedanken durch die Sprache (Sprachphilosophie), der vierte vom Schein.

2. *Architectonik oder Theorie des Einfachen und Ersten in der philosophischen und mathematischen Erkenntniss.* Riga 1771. 2 Bde.

Ausserdem hat sich Lambert mit dem Problem der *Begriffsschrift* viel beschäftigt. Doch hat er ein Werk darüber nicht hinterlassen und seine Aufzeichnungen sollen zu fragmentarisch sein.

Die mathematischen Untersuchungen sind zum Theil enthalten in: *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung.* 3 Theile in 4 Bänden. Berlin 1765, 1770, 1772. Aus dem ersten Theile sei erwähnt die Theorie der Zuverlässigkeit der Beobachtungen und Versuche, aus dem zweiten Theil: die Lehre von den Theilern der Zahlen, die Tetragonometrie, die Bemerkungen über die Auflösung der Gleichungen, über die Quadratur und Rectification der krummen Linien und die *Gedanken über die Grundlehren des Gleichgewichts und der Bewegung*, aus dem dritten Theil: die Bemerkungen über die Interpolationslehre und über die Sterblichkeitstabellen.

Grössere Bedeutung haben die Abhandlungen erlangt über die Theorie des *Augenmaasses*, der *freien* (Linear-)*Perspective*, der *Luftperspective* und besonders über die *Kartenprojection*. Genannt seien ferner die *Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen*, Berlin 1770, die *Beschreibung der logarithmischen Rechenstäbe*, Augsburg 1761, die Anmerkungen über die Gewalt des Schiesspulvers, ebenso mehrere Abhandlungen über Wasser- und Windmühlen.

Die Schriften zur Physik kommen zum Theil im Folgenden ausführlicher zur Sprache. Ausser der *Photometria*, der *Pyrometrie* (Lehre von der Wärme) und den *propriétés de la route de la lumière* sollen hier nur erwähnt werden seine Untersuchungen über die *Gestalt der Sprachröhre*, die *Flöten*, den *Klang elastischer Körper*, die *jährlichen Schwankungen des Barometers*, die *Hygrometrie* und die *Farbenpyramide*, welche Lambert zuerst construirte.

Die bedeutendsten Verdienste *Lambert's* liegen aber wohl auf dem Gebiete der Astronomie, und sein massgebender Antheil an der Gründung des *Berliner astronomischen Jahrbuches* wurde schon erwähnt. Unter den zahlreichen hier, sowie anderwärts veröffentlichten Aufsätzen, welche sich fast auf das ganze Gebiet der Wissenschaft erstrecken, seien diejenigen hervorgehoben, welche sich auf die Berechnung der *Finsternisse*, die *Refraction*, das *Problem der drei Körper* und die *grosse Gleichung zwischen Jupiter und Saturn* beziehen. (Lambert vermuthete die Periodicität dieser damals noch unerklärten Störung und bestimmte die Periode auf empirischem Wege zu 1045½ Jahren). Seine Untersuchungen über den Venustrabanten sind durch ein Epigramm *Kaestner's* in weiteren Kreisen bekannt geworden. Als selbstständige Werke sind erschienen:

1. *Cosmologische Briefe über die Einrichtung des Weltbaues*. Augsburg 1761. Das Werk, schon in *Chur* entworfen, stellt die bekannte Ansicht des Verfassers dar über Constitution des Universums und wurde lange Zeit in weitesten Kreisen gern gelesen.

2. *Insigniores orbitae cometarum proprietates*. Augsbg. 1761.

Es wird kaum nöthig sein, zu bemerken, dass ein grosser Theil der Schriften *Lambert's* veraltet ist. Immerhin aber bietet ihre Lectüre, wenn man das Alterthümliche in der Form zu überwinden vermag, den Reiz der Originalität und in nicht wenigen Punkten sind die Theorien Lambert's, wenn sie auch heute in einem anderen Gewand auftreten, im Wesen der Sache bis jetzt nicht überholt. Speciell den Astronomen bleibt *Lambert* im Gedächtniss durch 3 Sätze, welche seinen Namen tragen:

1. Das *Grundgesetz der Photometrie* (*Photometria*).

2. Der von *Euler* bereits für die *Parabel* gefundene, von *Lambert* aber neuentdeckte und auf alle *3 Kegelschnitte* ausgedehnte Satz, welcher die zu zwei verschiedenen Planetenörtern zugehörige Zwischenzeit ausdrückt durch die *halbe grosse Axe*, die *Summe der Radienvectoren* und die *Sehne* (*Insigniores orb. com. prop.*).

3) Das Kennzeichnen, nach welchem man beurtheilen kann, ob ein Komet weiter von der Sonne entfernt ist, als die Erde davon absteht. Denkt man sich durch den ersten und letzten von 3 scheinbaren Oertern einen grössten Kreis gelegt, so weicht der mittlere Ort nach der Sonne hin ab, wenn der Komet weiter entfernt ist, als die Erde. Im anderen Fall ist das Verhalten umgekehrt (Mém. de Berlin 1770).

Die Photometrie vor Lambert. Ausser einigen Abhandlungen von *Euler*, welche im Folgenden Erwähnung finden, bestand, als *Lambert* die »*Photometria*« schrieb, die ganze Litteratur über den Gegenstand aus den zwei Werken von *Smith* und von *Bouguer*.

I) Die Optik von Smith hat im Original den Titel *A compleat System of optiks. By Robert Smith. Cambridge 1738.* Eine französische Ausgabe, *cours complet d'optique*, erschienen 1767 zu Paris, und besorgt von *Pezenas*, hat zahlreiche Anmerkungen des Herausgebers, welche den Umfang des Werkes verdoppeln. Die deutsche Ausgabe ist betitelt: *Vollständiger Lehrbegriff der Optik nach Herrn Robert Smiths Englischen mit Aenderungen und Zusätzen ausgearbeitet von Abraham Gotthelf Kästner.* Altenburg 1755. Diese deutsche Ausgabe scheint *Lambert*, welcher dieselbe häufig citirt, als sein Lehrbuch der Optik benutzt und genau studirt zu haben. Wenigstens hat die *Photometria* in der Bezeichnungs- und Ausdrucksweise manche Anklänge an dieses Werk. Das erste Buch: *Die Erfahrungen*, behandelt den Gegenstand populär, das zweite Buch, die *Geometrie des Lichts*, zerfällt in die analytische Katoptrik und die analytische Dioptrik, während das dritte Buch *von der Verfertigung der optischen Werkzeuge* handelt. Von diesen drei Büchern sind das erste und das dritte zumeist mit wenigen Aenderungen einfach übersetzt, dagegen sagt *Kästner* vom zweiten Buch, dass er dasselbe nicht aus dem Englischen ins Deutsche, sondern aus dem synthetischen Vortrag in den analytischen übersetzt habe. Von einem vierten Buch, welches von den Entdeckungen berichtet, die mit dem Fernrohr gemacht worden sind, ist so gut wie nichts aufgenommen. Man sieht also, dass ein eigener Abschnitt über Photometrie in dem Werke nicht vorkommt, und auch unter den einzelnen Kapiteln beschäftigt sich keines speciell oder auch nur vorwiegend mit diesem Gegenstand. Die photometrischen Bemerkungen finden sich vielmehr nur gelegentlich und an ganz verschiedenen Stellen eingestreut, sind aber weder an Ausdehnung noch an Qualität geeignet, den Umstand zu rechtfertigen, dass *Lambert* bei jeder Gelegenheit mit unverkennbarer Aufmerksamkeit immer wieder auf dieses Werk zurückkommt.

II) Bouguer hat zwei Werke über Photometrie hinterlassen. Von diesen hat *Lambert* bis zum Druck der *Photometria* nur das erste gekannt, nämlich den *Essai d'optique sur la gradation de la lumière, Paris 1729.* Im ersten Abschnitt, welcher von der *Messung der Lichtstärken* handelt, wird das Princip aufgestellt, dass man verschiedene Lichtintensitäten erst dann mit einander vergleichen kann, nachdem die stärkere in einem gewissen gesetzmässigen Verhältniss so weit abgeschwächt worden ist, bis sie der schwächeren gleich ist. Das Gesetz, nach welchem die Schwächung vor sich geht, ist entweder das Gesetz vom umgekehrten Quadrat der Entfernung vom natürlichen leuchtenden Punkte, oder das entsprechende Gesetz für ein Linsensystem, nämlich dass die Intensität des Zerstreuungsbildes eines leuchtenden Punktes umgekehrt proportional ist dem Quadrat der Entfernung des Auffangeschirms vom geometrischen Bildpunkt.

Der zweite Abschnitt »*de la transparence et de l'opacité*« sucht die Absorption der Lichtstrahlen zu erklären. Die gewöhnliche Ansicht der Physiker war, dass die Körper nach allen Richtungen hin Poren besitzen, um das Licht durchlassen zu können. Dieser Ansicht schliesst sich *Bouguer* nicht an, sondern meint, dass die Körper als solche das Licht durchlassen. Hierzu denkt er sich dieselben zwar auch durchhöhlt, aber nicht in so regelmässiger Weise. Schlagen nun die Aethertheilchen auf ein Theilchen des Körpers auf, so wird dasselbe in der Richtung des Lichtstrahles fortbewegt, gibt aber seine Bewegung wieder ab an diejenigen Aethertheilchen, welche in den Hohlräumen des Körpers befindlich, von jenem ersten Körpertheilchen angestossen werden. Diese Aethertheilchen stossen, in der Richtung des Lichtstrahls fortschreitend, wieder auf Körpertheilchen auf, und so wiederholt sich das Spiel, bis der Strahl den Körper durchdrungen hat. Mit dieser, wenn auch recht primitiven, Vorstellung ist die *Newton*'sche Emanationstheorie durchbrochen; denn diese *Bouguer*'sche Bewegung kommt überein mit einer räumlichen Fortpflanzung eines Impulses, während die Träger desselben ihren Platz nicht oder nur vorübergehend verlassen. — Nun hatte *Bouguer* durch Beobachtungen gefunden, dass die Lichtschwächung im arithmetischen Verhältniss des durchlaufenen Weges nicht stattfindet, und auf Grund seiner eigenen Vorstellungsweise gelangte er durch eine Ueberlegung, die allerdings nicht in bündiger Form mitgetheilt wird, zu dem gewöhnlichen Exponentialgesetz.

Im dritten Abschnitt wird eine Reihe von *Aufgaben* gelöst, die mit der *Absorption* des Lichts in Zusammenhang stehen. Man kann dieselben am einfachsten dadurch ausdrücken, dass man ihnen eine mathematische Form gibt:

Erste Aufgabe: Gegeben e^{-ax_0}, gesucht e^{-ax}.

Zweite Aufgabe: Gegeben e^{-ax_0}, aus $e^{-ax} = B$ ist x zu bestimmen.

Dritte Aufgabe: Gegeben ist für einen ersten Körper $e^{-a_0 x}$, und für einen zweiten $e^{-a_1 x}$;

gesucht ist die specifische Transparenz $\frac{a_0}{a_1}$.

Vierte Aufgabe: Vermöge der Gleichung $\frac{\log e^{-ax_0} - \log e^{-ax}}{x - x_0}$

$$= \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} \text{ Mod} = a \cdot \text{Mod wird } a \text{ bestimmt.}$$

Fünfte Aufgabe: Es wird diejenige Lichtmenge bestimmt, gegen welche das Auge unempfindlich ist. Diese Grösse ergibt sich zu

$$\frac{1}{900\,000\,000\,000} \text{ des Sonnenlichts.}$$

Im vierten Abschnitt werden ähnliche Aufgaben für nicht paralleles, also *divergentes* Licht behandelt. Ferner wird das Verhältniss der Lichtstärken bestimmt, welche von zwei verschiedenen Lichtquellen aus nach einem bestimmten Punkte E hingelangen, wenn sowohl die beiden Lichtquellen wie der beleuchtete Punkt in einem absorbirenden Medium enthalten sind.

Endlich wird der geometrische Ort für den Punkt E aufgesucht, wenn jenes Verhältniss der Lichtstärken ein constantes sein soll.

Der fünfte Abschnitt handelt von den Medien ungleichförmiger Durchsichtigkeit, und insbesondere von der *Extinction in der Atmosphäre*. Hierbei wird der Weg des Lichts *geradlinig* vorausgesetzt, dagegen auf die *Krümmung der Erde*, und mithin auch der Luftschichten, Rücksicht genommen. Mit Hilfe einer Absorptionsconstante, welche *Bouguer* durch eigene Beobachtungen bestimmt hatte, wird eine *Extinctionstafel* abgeleitet, aus welcher zur Vergleichung mit der Lambert'schen Tafel § 886 folgender Auszug mitgetheilt sei:

Licht ausserhalb der Atmosphäre:		1.0000
Höhe des Gestirns:	90°	0.8123
	80	0.8098
	70	0.8016
	60	0.7866
	50	0.7624
	40	0.7237
	30	0.6613
	20	0.5474
	10	0.3149

III) Das zweite Hauptwerk von *Bouguer*, welches man bisweilen als die zweite Auflage des vorbenannten bezeichnet, hat den Titel: *Traité d'optique sur la gradation de la lumière. Ouvrage posthume de M. Bouguer, et publié par M. l'Abbé de Lacaille.* Es erschien zu *Paris* im Jahre 1760 und ist an Inhalt wie an Umfang bedeutend reichhaltiger als das frühere Werk. *Das erste Buch* enthält dem Gegenstande nach dasjenige, was der erste Abschnitt des früheren Werkes enthielt. Auch im Princip der Behandlung der Sache ist Neues zu den dort besprochenen zwei Methoden, Lichtstärken zu messen, nicht hinzugekommen. Dagegen ist ein besonderer Werth auf die Ausführung von Versuchen und auf geschickte Variation in der Anordnung derselben gelegt. Zu den drei früheren Hauptversuchen, nämlich über den Absorptionscoefficienten des Meerwassers, über den Einfluss der Elevation auf die Helligkeit der Sterne und zu den Versuchen, welche die Vergleichung der Intensitäten der Sonne und des Vollmondes betreffen, kommen hier neu hinzu: die Bestimmung der Reflexionsfähigkeit der Spiegel, des Gypses, des Papiers, die Vergleichung zwischen der Helligkeit des heiteren Himmels und des Vollmonds und zwischen den Helligkeiten des Sonnenrandes und des Sonnencentrums.

Das dritte Buch, welches die Atmosphäre behandelt, erschöpft seinem Inhalt nach die übrigen Abschnitte des früheren Werkes.

Wesentlich neu ist dagegen das ganze *zweite Buch*: *Recherches sur la quantité de lumière que réfléchissent les surfaces tant polies que brutes.* Zunächst wird die Spiegelung durch vollkommen glatte Oberflächen erörtert, und hier auch der von *Lambert* in Bezug auf seine Giltigkeitsgrenzen genau discutirte Satz oberflächlich abgeleitet, dass eine vollkommen glatte Kugel, welche von parallelem Licht getroffen wird, dasselbe so zurückwirft, wie ein leuchtender Punkt. Sodann wird ein Körper gedacht, dessen geometrische Oberfläche in ihren kleinsten Theilchen sich aus spiegelnden Hemisphären zusammensetzt, und für einen solchen Körper werden die Behauptungen aufgestellt, dass die scheinbare Fläche am Rande heller erscheinen müsse als im Centrum, und dass die Gesammtheit des zurückgeworfenen Lichts sich verhalte wie der Phasenwinkel. Die Beweise für diese Behauptungen werden, wie fast immer bei *Bouguer*, nicht erbracht. Ueber die Reflexionsfähigkeit der gewöhnlichen ebenen Spiegel für verschiedene Incidenzwinkel werden Untersuchungen angestellt, aus denen sich ergibt, dass das Verhältniss zwischen der einfallenden und der ausgestrahlten Lichtmenge nicht constant ist für alle Incidenzwinkel. Speciell für Wasser und Glas werden Tafeln mitgetheilt. — Die Zurückwerfung des Lichts durch matte Oberflächen denkt sich *Bouguer* hervorgebracht durch zahllose kleine ebene Spiegel. Dieser Gegenstand wird mit grosser Ausführlichkeit besprochen und zur Veranschaulichung wird eine Curve (oder vielmehr eine Fläche) eingeführt, die numératrice des aspérités, welche so definirt ist, dass ihre Radienvectoren ihrer Länge nach die Zahl der spiegelnden Flächen angeben, die auf der Richtung derselben senkrecht stehen. Der Verfasser vermag aber nicht, bis zu einer bestimmten concreten Beleuchtungsformel vorzudringen, und theilt schliesslich, um wenigstens etwas zu geben, eine Interpolationsformel mit. Das Beleuchtungsgesetz glaubt er hiernach durch die Formel $\cos\varepsilon - \beta \cos^m \varepsilon$ ausdrücken zu können, wo β für die Sonne positiv, für die Planeten negativ ist — weil nach *Bouguer* die Sonne am Rande dunkeler, die Planeten am Rande heller sein sollen als in der Mitte. Die mitgetheilten, durch Beobachtung bestimmten Zahlen, welche den Einfluss des Emanationswinkels auf die Lichtmenge darstellen sollen, sind unzureichend wegen der geringen Anzahl der betrachteten Emanationswinkel (die überdies den Incidenzwinkeln gleich gesetzt sind), und weil sich die Untersuchung nur auf sehr wenige Substanzen erstreckt.

Lambert's Photometrie. Es erschien nöthig, auf die Arbeiten *Bouguer*'s genauer einzugehen, weil von *Zöllner* (Photometrische Untersuchungen S. 27 fgde.) der Versuch gemacht worden ist, die Verdienste *Bouguer*'s um die Begründung der Photometrie gegenüber denen *Lambert*'s in den Vordergrund zu stellen.

»Mit gewissenhafter Sorgfalt und scrupulöser Vorsicht werden von *Bouguer* sinnreiche Versuche angestellt, welche bei einer unerschöpflichen Ideenfülle den Ausgangspunkt für weitere Speculationen bilden, ohne dabei jedoch mehr aus den Beobachtungen zu folgern, als sich strenge genommen aus ihnen folgern lässt.« Umgekehrt wird *Lambert* gegenüber geltend gemacht, dass derselbe viel zu rasch, auf Grund weniger und schlecht begründeter Erfahrungen Theorien aufgebaut habe, welche möglicherweise den Fällen der Natur nicht entsprechen. Nun enthalten allerdings die Resultate, zu welchen eine Theorie hinführt, im Wesen der Sache durchaus nichts anderes als eben dasjenige, was man von vornherein an Voraussetzungen in dieselbe hineingetragen hatte. Der Werth der ersteren wird also durch die Güte der letzteren bestimmt. Nichtsdestoweniger macht aber gerade der Weg von den Principien bis zu den Resultaten den Inhalt einer Wissenschaft aus, und es liegt auf diesem Gebiet, ganz abgesehen von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit der Principien, der Spielraum für die formelle Vollendung der Theorie. In diesem Sinne ist ganz allein *Lambert* als der Begründer der Photometrie zu bezeichnen. Denn wenn auch *Zöllner*'s Vorwurf gerechtfertigt ist, so behält *Lambert* doch das Verdienst, die Begriffe und das System der Photometrie geschaffen zu haben. Dagegen vermag *Bouguer* in den meisten Fällen nicht, über seine allgemeinen Erwägungen hinaus zu greifbaren Resultaten vorzudringen oder auch nur seinen Vorstellungen eine solche Fassung zu geben, dass sie sich mathematisch verarbeiten liessen. Insbesondere gilt dies für die Hypothese über die Beschaffenheit zerstreut reflectirender Oberflächen, über welche *Zöllner* seine Anerkennung ausspricht, ohne zu bemerken, dass gerade hierüber *Lambert* ungleich klarere Vorstellungen besass (vgl. § 620, 622). Richtig ist es wohl, dass *Bouguer* aus seinen Beobachtungen nicht mehr schliesst, als sich mit Sicherheit schliessen lässt, aber es reducirt sich auch dasjenige, worauf er bei seinen endlosen Erwägungen hinauskommt, zu deutsch gesagt, auf Nichts. Gerade das ist aber charakteristisch für *Lambert*, dass er für jedes Problem eine bis zum Ziel gelangende mathematische Lösung zu geben weiss, wenn dies auch bisweilen nur durch eine solche Vereinfachung der Bedingungen ermöglicht wird, welche dem Resultat nur den Charakter einer rohen Annäherung beizulegen gestattet. Uebrigens wäre es verkehrt, die wissenschaftlichen Verdienste eines Mannes nach dem reciproken Werth der Anzahl seiner Irrthümer zu messen; und es ist trotz derselben das Studium der *Lambert*'schen Photometrie auch für den heutigen Astrophysiker ebenso unentbehrlich, wie für den Astronomen etwa das Studium der *Laplace*'schen Mécanique céleste. Der Herausgeber hat diese Gelegenheit, *Lambert*'s Verdienste hervorzuheben, um so lieber benutzt, je mehr sich im Folgenden Gelegenheit zur Kritik bieten wird. Gleichzeitig sollte gezeigt werden, welch geringes Maass von Vorarbeiten in dem Sinne vorlag, in welchem *Lambert* die Photometrie ausgebaut hat.

Als *Lambert* seine Photometrie schrieb, beschränkte sich das gesammte Gebiet der schulmässigen Lehre vom Licht auf die geometrische Optik. Hierzu sollte nun die Photometrie den zweiten Theil der Optik bilden (vgl. § 17). In der That kann man viele Zweige der heutigen theoretischen Optik dem Effect nach als eine auf die Principien der Wellenlehre begründete Photometrie ansehen, und *Lambert* behandelt in seiner einfachen Weise mehrere der Fragen, welche nur mit Hilfe der neueren Undulationstheorie beantwortet werden können. Da also die Hauptaufgabe des Werkes in das Gebiet der Optik fällt, so erklärt sich hieraus ein Theil derjenigen weiteren Ausführungen, welche im Grunde nichts anderes als behagliche theoretische Plaudereien sind, die aber dem modernen Leser, der die astrophysikalische Anwendung im Auge hat, sozusagen als Spielereien erscheinen müssen. *Lambert* selbst hat an eine Astrophysik nicht gedacht, und die astronomischen Anwendungen der letzten Theile sind lediglich als Beispiele anzusehen.

Die *Lambert*'sche Photometrie umfasst dem *Inhalt* nach das gesammte Gebiet der Photometrie in der Weise, dass es unter den seit jener Zeit bis zur Gegenwart aufgeworfenen und behandelten Fragen nur sehr wenige gibt, welche durch *Lambert* nicht schon erörtert oder wenigstens berührt worden wären. Was die *Form* anbelangt, so hat dem Werk ohne Zweifel die ungebührliche Breite geschadet, mit welcher die gewöhnlichsten Dinge auseinandergesetzt werden. Die rein mathematischen Entwickelungen sind zwar meistens präcis und auch elegant durchgeführt, doch ist die kleinliche Discussion der aufgestellten Lehrsätze ermüdend, ebenso wie die zahlreichen geometrischen Deutungen, die sich jedem von selbst bieten müssen und zur Förderung der Sache nichts beitragen. Keineswegs soll aber die Geschicklichkeit verkannt werden, mit welcher der Verfasser die geometrische Construction zu verwenden weiss, um schwierigere Aufgàben durch graphische Darstellungen zu lösen, und auf diese Weise lange Zahlentabellen zu vermeiden. Einen so sinnreichen und ausgedehnten Gebrauch, wie *Lambert* es hier und in seinen anderen Werken thut, hatte bis dahin niemand von der geometrischen Construction zu machen gewusst. Der lateinische Stil *Lambert*'s ist ohne Zweifel besser als die durchschnittliche Schreibweise anderer Autoren seines Faches. Seine Ausdrucksweise und sein Satzbau sind gewandt, und beachtenswerth ist die Kürze, mit welcher er oft die Termini technici seiner Wissenschaft in der todten Sprache leicht verständlich wiederzugeben weiss. Verschiedene grammatische Fehler und einige grobe Germanismen (z. B. *dantur*, es gibt, *locum habere*, statthaben, *assumere*, annehmen = den Fall setzen), welch' letztere der kurzen Deutlichkeit wegen fast beabsichtigt scheinen, fallen gegenüber der im übrigen leicht verständlichen Ausdrucksweise wenig ins Gewicht.

Der vollständige Titel des Werkes lautet

J. H. Lambert
Academiae scientiarum electoralis Boicae et societatis physico-medicae Basiliensis membri, regiae societati scientiarum Goetingensi commercio literario adjuncti
Photometria
sive
de
mensura et gradibus
luminis
colorum et umbrae.
(Vignette)
Augustae Vindelicorum,
Sumptibus viduae Eberhardi Klett
Typis Christophori Petri Detleffsen.
MDCCLX.

Die Photometrie nach Lambert. Das Werk *Lambert*'s und mit ihm die Photometrie überhaupt geriethen bald wieder in Vergessenheit, welche um so länger andauerte, als seit dem

Anfang des Jahrhunderts die Optik in der neu auflebenden Wellentheorie ein Gebiet gefunden hatte, welches sich ungleich fruchtbarer erwies, als es die Photometrie in dem *Lambert*'schen Sinne war.

Den ersten Anstoss, auch die Photometrie wieder zur Geltung zu bringen, gab wohl das Werk von *Steinheil: Elemente der Helligkeitsmessungen am Sternenhimmel* (Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der Königl. Bayerischen Academie der Wissenschaften, 2. Band). Den Hauptinhalt der Abhandlung bildet zwar nur die Beschreibung des von *Steinheil* erfundenen *Prismenphotometers*. Aber die Darstellung ist in einer solchen Weise exact, dass sie auffordern musste zu einer weiteren wissenschaftlichen Verwendung des Apparates. Beispielsweise werden bereits hier die Helligkeitsverhältnisse der Grössenklassen der Fixsterne genau in der Weise erörtert, wie sie durch das später von *Fechner* aufgestellte psychophysische Gesetz gefordert wird.

Doch beginnt der eigentliche Aufschwung erst, seitdem *Seidel* das Steinheil'sche Instrument thatsächlich zu astrophotometrischen Messungen verwendet hatte. Da sich später Gelegenheit bietet, die Leistungen der zahlreichen anderen Forscher und Beobachter zu erwähnen, welche im Laufe der Zeit zur Förderung des Gegenstandes beigetragen haben, so seien hier nur diejenigen drei Namen hervorgehoben, an welche sich ein wesentlicher innerer Fortschritt der Wissenschaft geknüpft hat.

I. Seidel's Arbeiten zeichnen sich vorzugsweise durch ihren *systematischen Charakter* und durch ihre *Exactheit* aus: in der *ersteren* Hinsicht u. A., sofern die *Lambert*'sche Theorie in einheitlicher Weise wieder zur Geltung gebracht wurde, was man sich gegenüber der bis dahin herrschenden Principlosigkeit vor Augen halten muss, und in *zweiter* Linie, sofern man heute noch fortwährend auf die musterhaften *Seidel*'schen Messungen zurückzukommen genöthigt ist. *Seidel*'s Arbeiten umspannen fast das ganze Gebiet, welches von der grössten Zahl der späteren Beobachter mit Vorliebe gepflegt worden ist.

In der *ersten* Abhandlung: *Untersuchungen über die gegenseitigen Helligkeiten der Fixsterne erster Grösse und über die Extinction des Lichtes in der Atmosphäre* (Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der Königl. Bayerischen Academie der Wissenschaften, 6. Bd., 3. Abtheilung, München 1852) ist das Hauptgewicht auf die Vorfrage aller photometrischen Messungen gelegt, nämlich die Extinction; die

Helligkeitsbestimmung der Fixsterne 1. Grösse erscheint mehr als Nebenresultat. Anhangsweise werden die bis dahin bekannten Vergleichungen aufgezählt einerseits zwischen der Lichtstärke der Sonne und der des Vollmondes, andererseits der des Vollmondes und der Sterne. Bereits hier wird wiederholt auf die Lambert'sche Theorie als Norm hingewiesen.

Die *zweite* Abhandlung: *Untersuchungen über die Lichtstärke der Planeten Venus, Mars, Jupiter und Saturn, verglichen mit Sternen, und über die relative Weisse ihrer Oberflächen. Nebst einem Anhange, enthaltend die Theorie der Lichterscheinung des Saturn.* (*Monumenta saecularia* der Königl. Bayerischen Academie der Wissenschaften. München 1859 ist dem Inhalt nach durch den Titel genügend gekennzeichnet.)

Die *dritte* Abhandlung: *Resultate photometrischer Messungen an 208 der vorzüglichsten Fixsterne* (Abhandlungen der K. Bayer. Ac. d. Wissensch., 9. Bd., 3. Abtheilung, München 1863) hat das Ziel, einen photometrischen Helligkeitskatalog zu liefern. Dabei ergibt sich eine zweite Extinctionstafel. Man vergl. auch § 2, wo die seit *Seidel* übliche Ausgleichung der Beobachtungen durch die Helligkeitslogarithmen besprochen wird.

II. Zöllner. Die Abhandlung: *Grundzüge einer allgemeinen Photometrie des Himmels, Berlin 1861* hat den Inhalt 1) die Beschreibung des von Zöllner erfundenen *Polarisationsphotometers* nebst Auseinandersetzungen über die Methoden, Beobachtungen mit diesem Instrument anzustellen und dieselben zu reduciren, 2) die Ableitung eines *Helligkeitskatalogs* von Fixsternen.

Das Hauptwerk *Zöllners: Photometrische Untersuchungen mit besonderer Rücksicht auf die physische Beschaffenheit der Himmelskörper, Leipzig 1865* ist dasjenige, durch welches, wenigstens in der Idee, die Astrophysik geschaffen worden ist, welche vorläufig in zwei Hauptzweige, die Photometrie und die Spectralanalyse zerfällt. Das Werk enthält vier Theile: 1) *Vergleichende Kritik von Lambert's und Bouguer's Principien der Photometrie.* Nach einer Kritik der verschiedenen Beweise für das Emanationsgesetz Lambert's bei selbstleuchtenden Körpern gelangt der Verfasser zu einem strengen Beweis, der dann auch auf nicht-selbstleuchtende Körper ausgedehnt wird, sofern bei ihnen die Oberflächenspiegelung keine Rolle spielt. 2) *Theorie der relativen Lichtstärke der Mondphasen:* Hier wird die

Annahme gemacht, dass auf jedes Element der Mondoberfläche das Lambert'sche Grundgesetz anwendbar sei, und dann werden die Modificationen untersucht, welche veranlasst werden durch die *ellipsoidische Gestalt* und durch die *Bodenerhebungen auf der Oberfläche.* 3) *Methode und Resultate der Beobachtungen:* Auf eine Besprechung der Beobachtungsmethoden mit dem bereits erwähnten und mit einem zweiten, etwas anders construirten, im Princip aber nicht wesentlich abweichenden Photometer folgt die Behandlung der Hauptaufgabe: die Lichtstärke der Sonne zu vergleichen sowohl mit derjenigen des Mondes, wie auch direct mit derjenigen der Planeten und der Fixsterne. Diese Aufgabe war bis dahin indirect behandelt worden, indem man die Sonne mit dem Mond, diesen mit den Sternen verglich. Das Ziel dieser Untersuchung ist die Bestimmung der absoluten Beträge der Albedo der Planeten. Der vierte Theil: 4) *Ueber die physische Beschaffenheit der Himmelskörper* zieht nun aus diesen Resultaten die Consequenzen, indem die Albedo der Planeten mit derjenigen von irdischen Substanzen verglichen wird, woraus sich Folgerungen über die physicalische Oberflächenbeschaffenheit der Planeten ergeben sollen, Consequenzen, welche *Seidel* vermieden hatte, dadurch, dass er wegen der Unsicherheit der Vergleichung so wesentlich verschiedener Lichtintensitäten bei den relativen Albedowerthen stehen geblieben war. Hier finden sich auch die Reflexionen über die Entwickelungs- oder vielmehr Untergangsgeschichte der Fixsterne und der Planeten, über die veränderlichen Sterne u. s. w., wie denn überhaupt dieser geistreich geschriebene Abschnitt derjenige ist, welcher zu den grossen Hoffnungen Veranlassung gegeben hat, die den Aufschwung der Astrophysik herbeigeführt haben. Man kann die Tendenz von *Zöllner*'s Untersuchungen durch seine eigenen Worte so ausdrücken (S. 28), *dass die Helligkeitsveränderungen, welche eine zerstreut reflectirende Oberfläche bei verschiedenen Incidenz- und Emanationswinkeln des ein- und austretenden Lichtes zeigt, ganz charakteristisch für die Natur und physikalische Beschaffenheit jener Oberflächen sein müssen.* Und ebenso (S. 208): *Es ist demnach die Möglichkeit wissenschaftlicher Untersuchungen gegeben, welche sich auf die physische Beschaffenheit von Körpern beziehen, deren Dasein uns, im Gegensatze zu den Körpern unserer Erde, lediglich durch gewisse Wirkungen aus der Ferne bekannt ist.*

III. Wesentliche Umgestaltungen hat die Photometrie erfahren, seitdem sich Seeliger diesem Gebiete zugewandt hat.

5*

Seine Schriften sind theils *kritisch-destructiver Tendenz*, theils bezwecken sie die *Ausbildung des photometrischen Calcüls*, theils endlich liegen sie im Sinne des *Zöllner'schen Programmes*, das allerdings in wesentlich anderer Art, als es von seinem Urheber gedacht war, zur Ausführung kommt. Genannt seien hier nur drei Abhandlungen: 1) *Bemerkungen zu Zöllner's »photometrischen Untersuchungen«* (Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft, 21. Jahrgang, 1886, S. 216 fgde.). 2) *Zur Photometrie zerstreut reflectirender Substanzen* (*Sitzungsberichte* der mathematisch-physikalischen Classe der K. Bayer. Acad. d. Wiss. 1888, Heft 2, S. 201). 3) *Zur Theorie der Beleuchtung der grossen Planeten*, *insbesondere des Saturn* (*Abhandlungen* der K. Bayer. Academie der Wiss. 2. Classe, 16. Bd., 2. Abth., München 1887, S. 405 fgde.). Die letztgenannte Schrift ist als Hauptwerk zu betrachten.

Die Kritik richtet sich zunächst gegen das *Lambert*'sche Grundgesetz, soweit es sich auf nicht-selbstleuchtende Körper bezieht. Anstatt desselben wird ein neues aufgestellt, welches auf einer consequenten Durchführung des von *Zöllner* angeregten Gedankenganges beruht. Es wird ferner die *Zöllner*'sche Theorie der Lichtstärken der Mondphasen vollständig vernichtet, indem von den zwei erwähnten Erörterungen der *Zöllner*'schen Phasentheorie die eine als nichtssagend, die andere als mathematisch fehlerhaft nachgewiesen wird. Da der Albedobegriff, wie gezeigt wird, in Abhängigkeit steht vom gewählten Grundgesetz, so ergeben sich auch die von *Zöllner* auf die gefundenen Albedowerthe gegründeten Schlüsse als hinfällig. Von diesen Erörterungen, welche den Gegenstand der Abhandlung 1) bilden, werden einige in der Abhandlung 2) weiter ausgeführt; doch enthält die letztere dem Hauptinhalt nach *experimentelle* Studien über das Grundgesetz. Dagegen erhält die photometrische *Theorie* eine bedeutende Vervollständigung durch die Ableitung der Beleuchtungsformeln für das Rotationsellipsoid, und zwar sowohl bei Annahme des *Lambert*'schen Grundgesetzes, wie auch der *Absorptionsformel*. Diese Untersuchung bildet den ersten Theil der Abhandlung 3). Der zweite Theil löst auf photometrischem Wege das Problem des *Saturnringes* in einer solchen Weise, dass das photometrische Grundgesetz ausser Betracht bleibt.

Nicht unerwähnt sei auch an dieser Stelle ein kurzes, allerdings ganz auf Lambert'schem Boden stehendes Lehrbuch der Photometrie: *Beer*, *Grundriss des photometrischen Calcüles*, Braunschweig 1854. Von den Werken und Abhandlungen über die Anwendung der Photometrie auf die Technik sei nur genannt: *H. Krüss*, *electrotechnische Photometrie* (1886, 32. Bd. der electrotechnischen Bibliothek von Hartleben, Wien und Leipzig).

Die gegenwärtige Ausgabe der »Photometria.«

D i e A u s w a h l. Vom Katheder aus vorgetragen, wäre die *Lambert*'sche »*Photometria*« mit allen ihren breiten Ausführungen, Specialisirungen, Wiederholungen ein vortrefflicher Lehrcurs des photometrischen Calcüles. Dagegen ist sie für eine Sammlung von Klassikern, wie die vorliegende, in der Form des Originals nicht geeignet. Demnach sind eine grosse Anzahl derartiger, sozusagen retardirender, Ausführungen in die gegenwärtige Ausgabe nicht aufgenommen worden, so weit dies möglich war, ohne den Zusammenhang zu zerreissen. Gerade die Absicht, die Weglassungen so anzuordnen, dass auch dann noch das Werk in sich als Ganzes erscheinen soll, hat die Aufnahme manches Abschnittes veranlasst, der im anderen Fall besser fortgeblieben wäre. Immerhin dürfte das Mitgetheilte auch für den, welcher der historischen Form Interesse entgegen bringt, mehr als genügend sein.

In einigen wenigen Fällen wurden auch solche Abschnitte ausgeschlossen, welche sich mit veralteten und auch historisch nicht mehr interessanten Theorien beschäftigen. Wegen des Umfangs dieser Abschnitte dürften diese Kürzungen an Ausdehnung die bedeutendsten sein. Aufgenommen wurden dagegen veraltete Theorien dann, wenn sie in der Entwickelungsgeschichte des Gegenstandes eine Rolle gespielt haben.

Da die Ansichten über die Art der Auswahl jedenfalls von Kopf zu Kopf verschieden sind, so schmeichelt sich der Herausgeber nicht, die Mehrheit der Leser auf seine Seite zu gewinnen. Ich habe mit dem Vorigen die Schonung, mit welcher ich bei diesem mühsamsten und undankbarsten Theil der Herausgabe zu Werke gegangen bin, dadurch begründen wollen, dass dem Leser womöglich nichts vorenthalten werden sollte. Andererseits glaube ich, dass diejenigen, welche den Wegfall einzelner Partien beklagen, ihre Ansicht ändern, wenn sie das Original eingehend prüfen wollen.

D e r T e x t sollte vor Allem eine wortgetreue Uebersetzung sein. Deshalb wurden *Unklarheiten* im Ausdruck, zum Theil solche, die sich ständig wiederholen, im Text *beibehalten*, dagegen in den Anmerkungen besprochen. Dasselbe gilt für etwaige Weitläufigkeiten der Ausdrucksweise. *Richtig gestellt* wurden dagegen, um Irrthümer zu vermeiden, die *Rechenfehler* in den

Entwickelungen und Formeln, welche nicht wenige sind, ebenso die *Druckfehler* und *Flüchtigkeiten*, welche dicht gesäet sind. Dagegen wurden die *numerischen* Rechnungen *nicht* neu revidirt, da es sich um die Reduction solcher Beobachtungen handeln würde, die man jeden Tag, und zwar mit besseren Hilfsmitteln, wiederholen kann. Die Figuren, welche im Original am Ende des Werkes stehen, wurden, zumeist treu copirt, in den Text genommen, selbstverständlich nachdem auch hier zahlreiche Fehler und Ungenauigkeiten verbessert waren.

Die Anmerkungen verfolgen den Zweck, die historischen Beziehungen des Buches, wo es von Interesse erscheint, zu beleuchten, den Inhalt der weggelassenen Stellen möglichst kurz zu skizziren, an dem mitgetheilten Stoff stellenweise Kritik zu üben und das Buch durch Nachweise soweit zu vervollständigen, dass es auch für den modernen Leser als *Lehrbuch des photometrischen Calcüls* brauchbar werden soll.

II. Specielle Noten zum Text.

Die Vorrede wurde weggelassen. In seiner Schrift: *les propriétés remarquables de la route de la lumière par les airs* hatte der Verfasser ein grösseres Werk über Photometrie in Aussicht gestellt. Die Vorrede vergleicht nun zunächst das dort versprochene mit dem, was im vorliegenden Werk ausgeführt ist. Ferner sind einige Anmerkungen mitgetheilt darüber, wie der Verfasser einzelne Theile des vorliegenden Werkes aufgefasst wünscht. Hierüber später an geeigneter Stelle.

Das Inhaltsverzeichniss besteht lediglich in einer Zusammenstellung der Ueberschriften sämmtlicher Theile und Kapitel. Dasselbe wurde gleichfalls weggelassen, dagegen im Nachfolgenden zu ersetzen gesucht durch eine mehr ins Einzelne gehende möglichst übersichtliche Hervorhebung des Inhalts. Der Wortlaut der Ueberschriften wird jedoch nur bei den weggelassenen Abschnitten mitgetheilt werden.

Theil I. Grundbegriffe. Principien. Das directe Licht.

Kapitel 1. Grundbegriffe und Principien.

§ 1 u. 2. Einleitung. Die 3 hier aufgezählten Umstände, welche die wissenschaftliche Begründung der Photometrie erschweren — nämlich 1) die Unsicherheit der physikalischen Theorie des Lichts, 2) der Mangel an photometrischen Instrumenten, 3) die Gefahr eines Zirkelschlusses — werden nun im Folgenden wiederholt besprochen.

§ 3 bis 5: Die Theorie des Lichts. Die *Undulationstheorie* von *Huyghens* ist älter als die *Emanationstheorie* von *Newton*. Die *erstere* ist begründet in der 1678 der Pariser Akademie vorgelegten und im Jahre 1690 zu Leyden gedruckten Schrift: *Traité de la lumière* (Ostwald's Klassiker Nr. 20, herausgegeben von Lommel); die *letztere* ist aufgestellt in Newton's *Optik* vom Jahre 1698.

4) *Euler* stand im vorigen Jahrhundert als Vertreter der *Huyghens*'schen Theorie fast ganz vereinsamt. Wir sehen hier, dass *Lambert* zu den wenigen Anhängern gehörte. — Das hier von Lambert aufgestellte Kriterium für die Richtigkeit einer Hypothese, nämlich dass sich aus ihr auf deductivem Wege vorher unbekannte Erscheinungen müssen ableiten lassen, welche nachträglich durch die Beobachtungen bestätigt werden, ist zu Gunsten der Undulationstheorie in schlagender Weise befriedigt worden durch *Hamilton*'s theoretische Entdeckung der *konischen Refraction* (Pogg. Ann. Bd. 28), welche nachträglich durch *Lloyd* am Arragonit experimentell nachgewiesen wurde (derselbe Band). Man pflegt diese Thatsache zu vergleichen mit *Leverrier*'s theoretischer Entdeckung des Neptun. — Die Undulationstheorie lebte wieder auf zunächst durch die Arbeiten von *Wollaston* und *Young* (1802), später *Malus* und vor allen *Fresnel*. Hervorragende Vertreter der *Newton*'schen Theorie noch im gegenwärtigen Jahrhundert sind *Biot* und *Brewster*.

§ 6: Die photometrischen Instrumente. *Lambert*'s am häufigsten benutzte Vorrichtung ist nichts anderes als das später sogenannte *Rumford*'sche *Photometer*: Es werden zwei Flächen verglichen, deren jede durch eine andere und nur durch diese bestimmte Lichtquelle beleuchtet wird. Auch das Photometer von *Ritchie* ist im Princip nichts anderes. Ausserdem benutzt Lambert mehrfach die grössere oder kleinere Abblendung einer Linse zur Erzeugung verschiedener Intensitäten. *Helmholtz* (physiol. Optik, erste Auflage, S. 328) stellt an solche Photometer, welche Lichtflächen vergleichen, die Anforderung, dass beide Flächen sich dicht begrenzen, und dass die Begrenzung nicht geradlinig ist, sondern durch eine auffallend gekrümmte Curve gebildet wird.

Die Anzahl der verschiedenen später zur Verwendung gekommenen Photometer ist enorm. Man findet eine Reihe davon aufgezählt und nach Principien geordnet bei *Zöllner: Grund-*

züge einer allgemeinen Photometrie des Himmels, S. 4 und S. 8, fgde. Ausser *Herschel*'s Astrometer, dem von *A. v. Humboldt* benutzten Photometer, welches auf der Verkleinerung der Apertur der Linse beruht (also wie im Princip schon Lambert) und dem in der Technik vielbenutzten *Bunsen*'schen Photometer (Fettfleck) seien hier genannt:

Steinheil's *Prismenphotometer*, dasjenige, mit welchem *Seidel* seine berühmten Messungen gemacht hat. Das Princip ist, dass die Strahlen des zu prüfenden leuchtenden Punktes nicht im Vereinigungspunkt einer Linse, sondern ausserhalb desselben beobachtet werden; da sich die Strahlen also vom Vereinigungspunkt wie von einem leuchtenden Punkte fortpflanzen, so ist die in eine Fläche ausgebreitete Intensität umgekehrt proportional dem Quadrat ihrer Entfernung vom Vereinigungs- (hier besser Divergenz-) punkt. Die ausführliche Beschreibung des Instrumentes findet sich in der schon citirten Abhandlung: *Steinheil, Elemente der Helligkeitsmess. am Sternenhimmel*; ferner zahlreiche Bemerkungen in *Seidel*'s Schriften. In *Steinheil*'s Abhandlung wird auch eine Methode mitgetheilt, um mit demselben Photometer die Intensität an verschiedenen *Stellen leuchtender Scheiben* zu beobachten. Im Princip kommt Steinheil's Photometer mit der schon von *Bouguer* beschriebenen Vorrichtung überein (*Essai*, 1. Abschnitt, Art. 4, *Traité*, Buch 1, Abschnitt 1, Art. 7).

Das *Zöllner*'sche *Astrophotometer* ist wohl dasjenige, welches unter allen die ausgedehnteste Anwendung gefunden hat. Die genaueste Beschreibung findet sich in *Zöllner*'s Abhandlung: *Grundzüge einer allgemeinen Photometrie des Himmels*. Dieses Photometer vergleicht direct die Intensität zweier Lichtpunkte, von denen der stärkere durch Polarisation geschwächt wird. Hierzu wird der Strahl zunächst in ein feststehendes *Nicol*'sches Prisma geführt, und der durchgegangene polarisirte extraordinäre Strahl durch ein zweites Nicol geleitet, durch dessen Drehung der Strahl beliebig geschwächt werden kann. Ueber das hierbei in Frage kommende *Cosinus-Quadrat-Gesetz* vgl. *Zöllner, Photometrische Untersuchungen* S. 74 fgde., desgl. *Th. Wolff, Photometrische Untersuchungen an Fixsternen 1876 bis 1883*, Berlin 1884. — Eine Methode, die Intensitäten einzelner Theile von leuchtenden *Scheiben* zu bestimmen, beschreibt *Zöllner, Grundzüge einer allg. Phot. d. H.* S. 47 fgde. — Ueber die Messung *stark verschiedener Intensitäten* sowie über die Verwandlung leuchtender *Scheiben in Punkte* vgl. *Zöllner, Phot. Unt.*, dritter Theil.

Pickering's sog. *Meridianphotometer*, ebenso das sehr verbreitete *Wanschaff*'sche Photometer sind nur Modificationen des *Zöllner*'schen.

Auf der *Absorption* des Lichts beruht das *Pritchard*'sche *Keilphotometer*, welches bei den Messungen zur *Uranometria nova Oxoniensis* angewendet wurde.

Bei Weitem das genaueste unter allen Photometern ist das von *Wild*. Die beiden zu vergleichenden Lichtstrahlen werden theils durch Reflexion, theils durch Glassäulen senkrecht gegeneinander polarisirt und wieder zur Vereinigung gebracht, wobei gleichzeitig der eine Strahl durch Drehung der einen Glassäule in angebbarer Weise geschwächt wird. Während nun die meisten anderen Photometer darauf beruhen, dass das Auge zwei Intensitäten gleich schätzt, so beobachtet man hier gewisse Farbenerscheinungen, welche der vereinigte Strahl in einem Krystall hervorbringt, und welche genau dann verschwinden, wenn die senkrecht gegeneinander polarisirten Intensitäten gleich sind. Vergl. Wild's Abhandlung in *Pogg. Annalen* Bd. 99 (1856); ferner über ein anderes Photometer von Wild *Pogg. Annalen* Bd. 118 (1863), wo sich zugleich eine Untersuchung über das Cosinus-Quadrat-Gesetz findet.

Noch zu erwähnen sind zwei neuere Apparate, welche zwar nicht direct die Helligkeiten, sondern die strahlende Energie zu messen gestatten: *Langley*'s *Bolometer*, welches auf dem Einfluss der Bestrahlung auf den Leitungswiderstand in einer Stromverzweigung beruht, und *Boys*' *Radiomikrometer*, wo das Princip der thermoelectrischen Ströme benutzt wird.

6) Ueber die *Fibrillen des Auges*, Original: *fibrillae oculi*, vergl. Note § 832 bis 834.

§ 7 und 8: Das Urtheil des Auges und der Zirkelschluss. Nach *Lambert* wird das Urtheil des Auges getrübt 1) durch die Veränderlichkeit der Pupillenöffnung, 2) durch Contrast.

§ 9 bis 15: Excurs: Täuschungen des Wärmesinnes und des Gehörssinnes. Auch hier werden vorzugsweise nur Contrastwirkungen erwähnt. Uebrigens wird die Analogie nicht vollständig durchgeführt, da beim Ohr nicht die Intensität, sondern die Höhe des Tones besprochen wird.

10) *Erfindung des Thermometers*. Zu *Lambert*'s Zeiten waren bereits bekannt Thermometer von Luft, Leinöl (*Newton*), Weingeist und Quecksilber. *Réaumur* benutzte Weingeistthermometer, obwohl ihm dessen unregelmässige Ausdehnung bei

höheren Temperaturen bekannt war; *Fahrenheit* (1714), der seine Scala öfter änderte, erst Weingeist, später Quecksilber, *Celsius* durchweg Quecksilber.

11) *Electrischer Funke*, Original: *lumen electricum*. Vielleicht kann L. auch das Leuchten gemeint haben, welches entsteht, wenn man einem luftverdünnten Raume Electricität mittheilt (worauf das sog. Leuchten des Barometers beruht). Das Leuchten an der Oberfläche mancher Körper, wo electrische Funken über sie hingegangen sind, kann Lambert, wenn Cavallo der erste war, der dies beobachtete, nicht gekannt haben.

15) Diese Erscheinungen erklären sich durch das *Fechner*sche *psychophysische Gesetz*. Vgl. die Note § 265 bis 270. Ueberhaupt zeigen verschiedene Stellen des ersten Kapitels die Schwierigkeiten, welche vor der Entdeckung des *Fechner*'schen Gesetzes sich darboten.

§ 16 bis 32: Das Princip der photometrischen Vergleichung verschiedener Intensitäten. Der Inhalt dieses an Wiederholungen reichen Abschnittes ist in § 29 zusammengedrängt. Unter den hier erwähnten Hilfsmitteln hat man nichts anderes als die von § 46 ab entwickelten photometrischen Grundgesetze zu verstehen, auf Grund deren man Lichtstärken in angebbarem Mass verändern kann bis zur Gleichheit mit einer gegebenen, wodurch sich das gegenseitige ursprüngliche Verhältniss der Intensitäten bestimmen lässt.

§ 33 bis 45: Definitionen.

36) Diese Definitionen sind unklar, da der Begriff der Menge vermieden ist. Um bestimmte Definitionen geben zu können, muss man über die Art der auftretenden Variablen gewisse Festsetzungen machen. Hierzu denke man sich zwei Flächenelemente, von denen das eine durch das andere beleuchtet wird. Dann wird die *Lichtmenge* (dieser Begriff ist unvermeidlich), welche vom ersten Element ausgegangen ist und dem zweiten Element mitgetheilt wird, nur abhängig sein können von folgenden räumlichen Beziehungen, welche so lange die einzigen denkbaren sind, als die Fortpflanzung des Lichts vom einen zum anderen Element geradlinig angenommen wird. 1) die Grösse des leuchtenden Elementes, 2) der Emanationswinkel, 3) die Entfernung beider Elemente, 4) der Incidenzwinkel, 5) die Grösse des beleuchteten Elementes, 6) das gegenseitige Azimuth der auf beiden Elementen errichteten Normalen, oder der Winkel, welchen die Projectionen beider Normalen auf eine Ebene mit einander bilden, wenn letztere senkrecht steht auf der Verbin-

dungslinie beider Elemente. Hierzu kommt 7) eine nicht räumliche Beziehung, indem die Lichtmenge noch abhängig sein wird von einer Grösse, welche durch die Natur der leuchtenden Fläche bedingt ist.

Um die Zweckmässigkeit der Lambert'schen Definitionen einzusehen, ist es erforderlich, die Natur dieser Abhängigkeiten so einzuführen, wie sich Lambert dieselbe gedacht hat. *Lambert* nimmt an, die *Lichtmenge* sei *proportional* 1) dem leuchtenden Element df, 2) dem Cosinus des Emanationswinkels ε, 3) dem umgekehrten Quadrat der Entfernung r, 4) dem Cosinus des Incidenzwinkels i', 5) der Grösse des beleuchteten Elementes df'. Ferner wird stillschweigend angenommen, 6) das Azimuth komme nicht vor, 7) die Natur der Fläche trete nur als constanter Factor J der Function auf. Hiernach lautet das *Lambert*'sche *Gesetz für selbstleuchtende Körper* in der seit *Beer* allgemein üblichen Form

$$dL = df \cdot \cos\varepsilon \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \cos i' \cdot df' \cdot J\,.$$

Man bezeichnet wie erwähnt dL als *Lichtmenge* oder *Strahlenmenge*, J als *Intensität*. Diese Begriffe würden auch dann einen Sinn behalten, wenn das Gesetz nicht diese besondere Form hätte. Speciell *Lambert* betrachtet nun ferner die Proportionalität mit df' als selbstverständlich und *denkt* sich das Gesetz mit Weglassung von df' in der Form geschrieben:

$$dL' = df \cdot \cos\varepsilon \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \cos i' \cdot J\,;$$

Aus dieser *Lambert*'schen Form des Gesetzes erklären sich nun die Definitionen. Lambert bezeichnet *hier* als *vis illuminans* = *splendor* den Factor J, als *illuminatio* die Grösse dL'. Da *später* der Ausdruck *claritas* sowohl für dL', wie für J, wie für $J \cdot \pi$ gleich oft angewendet wird, so ist bereits hier *splendor* mit dem unbestimmten Ausdruck *Helligkeit* übersetzt worden. In den Noten soll, wie bei L., die Grösse dL' (d. h. *ohne* df') als *Beleuchtung* bezeichnet werden.

37) Es ist durchweg übersetzt worden *claritas visa* mit *scheinbare Helligkeit*, dem jetzigen Sprachgebrauch entsprechend; *claritas apparens* mit *subjective Helligkeit*.

Bezeichnet man mit $d\varphi$ das Stück einer Kugeloberfläche vom Radius 1, welches ausgeschnitten wird durch eine im allgemeinen schiefe Pyramide, welche df als Grundfläche und irgend einen Punkt von df' als Spitze hat, so ist das scheinbare Flächenstück $d\varphi$

$$d\varphi = df \cdot \cos\varepsilon \cdot \frac{1}{r^2} \cdot$$

Eliminirt man hiermit aus dem Ausdruck für dL', dessen Form man sich dabei ganz beliebig, d. h. auch in anderer als der Lambert'schen Voraussetzung denken darf, das wahre Flächenstück df, so kann man das Resultat schreiben:

$$dL' = d\varphi \cdot \cos i' \cdot J_0$$

(wobei freilich statt $\cos i'$ noch der allgemeine Ausdruck zu setzen wäre). Hiermit definiren wir J_0 als die *scheinbare Helligkeit.* Da nun bei der *Lambert*'schen Form für dL' die Grösse $J_0 = J$ wird, so dass

$$dL' = d\varphi \cdot \cos i' \cdot J$$

und mithin J_0 von r unabhängig ist, so ist *Lambert*'s Bemerkung über die Verwechselung correct.

Ueber die Schrift von Wolf finde ich nirgends eine Notiz.

In der *Smith-Kästner*'schen Optik ist der Fehler vermieden (vgl. Buch 1, Art. 93). Dagegen findet man ihn nicht selten bis zur Gegenwart da und dort in gelegentlichen photometrischen Excursen.

39) Unter *Dichtigkeit der Strahlen* ist hier die Grösse J verstanden.

40) Der Satz ist zu verschwommen ausgedrückt, um zu entscheiden, ob etwa bereits dem Satz § 621 vorgegriffen ist.

41) *Lambert* schreibt stets *lumen*, obwohl die Sprache für die beiden hier besprochenen Bedeutungen die Wörter *lumen* (Lichtquelle) und *lux* (die verbreitete Helligkeit) zur Verfügung hat.

42) Unter *Dichtigkeit der Strahlen* ist hier und im folgenden die Grösse J_0 verstanden. Man gebraucht diesen Ausdruck auch sehr zweckmässig, wenn man ohne Rücksicht auf den Ursprung der Strahlen, also auch abgesehen von df oder $d\varphi$, bei einer einfallenden Strahlenmenge dL den Factor von $\cos i' \cdot df'$ so bezeichnet.

43) Die leuchtende Scheibe ist hier als unendlich klein angesehen.

§ 46 bis 54: Die gewöhnlichen Beweise für die Abhängigkeiten 1), 3) und 4) (vgl. Note 36)). Der Beweis für 2) folgt im zweiten Kapitel.

Die Wellentheorie gestattet übrigens strenge Beweise. *Neumann* in seinen *Vorlesungen über theoretische Optik, herausgegeben von Dorn*, Leipzig 1885 nimmt das Gesetz vom Quadrat der Entfernungen als gegeben an und schliesst dann mit Hilfe des Satzes von der Erhaltung der lebendigen Kraft rückwärts, dass die Lichtstärke proportional ist dem Quadrat der Geschwindigkeit, mit welcher die Lichttheilchen schwingen (Seite 8). Hieraus folgt weiter, wenn man den Mittelwerth des Quadrats der Geschwindigkeit bildet (die Zeit als willkürliche Variable betrachtet), dass die Lichtstärke dem Quadrat der Amplitude proportional sein muss (S. 13). Von dem letzten Satz macht die theoretische Optik ausgedehnten Gebrauch. *Gewöhnlich* (*nicht* so jedoch *Kirchhoff* in seinen *Vorlesungen über mathematische Optik*, *herausgegeben von Hensel*, Leipzig 1891) macht man dagegen die directe Voraussetzung, dass die Lichtstärke proportional der lebendigen Kraft der schwingenden Aethertheilchen sei, und gewinnt hieraus, gleichfalls durch das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft, den Satz vom Quadrat der Entfernung und vom Cosinus des Incidenzwinkels. Mit Hilfe einer anderen Mittelbildung, bei welcher die Coordinaten der einzelnen Punkte des leuchtenden Elementes willkürliche Variablen sind, findet dann *Seeliger* in seinen an der Münchener Universität gehaltenen Vorlesungen über Astrophotometrie den Satz von der Proportionalität der Lichtstärke zur Grösse des leuchtenden Elements, oder deutlicher gesagt, den Satz, dass sich die Lichtwirkungen benachbarter Punkte gegenseitig einfach addiren.

Diese drei Gesetze, welche Lambert bereits vorfand (vergl. oben über *Bouguer*, ferner *Smith-Küstner* Buch 1, Art. 58 und sonst mehrfach), pflegt er im Weiteren sehr oft unter folgender Bezeichnung zu citiren:

Gesetz § 48: (vom Quadrat der Entfernung)
51, 52: (von der Proportionalität zur Grösse des leuchtenden Elements)
53: (vom Cosinus des Incidenzwinkels).

53) Es ist kaum nöthig zu bemerken, dass *Lambert* unter *Incidenzwinkel* (*angulus incidentiae*) das *Complement* des heute so genannten Winkels zwischen dem Lichtstrahl und der Flächennormale versteht. Dasselbe gilt vom *Emanationswinkel* (*angulus emanationis*). Es treten also bei Lambert in beiden Fällen die Sinus auf. Für den Winkel zwischen Lichtstrahl und Flächennormale gebraucht er später gelegentlich den Ausdruck *Neigungswinkel* (*angulus inclinationis*).

§ 55 bis 66: Experimentelle Beweise für die Gesetze. Von den mitgetheilten Beweisversuchen nicht befriedigt, theilt Lambert Versuche mit, durch welche, sobald die Richtigkeit irgend eines der drei Gesetze gegeben ist, die Richtigkeit der beiden anderen bewiesen wird. Es beziehen sich Versuch 1 und 2 auf den Zusammenhang zwischen den Gesetzen § 48 und 51, 52, Versuch 3 auf 51 und 53, Versuch 4 auf 48 und 53.

61) Das Zeichen $\backsim$ (proportional) tritt auch später mehrfach auf.

62) Selbstverständlich müssen bei diesem Versuch die beiden Emanationswinkel, unter welchen die Strahlen aus der beleuchteten Fläche wieder austreten, einander gleich sein. Trotzdem kann der Versuch nicht geglückt sein, wie denn auch später zwar für Versuch 2, nicht aber für den vorliegenden, Beispiele mitgetheilt sind (vgl. § 256 fgde.). Es kommt nämlich nicht diejenige Lichtmenge zur Vergleichung, welche die beleuchtete Ebene empfängt, sondern die wieder zurückgeworfene und dem Auge zugesandte, und diese kann noch in anderer Weise vom Incidenzwinkel abhängig sein. Es ist also hier dem Lambert-schen Emanationsgesetz für *nicht selbstleuchtende Körper*, bei dessen Giltigkeit der Versuch statthaft wäre, bereits vorgegriffen.

64) L. bezieht sich hier auf § 530 fgde.

§ 67 bis 69: Fortsetzung der Definitionen.

Kapitel 2. Das directe Licht.

§ 70 bis 86: Das Emanationsgesetz.

70) Hier wird das *Lambert*'sche Gesetz für selbstleuchtende Körper, wie es vorwegnehmend in Note 36), Formel für dL', mitgetheilt war, zum ersten Mal vollständig ausgesprochen bis auf den Factor $\cos\varepsilon$, welcher nunmehr zugefügt werden soll.

72) *Euler*'s Auffassung ist in der That diejenige, dass der Emanationswinkel ε gar nicht auftritt. Dieselbe Annahme hat später auch *Laplace* gemacht (Méc. cél. Tome 4, Livre 10, Chap. 3, § 13). Sie ist allerdings vollkommen correct, so lange man als den Ursprung der Lichtwirkung die geometrische Oberfläche des Körpers ansieht; und der Irrthum liegt eben in dieser letzteren Auffassung, da eine mathematische Fläche niemals als Träger einer physikalischen Ursache angesehen werden darf. — Führt man wie in Note 37) das scheinbare Flächenelement $d\varphi$ ein, so ist bei der *Euler*'schen Vorstellungsweise J_0 nicht, wie beim Lambert'schen Emanationsgesetz, $= J$, sondern die scheinbare Helligkeit J_0 wird $= J : \cos\varepsilon$, d. h. eine selbstleuchtende Kugel zeigt eine vom Centrum nach dem Rande zunehmende und im Rand selbst unendlich werdende scheinbare Helligkeit: Da dies augenscheinlich bei der Sonne nicht der Fall ist, so schloss *Laplace*, dass dieselbe mit einer Atmosphäre umgeben

sei, deren absorbirende Wirkung vom Centrum nach dem Rande hin zunehmen muss. Um, wie wir Note 37) gesehen haben, zu zeigen, dass J_0 nur dann constant wird, wenn in dL' (Note 36) der Factor $\cos \varepsilon$ auftritt, braucht Lambert die lange Erörterung von § 73 bis 81.

73) Nicht der hier angegebene, sondern der in der vorigen Note bezeichnete Umstand ist der Grund von *Euler's* Irrthum.

Die gleichmässige scheinbare Helligkeit der Sonne ist die *erste* Thatsache, mit welcher Lambert sein Emanationsgesetz begründet. Bei der *Sonne* ist aber diese »Thatsache« nicht einmal vorhanden. Bereits *Bouguer* theilt im *Traité* Buch 1, Abschn. 2, Art. 12 Messungen mit, welche zeigen, dass die scheinbare Helligkeit gegen den Sonnenrand hin schwächer wird. Unter den neueren Messungen sind zu erwähnen die von *Vogel* in den *Monatsberichten der Academie der Wissenschaften in Berlin* 1877, S. 107 fgde. bekannt gemachten, deren Resultat im Sinne mit *Bouguer* übereinstimmt. Eine eingehende Discussion der *Vogel'*schen Messungen findet sich bei *Seeliger*, *über die Extinction des Lichts in der Atmosphäre* Artikel 3 (Sitzungsberichte der math.-physikal. Classe der K. bayer. Akad. der Wiss. 1891, Bd. 21, Heft 3). Hierbei zeigt sich, dass die Absorption des Lichts durch die Sonnenatmosphäre, welche die Abnahme der scheinbaren Helligkeit bedingt, wider Erwarten gering ist, und ferner wird aus den Dispersionen des Lichts (*Vogel's* Messungen sind mit einem Spectralphotometer angestellt) in Verbindung mit einer anderen Erscheinung wahrscheinlich gemacht, dass die Sonnenatmosphäre sehr wenig hoch sei.

Helioscop, Original: *helioscopium*. Unter dem Namen machina helioscopica beschreibt Scheiner (Rosa ursina, Bracciani 1626, S. 77) eine Vorrichtung, um das Bild der Sonne hinter dem Fernrohr auf einer weissen Tafel aufzufangen. Die höchst einfache Berechnung der Grösse des Bildes theilte Kästner mit (Astron. Abhandl. 2. Sammlung, S. 362). Vielleicht ist auch das zuerst von Scheiner (Ros. Urs. S. 70) angewendete Arrangement zum directen Sehen mittelst Blendgläsern gemeint.

74) L. bezieht sich hier auf § 536 und 537.

80) Ueber den Ausdruck *Emanationswinkel* vgl. Note 53).

81) Unter *Leuchtkraft* (vis illuminans) ist hier die Grösse $J \cos \varepsilon$ verstanden. Solche Inconsequenzen in Bezug auf die Terminologie sind dicht gesäet im ganzen Werk.

Bei der Bezeichnung von Strecken, Winkeln u. s. w. wurde, was etwaiger Citate wegen bemerkt wird, entgegen dem Original, welches ohne Princip verfährt, hier und wohl immer der positive Sinn als massgebend für die Reihenfolge der Buchstaben erachtet.

84) Hier folgt die *zweite* Thatsache, auf welche L. das Emanationsgesetz stützt. Ueber die Unzulässigkeit einer solchen Schlussfolgerung gilt aber genau dasselbe wie in Note 62). Ein experimenteller Beweis kann nur dadurch erbracht werden, dass man wirklich selbstleuchtende Körper, also etwa glühende Kugeln oder Platten, beobachtet, wenn überdies die Emanation nicht gestört wird, wie etwa bei der Sonne durch die Atmosphäre derselben. Solche Versuche sind von *W. Möller* angestellt worden (*Photometrische Untersuchungen*, *Wiedemann*'s *Annalen* Bd. 24, 1885) und haben die genaue Bestätigung des Lambert'schen Gesetzes für selbstleuchtende Körper ergeben.

Der Hinweis am Schluss bezieht sich wieder auf § 536, 537.

85) Diesem Versuch eines theoretischen Beweises scheint L. selbst, nach dem folgenden Paragraphen zu schliessen, eine vollkommene Evidenz nicht zugesprochen zu haben. Der Beweis ist annehmbar bis zu der Stelle, wo die beiden Kräfte in eine normale Componente DE und eine parallele EC zerlegt werden. Von jetzt ab ist aber erstens gerade *diese* Zerlegung nicht in höherem Grade berechtigt, als jede beliebige andere, und zweitens liegt eine Willkür in der Annahme, dass nur die Componente DE zur Wirkung komme. Gleichwohl lässt sich von dieser Stelle ab der Lambert'sche Beweis richtig stellen, wenn man erwägt, »dass die Kraft, durch welche das Licht längs CF ausgestossen wird, von denjenigen Theilchen herrührt, welche« — nicht »auf der Geraden DC liegen« (denn auf einer mathematischen Geraden liegen überhaupt keine physikalischen Theilchen), sondern in einer Säule enthalten sind, deren Grundfläche das Oberflächenelement und deren Axe die Gerade DC ist. Da der Querschnitt der Säule, also auch der Inhalt derselben bei gleicher Länge und gleichem Oberflächenelement dem Cosinus des Emanationswinkels proportional ist, so folgt in der That das Gesetz. Dieser Gedankengang wurde zuerst von *Zöllner* ausgesprochen, *Phot. Unters.* S. 15 bis 18.

Man kann auch die bestimmtere Annahme machen, dass die Lichtwirkung der tieferliegenden Theilchen, welche überdies eine Function ihrer Entfernung von der Oberfläche sein darf, auf ihrem Weg bis zur Oberfläche des Körpers durch Absorption geschwächt wird. Dann kommt man ohne jede Rechnung fast mit genau denselben Worten zu demselben Resultat. Man vergl. auch *Seeliger*, *Bemerkungen zu Zöllner's »Photometrischen*

Untersuchungen«, V. J. S. der Astron. Gesellschaft, Bd. 21, S. 218 und 219.

Es sind, bevor diese strengen Beweise bekannt waren, mehrfach missglückte Beweisversuche gemacht worden. Man vergl. z. B. *Zöllner*'s Bemerkungen über den ersten *Beer*'schen Beweis (*Phot. Unt.* S. 12 bis 14) und über den *Rheinauer*'schen (ebendas. S. 15). Geradezu naiv ist aber der zweite *Beer*'sche Beweis (*Phot. Calc.* S. 7).

§ 87 bis 101: Verwandlung der räumlichen Aufgaben in sphärische. Dieser Abschnitt enthält, breit ausgeführt, nichts anderes, als was in Note 37) vorweggenommen wurde.

90) Hier hat das Wort *Intensität* den eigentlichen Sinn.

97) Dieser Satz erledigt die vorliegende Aufgabe. Es ist also, wie nach Note 37):

$$dL' = d\varphi \cdot \cos i' \cdot J\,.$$

98) Aus dem Schlusssatz ergibt sich zum ersten Mal eine Definition des Wortes *Beleuchtung*, und zwar in dem Note 36) mitgetheilten Sinn.

100) Der Begriff der *absoluten Beleuchtung*, welcher hier zum ersten Mal vorkommt, ist jetzt nicht mehr üblich. Da L. hierunter diejenige Beleuchtung versteht, welche durch eine beliebige solche Fläche (unendliche Ebene, unendlich nahe Kugel) erzeugt wird, die sich als scheinbare Halbkugel präsentirt, so hat man:

$$\text{absolute Beleuchtung} = \int dL' = \int d\varphi \cdot \cos i' \cdot J\,,$$

wo laut Definition das Integral auf die Halbkugel auszudehnen ist. Mithin wird

$$\text{absolute Beleuchtung} = J\pi\,.$$

Es ist also der Begriff der Intensität bis auf einen constanten Factor ersetzbar durch den der absoluten Beleuchtung. Bei *Lambert* werden aber diese Begriffe fortwährend durcheinander geworfen.

101) Nicht die Leuchtkraft (vis illuminans) der Sonne erleidet eine Einbusse, sondern die *Beleuchtung* (nicht Helligkeit) der irdischen Objecte. — Bei *Smith-Kästner* ist gemeint S. 382 fgde. Auffallend ist, dass Lambert nicht bemerkt zu haben scheint, dass die dort benutzte Phasenformel nicht mit

der von Lambert § 1059 gegebenen übereinstimmt. — Der Hinweis im vorletzten Satz bezieht sich auf § 112.

§ 102 bis 106: Ueberblick über das Folgende.

106) Der hier ausgesprochene Satz, welcher sagen will, dass die zwischen einem *Element* und einer Fläche ausgetauschten Lichtmengen sich verhalten wie die Intensitäten J des Elements und der Fläche — weil nämlich das betreffende Integral im einen Fall sich aus Elementen derselben Grösse zusammensetzt wie im anderen, wenngleich die Bedeutung der Elemente eine andere ist — wird später in Specialfällen ausführlich wiederholt. Vergl. § 124 fgde.

§ 107 bis 165: Drei Aufgaben über die Beleuchtung eines Elements durch eine Fläche von constanter Intensität J. Vom allgemeinen Standpunkt betrachtet, schweben solche Aufgaben in der Luft. Denn es handelt sich jetzt darum, einen Ausdruck zu bilden, der nach unserer Bezeichnungsweise durch das Integral bestimmt wird

$$\int dL' = J\int d\varphi \cos i' ,$$

wo die Integrationsgrenzen von der Gestalt der scheinbaren leuchtenden Fläche abhängig sind. Es ist aber das Integrationselement dL' wegen des darin vorkommenden $\cos i'$ nur eine Rechnungsgrösse, da eine solche Beleuchtung nicht durch das Auge wahrgenommen wird und auch sonst in keiner Weise messbar ist. Denn eine solche Beleuchtung tritt erst dann in Erscheinung, wenn das auffallende Licht wieder ausgestrahlt wird, und in dieser ausgestrahlten Lichtmenge kann $\cos i'$ noch in anderer Weise auftreten. Dann aber hat es keinen Werth mehr, den Ausdruck $\int dL'$ zu besitzen. Es gilt also dasselbe wie Note 62).

Nur in zwei Fällen haben diese Aufgaben Sinn. Einmal wenn die leuchtende Fläche als sehr klein betrachtet wird, so dass $\cos i'$ constant ist, wie man z. B. bei der Beleuchtung der Planeten durch die Sonne anzunehmen pflegt: dann aber würde man diese Theorie überhaupt nicht brauchen, denn es handelt sich einfach um die Grösse $\int d\varphi$. Der zweite Fall ist derjenige, welchen *Lambert* vor Augen hat, nämlich wenn in der wieder ausgestrahlten Lichtmenge, wie es das später entwickelte *Lambert*sche Emanationsgesetz für nicht selbst leuchtende Körper aussagt, $\cos i'$ nicht wieder neu auftritt. Im System der *Lambert*schen Photometrie sind diese Sätze also vollkommen berechtigt.

§ 107 bis 141: Erste Aufgabe: Leuchtender Kreis.

107) Von hier ab zunächst Specialfall: Das Centrum des leuchtenden Kreises liegt im Zenith. Zum synthetischen Beweis dieses Paragraphen folgt § 121 ein analytischer.

109) Der Ausdruck *sinus totus*, oder wie hier, *quadratum sinus totius* ist stets mit *Einheit* übersetzt worden.

111) Die absolute Beleuchtung, nach unserer Ausdrucksweise $\pi \cdot J$, wird allerdings später fast ausnahmslos (mit Weglassung des Factors J) durch π bezeichnet. Nicht der von L. in der Vorrede angegebene Grund, dass er sich das beleuchtete Element als kreisförmig denke, ist hierfür bestimmend gewesen — denn dieses Element tritt nicht auf, und hat, wenn es auftritt, keinen Einfluss —, sondern die Ursache ist immer wieder die Confusion in der Bezeichnungs- und Ausdrucksweise, die allerdings immer so corrigirt wird, dass die Resultate stets richtig sind.

112) Hat der leuchtende sphärische Kreis den Halbmesser σ, so verhalten sich

die Beleuchtungen von Halbkugel und Kreis wie $\dfrac{J\pi}{J\pi \sin^2\sigma} = \dfrac{1}{\sin^2\sigma}$,

$$\text{also für kleine } \sigma \text{ wie } \frac{1}{\sigma^2}\,.$$

Die Inhalte von Halbkugel und Kreis wie $\dfrac{2\pi}{2\pi(1-\cos\sigma)} = \dfrac{1}{2\sin^2\frac{1}{2}\sigma}$,

$$\text{also für kleine } \sigma \text{ wie } \frac{2}{\sigma^2}\,,$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

117) Das Werk von *Thümmig* heisst genauer: Meletemata varii et rarioris argumenti und erschien zu Braunschweig und Leipzig 1727.

122) Hier, ebenso § 124, werden wieder neue Ausdrücke gebraucht. Intensität der Beleuchtung ist unser dL', Quantität der Beleuchtung unser dL.

123) Hier ist die Stelle, von wo an die absolute Beleuchtung stets durch π ausgedrückt wird. Vergl. Note 111).

126) Dieser Satz folgt ohne Rechnung, wenn man den Satz Note 106) mit der Bemerkung verbindet, dass $\sin\sigma$ als Radius des Grundkreises der Kalotte, welche bisher immer auftrat, aufgefasst werden kann.

130 Von jetzt ab allgemeiner Fall: das Centrum des leuchtenden Kreises liegt nicht im Zenith.

135 Der *Hauptsatz* des ganzen Abschnittes ist also, dass die Beleuchtung durch einen Kreis mit der Intensität J, dem scheinbaren Halbmesser σ und einer Zenithdistanz des Centrums $= z$ sich ausspricht durch

$$L' = J\pi \sin^2\sigma \cdot \cos z\,.$$

140 Ich finde nirgends eine Bemerkung, dass dieser Satz viel allgemeiner ist und für jede leuchtende Fläche gilt, welche einen Mittelpunkt hat. Nicht einmal die Intensität braucht constant zu sein, wenn sie nur symmetrisch ist zum Mittelpunkt. Sei nämlich ein scheinbares Flächenelement $= d\varphi$, seine Entfernung vom Flächenmittelpunkt $= s$, die Zenithdistanz des letzteren $= z$, und der Winkel zwischen s und $z = \vartheta$. Dann ist

$$dL' = J(s, \vartheta) \cos i' \cdot d\varphi$$
$$= J(s, \vartheta) \cdot \cos z \cos s\, d\varphi + J(s, \vartheta) \cdot \sin z \sin s \cos\vartheta\, d\varphi\,.$$

Wegen der Bedingung des Mittelpunktes gibt es zu jedem Element s, ϑ auch ein solches s, $\pi + \vartheta$, und da wegen der Bedingung der Intensität $J(s, \vartheta) = J(s, \pi + \vartheta)$, so fällt bei der Integration das zweite Glied weg, und es ergibt sich

$$L' = \cos z \int J(s, \vartheta) \cos s\, d\varphi\,,$$

wo unter dem Integralzeichen z nicht mehr vorkommt.

Es hätte also beispielsweise für den Kreis der Beweis § 130 ganz fortbleiben dürfen und der allgemeine Satz sofort aus dem speciellen, § 109, wo der Mittelpunkt im Zenith liegt, geschlossen werden können.

Man braucht also stets nur den speciellen Fall $z = 0$ zu behandeln. Ich füge nun aber eine zweite Bemerkung bei, welche auch diese Aufgabe in den meisten Fällen, z. B. in allen von *Lambert* und *Beer* so ausführlich behandelten, ohne Rechnung löst. Man braucht nämlich nur zu bedenken, dass im Integral

$$L' = J \int \cos i'\, d\varphi$$

der Winkel i' gleich sein muss dem Winkel zwischen dem Element $d\varphi$ und einer Ebene, welche die scheinbare Fläche in deren Mittelpunkt tangirt. Dann stellt L' nichts anderes dar, als den Flächeninhalt der Projection der scheinbaren Fläche auf jene berührende Ebene. Handelt es sich nicht um eine Mittelpunktsfläche, so hat man denselben Vortheil, wenn man auf eine im Zenith zum beleuchteten Element parallele Ebene projicirt.

So hat beispielsweise ein scheinbarer Kreis vom Radius σ als Projection einen Kreis mit Radius $\sin\sigma$, woraus nun ohne Weiteres der Satz § 109 folgt.

§ 142 bis 160: Zweite Aufgabe: Leuchtendes rechtwinkliges sphärisches Dreieck, bei welchem der Schnittpunkt der Hypotenuse und der einen Kathete im Zenith liegt. Der Hauptsatz, welcher für jedes beliebige verticale Dreieck gilt, ist enthalten in § 144:

$$L' = \tfrac{1}{2} \cdot J \cdot \mathit{Basisabschnitt} \cdot \cos \mathit{Elevation}.$$

Die Verwendung des zweiten Satzes Note 140) würde jede Rechnung erspart haben.

155) Der nicht bewiesene Schlusssatz ergibt sich dadurch, dass die Behauptung, wie sich leicht zeigen lässt, richtig ist für jeden einzelnen der unendlich schmalen verticalen Streifen, in die sich das Dreieck zerlegen lässt; folglich gilt dies auch für die Summe.

156) Ein Paradoxon ist nicht vorhanden. Denn beim Element ist die Beleuchtung gleich dem Product aus dem Flächeninhalt und dem Sinus der Höhe; dagegen ist die Beleuchtung durch einen unendlich schmalen Sector nicht so ausgedrückt worden, dass der Inhalt des Sectors als erster Factor auftritt.

§ 161 bis 165: Dritte Aufgabe: beliebige leuchtende Figur. Specielle Beispiele werden hier nicht durchgeführt, obgleich sich gerade hier zahlreiche elegant lösbare Integrationsaufgaben bieten. Einige derselben hat *Beer* ausgeführt.

Für die *sphärische Ellipse* benutzt *Beer* die Eigenschaft, dass es auch hier zwei Punkte gibt derart, dass die Summe ihrer sphärischen Entfernungen von irgend einem Peripheriepunkt constant und zwar gleich dem grössten sphärischen Durchmesser ist. Es folgt der schöne, zum früheren, für den Kreis, analoge Satz, dass

$$L' = J\pi \sin\sigma_1 \sin\sigma_2 \cdot \cos z$$

ist, wobei σ_1 und σ_2 den grössten und kleinsten Halbmesser darstellen. Der Umstand übrigens, dass *Beer* die erste Bemerkung Note 140) nicht gemacht hat, veranlasst bei diesem und anderen Fällen in seinen Entwickelungen unnöthige Längen. Mit

Zuziehung der zweiten Bemerkung Note 140) hätte sich auch der dann noch bleibende Rest von Rechnung vermeiden lassen.

Auch für die *Phasen einer Sonnenfinsterniss* ist bei *Beer* der Ausdruck aufgestellt.

§ 167 bis 225: Drei Aufgaben über die Lichtmenge, welche eine Fläche einer anderen zusendet, d. h. es wird der Ausdruck der einem Element zugesandten *Beleuchtung* L' mit dem Factor df' multiplicirt, so dass man eine *Lichtmenge* $dL = L'\,df'$ erhält, und dieser Ausdruck wird über die *beleuchtete* Fläche f' integrirt. In *dieser* Weise, und nicht etwa so, wie es in § 167 des Textes geschehen ist, hat man den Inhalt des Folgenden zu charakterisiren. Denn die »*mittlere Helligkeit*« spielt dabei eine ganz nebensächliche Rolle und ist nur eine andere Form für den Ausdruck des Resultates. Uebrigens hat »die scheinbare Grösse der Fläche« mit der mittleren Helligkeit gar nichts zu thun, da das Wort »scheinbar« hier keinen Sinn hat. Vielmehr versteht L. unter *mittlerer Helligkeit* eine Grösse, die man in unserer Bezeichnungsweise zu definiren hat durch

$$\frac{\int dL}{f'} \text{ oder, was dasselbe ist, } \frac{\int L'\,df'}{\int df'}.$$

Es ist also der Ausdruck zu bilden

$$\int dL \text{ oder, was dasselbe ist, } \int L'\,df'$$

wobei sich das Integral nur auf die beleuchteten Theile der beleuchteten Fläche bezieht. Da L' selbst ein Doppelintegral, nämlich über die leuchtende Fläche, darstellt, so handelt es sich um Ausführung einer vierfachen Integration.

§ 168 bis 175: Erste Aufgabe: Leuchtende Kugel, vertical über einem beleuchteten Kreis.

168) Absatz 1) ist gleichbedeutend mit $J = 1$, Absatz 2) ist keine Begründung und ausserdem überflüssig.

169) Statt »Dichtigkeit der auffallenden Strahlen« wäre deutlicher gesagt: »Beleuchtung L'«. Uebrigens ergibt sich die Formel für η ohne Ueberlegung, da sie identisch ist mit der Formel Note 135), wenn man dort die jetzige Bezeichnung einführt.

171) Hier ist der *Hauptsatz* des Abschnittes enthalten:

$$\int L'\,df' = 2J\pi^2(1 - \cos s)\,\varrho^2,$$

wo s der scheinbare Halbmesser des Kreises ist, vom Centrum der Kugel gesehen, und ϱ der Radius der letzteren.

§ 176 bis 195: Zweite Aufgabe: Leuchtendes Rechteck, rechtwinklig gegen ein beleuchtetes Rechteck.

187) Hier ist der *Hauptsatz* des Abschnittes enthalten. Derselbe findet später keine Verwendung, wie denn überhaupt die Aufgabe wohl nur der eleganten Lösung wegen behandelt scheint.

190) Dieser Lehrsatz ist ein specieller Fall des in § 196 bewiesenen allgemeinen. Uebrigens wird im »Beweis« § 190 gar nicht der Lehrsatz in der hier geschriebenen Form erwiesen, sondern ein Satz, in welchen sich der vorliegende verwandelt, wenn man sich statt des zweiten $ARMP$ geschrieben denkt: $ADSR$ und statt des zweiten $AFED$: $AFQP$.

195) Statt »Ausstrahlung« hätte man der Analogie wegen deutlicher gesagt »absolute Ausstrahlung«.

§ 196 bis 198: Excurs: Die von zwei Flächen ausgetauschten Lichtmengen verhalten sich wie die Intensitäten. Dieser Satz ist die Verallgemeinerung zum Satz Note 106).

§ 199 bis 225: Dritte Aufgabe: Leuchtender Kreis vertical über einem dazu parallelen beleuchteten Kreis. Da der hier erforderliche Ausdruck L' früher nicht gebildet wurde, so hat man zunächst

§ 200 bis 213: Hilfsaufgabe: Leuchtender Kreis und paralleles beleuchtetes Element. Diese Aufgabe ist nichts anderes als die von *Beer* über die *sphärische Ellipse* (vergl. Note § 161 bis 165), nur dass das Resultat hier so abgeleitet und in der Form geschrieben wird, wie es alsbald zur Verwendung kommen soll. Bei Zuhilfenahme der beiden Sätze Note 140) hätte sich die höchst mühsame Rechnung auf eine ganz kurze Transformation der Argumente reducirt.

200) Ueber den Ausdruck *Neigung* vergl. Note 53).

209) Enthält die *Hauptformel der Hilfsaufgabe*, die man sich aber für alle kommenden Zwecke mit der sehr übersichtlichen Bezeichnung des § 214 geschrieben denken muss:

$$L' = \tfrac{1}{2}\pi\left[1 - \frac{h^2 + x^2 - b^2}{\sqrt{(h^2 + x^2 - b^2)^2 + 4\,h^2 b^2}}\right]$$

wo der Factor $J = 1$ gesetzt worden ist.

213) Es ist bis zur ersten Potenz inclusive von x^2 entwickelt worden. — Unter der scheinbaren Grösse eines ebenen Stückes

ist der Inhalt der entsprechenden Kalotte einer Kugel vom Radius 1 verstanden. Alle diese Grössen sind hier unendlich klein.

§ 214 bis 225: Eigentliche Aufgabe. Das *Hauptresultat* kommt im späteren Verlauf des Werkes in drei verschiedenen Formen zur Anwendung. nämlich

$$\int L' df' = \tfrac{1}{2}\pi^2\left[h^2+b^2+x^2-\sqrt{(h^2+b^2+x^2)^2-4x^2b^2}\right] \quad \text{nach § 215}$$
$$= \tfrac{1}{4}\pi^2(MF-MB)^2 \quad \text{nach § 217}$$
$$= \pi^2\frac{BC^2\cdot MA^2}{MH^2} \quad \text{nach § 222,}$$

wo durchweg $J = 1$ gesetzt ist.

220) Die hier stattfindende Bedeutung der Ausdrücke »mittlere Helligkeit« und »Strahlenmenge« rechtfertigt die Definitionen dieser Grössen in: Note § 167 bis 225.

222) Nach dem Lehrsatz des *Ptolemäus*.

225) Die *Analogie* wird vollständig, wenn die eine Fläche unendlich klein wird.

Kapitel 3. Die Principien der Photometrie. Das Urtheil des Auges.

§ 226 bis 264: Die Principien der Photometrie. Der höchst einfache Gegenstand wird hier so breit auseinander gezogen, dass es nicht leicht ist, den Faden festzuhalten. In § 229 spricht L. einen Erfahrungssatz aus, dessen er sich »instar axiomatis« bedienen will. Trotzdem wird dieses Quasi-Axiom im Folgenden analysirt, d. h. auf Einzelerfahrungen aufgebaut, und zwar in zweifacher Weise, in § 230 bis 232 provisorisch — indem er stets die einfache y und die doppelte Anzahl $2y$ der Kerzen gegenseitig vergleicht, dabei aber y selbst variirt — und in § 233 bis 235 in allgemeiner Weise durch Vergleichung verschiedener Multipla (also y und ny). Es wird aber der letzte Fall durch den ersten ersetzt.

Die objective Lichtwirkung wird erst von § 236 ab hereingezogen. Es handelt sich § 236 bis 242 darum, zu bestimmen, in welcher Weise die Entfernung und die Anzahl der Kerzen im photometrischen Gesetz auftreten, in § 243 bis 253 kommt dazu der Incidenzwinkel.

Hierbei zeigt sich, dass die Versuche stets eine Unbestimmtheit übrig lassen. Es lässt sich nämlich aus den Versuchen nur das schliessen, dass die Beleuchtung eine Function von $\frac{zs}{x^2}$ ist (*Lambert*'sche Bezeichnung). Die Natur dieser Function sucht L. nun zu specialisiren durch verschiedene bestimmte Annahmen (nämlich in § 241, § 246 bis 251). Es muss bemerkt werden, dass ein solches Bemühen nicht nur überflüssig, sondern auch wissenschaftlich falsch ist. Hierzu nehmen wir das vollständige *Lambert*'sche Gesetz in der Form Note 36) wieder vor. Es war

$$dL' = df \cdot \cos\varepsilon \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \cos i' \cdot J.$$

Angenommen, es sei uns factisch möglich, dieses Gesetz durch Versuche zu prüfen (was, wie mehrfach bemerkt, wegen des Incidenzwinkels i' gar nicht der Fall ist), so können die Versuche doch nur so viel aussagen, dass eine Wirkung, welche an die Grössen df, ε, r, i', J geknüpft ist, jedesmal dann dieselbe wird, wenn zwischen diesen Grössen die Beziehung besteht

$$df \cdot \cos\varepsilon \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \cos i' \cdot J = \text{Const.}$$

Als was man diese Wirkung auffasst, ist ganz Nebensache, und man kann sie ganz nach Belieben erklären als

$$\text{Wirkung} = F(x), \text{ wo } x = df \cdot \cos\varepsilon \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \cos i' \cdot J,$$

ohne freilich damit einen Schritt weiter gekommen zu sein. Das letztere ist aber auch nicht nöthig, so lange man in der wissenschaftlichen Erfahrung auf eben diese Argumente df, ε, r, i', J beschränkt ist. Jenes Bedürfniss tritt vielmehr erst dann ein, sobald neue Variablen in die Untersuchung eintreten. Geschieht dies aber, so wird zwar die gegenwärtige Function F specialisirt werden, dafür aber immer wieder eine neue unbestimmte Function auftreten. — Man kann diesen Gedankengang erläutern an dem weit einfacheren Beispiel der *Newton*'schen Attraction. Hierzu denke man sich für diesen Zweck, wo es nur auf das Princip ankommt, das *Newton*'sche Gesetz in der Form geschrieben:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{m}{r^2}.$$

Wollte man nun hier eine Variable einführen

$$x = \frac{\frac{m}{r^2}}{\frac{d^2 s}{d t^2}}$$

und weiterhin eine Variable w definiren

$$w = F(x),$$

so würde die astronomische Erfahrung doch nur dies sagen, dass die Variable w, welche der früheren »Wirkung« entspricht, dieselbe ist, so oft x dasselbe wird. Diese Allgemeinheit würde erst dann durchbrochen, sobald Jemand eine weitere Variable einführen wollte, also etwa die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Attraction oder sonst etwas. Dann allerdings könnte man w präcisiren als etwa ebendiese Fortpflanzungsgeschwindigkeit und x als den Correctionsfactor des *Newton*'schen Gesetzes bezeichnen. Aber sofort könnte man wieder eine neue »Wirkung« und hiermit eine neue willkürliche Function einführen.

Für die Photometrie tritt nun allerdings das Bedürfniss ein, jene Allgemeinheit zu durchbrechen, wie sich schon dadurch kundgibt, dass man das Grundgesetz in der Form

$$dL' = df \cdot \cos \varepsilon \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \cos i' \cdot J$$

schreibt, welche mehr sagt, als die von *Lambert* mitgetheilten Erfahrungen zulassen. Aber es muss L.'s Bemühen, an *dieser* Stelle einen Schritt weiter zu kommen, nach den hier mitgetheilten Auseinandersetzungen vergeblich und direct unrichtig sein. Möglich und zweckmässig wird diese Bemühung dann, wenn die Erfahrung neue Mannigfaltigkeiten, d. h. kurz neue Variablen, darbietet und hiermit zugleich ein Gebiet für neue Versuche eröffnet. Dies tritt ein, sobald Lichtwirkungen anderer Art in Frage kommen.

Eine solche ist z. B. die *photographische Helligkeit*. Diese neue Art der photometrischen Beobachtung stellt ohne Weiteres die Aufgabe, die neu auftretende Variable, nämlich den Durchmesser des photographischen Scheibchens in Zusammenhang zu bringen mit der Variablen dL' oder, correcter gesagt, mit irgend einer der im Ausdruck für dL' auftretenden Variablen. Diese Aufgabe ist durch *Charlier* behandelt worden in der schönen Abhandlung *Ueber die Anwendung der Sternphotographie zu*

Helligkeitsmessungen der Sterne. Publication der astronomischen Gesellschaft XIX. Leipzig 1889.

Eine ähnliche Veranlassung — um statt vieler nur noch eine zu erwähnen — bietet sich, wenn man die *physiologische Helligkeit* in Frage zieht. Dieser Gegenstand ist erledigt worden durch das *Fechner*'sche psychophysische Gesetz. Vergl. Note § 265 bis 270.

Es ist also vom Standpunkt der wissenschaftlichen Induction, auf welchem die *Lambert*'sche »*Photometria*« steht und der insofern auch für diese Bemerkungen maassgebend sein muss, ohne Sinn, über objective Helligkeiten etwas ausmachen zu wollen. Das einzige, was sich thun lässt, ist die Erweiterung der Erfahrungsgebiete mit gleichzeitiger entsprechender Erweiterung des *Lambert*'schen Gesetzes.

Dass übrigens das *Lambert*'sche Gesetz bezüglich der Grösse cos i' gar nicht erwiesen ist, wurde schon mehrfach erwähnt. Man vergl. hierzu Note 62).

256) Die Anwendung von Spiegeln ist schon deshalb von Vortheil, weil jeder nur einen beschränkten Raum beleuchtet.

Ein *Pariser Fuss* = 324.839, ein Zoll = 27.070, eine Linie = 2.256 mm.

259) In dem Versuche, über den sich L. hier Bedenken macht, hat die Reduction einen Rechenfehler.

262) Letzter Absatz: Man muss darüber hinwegsehen, dass die Verhältnisse der Figur nicht mit der Bezeichnungsweise stimmen (z. B. »nächste Kerze«). — Angewandt ist der Satz, dass im rechtwinkeligen Dreieck das Quadrat einer Kathete gleich ist dem Product ihrer Projection mit der Hypotenuse.

§ 265 bis 270: Das Urtheil des Auges. Es ist sehr zu bedauern, dass der fundamentale Versuch 6 so vollständig missglückt ist. Denn gerade *Lambert* wäre der geeignete Mann gewesen, ein Jahrhundert früher, als es inzwischen geschehen ist, die Consequenzen zu ziehen.

Es dürfte nicht leicht sein, zu entscheiden, welche unter den verschiedenen störenden Ursachen (z. B. dass die verglichenen Intensitäten nicht benachbart sind, oder dass das Emanationsgesetz der beleuchteten Fläche zu speciell angenommen wurde, nämlich unabhängig vom Incidenzwinkel) die maassgebende gewesen ist.

Wären solche Fehlerquellen nicht vorhanden gewesen, so hätte sich § 266 in der letzten Columne stets dieselbe Differenz ergeben müssen. Dies würde heissen, *dass die kleinste Differenz* *zwischen zwei Lichtintensitäten, welche von einem Beobachter eben noch als Differenz empfunden wird, proportional der Grösse dieser Intensitäten ist.* Mit anderen Worten: *Es ist das Verhältniss der kleinsten merkbaren Intensitätszunahme zur Intensität selbst für denselben Beobachter bei allen beliebigen Intensitäten eine Constante.* Dies ist das *Fechner*sche *psychophysische Gesetz*, so genannt, weil *Fechner* der erste war, der die ganze Tragweite des Gesetzes erkannt hat. Seine erste Besprechung des Gegenstandes befindet sich in der Abhandlung *Ueber ein psychophysisches Grundgesetz* (Abhandlungen der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wiss., Bd. 4) vom Jahre 1858.

Fechner fand das Gesetz, indem er zwei dicht aneinander grenzende Wolkenflächen, deren Helligkeitsdifferenz eben noch zu constatiren war, das eine Mal mit blossem Auge, das andere Mal durch ein absorbirendes Glas beobachtete. In beiden Fällen machte der Helligkeitsunterschied denselben Eindruck. Der Versuch wurde in verschiedener Weise abgeändert, z. B. indem man die zwei Schatten verglich, welche ein Stab durch Beleuchtung von zwei Kerzen auf eine Tafel warf, oder auch, indem man die eine Kerze sehr weit entfernte und dann den Tafelgrund mit dem einen Schatten verglich. So fand *Volkmann*, welcher in *Fechner*'s Auftrag die Versuche ausführte, für seine Person die erwähnte Constante = 1 : 100.

Nachträglich bemerkte *Fechner*, dass solche Versuche schon vor ihm von *Bouguer*, *Arago*, *Masson* und *Steinheil* gemacht worden waren.

Bouguer (*Traité*, Buch 1, Abschn. 2, Art. 1) benutzt zum Versuch, ähnlich wie *Fechner*, 2 Lichtquellen. Er findet den Factor = 1 : 64.

Arago, *pop. Astronomie*, Theil 1, S. 168, Ausg. von *Hankel*, reproducirt nur *Bouguer*, und bemerkt, dass bei Bewegung des Schattens (durch die Bewegung des schattenwerfenden Körpers) die Empfindlichkeit gesteigert wird. — In den *Mémoires sur la photométrie*, S. 256, benutzt er ein *Rochon*'sches Prisma, welches ein Doppelbild erzeugt, und schwächt dann durch ein Nicol das eine derselben ab.

Masson (Ann. de Chim. et de Phys. 1845, T. XIV, p. 150) verwendet eine rotirende Kreisscheibe, auf welcher sich ein schwarzer Fleck befindet. Der Versuch wird durch Hinzuziehung elektrischen Lichtes modificirt. Er findet für seine Person den Factor im Mittel = 1 : 100.

Steinheil (*Elemente der Helligkeitsmessungen*) bestimmte den mittleren Fehler einer Anzahl von Vergleichungen zwischen denselben zwei Lichtintensitäten, von denen die eine constant, die andere willkürlich veränderlich war, also durch Neueinstellung (beobachtet wurde mit dem Prismenphotometer) der gegebenen gleich gemacht werden konnte. Es ergab sich, nachdem das Verfahren auf 3 verschiedene Intensitäten der constanten Lichtquelle angewendet war, der mittlere Fehler ziemlich constant $= 1 : 38$.

Das Gesetz hat eine untere und eine obere Grenze, nach deren Ueberschreitung es ungenau und schliesslich sogar falsch wird. — Die *untere* Grenze entsteht dadurch, dass auch ohne äusseren Lichtreiz stets eine Gesichtsempfindung stattfindet, indem das schwarze Gesichtsfeld noch immer ein Gegenstand der Wahrnehmung ist. Dieses Licht, welches *Fechner* mit »einer für das Auge normalen Hallucination« vergleicht und welches man auch als Eigenlicht des Auges bezeichnet hat, addirt sich zu dem von aussen eindringenden Lichtreiz. Ist nun das *Fechner*'sche Gesetz richtig für die Summe des von aussen kommenden und des Eigenlichtes, so wird es streng zu gelten aufhören, wenn man, wie es thatsächlich geschieht, dieses Gesetz lediglich auf das äussere Licht bezieht. Doch wird diese Abweichung erst merkbar, wenn das Eigenlicht gegenüber dem äusseren Licht beträchtlich, d. h. wenn die äussere Intensität klein wird. Daher die untere Grenze. *Fechner* hat (Ueber ein psychophys. Grundges. S. 482) eine Methode angegeben, den Betrag des Eigenlichtes zu bestimmen. — Nicht so leicht ist die Erklärung der *oberen* Grenze. Jedenfalls ist sie überschritten, sobald bei starken Intensitäten das Organ leidet.

Das *Fechner'sche Gesetz*, welches sich auch auf andere Gebiete der sinnlichen Wahrnehmung erstreckt, z. B. Tonhöhen, Gewichte, Linearmaasse, erklärt zahlreiche Erscheinungen des täglichen Lebens. Auf dem Gebiet der Optik gehört hierher die Erklärung dafür, dass man die Sterne bei Tage nicht sieht; denn bei Nacht sind die beiden verglichenen Intensitäten: dunkeler Himmelsgrund und Stern, bei Tage dagegen: erleuchtete Atmosphäre und erleuchtete Atmosphäre + Stern; der *relative* Unterschied ist aber im letzteren Fall weit kleiner als im ersten.

Um die photometrischen Consequenzen des Gesetzes ziehen zu können, spricht man dasselbe weitergehend in der Form aus, *dass gleichen relativen Helligkeitszuwüchsen gleiche absolute Empfindungszuwüchse entsprechen,* d. h. dass

$$dE = A\,\frac{dH}{H + H_0}\,,$$

wo E die Empfindung, H die Helligkeit, H_0 das dem einzelnen Beobachter eigenthümliche Eigenlicht und A eine gleichfalls vom Beobachter abhängige Constante bezeichnet. Hieraus folgt

$$E = A \log C + A \log (H + H_0)\,,$$

wo $A \log C$ die Integrationsconstante ist. Nach H aufgelöst hat man

$$H = - H_0 + \frac{1}{C}\,e^{E:A}\,.$$

Hieran schliessen sich zwei für die Photometrie fundamentale Folgerungen: 1) über *die Ausgleichung der Beobachtungen*, 2) über *die Schätzung der Sterngrössen.* Man vergl. über ersteres Note § 271 bis 306, über letzteres Noten zu Theil 6, Kapitel 3.

268) L.'s Bemühen geht offenbar dahin, ein solches Maass aufzusuchen, in Bezug auf welches die Helligkeitsdifferenzen constant werden sollen. Da nach ihm die Helligkeit selbst ein solches Maass nicht ist (§ 267: die Differenzen »sind nicht ein bestimmter Procentsatz der gesammten Helligkeit«), so versucht er es mit dem absoluten Betrag der Helligkeitsdifferenzen, und da hier der Verlauf der Differenzen in den entgegengesetzten umschlägt als vorher, so macht er einen weiteren Versuch mit den Differenzen der subjectiven Helligkeit (*claritas apparens* = subj. Hell., welche sich auf die Oeffnung der Pupille bezieht, wäre hier der richtige Ausdruck; L. sagt: cl. visa, demnach auch im Text: scheinbare Hell.), wodurch nicht viel gebessert wird. Der hier benutzte Ausdruck für die Pupillenöffnung stimmt übrigens nicht mit dem Ergebniss der Untersuchung Theil 4, Kapitel 2.

270) Hier endlich kommt L. auf die ursprüngliche Hypothese zurück, jedoch unter Bezugnahme auf die claritas apparens. Diese Form des Resultats ist diejenige, welche er später zu citiren pflegt.

§ 271 bis 306. Ueber die Ausgleichung der Beobachtungsfehler. Dieser Abschnitt wurde weggelassen, da der Inhalt theils jedem Anfänger bekannt, theils veraltet ist. Das Ganze culminirt in folgenden Sätzen: 1) Fortwährende einseitige Abweichungen verrathen einen Fehler des Gesetzes, welches zu prüfen ist, oder einen Fehler der Methode (des Instrumentes), 2) der wahrscheinlichste Werth directer Messungen ist das arithmetische Mittel, 3) um den Grad der Genauigkeit zu beurtheilen, nimmt man einmal direct das Mittel, schliesst dann diejenige Beobachtung aus, welche sich vom Mittel am weitesten entfernt, und bildet von neuem das Mittel. Die Differenz zwischen beiden Mitteln »zeigt am genauesten an, wie weit das Gesammtmittel zweifelhaft ist«; von dieser Bestimmung des grössten plausiblen Fehlers wird später häufig Gebrauch gemacht.

Das moderne Ausgleichungsverfahren ist durch das *Fechner'sche Gesetz* bestimmt. Da nicht die Helligkeiten, sondern deren Logarithmen psychisch empfunden werden, oder auch, da der mittlere Fehler der Helligkeitslogarithmen constant ist *(Steinheil)*, so folgt, dass es die *Logarithmen* der gemessenen Helligkeiten sind, welche man nach der Methode der kleinsten Quadrate auszugleichen hat. Hiernach ist z. B. bei directen Messungen das *geometrische* Mittel der wahrscheinlichste Werth. Das Verdienst, diese Art der Ausgleichung eingeführt zu haben, gebührt *Seidel*, der das Verfahren allerdings in anderer Weise plausibel gemacht hat (vergl. *Resultate photometrischer Messungen* u. s. w. S. 8 fgde.).

§ 307 bis 314: Cautelen bei photometrischen Messungen. Der Abschnitt ist mehrfach charakteristisch für *Lambert*.

310) *Bewegung der Fibrillen,* vergl. Note § 832 bis 834.

Theil II. Die Lichtschwächung bei Brechungen und Reflexionen.

Kapitel 1. Ebene Gläser von vollkommener Durchsichtigkeit. Die Ueberschrift lautet: *Experimentis definitur quantitas luminis a planis vitreis perfecte pellucidis reflexi et refracti. Utraque perlustratur calculo.*

Kapitel 2. Ebene Gläser von unvollkommener Durchsichtigkeit. Die Ueberschrift lautet: *Instaurantur experimenta et calculus pro tabulis vitreis minus diaphanis.*

Beide Kapitel wurden wegen des vollkommen veralteten Inhaltes weggelassen. Der Gang der Untersuchung ist folgender: Auf eine planparallele Glasplatte falle unter einem Winkel γ (angulus inclinationis) ein Lichtstrahl von der Intensität 1 auf, und spalte sich an der ersten Trennungsfläche in einen reflectirten Strahl von der Intensität q und einen gebrochenen von der Intensität n. Der letztere spaltet sich an der zweiten Trennungsfläche abermals und zwar in einen reflectirten von der Intensität p und einen austretenden von der Intensität m, vorausgesetzt, dass hierbei wieder die Intensität des ankommenden Strahles $= 1$ gesetzt wurde. Da nun $q + n = 1$, $p + m = 1$, so bleibt das Problem: *q und p als Functionen des Winkels γ zu finden.*

Aus der Summe Antheile, welche bei unendlich oft wiederholtem Hinundhergehen in einer einzigen Glasplatte nach aussen abgegeben werden, setzt sich ein resultirender nach oben gehender Strahl M zusammen, und ein nach unten gehender Strahl von der Intensität N. Dann sind M und N angebbar als Functionen von p und q; und M und N sind die Grössen, welche sich beobachten lassen. Dies wird so arrangirt:

Es werden x Glasplatten genommen, und wiederum die gesammte nach oben und nach unten austretende Lichtmenge X und Y als bekannte Functionen von M und N dargestellt. Nun wird durch Versuche für ein gewisses x der Winkel γ so bestimmt, dass $X = Y$ wird. Aus dieser Gleichung ergibt sich also eine Beziehung zwischen M und N, mithin sind M und N vollständig gegeben, wenn, wie bei vollkommen durchsichtigen Gläsern, noch überdies $M + N = 1$ ist. Dies geschieht auch für andere x und mithin erhält man für eine Reihe von γ die zugehörigen M und N.

Nun sind aber die beiden Gleichungen, welche M und N als Functionen von p und q darstellen, nicht von einander unabhängig; sie genügen also nicht, um nach p und q aufzulösen. Deshalb ist eine zweite Versuchsreihe erforderlich, welche lediglich reflectirte Strahlen liefert. Diese Versuchsreihe, zu welcher ein Glasprisma als reflectirender Körper verwandt wird, ist aber auf zwei Beispiele beschränkt geblieben, so dass die Bestimmung von p und q auf diesem Wege nicht weiter verfolgt wird. Durch das Bisherige hat sich folgende Tabelle ergeben:

der Anzahl x von Glastafeln	entsprechen die Winkel $90^\circ - \gamma$	und diesen die Grössen M
1	$14\frac{1}{2}^\circ$	0.5000
2	22	0.3333
3	27	0.2500
4	31	0.2000

der Anzahl x von Glastafeln	entsprechen die Winkel $90^\circ - \gamma$	und diesen die Grössen M
5	35°	0.1667
6	39	0.1429
7	43	0.1250
8	47	0.1111
9	$50\frac{1}{2}$	0.1000

Um weiter gehen zu können, wird eine theoretische Entwicklung aufgesucht. Hierzu nimmt L. an, dass Brechung und Reflexion in der Weise zu Stande kommen, dass der fortschreitende Strahl längs einer äusserst kleinen Strecke seines Weges continuirliche Verluste erleidet. Der Rest des diese Strecke durchdringenden Lichts ist das gebrochene, der Verlust das reflectirte Licht. Es heisse die Lichtstärke des fortschreitenden Strahles v, der durchlaufene Weg innerhalb jener kleinen Strecke sei s und k sei eine Constante. Dann wird nach der Art, wie man sich die Absorption vorstellt, der Verlust an Intensität proportional sein der Intensität selbst und dem durchlaufenen Wegelement. Es wird also sein

$$- dv = kv\,ds\,.$$

Lambert sieht sich aber, um Uebereinstimmung mit den Beobachtungen zu erzielen, veranlasst, den Factor $\sec\gamma$ hinzuzufügen. Es wird sodann statt des durchlaufenen Weges s dessen Projection auf die Normale der Grenzfläche eingeführt und unter Rücksicht auf die Krümmung der Bahn des fortschreitenden Strahles (auch die Ablenkung erfolgt continuirlich, etwa wie bei der astronomischen Refraction) ein Ausdruck aufgestellt, welcher in eine nach Potenzen von $\operatorname{tg}^2\gamma$ fortschreitende und mit dem gemeinsamen Factor $\sec^2\gamma$ behaftete Reihe entwickelt wird. Indem nur das erste Glied beibehalten wird, erhält man durch Integration

$$- \log v = \alpha \sec^2\gamma\,,$$

wo α eine Constante ist, welche durch die Beobachtungen bestimmt werden muss. Indem man sich unter v einmal die Intensität des fortschreitenden Strahles beim Eindringen, ein zweites Mal die Intensität desselben beim Austreten vorstellt und in beiden Fällen die Constante α den Beobachtungen gemäss bestimmt, ergibt sich

$$\log \text{brigg.}\ (1 - q) = - 0.0087214 \sec^2\gamma$$
$$\log \text{brigg.}\ (1 - p) = - 0.0199966 \sec^2\gamma\,.$$

Für die Winkel γ der vorigen Tabelle werden aus den hierdurch berechneten p und q die M abgeleitet und mit denjenigen der vorigen Tabelle verglichen. Die in der That vorzügliche Uebereinstimmung darf nicht überraschen, da die Formeln für p und q ihrer Ableitung nach nur den Charakter von Interpolationsformeln beanspruchen dürfen. Durch eine sehr weit gehende Extrapolation gelangt L. zu folgendem Endergebniss:

$90^\circ - \gamma$	q	p	M
10°	0.4862	0.7766	0.7108
20	0.1578	0.3204	0.3622
30	0.0772	0.1653	0.2070
40	0.0474	0.1046	0.1376
50	0.0337	0.0705	0.0973
60	0.0264	0.0585	0.0802
70	0.0225	0.0499	0.0690
80	0.0203	0.0450	0.0624
90	0.0199	0.0448	0.0619

Bei der Betrachtung der unvollkommen durchsichtigen Gläser wird auf die Absorption des Lichtes auf den Wegen zwischen beiden Grenzflächen Rücksicht genommen. Doch gelangt L. hier nicht zu so allgemeinen Resultaten.

Dieser verfehlte Versuch *Lambert's* ist wohl der eingehendste, welcher gemacht worden ist, bevor das Problem durch *Fresnel* auf Grund der Polarisation des Lichtes formell erledigt wurde. Mit Hilfe zweier Sätze, nämlich 1) der Gleichheit der Bewegungen in unmittelbarer Nähe an beiden Seiten der Grenzfläche und 2) des Satzes von der Erhaltung der lebendigen Kraft, ergibt sich zunächst der Satz: Ist ein Lichtstrahl von der Intensität 1 unter dem Winkel α gegen die Einfallsebene polarisirt, und sind R_s und R_p die Intensitäten der senkrecht und parallel zur Einfallsebene polarisirten Componenten des reflectirten, D_s und D_p die entsprechenden des durchgehenden Strahles, so ist die Intensität des reflectirten Strahles

$$R_p + R_s = \sin^2\alpha \frac{\operatorname{tg}^2(\gamma - \gamma_1)}{\operatorname{tg}^2(\gamma + \gamma_1)} + \cos^2\alpha \frac{\sin^2(\gamma - \gamma_1)}{\sin^2(\gamma + \gamma_1)}$$

und die Intensität des durchgehenden Strahles

$$D_p + D_s = (\sin^2\alpha - R_p) + (\cos^2\alpha - R_s),$$

wovon jede Gleichung wieder in zwei andere zerfällt, indem homologe Glieder gleich sind. Hierbei hat γ die *Lambert'*sche

Bedeutung und es ist $n \sin \gamma_1 = \sin \gamma$, wo n der Brechungsexponent ist. Durch eine solche Mittelbildung, wie früher erwähnt wurde, findet sich für *natürliches* Licht

$$R = \frac{1}{2} \frac{\mathrm{tg}^2 (\gamma - \gamma_1)}{\mathrm{tg}^2 (\gamma + \gamma_1)} + \frac{1}{2} \frac{\sin^2 (\gamma - \gamma_1)}{\sin^2 (\gamma + \gamma_1)}$$

$$D = 1 - R \, .$$

Hiermit ist zur Vergleichung mit den *Lambert*'schen Zahlen die folgende Tabelle berechnet worden, wo die R den *Lambert*'schen q entsprechen und $n = 1.5$ gesetzt worden ist:

γ	R	R'
0°	0.0400	0.0400
10	0.0400	0.0401
20	0.0403	0.0417
30	0.0421	0.0552
40	0.0457	0.2453
50	0.0577	totale Reflexion.
60	0.0892	totale Reflexion.
70	0.1710	totale Reflexion.
80	0.3877	totale Reflexion.
90	1.0000	totale Reflexion.

Die R' sind hier so verstanden, als ob das vom Innern des Glases nach der Grenzfläche strahlende Licht natürliches sei und dort unter dem Winkel γ auffalle. Sie entsprechen also nicht den p *Lambert*'s, zu denen es überhaupt keine vergleichbaren Zahlen gibt, da das eingedrungene Licht theilweise polarisirt ist.

Soviel zur Beleuchtung der Resultate *Lambert*'s. Bezüglich der weiteren, nicht in die Photometrie gehörigen Theorie der Glasplatten und besonders der Reflexion an Metallen, welche in der praktischen Photometrie in Betracht kommen kann (Metallspiegel, Heliostaten), muss auf die Lehrbücher der theoretischen Optik verwiesen werden.

Kapitel 3. Dioptrische Photometrie. Eine Linse. Unter den Ausdruck *Dioptrische Photometrie* wollen wir hier die Theorie der Lichtstärke in den Vereinigungspunkten der Strahlen eines dioptrischen Systems verstehen. Diese Theorie zerfällt naturgemäss in zwei Theile: A) die Theorie des *rein dioptrischen Bildes*, welches entsteht, wenn die Lichtstrahlen im gleichen Medium sich geradlinig fortpflanzen, wenn sie ferner an den Trennungsflächen in der Weise gebrochen werden, dass die vereinfachenden Voraussetzungen, welche der gewöhnlichen Dioptrik zu Grunde liegen, statthaft sind, endlich wenn dieses Brechungsverhältniss für Strahlen aller Farben das gleiche wäre. Hierzu kommt B) die Photometrie des *gestört-dioptrischen Bildes*. Dieselbe zerfällt, je nachdem man die erste, zweite oder dritte der gemachten Voraussetzungen fallen lässt, in 1) die Theorie des *gebeugten Bildes*, 2) die Photometrie des *Zerstreuungsbildes*, welches durch die Kugelgestalt der brechenden Flächen hervorgerufen wird, 3) die Theorie des *Dispersionsbildes*, welches durch die Farbenzerstreuung erzeugt ist. In jeder dieser Theorien hat man wieder zwei Fälle zu unterscheiden: *entweder* man betrachtet einen leuchtenden *Punkt*, *oder* eine leuchtende *Fläche*.

Die Photometrie des *rein dioptrischen Bildes* war schon vor *Lambert* bekannt. Er reproducirt sie hier in Kapitel 1, 2, und an ganz anderer Stelle: Theil 4, Kapitel 1. Die Darstellung ist umständlich, doch immer noch viel geschmackvoller als die seiner Vorgänger. Das *gestört-dioptrische Bild* erörtert L. *nicht*.

Um die Photometrie des *gebeugten Bildes* zu behandeln, kommt es darauf an, das optische System aus der Betrachtung zu eliminiren. Hierzu fingirt man *entweder* leuchtende Punkte auf derselben Seite der beugenden Oeffnung, wie der reelle leuchtende Punkt, legt diesen Punkten diejenigen Intensitäten bei, welche in der beugenden Oeffnung denselben Zustand hervorrufen, wie der reelle Lichtpunkt, und construirt zu diesen fingirten Punkten mit fingirten Intensitäten nach den Regeln der geometrischen Optik das gebeugte Bild (*Fraunhofer*'sche Beugungserscheinungen, bei welchen speciell der leuchtende Punkt im Unendlichen liegt) — oder man betrachtet direct die beugende Oeffnung in ihrem wirklichen Zustand, ebenso wie bei den gewöhnlichen (*Fresnel*'schen) Beugungserscheinungen, d. h. bezüglich der Richtungen der dort ankommenden und von dort fortschreitenden Strahlen, fasst dabei aber nicht ihre wirkliche, sondern ihre optische Länge ins Auge.

Der ersteren Auffassung bedient sich z. B. *Neumann* in seinen *Vorlesungen über theoretische Optik* (herausgegeben von *Dorn*, Leipzig 1885); die andere Betrachtungsweise hat *Helmholtz* benutzt in der Abhandlung über *die theoretische Grenze für die Leistungsfähigkeit der Mikroskope* (Wissensch. Abhandl., Bd. 2, S. 207 fgde.).

Für einen unendlich entfernten *leuchtenden Punkt* findet man die resultirende Intensität entwickelt und discutirt in den besseren Lehrbüchern der theoretischen Optik, auf welche hier verwiesen werden muss. Erwähnt sei nur, dass man den Winkelwerth des Durchmessers des gebeugten Scheibchens für mittlere Wellenlänge, nämlich

$$\frac{290''}{2\,R^{\mathrm{mm}}},$$

wo R der Radius der Objectivöffnung ist, als Diffractionsconstante des Fernrohres zu bezeichnen pflegt. — Bei endlicher Entfernung des leuchtenden Punktes ist das Problem gelöst durch *Lommel: die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Oeffnung und eines kreisrunden Schirmchens* (*Abhandlungen* der k. Bayer. Acad. der Wiss. Bd. 15, 2. Abtheilung, München 1886). — Für eine unendlich entfernte *leuchtende Fläche* von gleichmässiger Intensität ist die Lichtvertheilung im gebeugten Bilde eingehend untersucht in *H. Struve*'s Abhandlung: *Ueber den Einfluss der Diffraction an Fernröhren auf Lichtscheiben* (Mém. de l'acad. imp. de St. Pétersbourg, 7e série, tome 30, No. 8.).

Für die Photometrie sind die Untersuchungen *Voigt*'s von Interesse (Wiedem. Annalen 3, S. 532, 1878), nach welchen die gewöhnliche Beugungstheorie zwar die geometrischen Verhältnisse im Beugungsbild richtig, die Intensitäten aber nur angenähert darstellt.

Die Photometrie des *Zerstreuungsbildes* hat eine Behandlung in dem Grade der Vollendung, welchen man beanspruchen muss und dessen sie fähig ist, meines Wissens noch nicht gefunden. Die Hilfsmittel liegen vollständig vor; und die Untersuchung selbst dürfte zwar ausgedehnt, aber recht leicht sich gestalten.

Bei der Photometrie der *Dispersionsbilder* fehlen dagegen noch die Grundlagen, da man den mathematischen Ausdruck für das Gesetz noch nicht kennt, nach welchem sich die Strahlen verschiedener Farben zu einer Gesammtintensität zusammensetzen. Eine Ueberschlagsrechnung hat *Helmholtz* angestellt in den *mathematisch-physikalischen Excursen* (Wiss. Abhandlungen Bd. 2, S. 127 fgde.) (übereinstimmend mit der Darstellung in der *physiol. Optik*). Er setzt »die Helligkeit der Spectralfarben durch die ganze Ausdehnung des Spectrums nahehin constant« und denkt sich das Bild aufgefangen in derjenigen

Ebene, in welcher sich die äussersten rothen und violetten Strahlen schneiden; die Strahlen, welche dann noch gerade nach dem Centrum des Dispersionsbildes gelangen, nennt er mittlere und ihren Brechungsindex N. Ist ferner ϱ_0 der Abstand des betrachteten Punktes vom Centrum des Dispersionskreises, r der Radius des letzteren, b der Radius des Objectivs und B eine Constante, so erhält man für die Intensität im Dispersionsbilde eines *leuchtenden Punktes*

$$J = \frac{2B}{N(N-1)}\left(\frac{b}{\varrho_0} - \frac{b}{r}\right).$$

Hat man eine gleichmässig *leuchtende Fläche*, so ist die Intensität im Dispersionsbild im allgemeinen constant, dagegen in der Nähe des Randes, wenn x die nach aussen positiv gemessene kürzeste Entfernung des Punktes vom Rande des geometrischen Bildes ist, und wenn

$$\frac{x}{r} = \cos\vartheta$$

gesetzt wird, spricht sich die Intensität durch die Formel aus

$$J = \frac{2Bb}{N(N-1)}\, r\left[\vartheta + \sin\vartheta\cos\vartheta + 2\cos\vartheta \log \operatorname{tg}\left(45^0 - \tfrac{1}{2}\vartheta\right)\right].$$

Sowohl bei der Beugung wie hier hat man bisher nur *gleichmässig* leuchtende geometrische Flächen betrachtet. Die Theorie der ungleichmässig leuchtenden bietet einen unendlichen Spielraum, doch lassen sich hier über Zu- und Abnahme der Intensität elegante Sätze angeben, deren Entwickelung hier unterdrückt werden muss.

So viel zur Orientirung. Wir kehren zum Detail des Textes zurück.

§ 486: Weggelassen. Enthält nichts zur Sache.

§ 487 bis 505: Die mittlere Helligkeit des Bildes. Die Fragestellung in dieser Allgemeinheit ist unzweckmässig. Eine Zusammenstellung des brauchbaren Inhalts dieses Kapitels, des folgenden und von Theil 4, Kap. 1 ist gelegentlich der letzteren Stelle in Note 812) gegeben.

487) Ausser von der *Reflexionsfähigkeit* wird auch von der Absorption in der Linse abgesehen. — Den Ausdruck *Brennpunkt* (Original: *focus*) braucht L. durchweg für den Vereinigungspunkt der Strahlen. Statt der Brennweite im heutigen Sinn führt er diejenigen Grössen ein, deren Function die

Brennweite ist, nämlich die 2 Radien der Linse und den Brechungsindex.

493) Führt man zu den Lambert'schen Bezeichnungen noch die Brennweite im heutigen Sinn ein $= f_0$, und ebenso den Brechungsindex des Glases $= n$, so ist L.'s Formel identisch mit den bekannten:

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{f} = \frac{1}{f_0} \qquad \text{wo } \frac{1}{f_0} = (n-1)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{e}\right).$$

L. setzt hier und im ganzen Werk $n = 1.5$. In Wirklichkeit ist für die D-Linie bei Crownglas $n = 1.5$ bis 1.6 (dem letzteren Werth meist näher), für Flintglas 1.6 bis über 1.7.

494) Nach den Vorbereitungen beginnt hier das Thema. — Wenn man, wie L. es thut, die Principien der Photometrie auf Experimente gründet, so wäre es consequent gewesen, an dieser Stelle das Grundgesetz (Note 36)) experimentell zu erweitern durch den Zusatz: Die Beleuchtung dL' ist proportional der Dichtigkeit eines Systems von geraden Linien, welche vom leuchtenden Element aus gezogen sind und deren Richtung im Weiteren durch das Brechungsgesetz der Optik bestimmt ist. Dieser Satz müsste an Stelle des Factors $\frac{1}{r^2}$ in das Grundgesetz eintreten.

Bei der Hervorhebung der Hauptsätze in den folgenden Noten sollen dieselben nur für unendlich kleine Flächenstücke ausgesprochen werden, da mit den *allgemeinen Sätzen* Lambert's gar nichts gewonnen ist.

Der allgemeine Satz wird in drei Formen ausgesprochen (vergl. Note § 214 bis 225): nämlich im vorliegenden § nach § 215, ferner in

495) nach § 217, endlich in

497) nach § 222; diese Form kommt *später* häufig zur Anwendung.

499) Die Formel $\eta = \pi \cos^2 \omega \operatorname{tg}^2 AFC$, welche nur eine Modification der vorigen Form ist, wird im *Nächsten* häufig angewendet. — Bezeichnet man bei einer brechenden Kugelfläche die Neigung eines beliebigen Strahles gegen die Axe und ebenso die Neigung des Radius, welcher zum Einschneidepunkt des Strahles in die Fläche gehört, gleichfalls gegen die Axe, als kleine Grössen erster Ordnung, so beruhen die Formeln der Dioptrik darauf, dass man nur die ersten Potenzen dieser Neigungen berücksichtigt hat. Die obige Lambert'sche Gleichung

beruht auf diesen Formeln der Dioptrik, mithin auch auf ihren Voraussetzungen, und demnach könnte es scheinen, dass in ihr die Genauigkeit bis auf die zweite Potenz (in $\cos^2 \omega$) nur fingirt wäre. Dies ist aber nicht der Fall. Es lässt sich nämlich leicht zeigen, dass allerdings die Schnittpunkte beliebiger Strahlen mit der Axe vom Vereinigungspunkt der Centralstrahlen um kleine Grössen zweiter Ordnung entfernt sind, dass aber ihre Schnittpunkte mit einer Ebene, welche im Vereinigungspunkt der Centralstrahlen auf der Axe senkrecht steht, vom Einschneidepunkt der Axe nur um Grössen dritter Ordnung abstehen. Diese *letzteren* Distanzen aber sind es, welche im vorliegenden Falle in Frage kommen. Selbstverständlich aber könnte man in $\operatorname{tg}^2 AFC$ statt der Tangente ebenso gut den Sinus oder den Bogen setzen. Diese Bemerkung soll zugleich für die zahlreichen ähnlichen Stellen im Späteren gesagt sein.

Dennoch wollen wir, als *praktisch* gleichgiltig, $\cos^2 \omega = 1$ setzen und den Hauptsatz in folgender Form notiren: *Leuchtet ein Element des Objectes mit der Intensität J, so ist die Beleuchtung im entsprechenden Element des Bildes*

$$\eta = J \cdot \pi \cdot \operatorname{tg}^2 AFC\,.$$

Es ist nämlich die *Beleuchtung* (Lichtmenge durch betroffenes Flächenelement, vergl. Note 36)) der Grenzfall der mittleren Beleuchtung. Im Ausdruck für η ist also die leuchtende Fläche (Linsenoberfläche) noch als Factor enthalten. (Für ein endliches Object gilt der Satz fort, da sich Elemente des Objectes und des Bildes *neben* einander lagern.)

Diesen Factor zu eliminiren, denken wir uns dieselben Lichtstrahlen in entgegengesetzter Richtung verlaufend. Dann ist η die *Lichtmenge*, welche vom Bild aus auf die Linse gelangt, dividirt durch die Grösse des Bildelementes. Multiplicirt man diese Grösse noch mit dem Quadrat der Entfernung und dividirt durch die Grösse der beleuchteten Fläche, so bleibt nach dem Satz Note 36) (wobei hier Emanations- und Incidenzwinkel nicht in Frage kommen) die Intensität des leuchtenden Bildes übrig. Es ist aber: Linsenfläche durch Quadrat der Entfernung nichts anders als $\pi \operatorname{tg}^2 AFC$, also bleibt nach dieser Umformung des obigen Ausdrucks η die Intensität J übrig; d. h. also: *das dioptrische Bild einer Linse leuchtet mit derselben Intensität wie das Object.*

Einfacher ist der umgekehrte Weg. Der soeben gefundene zweite Hauptsatz lässt sich nämlich ohne Rechnung direct einsehen (denn weil dieselben Strahlen auftreten, ist die *Beleuchtung* der Linse durch ein nach vor- und rückwärts gleich stark leuchtend gedachtes Bildelement dieselbe wie durch das entsprechende Objectelement; es verhalten sich aber die Grössen dieser Elemente wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Linse, wodurch sich die in den beiden Beleuchtungen ohnedies auftretenden Quadrate wegheben) und dann folgt aus ihm sofort der erste Lambert'sche (da man sich nach § 196 statt des mit J die Linse beleuchtenden Bildelements umgekehrt die Linse als mit der Intensität J das Bild beleuchtend denken darf), zugleich in der Verallgemeinerung, dass wenn die Oeffnung der Linse nicht kreisförmig ist, *der scheinbare Flächeninhalt* derselben, vom Bildpunkt aus gesehen (d. h. Flächeninhalt durch Quadrat der Entfernung), an Stelle von $\pi \operatorname{tg}^2 AFC$ zu setzen ist. — Der zweite Hauptsatz gilt übrigens für jedes dioptrische System mit gleichem Anfangs- und End-Medium; im andern Falle kommt ein Factor hinzu, welcher speciell für das Auge constant ist.

Die Vereinfachung $\cos^2 \omega = 1$ hat neben der Leichtigkeit der soeben angedeuteten umgekehrten Entwickelung noch den Vortheil, die folgenden Specialfälle (§ 500 bis 505) entbehrlich zu machen.

§ 506 bis 520: Der Lichtverlust durch Schwächung im Glas und durch Reflexionen an der Oberflächen der Linsen. Da die Neigung der Strahlen gegen die Axe klein ist, so darf man den Lichtverlust (Kap. 1 und 2) constant setzen für alle Strahlen. Bei unserer Vereinfachung ($\cos^2 \omega = 1$) ist dies, wie leicht zu zeigen, stets, für *Lambert's* Schreibweise der Resultate dagegen nur bedingungsweise statthaft. L. schweigt hierüber.

Der Inhalt dieses Abschnitts kommt also darauf hinaus, *dass den beiden Hauptsätzen Note 499) ein constanter Factor* $\varkappa < 1$ *zugesetzt wird.*

508) Wie Lambert auf diese Annahme kommt, ist mir unklar.

511) Der Ausdruck η, Note 499), ist eine »Beleuchtung«. Denkt man sich also das Bild durch einen Schirm aufgefangen, so sind η und die directe Beleuchtung λ commensurable Grössen. Zur Analogie mit Note 499) schreiben wir eben so richtig: Leuchtet das Object mit der Intensität J, so erhält das Bild die Beleuchtung

$$\lambda = J \cdot \pi \cdot \operatorname{tg}^2 gFG.$$

514) Die erste Gleichung stimmt nicht mit der Definition von $\varkappa$ in § 508. Setzt man $\varkappa \cos^2 gCG = \cos^2 AFC$, so wird das Resultat bis zu dem von Lambert erstrebten Genauigkeitsgrad richtig.

§ 521 und 522: Weggelassen, weil inhaltlos.

§ 523 bis 529: Die leuchtende Fläche reducirt sich auf ein einziges Element. Unter geringer Beschränkung der Genauigkeit ergab sich das Hauptresultat schon Note 499).

524) Vergl. die Formel Note 209).

527) *Lambert* wird hier den Folgerungen untreu, welche er (vergl. § 270) aus seinen Untersuchungen über die Verhältnisse gezogen hat, die dem heutigen *Fechner*'schen Gesetz zu Grunde liegen. Er nimmt vielmehr, genau dem *Fechner*schen Gesetz entsprechend, das Verhältniss des kleinsten merkbaren Unterschieds zum Betrag selbst als *constant* an, und zwar = 1 : 20.

529) Der Ausdruck *scheinbare Helligkeit* (*claritas visa*) ist nicht gut gewählt, wenn man die bestimmte Definition Note 37) zu Grunde legt. Auch das Citat am Ende des § ist deshalb unzweckmässig.

§ 530 bis 537: Prüfung des photometrischen Grundgesetzes. Hier wäre, genau *Lambert*'s Gedankengang entsprechend, der Platz gewesen für den experimentellen Beweis derjenigen Erweiterung des photometrischen Grundgesetzes, welche der dioptrischen Photometrie zu Grunde liegt (vergl. Note 494), desgl. die Note § 226 bis 264). L. setzt dagegen diese Erweiterung als richtig voraus und hat damit einen neuen photometrischen Apparat gewonnen, dessen er sich fortan häufig bedient. — Der Werth der folgenden Experimente ist nur ein historischer, weil sie einen Beitrag liefern, das lang gehegte Vertrauen in die experimentelle Berechtigung der *Lambert*'schen Principien zu rechtfertigen. Es bezieht sich:

Versuch 20 auf das Gesetz vom Quadrat der Entfernung,
Versuch 21 auf das Incidenzgesetz,
Versuch 22 auf das Emanationsgesetz.

Sachlich ist einzuwenden, dass die beiden letzten Versuche gar nicht beweisen, was L. will. Sie beziehen sich vielmehr auf das Gesetz für nicht-selbstleuchtende Körper. Vergl. Note 62).

Aber schon an sich müssen die Versuche falsch sein wegen einer Bemerkung, die *Zöllner* bei anderer Gelegenheit gemacht hat. Man vergl. Note 726). Dies gilt in stärkerem Masse für Versuch 22, wo nur *eine* Linse verwendet wird.

535) *Im anderen Falle:* Das soll heissen, wenn eH nicht $= gJ$ ist. Denn was die erste der im vorliegenden § besprochenen Bedingungen betrifft, so müssen unter *allen* Umständen Sinus und Bogen vertauschbar sein.

§ 538 bis 545: Die Beleuchtung ausserhalb der Bildebene.

540) Alle Strahlenkegel schneiden, da sie ihre Spitzen alle in einer Ebene, der Bildebene haben, in der Auffangebene Kreise von gleichen Durchmessern aus, so dass also $Rq = NQ = rS$. Da die Beleuchtung des Stückes der Auffangebene, welches allen Strahlenkegeln gemeinsam ist, dieselbe bleibt, wenn man die Spitzen der Strahlenkegel verschiebt, so verschiebe man sie sämmtlich nach dem Punkt F. Hiermit hat L.'s Verfahren seine Berechtigung.

541) Dem hier enthaltenen Hauptsatz wollen wir eine andere Form geben: Nach Note 499) war die *Beleuchtung* in der Bildebene (also was gleichgiltig ist, des Bildes oder eines Bildelements) $= J\pi \operatorname{tg}^2 AFC$; folglich ist die *Lichtmenge* aller Strahlenkegel = derselben Grösse mal Inhalt des Bildes $= J\pi^2 F\varphi^2 \operatorname{tg}^2 AFC$; mithin wieder die *Beleuchtung* des gemeinsamen Raumes in der Auffangebene = der letzteren Grösse durch Inhalt des Kreises $NQ =$

$$J\pi \frac{F\varphi^2}{MN^2} \operatorname{tg}^2 AFC\,.$$

Bezeichnet man die Entfernung zwischen der Bildebene und der Auffangebene mit r, so ist $MN = r \operatorname{tg} AFC$, also wird die gesuchte *Beleuchtung des gemeinsamen Raumes* =

$$J\pi F\varphi^2 \cdot \frac{1}{r^2}\,.$$

Für die Bildebene selbst wird $r = 0$, also der Ausdruck unendlich. Dies ist keineswegs paradox; denn ein gemeinsamer Raum ist für $r = 0$, wie überhaupt zwischen V und V' gar nicht vorhanden.

§ 546 bis 558: Weggelassen. Dieser Abschnitt behandelt zunächst die *Concavlinse*. Da ein physisches Bild nicht entsteht, so wird hier nur die Beleuchtung ausserhalb der Bildebene behandelt, und hier gelten fast wörtlich dieselben Schlüsse und

Sätze wie bei der Convexlinse. Dann folgen einige nicht interessante Sätze über brechende *Glaskugeln*, endlich *Hinweise* auf das Werk von *Smith-Kästner* und auf Abhandlungen *Euler's* in den Schriften der *Petersburger* und *Berliner* Academie.

Kapitel 4. Dioptrische Photometrie. Mehrere Linsen.

§ 559 bis 595: Weggelassen. Es handelt sich zunächst um die *geometrische Optik der secundären Bilder*, d. h. der Bilder, welche durch Reflexionen und dazu kommende weitere Brechungen an den Trennungsflächen der Medien entstehen. Die Resultate sind elegant und der Gegenstand nicht unwichtig, da diese Bilder wiederholt den Astronomen Anlass zu viel besprochenen Täuschungen gegeben haben (Venusmond, vermeintliche Doppelsterne). Doch gehört die Sache nicht in die Photometrie. — Sodann wird die *Helligkeit dieser Bilder* bestimmt und hierbei die Ergebnisse von Kap. 1 und 2 dieses Theiles benutzt. Dieser Umstand begründet die Weglassung des Abschnittes.

§ 596 bis 613: Brechung durch mehrere Linsen. Es wird für mehrere Linsen der dem *Lambert*'schen Satz 499 entsprechende abgeleitet, nachdem zuvor die Lage der Strahlenkegel gegen die Linsenöffnungen berücksichtigt ist.

Viel einfacher schliesst man so: Es ist nach dem zweiten Hauptsatz Note 499) die Intensität, mit welcher das vorletzte Linsenbild leuchtet = der des Objectes $= J$, dann ist nach dem ersten Satz Note 499) die Beleuchtung im letzten Bild = J mal der scheinbaren Grösse der Basis des thatsächlich einfallenden Strahlenkegels, also proportional dem Flächenstück, welches der Strahlenkegel auf der Oeffnung der letzten Linse ausschneidet. Ist also die letzte Oeffnung vollständig in den dort ankommenden Strahlenkegel eingetaucht, so ist für die Beleuchtung im Bilde die Beschaffenheit des dioptrischen Systems gleichgiltig und nur die letzte Oeffnung maassgebend.

Des *Weiteren* vergleiche man die Noten zu Theil 4, Kap. 1.

602) Nach den Bemerkungen der vorigen Note gelten alle diese Sätze auch für *endliche* Entfernungen, zwar nicht gleich streng, doch ist der Fehler erst von der zweiten Potenz der Neigung der Strahlen gegen die Axe. Da indessen in diesem Kapitel hierauf niemals Rücksicht genommen wird, so rechtfertigt sich jetzt die Weglassung des Factors $\cos^2 \omega$ in Note 499).

606) Hier hat der Ausdruck *Brennweite (distantia focalis)* den heutigen Sinn.

Theil III. Das zurückgeworfene Licht.
Kapitel 1. Reine Reflexion.

§ 614 bis 628: Allgemeines über das zurückgeworfene Licht. Die Besprechung sei auf das folgende Kapitel verschoben, wo der Gegenstand hingehört. Die Hauptsache ist enthalten in § 620 (Entstehung des gefärbten Lichts), § 621 (*Lambert*'sches Grundgesetz für *nicht-selbstleuchtende Körper*), § 623 (Terminologie).

619) Es wäre interessant zu entscheiden, ob *Lambert* hier bereits eine Fluorescenzerscheinung beobachtet hat, da die Entdeckung der Fluorescenz gewöhnlich den viel späteren *Brewster* und *Herschel* zugeschrieben wird.

Zum Ausdruck: *blaues Sandelholz.* Das Original sagt *lignum nephriticum*, was die Lexica mit *Griesholz* übersetzen. Wie mir Herr Prof. *Goebel* in München mittheilt, ist unter dem lignum nephr. eben das sog. blaue Sandelholz, eine jetzt ganz obsolet gewordene Drogue, zu verstehen. Dies stimmt auch mit dem Namen Griesholz, da sein Absud früher gegen Nierensteine verwendet wurde. Das Holz kommt aus Mexico, doch ist die Stammpflanze nicht mit Sicherheit bekannt. — In den Lehrbüchern der Physik findet sich bei den fluorescirenden Substanzen das blaue Sandelholz nicht genannt.

§ 629 bis 636: Weggelassen. Es wird unter Bezugnahme auf die weggelassenen Kapitel 1 und 2 des zweiten Theiles gezeigt, dass bei Brennspiegeln, wo die Neigung der Strahlen gegen die Axe klein ist, auf den Inhalt jener Kapitel nicht Rücksicht genommen zu werden braucht.

§ 637 bis 641: Vollkommen reflectirende Planspiegel, d. h. es kommen die Kapitel 1 und 2 des zweiten Theiles nicht in Betracht.

§ 642 bis 656: Spiegelnde Kugel.

645) Die Bezeichnung ist nicht genau. Es sind

in der vierten Formel statt Mm und Nn die Projectionen dieser Bögen auf die Richtung MN,

in der fünften Formel statt Qq und Mm die Projectionen dieser Bögen auf die Richtung MQ

zu denken. Da der Factor, welcher durch die Projection eingeführt wird, wegen des Spiegelungsgesetzes in beiden Fällen (nämlich Richtung MN und Richtung MQ) derselbe ist, so hebt er sich in der sechsten Formel weg, und die Schlussfolgerung ist richtig.

647) Die Formel für sin MPL ist aus dem Ausdruck für

MPL in § 646 gebildet, und die Formel für *MR* aus der letzten Formel § 645.

651) Hier ist der Hauptsatz enthalten.

652) Specialfall: Der leuchtende Punkt ist im Unendlichen.

653) Engster Specialfall, nämlich der Satz, dass eine spiegelnde Kugel, welche aus hinreichend grosser Entfernung beleuchtet wird und deren zurückgeworfenes Licht in hinreichend grosser Entfernung aufgefangen wird, das Licht *nach allen Seiten* hin gleichförmig verbreitet, sich also wie ein leuchtender Punkt verhält. Es ist sehr leicht, den Satz seiner Form nach direct zu erweisen; ist aber die Form gegeben, so findet man wieder leicht die Constanten des Gesetzes, wenn man die Lichtmenge, welche auf die Kugel einfällt, mit derjenigen vergleicht, welche von ihr auf eine concentrische Kugelfläche ausgebreitet wird. Hiernach ist, wenn $\varDelta$ die Dichtigkeit (vergl. Note 42, zweite Bedeutung) des auf die spiegelnde Kugel auffallenden Lichtes, ϱ den Radius der spiegelnden Kugel und r' die Entfernung des von der spiegelnden Kugel beleuchteten Flächenelements bedeutet, die Beleuchtung senkrecht zur Richtung der gespiegelten Strahlen

$$\eta = \tfrac{1}{4} \varDelta \frac{\varrho^2}{r'^2}.$$

Dieser Satz, welcher übrigens nur im Raume, nicht in der Ebene (für den Kreis) gilt, kommt später mehrfach zur Anwendung. Es ist aber zu beachten, dass immer nur der Fall in's Auge gefasst ist, dass die reflectirte Menge vom Incidenzwinkel unabhängig ist, und dies ist weder nach *Lambert's* eigenen Formeln (Theil II, Kap. 1 und 2) noch nach der heutigen Polarisationstheorie auch nur annähernd zulässig.

654) und 655): Wie hier, so zeigt sich L. stets umsichtig, wenn die Veränderung der Grössenordnung einer Variablen Einfluss auf das Resultat hat. — Man muss sich natürlich in den Formeln sec v mit dem Kugelradius multiplicirt denken, gegen welchen *MK* sehr gross ist.

§ 657 bis 670, welche eine zweite Ableitung enthalten, aber nicht zu so allgemeinen Resultaten vordringen, sind weggelassen.

§ 671: Beispiel. Die leuchtende Sonne wird unendlich entfernt angenommen, die beleuchtete Erde dagegen in endlicher Entfernung gedacht. Man beachte die Constanten Note 653).

§ 672 bis 677: **Katoptrische Photometrie.** Eine Unterscheidung zwischen Dioptrik und Katoptrik macht man heute nur noch in den Elementarbüchern. Es ergeben sich die katoptrischen Formeln, wenn man in den dioptrischen den Brechungsexponenten $= -1$ setzt. Da es sich also nur um einen Specialfall handelt, so bleiben die früher im Text und in den Noten mitgetheilten Sätze fortbestehen.

672) Man schreibt die katoptrische Elementarformel (wenn wir L.'s Buchstaben beibehalten) gewöhnlich so:

$$\frac{1}{2a - CF} - \frac{1}{2a - CG} = \frac{2}{2a},$$

welche Gleichung mit der *Lambert*'schen identisch ist.

674) Es ist nicht richtig, wenn gesagt wird, DC werde $= 0$ gesetzt. Es wird vielmehr nur $AD = AC$ gesetzt, was eine Vernachlässigung der dritten Potenz bedeutet, während die zweite Potenz, also z. B. DC, festgehalten wird, wie sich sofort im Folgenden an der Mitnahme von $\cos^2 \omega$ zeigt.

676) Von den beiden zu L.'s Zeit bekannten Spiegelteleskopen, dem *Gregory*'schen und dem *Newton*'schen, hat nur das erstere diese Eigenthümlichkeit.

677) Das weggelassene Stück ist inhaltlos.

§ 678 bis 681: **Experimentelle Bestimmung der Reflexionsfähigkeit der Spiegel.**

§ 682 bis 695: **Weggelassen** ist die Discussion der Antheile, welche der vorderen und der hinteren Glasfläche bezüglich der Reflexion zukommen. Dabei wird Bezug genommen auf die weggelassenen Kapitel 1 und 2 des zweiten Theiles.

Kapitel 2. Photometrie der nicht-selbstleuchtenden Körper.

Das ganze Kapitel ist so breit und so reich an Wiederholungen, dass nur die fundamentale Bedeutung des Gegenstandes und der historische Werth dieses Abschnittes zu Gunsten der nahezu vollständigen Aufnahme entscheiden konnten. Weggelassen wurden daher lediglich einige rein triviale Auseinandersetzungen.

§ 696 bis 702: **Das Emanationsgesetz für nicht-selbstleuchtende Körper.** Es handelt sich um die Aufgabe: *gegeben* ist die Lichtmenge dL (Bezeichnung wie Note 36)), welche ein leuchtendes Element df dem beleuchteten df' zusendet; *gesucht* die Lichtmenge dQ, welche einem Element df'' vom Element df' zugesandt wird, vorausgesetzt, dass keine regelmässige

Spiegelung stattfindet. Wir bezeichnen den Emanations- und den Incidenzwinkel mit ε und i, und versehen diese Grössen mit keinem, einem oder zwei Indices, jenachdem sie an den Elementen df, df' oder df'' liegen. Sind noch r und r' die Entfernungen von df bis df' und von df' bis df'', so ist nach dem Grundgesetz für selbstleuchtende Körper, Note 36)

$$dL = Jdf \cos \varepsilon \, \frac{1}{r^2} \cos i' \, df' \,,$$

und hierzu parallel schreiben wir

$$dQ = dq \cdot \frac{1}{r'^2} \cos i'' \, df'' \,,$$

wo dq eine noch unbekannte Function ist. Diese Schreibweise setzt voraus, dass das Licht, nachdem es einmal das Element df' verlassen hat, in Bezug auf r', i'', df'' wieder dem früheren Gesetz folgt.

Wir scheiden nun diejenigen Variablen ab, welche sich lediglich auf das Element df' beziehen, und setzen

$$dL = \varDelta \cos i' \, df'$$

$$\varDelta = Jdf \cos \varepsilon \, \frac{1}{r^2} \tag{1}$$

und bezeichnen $\varDelta$ als die *Dichtigkeit der einfallenden Strahlen*; dann ist $\varDelta$ diejenige Variable, welche den Lichtstrahl unmittelbar *vor* seinem Auffallen auf df', also ohne Rücksicht auf Grösse und Lage dieses Elements charakterisirt. Dann können im Ausdruck für dQ ausser den explicit hingeschriebenen r', i'', df'' nur noch folgende Variablen auftreten: das gegenseitige Azimuth χ der Normalen auf df und df' bezogen auf eine Ebene senkrecht zu r, das Azimuth ω zwischen dem eintretenden und dem austretenden Strahl, bezogen auf die Ebene df', ferner die Winkel i' und ε', endlich die Grösse df' und $\varDelta$. Es wird also mit Rücksicht auf (1) im allgemeinen sein:

$$dq = F(\chi, \omega, i', \varepsilon', df', \varDelta) \,,$$

doch haben alle diejenigen Gesetze, welche bis jetzt aufgestellt und in Gebrauch gekommen sind, die specielle Form

$$dq = \varDelta \, df' \varphi(i', \varepsilon') \,. \tag{2}$$

Wir wollen dq als die *Menge der in der Richtung ε' austretenden Strahlen* bezeichnen oder als austretende Lichtmenge (zum

Unterschied von Lichtmenge schlechthin, welche ausserdem noch von der Ausbreitung im Raum und von der Lage und Grösse des bestrahlten Flächenelements df'' abhängig ist). Es ist also die Dichtigkeit der einfallenden Strahlen nach (1) gegeben, die Menge der in der Richtung ε' austretenden Strahlen (2) gesucht; ist diese bekannt, so kennt man auch die dem Element df'' zugesandte Lichtmenge

$$dQ = dq \cdot \frac{1}{r'^2} \cos i''\, df'', \tag{3}$$

oder, wie man auch sagen kann, die Dichtigkeit der Strahlen beim Auffallen auf df'', nämlich

$$\Delta' = dq \frac{1}{r'^2},$$

oder auch die Intensität der austretenden Strahlen

$$J' = \frac{dq}{df' \cos \varepsilon'}, \tag{4}$$

wo J' aus dem Ausdruck für dQ in derselben Weise abgeschieden wurde, wie früher (Note 36)) J aus dem Ausdruck für dL.

Es war nöthig, diese rein formalen Festsetzungen ein für allemal zu erledigen, um sie später in zahlreichen Einzelfällen zu ersparen. — Um jetzt die Function $\varphi(i', \varepsilon')$ zu bestimmen, erinnere man sich, dass nach § 623 der einfallende Lichtstrahl sich spaltet in eine reflectirte, eine zerstreute, eine ausgestrahlte und eine absorbirte Lichtmenge. Nur die *zerstreute* und die *ausgestrahlte* kommen für uns in Betracht.

Die *zerstreute* Lichtmenge zu erklären, nimmt man an, die Oberfläche des Körpers sei nur im Grossen und Ganzen eine geometrische Fläche, und bestehe im Einzelnen vielmehr aus zahllosen kleinen Spiegeln verschiedener Stellung. Diese Verhältnisse sind sehr ausführlich zuerst von *Bouguer* besprochen, jedoch nicht zur Aufstellung einer bestimmten Formel für $\varphi(i', \varepsilon')$ verwerthet worden (vergl. oben S. 61). Dagegen hat *Seeliger* in der Abhandlung »zur Photometrie zerstreut reflectirender Substanzen« gezeigt, dass die Function $\varphi(i', \varepsilon')$ die Form hat

$$k\chi\left(\frac{i'+\varepsilon'}{2}\right)\psi\left(\frac{i'-\varepsilon'}{2}\right),$$

wenn der eintretende und der austretende Strahl die Azimuthdifferenz 0 haben, und

$$k\chi\left(\frac{i'-\varepsilon'}{2}\right)\psi\left(\frac{i'+\varepsilon'}{2}\right),$$

wenn dieselben beiden Strahlen eine Azimuthdifferenz $= 180^0$ besitzen. Dabei ist die Function χ abhängig von der Häufigkeit der verschiedenen Stellungen der spiegelnden Elemente, die Function ψ dagegen ist deshalb eingeführt, um die Abhängigkeit der am Elementarspiegel reflectirten Lichtmenge vom Incidenzwinkel allgemein zu lassen; endlich ist k eine Constante. *Seeliger* bemerkt hierzu: Weitere Folgerungen an die angestellten Betrachtungen zu knüpfen, scheint mir nicht am Platze.

Die *ausgestrahlte* Lichtmenge ist diejenige, vermöge deren wir die Körper in ihren Farben *sehen*. Da alle Körper, wenn auch theils in sehr geringem Grade, durchsichtig sind, so nimmt man an, die Lichtstrahlen dringen thatsächlich bis zu irgend einer Tiefe in den Körper ein, werden dort aus irgend einem Grunde zur Umkehr gezwungen und treten wieder aus. Die Veränderungen, welche gewisse Strahlengattungen auf dem Wege im Körper erfahren haben, verleihen den Körpern ihre Farbe.

Diese Vorstellung hat bereits *Lambert* richtig ausgesprochen in § 620. Aber unmittelbar darauf (§ 621) schliesst er irrthümlich, da man bis zu einer gewissen Tiefe die inneren Theile des Körpers als selbstleuchtende Raumelemente betrachten darf, dass deshalb dasselbe Emanationsgesetz gelten müsse wie für selbstleuchtende Körper. Wird demnach ein Element df' der geometrischen Oberfläche des Körpers von der Lichtmenge $\varDelta \cos i'\, df'$ getroffen, so ist die in der Richtung ε' ausgestrahlte Lichtmenge

$$dq = c \cdot \varDelta \cos i'\, df' \cdot \cos \varepsilon'.$$

Um die Constante c zu bestimmen, denke man sich mit dem Radius 1 um df' eine Halbkugel f'' beschrieben; dann wird einem Element df'' derselben die Lichtmenge $dQ = c \cdot \varDelta \cos i'\, df' \cdot \cos \varepsilon'\, df''$ zugesandt und die ganze Hemisphäre erhält die Lichtmenge $Q = c \cdot \varDelta \cos i'\, df' \cdot \pi$. Andererseits ist diese ganze ausgestrahlte Lichtmenge auch gleich der einfallenden, multiplicirt mit einem Factor $A < 1$, also ist auch $Q = \varDelta \cos i'\, df' \cdot A$. Setzt man beide Ausdrücke für Q einander gleich, so folgt $c\pi = A$, und setzt man dies in die Formel für

dq ein und vergleicht diese mit (2), so erhält man das *Lambert-sche Gesetz für nicht-selbstleuchtende Körper*

$$\varphi(i', \varepsilon') = \frac{A}{\pi} \cos i' \cos \varepsilon' . \tag{2a}$$

Der Factor A, welcher angibt, wie viel vom auffallenden Licht wieder auf eine Halbkugel ausgesandt wird, heisst *Albedo*.

Hiernach wird, wenn $\varDelta$ die Dichtigkeit der auffallenden Strahlen ist, die von df' einem Element df'' zugesandte Lichtmenge

$$dQ = \frac{A}{\pi} \varDelta \cos i' \cdot df' \cdot \cos \varepsilon' \cdot \frac{1}{r'^2} \cdot \cos i'' \cdot df'' .$$

Bezeichnet man

$$J' = \frac{A}{\pi} \varDelta \cos i' \tag{4a}$$

als die *Intensität* der austretenden Strahlen, so ist die Formel für dQ analog derjenigen für dL Note 36), und dies ist der Grund, weshalb man gewöhnlich von einem *Lambert'schen Gesetze* schlechthin redet. In diese Zeilen lässt sich, abgesehen von den Versuchen, der Inhalt des ganzen Kapitels zusammenziehen.

In Wirklichkeit sind für die Function φ maassgebend die Veränderungen, welche der Lichtstrahl auf seinem Weg im Körper erleidet, und die Art und Weise, wie er zur Umkehr gezwungen wird. In dieser allgemeinen Form gehört die Angelegenheit jetzt noch nicht in die Photometrie, sondern bildet eine von den schwierigsten und wichtigsten Fragen, mit welchen die heutige theoretische Optik beschäftigt ist. Dieser Umstand darf nicht hindern, in gewissen vereinfachten Fällen, die auch da und dort zutreffend sein werden, eine Lösung aufzusuchen.

Einen solchen Gedankengang hat zuerst *Lommel* eingeschlagen (*Wiedemann*'s Annalen Bd. 10, S. 449 fgde.). Er nimmt an, dass der Lichtstrahl auf seinem Weg im Körper durch *Absorption* geschwächt werde und dass die Lichtmenge, welche ein Raumelement des Körpers trifft, nach allen Seiten *gleich* oder mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgestreut wird. Unter Absorption wird dabei ein Lichtverlust verstanden, welcher für ein unendlich kleines zurückgelegtes Wegelement proportional ist 1) der Lichtstärke selbst, 2) dem durchlaufenen Wegelement, so dass also, wenn dx das Wegelement und k eine Constante ist,

$$dv = -kv\,dx .$$

Durch Integration folgt hieraus

$$v = v_0 e^{-kx},$$

wo v_0 die Lichtstärke ist vor dem Eintritt in das absorbirende Medium.

Man denke sich nun eine aus Körperelementen bestehende Säule, welche rechtwinklig steht auf dem Oberflächenelement df' als Basis. Ist dann die Dichtigkeit der auf den Körper unter dem Winkel i' auffallenden Strahlen $= \varDelta$, so ist die Dichtigkeit desjenigen Strahles, welcher in derselben Richtung fortschreitend bis zu einem von der Oberfläche um s entfernten Element der Säule gelangt ist, noch

$$\varDelta e^{-k\frac{s}{\cos i'}}$$

und die in das Element eindringende Lichtmenge =

$$\varDelta e^{-k\frac{s}{\cos i'}} df' ds,$$

mithin ist die in der Richtung ε' ausgestrahlte Lichtmenge =

$$\frac{B}{4\pi} \varDelta e^{-k\frac{s}{\cos i'}} df' ds,$$

wo B dem früheren A entspricht. Auf dem Weg bis zur Oberfläche tritt abermals eine Absorption ein, so dass übrig bleibt

$$\frac{B}{4\pi} \varDelta e^{-k\frac{s}{\cos i'}} df' ds\, e^{-k\frac{s}{\cos \varepsilon'}}.$$

Integrirt man diesen Ausdruck nach s zwischen den Grenzen 0 und ∞, so wird die gesammte in der Richtung ε' ausgestrahlte Lichtmenge, welche dem Oberflächenelement df' entspricht:

$$\frac{B}{4\pi k} \varDelta \frac{\cos i' \cos \varepsilon'}{\cos i' + \cos \varepsilon'} df'.$$

Nimmt man bei dieser Herleitung darauf Rücksicht, dass die in ein Körperelement eindringende und dort theils verschluckte, theils allseitig ausgestrahlte Lichtmenge nichts anderes ist als eben diejenige, welche ein durch dieses Körperelement gehender Lichtstrahl durch Absorption verliert, so tritt im Zähler noch der Factor k auf, so dass die Absorptionsconstante k aus dem Resultat verschwindet. Es ist also

$$\varphi(i', \varepsilon') = \frac{B}{4\pi} \frac{\cos i' \cos \varepsilon'}{\cos i' + \cos \varepsilon'}. \qquad (2b)$$

Diese Formel nenne ich das *Lommel-Seeliger'sche Gesetz*, da *Seeliger* dieselbe zuerst in der Astrophysik angewendet hat. B bezeichnen wir als das *Ausstrahlungsvermögen der Theilchen*.

Da jedes Theilchen nicht nur direct von aussen, sondern auch von anderen Theilchen beleuchtet wird, so ist die Lösung (2b) nicht vollständig. *Lommel* selbst hat in den »Sitzungsberichten der math.-physik. Classe der k. bayer. Acad. der Wiss.«, München 1887, S. 95 fgde. eine Functionalgleichung für die Function φ mitgetheilt und eingehend discutirt, und *Seeliger* hat in der Abhandlung »zur Photometrie zerstreut reflectirender Substanzen« unter Beschränkung auf zweimalige Zurückwerfung den expliciten Ausdruck angegeben, nach welchem die rechte Seite von (2b) noch den Factor erhält

$$1 + \mu \log \left[(1 + \cos i')^{\cos i'} (1 + \cos \varepsilon')^{\cos \varepsilon'}\right],$$

wo μ eine Constante ist; endlich hat mit Hilfe eines anderen Gedankenganges der Herausgeber in Nr. 3095 der »Astronomischen Nachrichten« (Bd. 129) gezeigt, dass der allgemeine Ausdruck für $\varphi(i', \varepsilon')$ 1) symmetrisch ist in Bezug auf i' und ε', 2) dass, wenn derselbe in eine Reihe von Einzelgliedern zerlegt wird, welche der Reihe nach den einmaligen, zweimaligen u. s. w. Zurückwerfungen entsprechen, diese Reihe stärker convergirt, als eine nach Potenzen von B fortschreitende geometrische Reihe, mit anderen Worten, dass, wenn man den Ausdruck (2b) als Näherung bezeichnet, das Restglied positiv ist.

Praktisch kommen nun, so gross auch das theoretische Interesse solcher Untersuchungen sein mag, weder das zu fordernde Gesetz für die zerstreute Spiegelung noch dasjenige für die Ausstrahlung aus dem Inneren des beleuchteten Körpers allein für sich betrachtet zur Geltung, da sich vielmehr beide Lichtarten vermischen werden. Es ist also von vornherein nicht ausgeschlossen, dass in gewissen Fällen das *Lambert*'sche Gesetz (2a), in anderen die Näherungsformel (2b), in anderen wieder ein früher sehr häufig und noch bis zur Gegenwart bisweilen angewendetes Gesetz

$$\varphi(i', \varepsilon') = \frac{C}{2\pi} \cos i' \tag{2c}$$

den Beobachtungen genügen werde.

Solche Versuche hat *Seeliger* an einer Reihe irdischer Substanzen anstellen lassen und in der citirten Schrift publicirt. Die Resultate zeigen, dass das *Lambert*'sche Gesetz nur ausnahmsweise eine Näherung ist, dass die ausgestrahlte Lichtmenge vom Azimuth ω abhängig ist und dass für verschiedene Substanzen der Verlauf ein verschiedener ist.

Die im Text von *Lambert* mitgetheilten Versuche sind identisch mit den Versuchen 21 und 22. An jener Stelle sind sie nicht, wohl aber hier am Platze. Wendet man auf die vorliegenden Versuche die Bemerkung *Zöllner*'s (vergl. Note 726)) an, so hat L. wohl das schmälere Stück Ff zu dunkel geschätzt.

697) und 698) weggelassen. Es wird nur gesagt, dass farbiges und zerstreut gespiegeltes Licht sich vermischen.

§ 703 bis 712: Der Begriff Albedo. Weggelassen bis auf § 707, welcher den ganzen Inhalt erschöpft. Man beachte L'.s doppelte Anwendung des Wortes *Albedo*. Die erste gehört in die Theorie der Farbenmischung, die zweite ist identisch mit dem Factor A der Formel (2a) Note § 696 bis 702. — Der Factor A tritt nur in der *Lambert*'schen Formel (2a) (dieselbe Note) auf, während die Constanten anderer Gesetze $\varphi(i', \varepsilon')$, z. B. des Gesetzes (2b), im Allgemeinen eine andere Bedeutung haben. Will man dennoch den Begriff festhalten, nämlich als das Verhältniss der vom Element df' auf eine Halbkugel, die um df' beschrieben ist, hingesandten Lichtmenge zu der in der Richtung i' auf df' einfallenden, also

$$\frac{\int dQ}{dL} = \frac{\int dq\, df''}{\Delta \cos i'\, df'} = \frac{\Delta df' \int \varphi(i', \varepsilon')\, df''}{\Delta\, df' \cos i'} = \frac{1}{\cos i'} \int \varphi(i', \varepsilon')\, df'',$$

wo die Integrale auf die Halbkugel sich beziehen und die Formeln 1) 2) 3) angewendet wurden, so ist der gefundene Ausdruck im Allgemeinen noch von i', das unter dem Integral constant ist, abhängig. Dieser Umstand hat *Seeliger* (»Beleuchtung der gr. Plan.« Art. 5) veranlasst, den Mittelwerth für alle i' einer Halbkugel als Albedo zu definiren.

§ 713 bis 716: Verwandlung des beleuchteten Elementes in ein selbstleuchtendes, wenn $A = 1$. Vergl. Note § 766 bis 770.

713) *Vollkommene Albedo*, welcher Ausdruck hier zum ersten Mal vorkommt, bedeutet $A = 1$. — Die »Helligkeit« von AB ist eine Intensität J.

714) Die »Helligkeit« von F ist eine Intensität J' (4a).

§ 717 bis 724: Albedo gemischten Lichtes. Es mögen unter dem Incidenzwinkel i' die Lichtmengen $J_1\, J_2\, J_3 \cdots J_n$ der verschiedenen Strahlengattungen einfallen, und dann auf eine Halbkugel die Lichtmengen $E_1\, E_2\, E_3 \cdots E_n$ wieder ausgestrahlt werden, dann ist die Albedo (Lambert würde sagen rubedo, viredo, etc.) des Körpers in Bezug auf die einzelnen Strahlengattungen:

$$A_1 = \frac{E_1}{J_1} \qquad A_2 = \frac{E_2}{J_2} \qquad A_3 = \frac{E_3}{J_3} \cdots,$$

Dann ist aber die austretende Lichtmenge $A_1 J_1 + A_2 J_2 + \cdots + A_n J_n$ von anderer Farbe als die Lichtmenge $J_1 + J_2 + \cdots + J_n$, mithin sind beide nicht vergleichbar, also der Begriff Albedo hinfällig. Derselbe gilt also nur 1) für *homogenes* Licht, 2) wenn ein- und austretendes Licht *dieselbe Farbe* haben. Die Pluszeichen in den vorigen Summen haben nur symbolische Bedeutung; denn es müsste noch die Lichtmenge jeder Einzelfarbe mit ihrem Beitragswerth für die resultirende Farbe multiplicirt werden. Vergl. auch Theil 7, Kap. 1.

719) Diese beiden Schwierigkeiten, nämlich bezüglich der Leuchtkraft der einzelnen Strahlengattungen und der Farbenmischung, bestehen heute noch.

§ 725 bis 746: Princip der Albedobestimmung. Aus Note § 766 bis 770 ergibt sich die von A abhängige Intensität J', mit welcher G selbstleuchtend wird, und dann aus Note 499) (Bel. $= J' \pi \operatorname{tg}^2 AFC$) die Beleuchtung (durch G) in F. Die Gleichsetzung dieses Ausdrucks mit der directen Beleuchtung (durch L) in D gibt die Gleichung, welche nach A aufgelöst wird.

Die Gleichheit wird praktisch hergestellt durch Verschiebung von L oder von G oder Abänderung der Linsenöffnung AB. CF wird aus GC berechnet.

726) Die kugelförmige Gestalt der Lichtquelle ist nebensächlich. — Das Wort »Helligkeit« bedeutet an erster Stelle: Intensität, an zweiter Stelle: Beleuchtung dividirt durch $\pi = J'$.

Zöllner hat (»Phot. Unt.« S. 267 fgde.) die Bemerkung gemacht, dass auch die Lichtquelle L ein dioptrisches Bild auf der Wand DF und zwar jenseits F erzeugen muss. Dieses helle Bild muss durch Contrast das Bild von G in F dunkeler erscheinen lassen als es ist; es ist also die Beleuchtung in F grösser gewesen als in D. Hieraus schloss er und bestätigte durch Versuche (nachdem zwischen LD und GF eine zu diesen Richtungen parallele Wand eingeschoben war), *dass Lambert's Albedowerthe sämmtlich beträchtlich zu klein sind.*

730) Unter »Helligkeit« ist die Intensität J' verstanden, mit welcher G selbstleuchtend geworden ist.

731) Bezüglich des Wortes »Helligkeit« gilt genau dasselbe wie 726.

734) Statt »Durchsichtigkeit« bedient sich L. hier durchweg des Ausdrucks *im*pelluciditas.

742) Man beachte L.'s Hinweis auf § 270. Vergl. auch Note dazu.

§ 747 bis 758: Albedobestimmungen. Die Versuche wären in dieser Ausdehnung nicht aufgenommen worden, wenn die späteren Citate diese Weglassungen gestattet hätten.

748) Das Citat gehört einem weggelassenen Abschnitt an. Man vergl. statt dessen die Note § 271 bis 306 Nummer 3.

752) und 753) weggelassen: Eine andere Papiersorte giebt $A = 2 : 13$, Charta bubula gibt $A = 1 : 12$.

754) Das Original sagt: ex cerussa albissima, quam vulgo Cremserweiss vocant, paravi pigmentum ... Herr Prof. *Krüss* in München schreibt mir hierzu: »Zu *Lambert*'s Zeiten verstand man unter *cerussa albissima* das nach einer alten holländischen Methode erhaltene reinste Bleiweiss, das im normalen Zustande nach unseren jetzigen Formeln folgende Zusammensetzung besitzt: $2\,Pb\,C\,O_3 + Pb\,(OH)_2$. Die reinsten Präparate von Bleiweiss führen auch jetzt den Namen Kremser- (oder Silber-) Weiss.«

Königspapier; Original: charta regia.

756) *Mennige*, Orig.: *minium*. Wie mir Herr Prof. *Krüss* mittheilt, bezeichnete man im Alterthum (Plinius und Dioscorides) mit *minium* sowohl die Mennige (Rothes Bleioxyd $Pb_3\,O_4$) als auch das rothe Schwefelquecksilber oder Zinnober ($Hg\,S$); doch wurde zu *Lambert*'s Zeit das Wort »minium« nur für die Mennige gebraucht. — Das in F aufgestellte Blatt musste natürlich auch den Raum D umfassen, da F und D gleiche Farbe haben sollen.

757) *Kreuzbeersaft*, Original: succus baccarum rhamni. Gemeint ist offenbar der einheimische Strauch *Rhamnus cathartica, L.* = Kreuzdorn, dessen Steinfrüchte den Namen Kreuzbeeren = baccae rhamni catharticae führen.

§ 759 bis 765: Albedo gemischten Lichtes. Fortsetzung von § 717 bis 724. Die letzten Versuche compliciren die Sache etwas, da statt der in der Note § 717 bis 724 erwähten 2 Summen $A_1\,J_1 + A_2\,J_2 + \cdots$ und $J_1 + J_2 + \cdots$ 2 andere auftreten, in welchen die A in der zweiten bezw. ersten Potenz vorkommen.

762) Die beiden Citate am Schluss beziehen sich auf § 1208 und auf § 1209.

§ 766 bis 770: Verwandlung des beleuchteten Elementes in ein selbstleuchtendes. Wurde für $\varDelta = 1$ bereits in § 713 bis 716 erörtert. *Gegeben* ist die Dichtigkeit der in der Richtung i' einfallenden Strahlen, *gesucht* die Intensität J', mit welcher df' dadurch selbstleuchtend wird. Der Gegenstand ist bereits erledigt durch Formel (4) Note § 696 bis 702. Es ist also

$$J' = \frac{dq}{df' \cos \varepsilon'},$$

oder wenn dq aus (2) eingesetzt wird:

$$J' = \frac{\varDelta \varphi(i', \varepsilon')}{\cos \varepsilon'}.$$

Setzt man, je nach den 3 verschiedenen Gesetzen (2a), (2b), (2c) die Ausdrücke für $\varphi(i', \varepsilon')$ ein, so folgt:

$$J' = \frac{A}{\pi} \varDelta \cos i' \tag{4a}$$

$$J' = \frac{B}{4\pi} \varDelta \frac{\cos i'}{\cos i' + \cos \varepsilon'} \tag{4b}$$

$$J' = \frac{C}{2\pi} \varDelta \frac{\cos i'}{\cos \varepsilon'}. \tag{4c}$$

Ist statt des leuchtenden Elementes df eine leuchtende Fläche f vorhanden, so sind für jedes bestimmte ε' die $\varDelta$ und i' variabel und es ist für jedes bestimmte ε' das Integral der rechten Seite in (4a), (4b), (4c) über alle Punkte der leuchtenden Fläche f zu nehmen. Bei (4a) und (4c) ebenso bei jedem Gesetz (2), welches die Eigenschaft hat $\varphi(i', \varepsilon') = \cos i' \cdot \psi(\varepsilon')$, tritt hierbei das Integral $\int \varDelta \cos i' = \int J df \cos \varepsilon \frac{1}{r^2} \cos i'$ auf und dies ist eine *Beleuchtung* Deshalb ist dieser Begriff, auf eine selbstleuchtende Fläche und ein beleuchtetes Element bezogen, nur in diesem Fall zweckmässig und die Entwickelungen Theil I Kap. 2 berechtigt. In jedem anderen Fall, z. B. (4b), wo jenes Integral nicht auftritt, ist er unbrauchbar. Vergl. Note § 107 bis 165.

Praktisch ist dieser Begriff, aus anderen Gründen, überhaupt zu entbehren. Doch soll er auch in den Noten wegen seiner grossen Bedeutung bei L. beibehalten werden.

Wir folgen jetzt *Lambert*. Setzt man in (4a) für $\varDelta$ seinen Ausdruck (1) und führt man hier wieder die scheinbaren Flächenelemente $d\varphi$ und Intensitäten J ein, so ist bei einer endlichen leuchtenden Fläche f:

$$\left.\begin{aligned} J' &= \frac{A}{\pi}\cdot \text{Beleuchtung} = \frac{A}{\pi}\int \varDelta \cos i' \\ &= \frac{A}{\pi}\int J\, df \cos\varepsilon \, \frac{1}{r^2} \cos i' \\ &= \frac{A}{\pi}\int J\, d\varphi \cos i' \,. \end{aligned}\right\} \quad (4\text{a}')$$

Für $J =$ Const. und $\varphi =$ Halbkugel wird also z. B. nach der letzten Form $J' = J \cdot A$ (Lehrsatz 36). Speciell für $A = 1$ ist $J' = J$ (Lehrs. 31).

Sind die Dimensionen der Lichtquelle klein genug gegenüber der Entfernung, so ist, wenn sich nur die Entfernung r der ganzen Lichtquelle ändert, nach der zweiten Form in (4a′)

$$J' = \frac{A}{\pi}\frac{\cos i'}{r^2}\int J\, df \cos\varepsilon = J\,\frac{A}{\pi}\,\frac{\cos i'}{r^2}\ \text{Const.}$$

Dies ist Lehrsatz 33 in der Form, wie ihn L. thatsächlich braucht. Für die beleuchtete Kugel gilt er ohne die erste Voraussetzung, wenn man i' auf das Centrum der Kugel bezieht ($\cos i' = 1$).

In der einfachen Form, in welcher die Verwandlung des beleuchteten Elements in ein selbstleuchtendes später gebraucht wird, nämlich (4a) und (4a′), ist dieselbe bei L. trotz der vielen Lehrsätze nicht ausgesprochen.

§ 771 bis 783: Allgemeine Bemerkungen.

771) Die falsche Nummerirung der Lehrsätze musste der Citate wegen beibehalten werden.

772) Dieser zweiten indirecten Methode der Albedobestimmung bedient sich *Zöllner* »Phot. Unt.« S. 271 fgde.

775) Als charakteristisch für L.'s Confusion in der Ausdrucksweise sei angeführt, dass statt des Wortes »Intensität« im Original »albedo« steht!

Theil IV. Das Auge.

Kapitel 1. Dioptrische Photometrie des Auges.

§ 784 bis 795: Das Auge allein.

787) Es ist also hier der Brechungsexponent des ganzen

Auges einfach $= 1.5$ gesetzt worden. Nach *Listing* hat man (entnommen *Helmh.* »phys. Opt.«)

Brechungsexponenten (Luft $= 1$):		*Krümmungshalbmesser:*	
humor aqueus	$\frac{103}{77}$	Cornea	8^{mm}
Linse	$\frac{16}{11}$	vordere Linsenfl.	10
corpus vitreum	$\frac{103}{77}$	hintere »	6

Entfernungen:

Hornhaut — vordere Linsenfl.	4^{mm}
Dicke der Linse	4

Hieraus berechnet sich:

erster Brennpunkt	12.83^{mm}	vor der Hornhaut
zweiter »	14.65	hinter der hinteren Linsenfläche
erster Hauptpunkt	2.17	hinter der Vorderfl. der Hornhaut
zweiter »	2.57	» » » » »
erster Knotenpunkt	0.76	vor der Hinterfläche der Linse
zweiter »	0.36	» » » » »

Es ist nun die Absehenslinie eines dioptrischen Systems die Verbindungslinie des zweiten Knotenpunktes mit dem Bildpunkt. Da sie dem *Lambert*'schen Kf entspricht, so verstehen wir unter K den zweiten Knotenpunkt. Dann ist $AK = 4^{mm} + 4 - 0.36 = 7.64$, und andererseits $KF = 0.36 + 14.65 = 15.01$. Mithin ist in der That *Lambert*'s Construction *sehr* nahe richtig.

791) Den Hauptsatz notiren wir in der Form: Leuchtet das Object mit der Intensität J, so erhält ein Bildelement auf der Netzhaut die Beleuchtung

$$\eta = \tfrac{9}{4} J\pi \,\mathrm{tg}^2 BFA\,.$$

Einfacher ist die Entwickelung auch hier, wenn man mit Hilfe von L.'s Construction den Satz ableitet, welcher dem zweiten Hauptsatz Note 499) entspricht (die Pupillenöffnung als bestrahlte Fläche angesehen), und wenn man dann von der Intensität auf die Beleuchtung schliesst. — Füllt der ankommende Strahlenkegel die Oeffnung der Pupille nicht aus, so erhält die rechte Seite der obigen Gleichung einen der Grösse proportionalen Verkleinerungsfactor.

§ 796 bis 801: Das Auge und eine Brille.

800) Dieser Satz ist eine Tautologie, welche nur den Begriff des dioptrischen Bildes umschreibt. Es scheint vielmehr, dass L. sagen wollte: Die Beleuchtung in einem Punkte der Netzhaut ist dieselbe, gleichgiltig, ob der Gegenstand mit oder

ohne eine Brille betrachtet wird. Da die Pupille beim Gebrauch einer Brille vollständig in den ankommenden Strahlenkegel eingetaucht ist, so ergibt sich dieser Satz ohne Weiteres aus dem Schlusssatz Note § 596 bis 613.

§ 802 und 803: Weggelassen. Enthält nichts nicht anderweitig gesagtes.

§ 804 bis 820: Das Auge und ein Fernrohr.

810) Den Factor $\cos^2 \varphi$ darf man, wie früher, unbedenklich weglassen.

812) Auch bei endlicher Entfernung gilt der Satz genügend genau. Alle diese Sätze kamen darauf hinaus, dass die Beleuchtung der Netzhaut proportional ist dem Stück, welches der Strahlenkegel auf der Pupillenöffnung ausschneidet. Ist also die Pupille ganz eingetaucht in den Strahlenkegel, so ist das dioptrische System vor dem Auge gleichgiltig. Dies folgt direct, wenn man auf das letzte physische oder virtuelle Bild der Strahlen vor dem Eintritt in das Auge den zweiten Hauptsatz Note 499) ausspricht und dann auf dieses als Object gedachte Bild den letzten Satz Note 791) anwendet.

Wir stellen für ein System: astronomisches Fernrohr, Auge die Resultate zusammen. Es heisse der Flächeninhalt der Oeffnung des Objectivs o, der Blende des Oculars b, der Pupille p, die quadratische Vergrösserung v, die Beleuchtung der Netzhaut H, und es sei m der Factor, welcher durch Reflexionen und Schwächungen durch die Fernrohrgläser hinzukommt: Befindet sich das Auge dicht an der Ocularblende, so ist

$$\text{für}\left\{\begin{array}{llllll}\frac{o}{v} > b & \text{und } b > p & \text{ist } H = m & \text{d.h. constant} & \text{u.} < 1\ (1 = \text{blosses Auge}) & (1)\\ \frac{o}{v} > b & \text{»}\ b < p & \text{»}\ H = m\frac{b}{p} & \text{» veränderl.} & \text{»} < m \quad \text{»} & (2)\end{array}\right.$$

$$\text{für}\left\{\begin{array}{llllll}b > \frac{o}{v} & \text{»}\ \frac{o}{v} > p & \text{»}\ H = m & \text{» constant} & \text{»} < 1 \quad \text{»} & (3)\\ b > \frac{o}{v} & \text{»}\ \frac{o}{v} < p & \text{»}\ H = m\frac{o}{vp} & \text{» veränderl.} & \text{»} < m \quad \text{»} & (4)\end{array}\right.$$

Die Constante H des Apparats nennt man gewöhnlich *Helligkeit.* Ferner ist das leuchtende Element auf der Axe gedacht. Im anderen Falle treten leicht ersichtliche Modificationen ein, welche eine Abschattirung des Bildes eines ausgedehnten

Objects gegen den Rand hin bewirken können. Uebrigens wird man die aus anderem Grund ungünstigen Fälle 1. und 2. vermeiden.

Die Grösse H ist eine *Beleuchtung*, d. h. proportional der Lichtmenge, welche unter verschiedenen Umständen auf *ein und dasselbe Netzhautelement* fällt, also unabhängig von der Grösse des Bildelementes auf der Netzhaut. Man betrachtet demnach die Beleuchtung der Netzhaut als das photometrische Characteristicum. — Eine *scheinbare* Ausnahme macht man, wenn das geometrische Bild des Objects verschwindend klein ist gegenüber dem constanten Flächenstückchen v der Netzhaut, auf welches sich die auffallende Lichtmenge, sei es aus physiologischen (kleinstes empfindendes Flächenstück) sei es aus optischen (Beugung, Zerstreuung, Dispersion) Gründen ausbreitet. Dann ist die Beleuchtung des Flächenstückes v proportional der *Lichtmenge*, welche in das geometrische Bild einfällt. Es muss also hier das photometrische Characteristicum *berechnet* werden wie eine *Lichtmenge* L, welche auf das *geometrische* Bild gelangt, obgleich dasselbe *sachlich* eine *Beleuchtung* ist, welche im *physiologisch* wirksamen Elemente stattfindet. Dieser ausgedehnte Fall (Fixsterne), welchen *Lambert* überhaupt nicht erörtert, führt zu folgenden Resultaten (blosses Auge $= 1$):

$$\text{für}\begin{cases} b > \frac{o}{v} \text{ und } \frac{o}{v} > p \text{ ist } L = mv < m\,\frac{o}{p} & (3a)\\[2ex] b > \frac{o}{v} \text{ und } \frac{o}{v} < p \text{ ist } L = m\,\frac{o}{p}\,. & (4a)\end{cases}$$

Für Fixsterne ist der vierte Fall der günstigste, da nach (4a) das L des Fixsterns sein Maximum hat und das H des Himmelsgrundes nach (4) unter seinem Maximum bleibt; beim dritten Fall (Kometensucher) hat nach (3) das H der ausgedehnten Fläche sein Maximum, während das L der Fixsterne nach (3a) unter seinem Maximum bleibt, weshalb man dieselben bei Tage durch Kometensucher nicht sieht.

Kapitel 2. Physiologische Photometrie des Auges.

§ 821 bis Anfang 828: Weggelassen. Es wird gesagt, die Pupillenöffnung sei abhängig 1) von der scheinbaren Grösse, 2) von der scheinbaren Helligkeit der Lichtquelle. Dieser Gegenstand wird genauer untersucht § 847 bis § 864. — Ferner wird erwähnt 3) die Pupille sei enger, wenn die Lichtquelle sich auf der Axe des Auges befinde, als ausserhalb derselben (§ 826),

4) die Pupille erweitere sich bei intensivem Sehen (§ 827). Dieser Gegenstand wird nicht weiter erörtert.

Zu 4) ist zu bemerken, dass man zwar jetzt weiss, dass die Pupille sich *verengert* bei Accommodation für die *Nähe*, und sich *erweitert* bei Accommodation für die *Ferne*, dass aber Messungen noch nicht angestellt sind. Man schrieb der Pupillengrösse mehrfach den wesentlichen Einfluss auf die Accommodation zu, als der Mechanismus der letzteren noch nicht bekannt war.

§ 829 bis 831: Localisirung der Ursache der Pupillenveränderung.

830) Versuch 26 steht in § 747.

831) *Der ciliaren Processe*, Original: *processuum ciliarium*. Die Pupille ist umschlossen von 2 Muskelringen, nämlich dem *musculus contractor pupillae*, dessen Fasern in concentrischen Ringen verlaufen, und dem *musc. dilatator pup.*, dessen Fasern netzförmig und radial verlaufen. Es wird nun der Lichteindruck auf der Netzhaut durch den *nervus opticus* nach den Vierhügeln geleitet. Von dort entspringt aber auch der *nervus oculomotorius*, von welchem ein Ast in das dicht am n. opticus anliegende *ganglion ciliare* verläuft und vermöge der von hier aus sich ausbreitenden *Ciliarnerven* die *Zusammenziehung* der Pupille bewirkt. Andererseits gelangt in dasselbe Ganglion ein Ast des aus dem Rückenmark entsprungenen *n. sympathicus*, um diejenigen Ciliarnerven zu liefern, welche die *Erweiterung* der Pupille hervorbringen. Die Verengerung und Erweiterung der Pupille beruht also vermuthlich auf der stärkeren oder schwächeren, aber immer verengenden Einwirkung des n. oculomotorius, welcher den Einfluss des n. sympathicus mehr oder weniger zu überwinden hat.

§ 832 bis 834: Der Ursprung der Lichtempfindung. Lambert redet sehr oft im vorliegenden Werk von einer *schwingenden Bewegung der Fibrillen* (motus tremulus fibrillarum) auf der Netzhaut, wodurch die Lichtempfindung hervorgebracht sein soll. Dieser Bewegung legt er zwei Eigenschaften bei, eine *zeitliche*, nämlich dass die Bewegung erst allmählich ihre volle Stärke erreicht und ebenso nach dem Verschwinden der Lichtwirkung etwas fortdauert, und eine *räumliche* Eigenschaft, nämlich dass die Bewegung sich auch den benachbarten Fibrillen mittheilt. Mit Hilfe der ersten Eigenschaft erklärt er *hier* die Nachbilder, mit Hilfe der letzteren *später* die Irradiation und verwandte Erscheinungen.

Es ist hier der Ort, diese Vorstellungsweise *Lambert's*, deren Bedeutung in verschiedene Zweige der Optik und speciell der Photometrie mehrfach tief eingreift, durch eine kurze historische Skizze verständlich zu machen:

1) Anatomie des Endorgans, welches die Wellenbewegung des Lichtes in eine andere durch die Nerven leitbare Energieform umsetzt. Zu *Lambert's* Zeiten schrieb man diese Function direct den Enden des (zur Netzhaut ausgebreiteten) Sehnerven selbst zu. Es sind also die *fibrillae* Lambert's nichts anderes als die Nervenfasern selbst, da ein von ihnen gesondertes Organ nicht bekannt war. Man vergleiche hierzu folgende Stelle aus einem Werke, welchem zu L.'s Zeit und vielfach später hohe Autorität zukam, nämlich: *Herrn Albrecht von Haller's Anfangsgründe der Phisiologie des menschlichen Körpers. Aus dem Lateinischen übersetzt von Johann Samuel Hallen. Berlin und Leipzig 1772.* Dort ist im fünften Bande S. 967 die Rede von den kleinsten Winkeln, bei denen man noch sehen könne, und dann wird fortgefahren: »Berühmte Männer glauben, dass eben dieses auch die Kleinheit einer Faser in der Netzhaut sei, weil es ihnen bequem däucht, dass ein einziger und ganzer Nervenfaden auch von einem einzigen Bilde eingenommen werde. Sie reden dahero von einem so unsichtbaren Faden, welcher blos durch den Verstand ausgemessen werden kann.«

Die Existenz eines bestimmten Organs lernte man erst viel später kennen. Ueber die Hauptsache gibt folgende Stelle Auskunft in dem *Handbuch der Physiologie des Menschen, von J. Müller, Coblenz 1840, zweiten Bandes erste Abtheilung,* S. 315: »Der feinere Bau der Nervenhaut ist in der neuesten Zeit durch eine Entdeckung von *Treviranus* und durch übereinstimmende Beobachtungen von *Gottsche* erkannt worden. *Treviranus* »Beiträge zur Aufklärung des organischen Lebens. Bremen« *Gottsche* in *Pfaff's* »Mittheilungen aus dem Gebiete der Medicin 1836, Heft 3, 4.« Das wesentliche der Structur der Nervenhaut ist Folgendes. Sie besteht aus 3 Hauptschichten, einer äusseren breiartigen oder pflasterartigen Körnerschicht, einer mittleren Nervenfaserschicht und einer inneren Cylinderschicht.« Die Cylinder werden hier auch stabförmige Körper genannt und sind mit den heute sog. Stäbchen und Zapfen identisch. Vergl. auch ebendas. S. 325: »Daher schliesst *Volkmann*, dass ..... die kleinsten Netzhautbildchen kleiner sind als die kleinsten Elemente der Retina, deren Masse wir kennen.«

Gegenwärtig unterscheidet man eine weit grössere Anzahl von Schichten der Netzhaut, so z. B. mehrere Körnerschichten.

Eine der letzten, nach dem Augapfel zu innersten Schichten ist die *Stäbchenschicht*, in welcher man zweierlei Gebilde unterscheidet: nämlich die cylinderförmigen *Stäbchen (bacilli)*, welche 0.063 bis 0.081 mm lang und 0.0018 mm dick sind, und die mehr kegelförmigen *Zapfen (coni)*, welche weniger lang und 0.0045 bis 0.0065 mm dick sind. (Diese Zahlen aus *Helmholtz*, Phys. Opt. S. 19). Diese Organe sind es, welche man jetzt als Umwandler der Energieform in Anspruch nimmt.

2) Physiologie der Fortleitung des Eindrucks im Nerven. Nach *Aristoteles* wird die Empfindung durch die Blutgefässe in das Herz als Centralorgan geleitet (als centrifugales, d. h. Bewegungsorgan gelten die Sehnen, »Nerven, νεῦρα« genannt). — *Galen* kannte das Gehirn als Centralorgan. — Aus beiden Vorstellungen verbindet sich die von *Descartes*. Hiernach besteht die motorische Thätigkeit der Nerven darin, dass die Nervenröhren durch einen Klappenmechanismus des Gehirns mit Gasen gefüllt werden, welche fortströmen und den Muskel anschwellen; und die sensible Thätigkeit besteht in den passiven Bewegungen der Nervenröhren selbst. Diese letztere Vorstellung hatte sich zu Lambert's Zeit in zwei verschiedene Ansichten gesondert, welche in dem citirten Werk von *Haller* (derselbe Band S. 1045) besprochen werden. Nach der *einen* werden die festen Nervenfasern in eine schwingende Bewegung versetzt, welche sich bis ins Gehirn fortpflanzt. Nach der *anderen* wird die Fortleitung durch die in den Nervenröhren enthaltenen Flüssigkeiten verrichtet. Beide Bewegungen sind Wellenbewegungen, d. h. der Impuls pflanzt sich fort, während der Träger desselben an seinem Platze bleibt. Der zweiten Ansicht schliesst sich *Haller* an, während die erste diejenige ist, welche sich *Lambert* zu eigen gemacht hat und welche noch *J. Müller* vertritt. — Diese mechanische Theorie ist durch die heutige, durch *du Bois-Reymond* (Untersuchungen über thierische Electricität, Berlin 1848 und 1849) zur Geltung gebrachte verdrängt worden, nach welcher den Nerven gewisse electromotorische Eigenschaften zukommen, welche für die verschiedenen Functionen der Nerven charakteristisch sind (z. B. für die Einleitung der Empfindung die sog. negative Stromesschwankung). Die Geschwindigkeit, mit welcher sich der electromotorische Zustand fortpflanzt, wurde zuerst durch *Helmholtz* bestimmt.

Wir haben also gesehen, dass die *fibrillae* Lambert's die Nervenfasern selbst sind und dass der *motus tremulus* L.'s eine schwingende Bewegung derselben Fasern bedeutet, welche sich wellenförmig fortpflanzt.

Man kennt übrigens seit *Plateau* die *Dauer* der Nachwirkung ($= \frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{3}$ Secunde).

§ 835 bis 841: Lehrsätze, welche als selbstverständlich weggelassen worden sind (Lehrsatz § 835 ist falsch ausgedrückt), ausser dem aufgenommenen Satze § 840, 841.

§ 842 bis 846: Weggelassen. Es wird nur gesagt, dass auf die Punkte 3) und 4) Note § 821 bis 828 nicht Rücksicht genommen werden soll.

§ 847 bis 857: Lösung der eigentlichen Aufgabe, die Oeffnung der Pupille als Function der scheinbaren Helligkeit und der scheinbaren Grösse der Lichtquelle darzustellen. Der Gegenstand, welcher eine andere Erörterung, als die vorliegende durch Lambert, nicht gefunden hat, verdient in hohem Grade die Aufmerksamkeit der Physiologen.

Es ist also gesucht (in L.'s Bezeichnung, mit Umgehung des überflüssigen Buchstabens $y = \varkappa x$)

$$x = F(\varkappa, \eta) .$$

Hier ist $\varkappa$ die Intensität des Objects, η die scheinbare Grösse desselben oder, was auf dasselbe hinaus kommt, die Grösse des Netzhautbildes. In dieser Form fasst L. aber die Aufgabe nicht an. Er denkt sich vielmehr die Veränderung der Pupille $= - dx$ als eine Function der *eindringenden* Beleuchtung $\varkappa x$, der Bildgrösse η und der Veränderung der Bildgrösse $= d\eta$, sodass also die Gleichung heisst

$$- dx = \varphi(\varkappa x, \eta)\, d\eta ,$$

welche noch eben so allgemein ist wie die vorige Gleichung; die zweite Gleichung wird aber nicht in dieser letzten, sondern in einer *specielleren* Form angeschrieben:

$$- dx = f(\varkappa x)\, d\eta ,$$

welche mit der ersten Gleichung § 848 identisch ist (wenn man statt f setzt: PM). Bei der Integration ist nun, wohl infolge der Bezeichnung PM, übersehen worden, dass in f ausser $\varkappa$ auch x vorkommt, und es ist geschrieben worden (zweite Gleichung § 848):

$$a - x = f(\varkappa x)\, \eta .$$

Formell ist dieser Fehler ohne Belang, da diese letzte Gleichung in nicht höherem Grade durch ihre specielle Form einen Theil der Lösung vorwegnimmt, als die vorletzte. Materiell jedoch ist ein wesentlicher Unterschied vorhanden, denn die Art, wie L. die vorletzte Form plausibel macht (§ 847: Summe aller partiellen Zusammenziehungen) ist nicht anwendbar auf die letzte Form (man denke sich, wenn man diese Andeutung im Detail verfolgt, $\varkappa x$ constant gehalten).

L.'s Gedankengang ist nun folgender: Es sei die letzte Gleichung in der Form gegeben:

$$\varkappa a - \varkappa x = f(\varkappa x) \cdot \varkappa \eta ,$$

dann stellt diese Gleichung nicht weniger eine zweifache Abhängigkeit des x von $\varkappa$ und η dar als die erste Gleichung $x = F(\varkappa, \eta)$. Die vorliegende Gleichung hat aber die besondere Eigenschaft, dass sie, auf Null gebracht, eine *algebraische* Beziehung zwischen den Variablen ($\varkappa$, $\varkappa\eta$ und $\varkappa x$) und *einer* transcendenten Function f *einer* dieser Variablen darstellt. Ist nun f durch eine Curve dargestellt, so ist die gegebene algebraische Gleichung durch eine Construction nach einer der Variablen (nämlich $\varkappa x$, woraus dann x, welches ja für $\varkappa$ und η zu bestimmen ist) auflösbar. Der Kunstgriff besteht also darin, dass L. die Gelegenheit benutzt, eine Tabelle mit doppeltem Argument zu ersetzen durch eine Curve (was einer einfachen Tafel entspricht) und eine Construction. Diese Auflösung der Gleichung wird in § 850 gegeben.

Dies setzt voraus, dass die Beziehung zwischen x, $\varkappa$, η bekannt sei. Da aber in ihr zunächst noch die Function f, d. h. eben jene Curve, unbekannt ist, so wird durch Versuche der Werth der rechten Seite obiger Gleichung bestimmt (§ 853), wodurch sich eine Tafel der f mit dem Argument $\varkappa x$ ergibt (§ 857, zweite und letzte Columne), die man durch eine Curve darstellen kann (§ 855), womit das Problem, wenn man die Construction § 850 hinzufügt, gelöst ist.

Dies zur Orientirung. Jetzt das Detail:

847) Es ist $\varkappa$ die Intensität des Objects, also = der scheinbaren Helligkeit (claritas visa); unter *subjectiver* Helligkeit (claritas apparens) ist die Grösse $\varkappa x$ zu verstehen, sie ist also nicht eine Intensität, sondern eine Beleuchtung. Doch kommt der im früheren vielfach gebrauchte Ausdruck »subj. Hell.« hier, wo er am Platze ist, nur sehr selten vor.

848) Unter »Intensität« ist hier eine *Beleuchtung* zu verstehen.

853) Die am Schluss citirten §§ 396 bis 398 schreiben vor,

alternirende Punkte zu verbinden, eine Curve aus freier Hand zu ziehen und den gleichmässigen Verlauf durch das Auge zu prüfen.

854) In der Tafel ist alles mit 100 multiplicirt; die Columne η sind quadrirte Minuten.

855) Willkürlich wählbar sind 3 Einheiten. Es wird gewählt 1) für $\varkappa$: unbew. Himmel $= 1$, 2) für x : Iris $= 1$, 3) η wird ausgedrückt im scheinbaren Flächeninhalt des Objects, d. h. es ist $\eta = \pi \sin^2 s$, denn man darf das hier gebrauchte μ durch $1 : \pi$ ersetzen, ohne die Zahlen *Lambert's* in einer unrichtigen Einheit zu erhalten, wie die Tab. § 857 zeigt.

Die verticale Scala der Figur enthält Bogenminuten und ist nur angegeben, um das Antragen der Cotangente zu erleichtern (vergl. § 850).

§ 858 bis 862: Weggelassen ist die Discussion der Curve $f(\varkappa x)$, welche nur 3 ohnedies verständliche Sätze enthält, nämlich 1) die Zahlen der verticalen Scala laufen bis ins Unendliche, 2) die Curve geht in positiver Richtung bis ins Unendliche (denn wenn der scheinb. Halbm. unendlich klein, die scheinb. Hell. unendlich gross sind, so liegt Gerade pq, mithin auch M im Unendlichen), 3) die Curve ist parallel zur AQ-Axe asymptotisch.

§ 863 und 864: Interpolationsformel für $f(\varkappa x)$; § 864 bespricht den Werth dieser Interpolationsformel, bleibt aber ohne Resultat.

Theil V. Photometrie der Atmosphäre.

Kapitel 1. Die Extinction des Lichts auf dem Weg durch die Atmosphäre.

§ 865 bis 877: Grundlagen. Die Extinction definirt sich als eine *Absorption*, d. h. sie vollzieht sich so, als ob das Licht geschwächt würde nach Maassgabe der Summe aller lichtauffangenden Oberflächen dunkeler Körperchen, welche den Voraussetzungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung entsprechend, also durch Zufall, in dem vom Licht durchströmten Raume vertheilt sind. Als »lichtauffangende Oberflächen« hat man die Projectionen der wirklichen Oberflächen der Körper auf eine zur Richtung der Lichtstrahlen normale Ebene aufzufassen. Die Voraussetzung der zufälligen Vertheilung schliesst in sich, dass die Körperchen unendlich klein sind gegen die Dimensionen des im absorbirenden Medium durchlaufenen Weges und der vom durchgelassenen Licht beleuchteten Fläche. Die Extinction ist also ein Factor, welcher im Grundgesetz Note 36) den Factor $1 : r^2$ corrigirt.

865) Wie man gesehen hat, ist dies sogar der Hauptinhalt des *Bouguer*'schen *Essai*'s.

866) In den am Anfang citirten Stellen, welche weggelassenen Abschnitten angehören, wird nicht mehr gesagt, als was hier ausgeführt wird.

869) Zum Ausdruck *Ablenkung.* Die Beugungserscheinungen waren schon bekannt seit *Leonardo da Vinci* und namentlich *Grimaldi*'s *Physico-mathesis* vom Jahre 1665.

871) Unter den »beiden vorigen Arten« sind zu verstehen 1) die zerstreute Zurückwerfung, 2) die Beugung.

873) Zum Citat vergl. Note 866).

874) Der Ausdruck: »durch das Raumelement dividirt« ist unrichtig. Man denke sich einen geraden prismatischen Raum, dessen Axe in der Richtung der Lichtstrahlen liegt und dessen Höhe *gleich der Einheit* ist. Dann ist die *Dichtigkeit der Hindernisse* gleich der Summe aller im Prisma enthaltenen lichtauffangenden Oberflächen (im Sinn von Note § 865 bis 877) dividirt durch die Grundfläche des Prismas. Es ist also, was aus L.'s Definition nicht folgt, die Dichtigkeit der Hindernisse in linearer Weise von der gewählten Längeneinheit abhängig.

875) Da der citirte § 467 einem weggelassenen Abschnitt angehört, so wurde bereits in der betreffenden Note die Gleichung $-dv = v\delta \cdot dx$ plausibel gemacht; sie ergibt sich übrigens auch sofort aus der Definition der Absorption Note § 865 bis 877.

876) Selbstverständlich ist der Proportionalitätsfactor $= -1$. Auf diese sich oft, wenn auch in anderer Form, wiederholende Ungenauigkeit sei nur dies eine Mal hingewiesen.

§ 878 bis 882: Ableitung der Extinctionsformel. Charakteristisch ist 1) die Krümmung der Luftschichten, 2) der geradlinige Weg des Lichts.

878) Man beachte, dass zuvor die Dichtigkeit des Lichts im Anfangspunkt mit 1, im Endpunkt mit v bezeichnet wurde, dagegen hier umgekehrt. Zur früheren Bezeichnung kehrt L. in § 880 zurück.

880) Hauptsatz: die *Lambert'sche Extinctionsformel.* Infolge des geradlinig angenommenen Lichtweges unterscheidet die Formel nicht zwischen wahrer und scheinbarer Zenithdistanz. Versteht man unter γ einmal die erstere und einmal die letztere, so unterscheiden sich die Resultate allerdings nur um Glieder von solcher Form, wie sie in L.'s Formel ohnedies auftreten (z. B. das

erste Glied liefert $A \alpha \sec\gamma \operatorname{tg}^2 \gamma$). Trotz dieses äusserlichen Umstandes hat *Lambert*'s Formel deshalb, weil die Rücksicht auf die Krümmung des Lichtstrahls, wobei man dann γ definiren müsste, die Form des Ausdrucks ändern könnte, nur den Charakter einer Interpolationsformel, d. h. einer Formel, deren analytischer Ausdruck hypothetisch angenommen ist und deren Constanten durch beobachtete Werthe dieses Ausdrucks bestimmt werden. Dementsprechend werden auch die Grössen A, B, ... als von einander unabhängig angesehen, was in Wirklichkeit nicht der Fall ist.

Es heisse hier und im Folgenden Θ die scheinbare, z die wahre Zenithdistanz; ferner sei J_0 die scheinbare Helligkeit eines Sterns, wenn $z = 0$, J_z dieselbe, wenn $z = z$, und J dieselbe, wenn der Stern ausserhalb der Atmosphäre beobachtet wird.

Dann wollen wir bezüglich der Bedeutung von Lambert's γ eine Wahl treffen und die *Lambert*'sche *Extinctionsformel* so notiren:

$$\log J_z = \log J - A \sec\Theta + \tfrac{1}{2} B \sec\Theta \operatorname{tg}^2 \Theta\,. \tag{a}$$

Auf die *Krümmung* des Lichtstrahles hat nun *Laplace* Rücksicht genommen, Méc. cél. Bd. 4, Buch 10, Kap. 3, § 12. Sein Resultat ergibt sich sehr einfach, wenn man die Grundgleichung der Extinction $-dv = v\delta \cdot dx$ (§ 875) mit den Grundgleichungen der Refraction verbindet und dabei die verticale Temperaturänderung $= 0$ setzt (wie *Laplace* es thut). Es folgt dann die *Laplace*'sche *Extinctionsformel*, welche seit *Seidel* die gewöhnlich gebräuchliche ist:

$$\log J_z = \log J - \frac{H \cdot \mathit{Refraction}}{\sin\Theta}\,. \tag{b}$$

Ueber den gegenseitigen Werth beider Formeln bemerke man: da die Refraction die Form hat

$$\text{Refraction} = \alpha \operatorname{tg}\Theta = \alpha_0 \operatorname{tg}\Theta + \alpha_1 \operatorname{tg}^3\Theta + \cdots,$$

wo α mit Θ etwas veränderlich, α_0 und α_1 constant sind, so könnte man die *Laplace*'sche Formel auch so schreiben:

$$\log J_z = \log J - H\alpha_0 \cdot \sec\Theta - H\alpha_1 \cdot \sec\Theta \operatorname{tg}^2\Theta\,,$$

mithin stimmen die *Lambert*'sche und die *Laplace*'sche Formel der Form nach überein. Selbst wenn nun die *Laplace*'sche Extinctionsformel für jedes beliebige Gesetz der verticalen Temperaturänderung, insbesondere auch für das thatsächlich stattfindende unbekannte, Geltung haben würde (allgemeiner als unter *Laplace*'s Voraussetzungen gilt sie jedenfalls), so schliesst immer noch der auf der rechten Seite der *Laplace*'schen Gleichung auftretende Ausdruck »Refraction« die Temperaturhypothese in sich, mithin ist auch die *Laplace*'sche Extinctionsformel in zweiter Instanz eine Interpolationsformel, wie es die *Lambert*'sche in erster Instanz ist.

881) Der Widerspruch bezüglich der Zahl 30 ist wegen der Unsicherheit der Entscheidung nicht verbessert worden. Es ist übrigens $\mathrm{tg}^2\, 80^\circ = 32.2$.

§ 883 bis 887: Constantenbestimmung und Extinctionstafel.

885) Der Versuch *Bouguer*'s steht im *Essai*, erste Abtheilung, Artikel 6. Dort wird der Mond in verschiedenen Höhen mit Kerzen verglichen und es findet sich

$$\begin{array}{llr} \text{Höhe} = 66^\circ\, 11' & \text{Helligkeit} = & 1 \\ \phantom{\text{Höhe} = }\ 19\ \ 16 & & \frac{2}{3} \\ \phantom{\text{Höhe} = }\ \ 0\ \ \ 0 & & \frac{1}{2000}. \end{array}$$

886) *Lambert* hat diese Beschreibung seiner Versuche thatsächlich in § 283 der *Pyrometrie* nachgeholt. Es lag ein Thermometer im Schatten, ein anderes in den Sonnenstrahlen. Die Differenz der Angaben beider Thermometer wurde für mehrere Sonnenhöhen genommen und wird demnach hier als Maass der durch die Atmosphäre gegangenen *Lichtmenge* angesehen. Die gefundene Zahl ist aber sehr fehlerhaft und im Gegentheil der *Bouguer*'sche Werth in Uebereinstimmung mit den neueren Messungen.

Wie Lambert hier aus der Extinctionsformel eine Tafel berechnet hat, so kann man auch eine Extinctionstafel direct empirisch ableiten. Erwähnt seien

1) *Seidel*'s *Extinctionstafel für München*, mitgetheilt in »Unters. über die gegens. Hell. d. Fixst. u. s. w.« (Münchener Acad. Bd. 6). Man vergleiche über diese Tafel auch *Zöllner*, Phot. Unters., Vorwort, *R. Engelmann*, Ueber die Helligkeitsverhältnisse der Jupiterstrabanten, Leipzig 1871. *Seidel* selbst hat später eine zweite Extinctionstafel mitgetheilt (»Result. phot. Mess.« Münchener Acad. Bd. 9), ohne sich veranlasst zu sehen, die letztere für besser zu halten als die erstere.

2) *G. Müller*'s *Extinctionstafel für Potsdam*, mitgetheilt in der Schrift: »Photometrische Untersuchungen« (Publicationen des astrophysicalischen Observatoriums zu Potsdam Nr. 12, Potsdam (Leipzig) 1883).

Aus beiden Tafeln sei ein kurzer Auszug mitgetheilt:

Argument = wahre Zenithdistanz z	*Seidel*'s $\varphi(z)$	*Müller*'s $\varphi(z)$
0°	0.000	0.000
10	0.000	0.000
20	0.003	0.004
30	0.007	0.011
40	0.017	0.024
50	0.045	0.048
60	0.097	0.092
70	0.191	0.180
75	0.268	0.260
80	0.388	0.391
81	0.428	0.428
82	0.484	0.472
83	0.549	0.526
84	0.616	0.596
85	0.684	0.689
86	0.754	0.816

Hierbei versteht man unter $\varphi(z)$ diejenige Zahl, welche, zum Logarithmus der Helligkeit addirt, den Logarithmus der Helligkeit gibt, welche der Stern im Zenith zeigen würde.

Man bezeichne sowohl in der *Lambert*'schen wie in der *Laplace*'schen Gleichung, (a) und (b) Note 880), die rechte Seite ausser $\log J$ mit $+\log E(\Theta)$, so dass also

$$\left.\begin{array}{ll} \text{für } z = z & \log J_z = \log J + \log E(\Theta) \\ \text{und speciell für } z = 0 & \log J_0 = \log J + \log E(0) \end{array}\right\} \quad (c)$$

so folgt

$$\log J_0 - \log J_z = \log E(0) - \log E(\Theta)$$

und es hat mithin die von den Tafeln gegebene Grösse die Bedeutung

$$\varphi(z) = \log E(0) - \log E(\Theta) .$$

Den Numerus $E(0)$ wollen wir als *Extinctionsconstante* bezeichnen. Sie gibt an, welcher Bruchtheil des ungeschwächten Sternenlichtes die Atmosphäre vertical durchdringt, und es ist

für die *Lambert*'sche Formel $E(0) = \text{Num}\log(-A)$

für die *Laplace*'sche Formel $E(0) = \text{Num}\log(-H\alpha_0)$.

Zur Bestimmung von $E(0)$ sind, da auch J zu eliminiren ist, mindestens zwei Beobachtungen erforderlich. Sowohl *Seidel* (erste Abhandlung) wie *Müller* haben die Constante auf Grund der *Laplace*'schen Formel durch Ausgleichung mit Hilfe ihrer empirischen Tafeln bestimmt. Im Ganzen hat man

Bouguer: $E(0) =$	0.815
Lambert:	0.59
Seidel:	0.794
Müller:	0.825.

Um die *Lambert*'sche Tafel am Ende des Paragraphen mit den anderen Zahlen und diese unter sich zu vergleichen, sei folgende Tabelle notirt:

	Lambert, Formel:	*Seidel*, empirisch:	*Müller*, empirisch:	*Laplace*, Formel:
Ausserhalb der Atmosphäre	$\frac{1}{E(0)} = 1.69$			$\frac{1}{E(0)} = 1.19$
Wahre Zenithdistanz $z = 0^{\circ}$	$\frac{J_z}{J_0} = 1.00$	$\frac{J_z}{J_0} = 1.00$	$\frac{J_z}{J_0} = 1.00$	$\frac{J_z}{J_0} = 1.00$
10	0.99	1.00	1.00	1.00
20	0.97	0.99	0.99	0.99
30	0.92	0.98	0.97	0.97
40	0.85	0.96	0.95	0.95
50	0.75	0.90	0.90	0.91
60	0.59	0.80	0.81	0.84
70	0.36	0.64	0.66	0.71
75	0.22	0.54	0.55	0.61
80	0.083	0.41	0.41	0.45
81	0.060	0.37	0.37	0.41
82	0.040	0.33	0.34	0.36
83	0.024	0.28	0.30	0.31
84	0.012	0.24	0.25	0.26
85	0.0048	0.21	0.20	0.20
86	0.0013	0.18	0.15	0.15

Die erste Reihe wurde mit Hilfe der Formel (a), aber ohne zweites Glied, und mit der *Lambert*'schen Extinctionsconstante berechnet; Argument war also die dem z der Tafel zugehörige scheinbare Zenithdistanz Θ. Diese Reihe soll nur den grossen Einfluss der Extinctionsconstante auf den Verlauf der Tafel darthun.

Die zweite und dritte Reihe enthalten die Numeri der Zahlen der vorletzten Uebersicht und sollen die merkwürdige Uebereinstimmung zwischen der Münchener und der Potsdamer Tafel, welche in sehr verschiedenen Terrainverhältnissen abgeleitet wurden, darthun.

Langley hat im *American Journal of Science* (Vol. 28) auf die Consequenzen hingewiesen, welche dadurch entstehen, dass die Extinctionsformeln eigentlich nur für homogenes Licht gelten. Zur leichteren Uebersicht denke man sich, der Lichtstrahl sei, statt durch die Atmosphäre, durch ein Medium constanter Dichte gegangen; dann wird einer jeden Strahlrichtung z in der Atmosphäre eine Länge s_z im Medium constanter Dichte entsprechen, welche dieselbe Lichtschwächung hervorruft, wie die Atmosphäre bei der wahren Zenithdistanz z des Strahles. Dann lautet die Extinctionsformel

$$\log J_z = \log J - k s_z$$

oder

$$J_z = J e^{-k s_z} .$$

Bildet man nun für eine und dieselbe Zenithdistanz z die verschiedenen s_z, welche den verschiedenen Farben entsprechen, und addirt sämmtliche J_z, nachdem jedes mit seinem Beitragswerth zur resultirenden Farbe multiplicirt ist, so hat diese Formel, falls die k von einander verschieden sind, einen wesentlich anderen Charakter als die einfache Formel $J_z = J e^{-k s_z}$. Der zusammengesetzten Formel entsprechen die empirischen Extinctionstafeln, der einfachen Formel die theoretisch berechneten Extinctionstafeln. Man denke sich nun die Tafeln in ihrer ganzen Ausdehnung auf denselben Stern bezogen; stimmen dann die empirische und die theoretische Tafel an zwei verschiedenen Stellen überein, so lässt sich dies so auffassen, als habe man die 2 Constanten J und k der theoretischen Tafel aus eben diesen 2 Stellen der empirischen Tafel durch 2 Gleichungen bestimmt. Dies ist aber in der vorletzten und letzten Reihe obiger Uebersicht der Fall bei $z = 0^\circ$ und $z = 85^\circ$. Dem entsprechend wird auch die zusammengesetzte Formel an diesen zwei Stellen mit der einfachen Formel übereinstimmen und es lässt sich nun zeigen, dass an anderen Stellen die Abweichungen zwischen der zusammengesetzten und der einfachen Formel in demjenigen Sinn liegen müssen, in welchem sie nach der Vergleichung derselben zwei Reihen obiger Tafel auch thatsächlich liegen; woraus sich ergibt, dass die Extinctionsformeln einer systematischen

Verbesserung bedürfen. Daraus folgt auch insbesondere, was man sich übrigens, wenn man den erwähnten Satz vom Sinn der Abweichung einmal kennt, auch ohne Rechnung plausibel machen kann (2 Curven, die sich in 2 Punkten durchschneiden, haben ausserhalb der Schnittpunkte ihre Lage vertauscht, also jenseits $z = 0$, d.h. ausserhalb der Atmosphäre, entgegengesetzte Lage), dass $E(0)$ grösser als die entsprechende Zahl $E'(0)$ der zusammengesetzten Formel ist, also grösser als diejenige Zahl, welche den vertical durchgelassenen Bruchtheil des ursprünglichen Lichtes darstellt. Man vergleiche über das Detail: *Seeliger*: »Ueber die Extinction des Lichts in der Atmosphäre« (Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Classe der k. bayer. Acad. d. Wiss. 1891, Bd. 21, Heft 3). Dort werden *Langley*'s Untersuchungen vervollständigt und zugleich gezeigt, dass $E'(0)$ nicht in dem Maasse kleiner als $E(0)$ ist, wie *Langley* meinte (*Langley*: $E'(0) = 0.6$, während $E(0) = 0.8$). Aus dieser Schrift ist auch die letzte Reihe der vorigen Uebersicht entnommen worden, nachdem die Werthe durch einige Reductionen mit den anderen Reihen der Uebersicht vergleichbar gemacht waren.

887) Die Schrift *les propriétés remarquables de la route de la lumière par les airs* enthält im ersten Abschnitt die allgemeinen Eigenschaften der Bahn des Lichts durch concentrische Kugelflächen, im zweiten Abschnitt die astronomische und im dritten die terrestrische Strahlenbrechung. Sie beruht auf vereinfachten Principien, enthält aber viele, zwar den heutigen Anforderungen an Strenge natürlicherweise nicht genügende, jedoch für bessere Ueberschlagsrechnungen mehr als brauchbare einfache Lösungen von Aufgaben, und ebenso mehrere interessante Lehrsätze, welche mit Unrecht meist vergessen sind.

§ 888 bis 899: Geometrische Deutungen.

893) Die logarithmische Spirale hat in Polarcoordinaten dieselbe Gleichung wie die logarithmische Linie in rechtwinkligen, nämlich

$$r = a e^{-\frac{\vartheta}{c}} \quad \text{bezw.} \quad y = a^{-\frac{x}{c}}.$$

In der ersteren ist der Winkel zwischen der positiven Tangentenrichtung und dem Radius vector constant $= \omega'$, und zwar $\operatorname{tg} \omega' = c$ ($\omega' = 180^\circ - \omega$ *Lambert*'s); in der letzteren ist die Subtangente, positiv gemessen vom Fusspunkt des Berührungspunktes an, constant und zwar gleichfalls $= c$.

895) Zum Ausdruck *Neigungswinkel* vergl. Note 53). —

Die erste Gleichung ist der bekannte Satz aus der Refractionstheorie $\mu r \sin i = \text{Const.}$ (μ Brechungsexp., r Radius, i Incidenzw., alle 3 an derselben Stelle).

896) Nach diesen fingirten Fällen beginnt hier der Fall der Natur.

898) Die Zahl 2000 hat L. aus *Bouguer*'s *Essai*, vergl. Note 885); L.'s eigene Formel wird für diesen Fall ungiltig.

899) Eine deutsche Meile zu L.'s Zeit war ebensogross wie heute.

Kapitel 2. Photometrie eines beleuchteten Systems kleiner Körper.

Die Aufgabe, deren Lösung L. hier versucht, gehört zu den interessantesten aber schwierigsten der Photometrie. Man kann dieselbe so aussprechen: Gegeben ist ein System unendlich vieler durch Zufall vertheilter kleiner Körper, ferner eine Lichtquelle, welche dasselbe bescheint; gesucht ist die Lichtart und Lichtmenge, welche in einer gewissen beliebig gewählten Richtung austritt. Wegen der eminenten Schwierigkeit kommt den sehr verdienstvollen Behandlungen, welche das Problem nach mehreren Seiten hin erfahren hat, nur der Charakter erster Näherungen zu. In einer gewissen Form kommt die Aufgabe überein mit der entsprechenden in Note § 696 bis 702.

Der Gegenstand ist, so weit er die *atmosphärische Photometrie* betrifft, vielfach behandelt worden. Doch sind hervorzuheben:

1) *Clausius* (mehrere Abhandlungen: in Poggendorff's Annalen, Bde. 76, 84, 88). Das Ziel von *Clausius* geht dahin, die viel umstrittene Frage zu entscheiden, ob das in der Atmosphäre suspendirte Wasser die Gestalt von Bläschen, oder die Gestalt von Tropfen besitze. Der Methode nach beruht die Untersuchung auf der Theorie der spiegelnden Kugelflächen, welche jedoch nicht in der einfachen *Lambert*'schen Form, sondern mit Rücksicht auf die *Fresnel*'schen Reflexionsformeln erledigt wird (vergl. Note 653), Schluss).

2) *Lommel* (»Beiträge zur Theorie der Beugung des Lichtes«, Grunert's Archiv Bd. 36, »Theorie der Abendröthe und verwandter Erscheinungen«, Pogg. Annalen Bd. 131). Der Gegenstand ist vom Standpunkte der Beugungstheorie behandelt und es wird hierdurch gezeigt, dass, wenn weisses Licht einfällt, im *durchgelassenen* Licht die Strahlen mit grosser Wellenlänge die anderen überwiegen; hieraus die Abendröthe.

3) *Strutt* (»On the Light from the Sky, its Polarization and Colour«, Philosophical Magazine, Vol. 41, fourth series). Die Untersuchung beruht auf der mechanischen Theorie der Wellenbewegung und führt zu dem Resultat, dass, wenn die Körperchen äusserst klein sind (vom Rang einer Wellenlänge), die *zurückgeworfene* Lichtmenge der vierten Potenz der Wellenlänge des einfallenden Lichts umgekehrt proportional ist. Hierauf beruht die Erklärung der blauen Farbe des Himmels.

Was zweitens die *Astrophotometrie* betrifft, so hat *Seeliger* auf eine gewisse Eigenschaft der Körpersysteme seine Theorie des *Saturnringes* gegründet in der Abhandlung »zur Theorie der Beleuchtung der grossen Planeten, insbesondere des Saturn«. Diese Theorie beruht darauf, dass die Körperchen nicht mehr als unendlich klein angesehen werden gegenüber den Dimensionen des ganzen Körpersystems. Betrachtet man nämlich einen bestimmten unter den als Kugeln angesehenen Körpern, so wird das auf diese Kugel auffallende Licht geschwächt nach Maassgabe der Wahrscheinlichkeit, mit welcher andere Körper in den cylindrischen Raum eintreten, dessen Mantel die Kugel in einem grössten Kreis berührt, und dasselbe gilt für das nach beliebiger Richtung, z. B. zur Erde hin, ausgesandte Licht, für welches ein zweiter cylindrischer Raum auftritt. Es finden also *im Allgemeinen* Absorptionen statt entsprechend der Definition Note § 865 bis 877, und es würden, wenn etwa die Kugeln das Licht nach allen Seiten gleichmässig zurückwerfen würden, für den Ring als Ganzes die Bedingungen für die Näherungsformel (2b), Note § 696 bis 702, gegeben sein, die man wegen des engen Spielraums (Sonne und Erde erscheinen vom Saturn aus in nahezu derselben Richtung) rücksichtlich der nach allen Seiten gleichmässigen Lichtausstrahlung der Körperchen als zulässig betrachten darf. *Im Besonderen* sind aber die Bedingungen der Absorption modificirt, wenn beide cylindrische Räume ein gemeinsames Stück haben, welches endlich ist gegenüber den im Körpersystem enthaltenen Theilen der Cylinderräume. Da für die Absorption das gemeinsame Stück nur einmal in Frage kommt, mithin der ganze absorbirende Raum bei Entfernung von der Opposition rasch wächst, so muss die ausgesandte Lichtmenge nach der Opposition rasch abnehmen, was mit den Beobachtungen von *G. Müller* (vergl. Astron. Nachrichten No. 2631) im Einklang steht.

Der Gegenstand unserer Aufgabe kommt vermuthlich auch beim *Zodiakallicht* in Frage. Man hat hier zahlreiche

Beobachtungen von *Searle*, doch haben dieselben eine vollständige theoretische Bearbeitung noch nicht erhalten.

Die nachfolgenden Untersuchungen *Lambert's* kommen über eine Ueberschlagsrechnung für den einfachsten Fall nicht hinaus, mussten aber aufgenommen werden, da sie einen integrirenden Theil seines photometrischen Lehrgebäudes bilden. Einen bestimmten reellen Werth hat ihnen L. selbst dem Vorwort zufolge nicht beigelegt.

§ 900 bis 909: Rohe Ueberschlagsrechnung: Das durch Extinction verlorene Licht wird zur Hälfte nach oben, zur Hälfte nach unten geworfen.

900) Als »früherer« Fall (Schluss des Paragraphen) ist die Extinction zu verstehen.

§ 910 bis 912: Andeutungen über die hypothetischen Grundlagen der vorigen Rechnung und deren Verallgemeinerung auf Grund 1) der Veränderlichkeit der Extinctionsconstante, 2) der ungleichen Spaltung nach oben und unten, 3) der Krümmung der Schichten. Die Nummer 2) ist die Hauptsache; sie umfasst a) das Gesetz, nach welchem hier die Lichtmenge, welche die Theilchen aussenden, vom Winkel zwischen einfallendem und austretendem Licht abhängt, b) die gegenseitige Bestrahlung der Theilchen.

§ 913 bis 915: Festsetzungen.

913) l war zunächst die Lichtmenge, welche durch alle der Atmosphäre angehörenden Raumelemente *eines* prismatischen Raumes, der ein Element der Sonne und ein horizontal liegendes Element $= 1$ auf der Erde als Grundflächen hat, auf *alle* Theile der ebenen Erdoberfläche ausgebreitet wird. Es lässt sich nun leicht zeigen, dass diese Lichtmenge gleich ist derjenigen, welche *alle* diese prismatischen Räume auf ein *einziges* Element $= 1$ schicken; es ist also l die Beleuchtung eines horizontalen Elementes durch die Himmelshalbkugel; L war die normale Beleuchtung durch die Sonne. Die ziemlich willkürliche Festsetzung $l : L = 1 : 6$ wird später vielfach citirt. Es wird nun der Himmelshalbkugel eine fingirte gleichmässige Intensität beigelegt, welche dieselbe Beleuchtung des horizontalen Elementes erzeugen würde, wie die räumlich variablen Intensitäten des Himmelsgewölbes, und diese *fingirte Intensität* wird von *Lambert* als *mittlere Helligkeit der Himmelshalbkugel* bezeichnet.

914) Es werden die Beleuchtungen verglichen, welche einerseits durch ein Stück der fingirten Himmelshalbkugel (Intensität $= 1$) von der Grösse der Sonne, andererseits von der

Sonne selbst hervorgebracht werden; hieraus wird auf das Verhältniss der Intensitäten geschlossen.

915) L.'s Umständlichkeit in so einfachen Dingen ist eine Folge der Confusion seiner Begriffsbestimmungen. Die fingirte Intensität des Himmelsgewölbes ist $= 1$, dasselbe würde also dem Bleiweisselement die Beleuchtung π schicken, mithin schickt nach Festsetzung § 913 die Sonne diesem Element die Beleuchtung $= 6\pi$, und nach Formel (4a) Note § 766 bis 770 wird dieses Element selbstleuchtend mit einer Intensität = Beleuchtung mal Albedo durch $\pi = 6 \cdot 0.423 = 2.538$. L.'s Ausrechnung des Werthes i war also überflüssig.

§ 916 bis 948: Anfang einer allgemeineren Untersuchung. Charakteristisch ist die nach allen Seiten gleiche Lichtausstrahlung der Theilchen und die Vernachlässigung der gegenseitigen Bestrahlung der Theilchen (Note § 910 bis 912 a) und b)).

925) Bezüglich der *logarithmischen Curve* vergl. Note 893). — Der dem älteren griechischen Alphabet angehörige, noch in den Zahlen vorkommende (= 90) Buchstabe ϙ (Koppa) wurde von den Mathematikern vielfach als Parallelbuchstabe zu q gebraucht.

927) Hier ist der Hauptsatz enthalten.

931) Der Druckfehler in L.'s überflüssigem Citat wurde nicht berichtigt.

937) Man kann den Gegenstand der von hier ab folgenden langen Auseinandersetzung auch so formuliren: Gegeben ist das Gesetz, nach welchem ein *Parallel*strahlenbündel auf irgend eine von der Länge des zurückgelegten Weges abhängige Weise geschwächt wird; es fragt sich nun, ob bei einem *divergirenden* (oder, wie hier, convergirenden) Strahlenbüschel die am Endelement anlangende Lichtmenge proportional ist dem Factor, welcher durch die Schwächung der Parallelstrahlen entsteht, multiplicirt mit dem umgekehrten (oder, wie hier, directen) Quadrat der Entfernung. Diese Frage bejaht sich ohne Rechnung folgendermaassen: Man denke sich die Strahlen als gerade Linien, welche in einem unendlich dünnen pyramidischen Raum von der Spitze aus divergiren (convergiren); dann gilt für die Intensität jedes Einzelstrahles (den man sich wieder als Parallelstrahlenbündel von einer Dicke = zweiter Ordnung zu denken hat) dasselbe, wie für alle Parallelstrahlen; es bleibt also nur die Dichtigkeit der als Linien gedachten Strahlen in verschiedenen Entfernungen vom Divergenzpunkt (Convergenzpunkt) zu

berücksichtigen; die letztere regelt sich aber nach dem Quadrat der Entfernung. Man darf also die Strahlen so betrachten, als ob sie sich ohne Absorption ausbreiteten (vereinigten) und braucht dann am Resultat nur den Absorptionsfactor der Parallelstrahlen zuzufügen. Dieser Satz in Verbindung mit L.'s Bemerkung § 938 ersetzt die ganze Rechnung L.'s.

945) Die Constante γ ist hier so gewählt, dass ein verticaler Lichtstrahl $= 1$ so geschwächt wird, dass der Logarithmus seiner Helligkeit genau $= 0.8$ wird, wodurch ihm dann die Intensität 0,63095 zukommt. L.'s früherer Werth war 0.59 (§ 886). — Die Columne AP enthält die Secante des nebenstehenden Winkels.

§ 949 bis 973: Weggelassen ist der Versuch, die allgemeinere Untersuchung fortzusetzen durch Berücksichtigung der gegenseitigen Bestrahlung der Theilchen und die Beleuchtung der Luft durch das zurückgeworfene Licht der Erdoberfläche. Es wird nur der Differentialausdruck aufgestellt für die Lichtmenge, welche ein Theilchen von allen anderen erhält, wobei natürlich auf der rechten Seite in der Lichtmenge, welche diese anderen Theilchen ausstrahlen, wieder die unbekannte Function enthalten ist; hierzu wird das direct von der Sonne kommende und das von der Erde dem Theilchen zugesandte Licht hinzugefügt, und da letzteres abermals die gesuchte Unbekannte in sich enthält, so begnügt sich Lambert hier mit der ersten Näherung. Er bricht die Untersuchung mit den Worten ab: »Die Rechnung wird so schwierig, dass ich keinen Weg sehe, wie sie zu Ende geführt werden könnte.«

§ 974 bis 986: Rückkehr zur rohen Annäherung § 900 bis 909, aber unter Rücksicht auf das von der Erdoberfläche zurückgeworfene Licht.

977) Man kann diese Gleichung, wie immer in solchen Fällen, ohne Reihenentwickelung aufstellen, wenn man bedenkt, dass die schliesslich zur Erde gelangende Lichtmenge $\mathcal{A}$ sich zusammensetzt aus dem durchgelassenen Licht n, der Hälfte des hierbei zerstreuten Lichts $\frac{1}{2}(1 - n)$ und dem wieder zurückkehrenden Theil (Factor $= \frac{1}{2}(1 - m)$) des von der Erde ausgestrahlten Theils (Factor $= A$) der unbekannten auf die Erde auftreffenden Lichtmenge $\mathcal{A}$. In der That ist die entstehende Gleichung

$$\mathcal{A} = n + \tfrac{1}{2}(1 - n) + \tfrac{1}{2}(1 - m)\, A\mathcal{A},$$

nach $\mathcal{A}$ aufgelöst mit der *Lambert*'schen identisch.

983) Es gelten auch hier die Note 913) angedeuteten Erwägungen.

984) Die *Albedo des Schnees* fand *Zöllner* (Phot. Unt. S. 273) = 0.783.

Kapitel 3. Die Dämmerung.

§ 987: Historisches. Lambert erwähnt hier nicht diejenige Arbeit, welche bis zu seiner hier vorliegenden die bedeutendste war, nämlich *Alhazen* (de crepusculis, Basil. 1572). *Nach Lambert* sind zu erwähnen *Grunert* (Beiträge zur meteorol. Optik, Leipzig 1848, I. Theil), dessen Behandlung sich im Princip nicht von der L.'schen unterscheidet, *Kümptz* (Meteorologie, Bd. 3), wo sich viele Litteraturnachweise und Zahlenangaben finden, und vor allen *v. Bezold* (Beobachtungen über die Dämmerung, Pogg. Annalen Bd. 123, 1864), wo sich eine exacte Beschreibung der Erscheinung und eine Kritik der Lambert'schen Behandlung findet.

§ 988 bis 997: Die kürzeste Dämmerung. Man pflegt diese Aufgabe jetzt in den Lehrbüchern der sphärischen Astronomie analytisch zu behandeln.

990) Auf der Eigenschaft $PSZ = PRZ$ beruhen die folgenden Entwickelungen.

991) Erster Hauptsatz, welcher die *Declination der Sonne* für den Tag der kürzesten Dämmerung angibt.

996) Zweite Hauptsatz, welcher die *Dauer* der kürzesten Dämmerung angibt. — Statt »Azimuth der Sonne« (von Westen gezählt) sagt L.: dimidius arcus azimuthalis.

997) Die Thierkreiszeichen bedeuten bei L. stets die Rectascension des *Anfangspunktes* des betreffenden Zeichens plus ...

§ 998 bis 1002: Bestimmung der Höhe der Atmosphäre aus der Tiefe der Sonne beim Untergang der *ersten* und der *zweiten* Dämmerung mit Rücksicht auf die *Refraction*.

1000) Der Satz $CK : CE$ = Brechungsexponent an der Oberfläche der Erde, ist vollkommen streng und gilt für jede beliebige, nicht blos für Horizontalrefractionen, wenn man unter CE das Perpendikel von C auf die Tangente des Lichtstrahls im Punkte, wo er die Erde trifft, versteht. Er folgt aus der Gleichung $\mu r \sin i = \mu_0 r_0 \sin i_0$ (Index 0 an der Erdoberfläche), wenn man $\mu = 1$ setzt und $r \sin i$ sowie $r_0 \sin i_0$ geometrisch deutet, und wurde von *Lambert* in der Schrift *propriétés remarquables de la route de la lumière* § 70 bewiesen.

Der Brechungsexponent der Luft für 0° und 760 mm ist nach *Dulong* = 1.000294.

1001) Die Horizontalrefraction setzt L. hier $= 0^\circ 32'$, § 1008 dagegen $= 0^\circ 33'$. Charakteristisch für die Abfassungsart ist, dass keine der beiden Zahlen ein Druckfehler ist.

§ 1003 bis 1009: Beobachtungsreihe. *Bezold* charakterisirt (a. a. O. S. 275) sehr kurz den Verlauf der Erscheinung folgendermaassen:

»Schon vor Sonnenuntergang constituirt sich am östlichen Himmel die *Gegendämmerung.*

Im Momente des Sonnenunterganges beginnt die *erste Dämmerung*, das *dunkle Segment* erhebt sich (im Osten) vom Horizont, beschränkt die Gegendämmerung mehr und mehr, und entzieht sich den Blicken des Beobachters in einer Höhe, welche je nach dem Tage zwischen 6° und 12° schwankt.

Am westlichen Himmel erscheint in einer Höhe, welche zwischen 8° und 12° schwankend gefunden wurde, der *Dämmerungsschein*, der das unter ihm liegende *gelbe helle Segment* von den höheren bläulichen Theilen des Himmels trennt.

Während das helle Segment in ganz bestimmter Weise sinkt, entwickelt sich über demselben das *erste Purpurlicht;* bei einer Tiefe der Sonne von etwa $5^\circ 20'$ im Mittel erreicht dasselbe sein Helligkeitsmaximum, wobei nach Westen gekehrte Gegenstände lebhaft beleuchtet werden.

Das Purpurlicht sinkt rasch und schwindet endlich zu einer schmalen Zone zusammen, welche das helle Segment ziemlich scharf begrenzt. Wenn die Sonne sich etwa 6° unter dem Horizonte befindet, entzieht es sich dem Blicke vollkommen, die Tageshelligkeit nimmt auffallend ab. Dies bezeichnet das Ende der *bürgerlichen Dämmerung* und zugleich den Anfang der *zweiten;* denn ungefähr um diese Zeit erhebt sich ein *zweites dunkles Segment* vom östlichen Horizont, über dem ersten hellen Segmente bildet sich ein *zweiter Dämmerungsschein*, und während ersteres seinem Untergange zueilt, erscheint über dem *zweiten hellen Segmente* ein *zweites Purpurlicht*, sodass eine förmliche Wiederholung der zuerst beobachteten Erscheinungen eintritt, jedoch wahrscheinlich mit einem etwas langsameren Verlaufe.

So wie der Untergang des ersten hellen Segmentes den Schluss der ersten Dämmerung bezeichnet, so bildet der des zweiten den der zweiten Dämmerung, vermuthlich zugleich das Ende der astronomischen.«

Uebrigens glaubte *Bezold*, das erste dunkle Segment, sobald es das Zenith um 30° überschritten hatte, wieder erkennen und verfolgen zu können, bis es den zweiten westlichen Dämmerungsbogen, der die obere Grenze des zweiten Dämmerungsscheins bildet, erreicht hat, sodass es nicht mehr erkennbar ist. Von jetzt ab ist es, wie *Bezold* gezeigt hat, die Höhe dieses zweiten Dämmerungsbogens, welche L. gemessen hat, während L. selbst der Ansicht ist, die Höhe des Punktes *F* (Fig. 91) gemessen zu haben. Diese Höhe von *F* fällt wohl ziemlich mit der Höhe des ersten dunkelen Segmentes zusammen, so lange letzteres am unteren Osthimmel sichtbar ist, und dieses hat, auch wenn es den Westhimmel erreicht, wo L.'s Messungen gemacht worden sind, mit dem zweiten westlichen Dämmerungsbogen nichts zu thun.

Interessant ist noch *Bezold*'s aus den Beobachtungen abgeleitete Relation: Höhe des ersten westlichen Dämmerungsbogens + Tiefe der Sonne = Constante.

1007) Wegen der Zahl 2000 vergl. Note 885). Wegen der Helligkeit des Vollmondes vergl. § 1078.

1008) *Brander* in Augsburg war ein erfindungsreicher Mechaniker, mit welchem L. viel verkehrte. L. gab z. B. eine Schrift heraus »Anmerkungen über die Branderschen Mikrometer von Glase«. Augsburg 1769.

§ 1010 bis 1016: Bestimmung der Höhe der Atmosphäre und weitere Discussion der Beobachtungen. Um die Höhe der Atmosphäre zu bestimmen, wird nur eine einzige Beobachtung verwendet. Nach Bezold haben aber *Brander* und *Grunert* gezeigt, dass jede andere L.'sche Beobachtung einen anderen Werth für diese Höhe geben würde, wie denn auch die Tiefe der Sonne zur Zeit des Unterganges des Punktes *B* (d. h. bei L.: der primären Dämmerung) sich durch Extrapolation aus der Beobachtungsreihe § 1008 wesentlich anders ergibt, als es in § 1016 auf Grund einer Rechnung angegeben wird, welche auf die einmal bestimmte Höhe der Atmosphäre fundirt ist. Andererseits hat *Bezold* aus Messungen der Höhe des am Osthimmel aufsteigenden dunkelen Segmentes direct gezeigt, dass jede folgende Messung eine grössere Höhe der Atmosphäre liefert als die vorhergehende. Hiermit ist der Grundfehler der alten, insbesondere der L.'schen Dämmerungstheorie *empirisch* festgestellt, nämlich dass *eine bestimmte Höhe* der Atmosphäre als maassgebend für den Verlauf der Erscheinung angesehen wird.

1010) Durch Versehen ist es diesmal unterblieben, die L.'sche Figur richtig zu stellen. Es ist *DA* der *krummlinige* Weg des Lichtstrahls, *DG* seine *Tangente in D*, *AE* seine *Tangente in A*; mithin fällt *G nicht auf den Kreis*.

1011) Die von hier ab gelöste Aufgabe, nämlich die Höhe der Atmosphäre aus einer *beliebigen* Höhe des Scheitels der primären Dämmerung zu berechnen, ist die *Verallgemeinerung* der Aufgabe § 1001, welche sich auf die *bestimmte* Scheitelhöhe $= 0$ bezieht.

1012) Man beachte, wie *Lambert* seinen schönen, Note 1000) erwähnten Satz zu verwenden weiss, die durch Refraction entstehende Parallaxe zu eliminiren, auf deren Bedeutung für die Mondbeobachtungen später zuerst *Hansen* hingewiesen hat (vergl. z. B. »Theorie der Sonnenfinsternisse«, S. 323, Art. 16), die aber bei der Atmosphäre viel beträchtlicher ist.

1013) Die Zahl 17 ist kein Druckfehler bei L., sondern ein Versehen L.'s.

§ 1017 bis 1023: Allgemeine Erwägungen. Maassgebend für den Verlauf der Erscheinung ist die Absorption des Lichts in der Atmosphäre und zweitens die Menge der Theilchen, welche man in einer bestimmten Richtung erblickt. *Bezold* hat auch durch Erörterung dieser zwei Umstände die Unrichtigkeit von L.'s Behandlung, welche lediglich die constante Höhe als maassgebend ansieht, plausibel gemacht. Eine mathematische Behandlung des Problems, die Lichtvertheilung in einer unvollständig beleuchteten Atmosphäre zu untersuchen, ist eine sehr dankenswerthe Aufgabe, die noch nicht gelöst ist. Es ist dabei erforderlich, sich auf eine erste Annäherung zu beschränken, was für die Dämmerungserscheinungen zugleich hinreichend sein dürfte.

§ 1024 bis 1029: Zahlenmässige Folgerungen aus der Theorie.

1024) Die Formel $1 \pm \cos a$ beruht auf der falschen Voraussetzung, dass das Himmelsgewölbe im Dämmerungslicht überall gleich hell erscheine.

Mit den Höhenangaben der Tabelle stimmten *Bezold*'s Messungen durchaus nicht. Die Tabelle hat übrigens mehrere Flüchtigkeitsfehler.

1025) Die Polhöhe von Augsburg (St. Ulrich) ist $48^\circ 21' 42''$. — Wegen der Thierkreiszeichen vergl. Note 997).

1029) Eigentlich müsste die Gleichung heissen

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = 0 .$$

Doch ist L.'s bequemere Form, welche $\sin z$ in der Klammer beibehält, zulässig.

Theil VI. Astrophotometrie.

Kapitel 1. Beleuchtete Kugel. Anwendungen auf den Mond.

§ 1030 bis 1038: Weggelassen bis auf § 1035, welcher den Hauptinhalt dieses Abschnittes angibt, nämlich, dass die Aufgabe speciell für den Mond erschwert wird a) durch *Bodenerhebungen*, b) durch *ungleiche Albedo* verschiedener Theile.

a) *Zöllner* hat, Phot. Unt. Theil 2, einen Satz aufgestellt, welcher die beleuchtete und dadurch selbstleuchtend gewordene Kugel durch einen Kreiscylinder ersetzt. Indem er sich nun die Unregelmässigkeiten auf der Mondoberfläche darstellbar dachte durch zahllose dächerartige, d. h. von zwei Ebenen begrenzte, langgezogene Vorsprünge, glaubte er auch diese umgestaltete Kugeloberfläche durch eine Cylinderfläche ersetzen zu dürfen, welche eine der Axe parallele Cannelirung trägt. Hierdurch wurde für die Beleuchtung durch eine Mondphase eine Formel abgeleitet, deren Constanten durch die Beobachtung bestimmt wurden und für welche er am Schluss des dritten Theiles eine Tafel mitgetheilt hat. Doch hat die Formel nur den Werth einer Interpolationsformel, da *Seeliger* auf die Fehler der Entwickelung eingehend hingewiesen hat (»Bemerkungen zu *Zöllner*'s Phot. Unt.«).

b) *Bouguer* (*Traité*, Buch 2, Abschn. 1, Art. 8) fand die Mitte des *mare humorum* fünf bis sechsmal so hell als die dunkele Stelle im *Grimaldi*. Noch weit grössere Helligkeitsunterschiede fand *Arago*. Man vergl. hierüber *Zöllner*, Phot. Unt., S. 276.

Der Begriff des *Mittelwerthes* der Reflexionsfähigkeiten, mit welchem L. sich hier beruhigt, darf nur dann eingeführt werden, wenn an jeder Stelle jede mögliche Albedo vorkommt. Im anderen Fall, welcher beim Mond zutrifft, ist ein Schluss von der Beleuchtung durch den Theil auf die Beleuchtung durch das Ganze mit Hilfe einer bestimmten Beleuchtungsformel (also etwa (2a), (2b) oder (2c) Note § 696 bis 702) überhaupt nicht möglich.

§ 1039 bis 1051: Mittlere scheinbare Helligkeit einer Kugel, d. h. die dem Beobachter zugewandte Beleuchtung, dividirt durch die scheinbare Grösse des hell erscheinenden Theiles der Kugel. Von Interesse ist nur der Ausdruck des Zählers, welcher der Messung zugänglich ist, während die mittlere scheinbare Helligkeit nur eine Fiction bedeutet.

Um die Constanten und Einheiten in der Entwickelung des

Ausdrucks für den Zähler q § 1041 bis 1045 richtig zu erhalten, erwägen wir: Ein Element df' des Mondes erhält von der Sonne, wenn J deren Intensität und s deren scheinbarer (wie hier immer, vom Mond aus gesehener) Halbmesser ist, wegen des Incidenzwinkels i' die Beleuchtung

$$J\pi \sin^2 s \cos i' .$$

Folglich wird nach Note § 766 bis 770, Formel (4a'), dieses Element df' selbstleuchtend mit der Intensität

$$J' = \frac{A}{\pi} \text{ mal } J\pi \sin^2 s \cos i' = AJ \sin^2 s \cos i' . \qquad (\alpha)$$

Es ist nun (Bezeichnung analog Note 37)) die scheinbare Helligkeit des Mondes $J_0' = J'$ und das scheinbare Flächenelement

$$d\varphi' = df' \cos \varepsilon' \frac{1}{r'^2}, \qquad (\beta)$$

wo r' die Entfernung des Mondes von der Erde bedeutet. Setzt man also im Ausdruck für die nach der Erde hingesandte Beleuchtung (Note 37))

$$\int J' \, d\varphi' \cos i'' ,$$

wo i'' der Incidenzwinkel auf der Erde ist, die Werthe (α) und (β) ein und in diesen wieder die *Lambert*'schen Werthe

$$\cos i' = \sin y \sin x \qquad (\S\ 1041)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos \varepsilon' &= \cos (y - a) \sin x \\ df' &= \varrho^2 \sin x \, dx \, dy \end{aligned}\right\} (\S\ 1042) ,$$

wo ϱ der wahre Halbmesser des Mondes ist, so erhält ein Element der Erde unter dem Incidenzwinkel i'' vom Mondelement df' die Beleuchtung:

$$\cos i'' \frac{\varrho^2}{r'^2} AJ \sin^2 s \sin^3 x \sin y \cos (y - a) \, dx \, dy \qquad (\S\ 1042)$$

und durch Integration wird, wobei man i'' constant halten darf, die von der ganzen Phase nach der Erde hin geschickte *Beleuchtung* =

$$\cos i'' \frac{\varrho^2}{r'^2} JA \sin^2 s \tfrac{2}{3} [\cos \alpha (\pi - \alpha) + \sin \alpha], \qquad (\gamma)$$

wo $ED = \alpha$ gesetzt worden ist. Diesen Winkel α bezeichnet man *jetzt*, z. B. *Seeliger* und *Müller*, als *Phasenwinkel*, während man *früher* $v = \pi - \alpha$ so zu bezeichnen pflegte, sodass der Ausdruck lauten würde

$$\cos i'' \frac{\varrho^2}{r'^2} JA \sin^2 s \tfrac{2}{3} (\sin v - v \cos v) . \qquad (\delta)$$

Diese Formeln (γ) und (δ) stimmen mit den zwei *Lambert*'schen für q (§ 1045 und § 1047) bis auf den Factor

$$\cos i'' \frac{\varrho^2}{r'^2} J,$$

wofür man, wenn σ der scheinbare Halbmesser des Mondes ist, schreiben kann

$$\cos i'' \sin^2 \sigma J .$$

Es ist also das L.'sche q = *Beleuchtung* auf der Erde, *dividirt durch diesen Factor*. Bei L.'s »mittlerer Helligkeit« ist diese Weglassung berechtigt, da man ja $i'' = 0$ und $J = 1$ setzen darf und $\sin^2 \sigma$ sich gegen einen gleichen Factor weghebt. Doch ist diese Feststellung wegen des Späteren erforderlich.

1048) Ist die Intensität der Sonne = 1, so ist auch ihre »mittlere Helligkeit« = 1, mithin η und 1 ohne Weiteres unter sich vergleichbar, *nicht* aber vergleichbar mit den *gemessenen Zahlen*. Denn *gemessen* wird nie etwas anderes als die Beleuchtung, welche der *Gesammtheit* der von Sonne oder Mond zur Erde hingesandten Lichtmenge proportional ist; und um die »mittlere Helligkeit« mit dieser vergleichbar zu machen, müsste man noch auf die scheinbare Flächengrösse Rücksicht nehmen. Wir können wegen Note § 1039 bis 1051 direct schreiben:

Beleuchtung durch die Sonne $= J\pi \sin^2 s \cos i''$

Beleuchtung durch den Vollmond $= J\pi \sin^2 s \cos i'' \cdot \tfrac{2}{3} A \sin^2 \sigma$,

mithin verhalten sich die gemessenen Grössen wie $1 : \tfrac{2}{3} A \sin^2 \sigma$, während sich die »mittleren Helligkeiten« verhalten wie $1 : \tfrac{2}{3} A \sin^2 s$. Dadurch, dass L. beide unter einander wirft, d. h. die »mittleren Helligkeiten« mit den gemessenen Grössen verwechselt, entsteht allerdings *hier*, wo σ und s nahezu gleich sind, kein Fehler; es macht jedoch dieser Umstand einen grossen Theil des folgenden Kapitels über die *Planeten* vollkommen werthlos.

Der Versuch *Bouguer*'s ist im *Essai*, erste Abtheilung, Artikel 7 mitgetheilt. Das Sonnenlicht wird dabei durch eine Concavlinse geschwächt. Wegen des Werthes $A = \frac{1}{4}$ vergl. die Note § 1075 bis 1078.

1050) $JA \sin^2 s$ ist die Intensität J', mit welcher der Punkt D selbstleuchtend geworden ist, also gleich dessen *scheinbarer* Helligkeit J_0'. Dies folgt, wenn man in Note § 1039 bis 1051 Formel (α) $i' = 0$ setzt.

Die mitgetheilte Tafel ist wegen früherer Bemerkungen werthlos.

§ 1052 bis 1055: Kleine Correctionen.

1053) Die richtige Verhältnisszahl zwischen den mittleren Entfernungen der Erde vom Mond und von der Sonne ist ungefähr 1 : 387. Es werden sich also L.'s Correctionen um kleine Beträge ändern, die jedoch gleichgiltig sind.

1054) Was L. mit dem Ausdruck »Kleinigkeiten« meint, geht aus § 1062 hervor.

§ 1056 bis 1063: Beleuchtung durch eine beleuchtete Kugel. Es folge eine etwas allgemeinere Darstellung. Man erinnere sich hierzu an die Bezeichnungen Note § 696 bis 702. Fällt demnach auf ein Element df' der Kugel ein Lichtstrahl von der *Dichtigkeit* $\varDelta$, so ist, wenn i' der Incidenzwinkel ist, die unter dem Emanationswinkel ε' *ausgesandte Lichtmenge* $= dq = \varDelta\, df'\, \varphi\,(i', \varepsilon')$ und das Element wird *in dieser Richtung selbstleuchtend* mit der scheinbaren Helligkeit $= J' = \varDelta\, \varphi\,(i', \varepsilon') : \cos \varepsilon'$. Aus diesen zwei Grössen lassen sich alle anderen in Frage kommenden bequem bilden, beispielsweise die *Beleuchtung*, welche ein drittes Element von dem beleuchteten Kugelelement erhält, indem man zu dq den Factor $\cos i'' : r'^2$ zufügt.

Führt man andere Coordinaten ein, nämlich die Länge ω auf einem Kreise, welcher durch die beiden Punkte geht, welche die Erde und die Sonne im Zenith haben, und zwar gemessen vom ersteren Punkt aus nach dem letzteren hin, und als andere Coordinate die Breite ψ, so ist

$$\cos i' = \cos \psi \cos (\omega - \alpha)$$
$$\cos \varepsilon' = \cos \psi \cos \omega$$
$$df' = \cos \psi\, d\omega\, d\psi \cdot \varrho^2,$$

wo α den Phasenwinkel und ϱ den Halbmesser der Kugel bedeutet. Hiernach ist die in der Richtung ε' *ausgesandte Lichtmenge* für die 3 in Note § 696 bis 702 erwähnten Formen von $\varphi\,(i', \varepsilon')$ nach Formeln (2) und (2a), (2b), (2c):

$$dq = \varDelta\, df'\, \frac{A}{\pi} \cos i' \cos \varepsilon' =$$

$$\varDelta\, \varrho^2\, \frac{A}{\pi} \cos^3 \psi \cos \omega \cos (\omega - \alpha)\, d\omega\, d\psi$$

$$dq = \varDelta\, df'\, \frac{B}{4\pi} \frac{\cos i' \cos \varepsilon'}{\cos i' + \cos \varepsilon'} =$$

$$\varDelta\, \varrho^2\, \frac{B}{4\pi} \cos^2 \psi\, \frac{\cos \omega \cos (\omega - \alpha)}{\cos \omega + \cos (\omega - \alpha)}\, d\omega\, d\psi$$

$$dq = \varDelta\, df'\, \frac{C}{2\pi} \cos i' = \varDelta\, \varrho^2\, \frac{C}{2\pi} \cos^2 \psi \cos (\omega - \alpha)\, d\omega\, d\psi.$$

Man denkt sich nun die Dimension der Kugel unendlich klein gegenüber den Entfernungen, d. h. man betrachtet, da ein anderer Fall in der Astrophysik nicht vorkommt, alle Strahlen, welche auf die verschiedenen Theile der Kugel auffallen, als einander parallel; und dasselbe nimmt man auch für die austretenden Strahlen an. Integrirt man dann zwischen den Grenzen $\omega = -90^\circ + \alpha$ und $\omega = +90^\circ$ sowie $\psi = -90^\circ$ und $\psi = +90^\circ$, so erhält man für die beim Phasenwinkel α von der Kugel *ausgestrahlte Lichtmenge*:

$$q = \varDelta\, \varrho^2\, A\, \tfrac{2}{3} \cdot \frac{\sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha}{\pi} \tag{A}$$

$$q = \varDelta\, \varrho^2\, B\, \tfrac{1}{8} \cdot \left[1 - \sin \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha \log \operatorname{cotg} \tfrac{1}{4}\alpha\right] \tag{B}$$

$$q = \varDelta\, \varrho^2\, C\, \tfrac{1}{2} \cdot \cos^2 \tfrac{1}{2}\alpha\,. \tag{C}$$

Für je den letzten Factor dieser 3 Formeln sei die nachstehende Uebersicht mitgetheilt, welche dazu dienen soll, den Verlauf der *Lambert*'schen Tabelle § 1059 (welche, um mit dem letzten Factor in (A) identisch zu werden, mit $\frac{3}{2}$ multiplicirt wurde) mit den Zahlwerthen der Formeln (B) und (C) zu vergleichen:

α	(A)	(B)	(C)
0°	1.0000	1.0000	1.0000
10	0.9853	0.9761	0.9924
20	0.9441	0.9254	0.9698
30	0.8808	0.8594	0.9330
40	0.8004	0.7840	0.8830
50	0.7080	0.7031	0.8214
60	0.6090	0.6198	0.7500
70	0.5080	0.5364	0.6710

α	(A)	(B)	(C)
80°	0.4099	0.4549	0.5868
90	0.3183	0.3768	0.5000
100	0.2364	0.3035	0.4132
110	0.1660	0.2363	0.3290
120	0.1090	0.1760	0.2500
130	0.0652	0.1237	0.1786
140	0.0343	0.0799	0.1170
150	0.0149	0.0453	0.0670
160	0.0045	0.0202	0.0302
170	0.0006	0.0051	0.0076
180	0.0000	0.0000	0.0000

Die Formel (A), die *Lambert*'sche, ist diejenige, mit welcher man seit *Seidel* und *Zöllner gewöhnlich* zu rechnen pflegt, die Formel (B) wurde durch *Seeliger* eingeführt und die Formel (C) wurde früher mehrfach, z. B. in dem *Smith-Kästner*'schen Werke (S. 382), auch später in nichtphotometrischen Schriften nicht selten benutzt, auch neuerdings erst wieder von *Parkhurst* (Annals of Harvard College obs., Vol. 18, No. 3) versuchsweise auf die Asteroiden angewandt.

Eine ausführliche Tabelle der Logarithmen der Reihe (A) gibt *Seidel* am Schlusse der Abhandlung »Untersuchungen über die Lichtstärke der Planeten«, und eine ausführliche Tabelle der Werthe (B) hat *Seeliger* am Schlusse der Abhandlung »Zur Theorie der Beleuchtung der grossen Planeten« mitgetheilt.

Ueber die zahlreichen Formeln, deren man sich *vor Seidel* da und dort bedient hat, vergl. *Zöllner*, Phot. Unt. S. XXVIII, Anmerkung; die *Bouguer*'sche wurde schon oben, S. 61 der Anmerkungen, erwähnt.

Die Formeln (A), (B) und (C) sind in dem Grade hypothetisch, in welchem die Natur der Function φ es ist, auf welcher sie beruhen. Sie können mithin nur den Werth von Interpolationsformeln beanspruchen; es hat sich aber keine von ihnen in unwidersprochener Weise streng bewährt. Bei dem einen Himmelskörper wird die eine, beim anderen eine andere sich den Beobachtungen besser anschliessen.

Auf die Natur des photometrischen Grundgesetzes lässt sich, wenn für den betreffenden Himmelskörper ein Gesetz für die von der Kugel ausgesandte Lichtmenge (also etwa (A)) durch die Beobachtungen bestätigt würde, nicht ziehen, da in der Function φ zwei, in den vorigen Gesetzen aber nur ein Argument auftritt.

Diese theoretische Frage zu entscheiden, ist die Beobachtung der *Lichtvertheilung in der Phase* erforderlich, welche in der That von 2 Argumenten, nämlich ω und ψ, abhängt. Es ist

$$J' = C_1 \cos i' \qquad = C_1 \cdot \cos\psi \cos(\omega - \alpha) \qquad \text{(a)}$$

$$J' = C_2 \frac{\cos i'}{\cos i' + \cos\varepsilon'} = C_2 \cdot [\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}(\omega - \tfrac{1}{2}\alpha)] \qquad \text{(b)}$$

$$J' = C_3 \frac{\cos i'}{\cos\varepsilon'} \qquad = C_3 \cdot \cos\alpha\,(1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\omega)\,. \qquad \text{(c)}$$

Doch liegen Beobachtungen in dieser Richtung nicht vor, wenn auch die eine Consequenz, dass für jede der 3 Formeln der vollbeleuchtete Rand scharf begrenzt, der andere verwaschen erscheint, mehrfach bestätigt wurde. Vergl. Astr. Nachr. Nr. 3095.

Die Lichtvertheilung bei der *Opposition* ist dagegen wieder nur ein negatives Kriterium, da nur *eine Variable* auftritt ($\cos\psi \cos\omega =$ cos der Winkeldistanz vom Centrum). Die Formel (a) gibt Abnahme der scheinbaren Helligkeit vom Centrum nach dem Rande hin, (b) und (c) geben gleichmässige scheinbare Helligkeit.

Die Entwickelungen L.'s im Text beruhen auf dem Umweg, zuerst mit Hilfe der ausgestrahlten Lichtmenge die »mittlere Helligkeit« und mit Hilfe dieser wieder eine mit der ausgestrahlten Lichtmenge proportionale Grösse zu bestimmen. Diese Grösse c, welche L. bestimmt, ist die *Intensität*, mit welcher ein von der *ausgestrahlten Lichtmenge* q normal beleuchtetes Element der Erde von der Albedo 1 *selbstleuchtend* wird. Bei senkrechter Incidenz ist nämlich die *Beleuchtung* eines Elements auf der Erde (vergl. z. B. Formel (A) dieser Note) gleich

$$\frac{q}{r'^2} = J\pi \sin^2 s \sin^2\sigma\, A\, \tfrac{2}{3} \frac{\sin\alpha + (\pi - \alpha)\cos\alpha}{\pi}, \qquad (\alpha)$$

wo r' die Entfernung des Mondes und in

$$\frac{\varrho}{r'} = \sin\sigma$$

σ den scheinbaren Halbmesser desselben bedeutet, und wo für $\varDelta$ der Werth desselben $= J\pi \sin^2 s$ gesetzt worden ist. Dieses Element wird aber nach Note § 766 bis 770 selbstleuchtend mit der *Intensität* $=$

$$\frac{\text{Albedo} = 1}{\pi} \text{ mal } \frac{q}{r'^2}$$

und dieser Ausdruck ist identisch mit L.'s Formel für c in § 1058.

1057) Es ist in

$$C = \frac{\text{Albedo} = 1}{\pi} \cdot J\pi \sin^2 S$$

$J = 1$ gesetzt worden. Betreffs der Constanten in c vergl. auch Note § 1039 bis 1051.

1059) Der Ausdruck »Beleuchtung« in der Tabelle statt »Intensität des selbstleuchtenden Elements« ist hier nicht gerade falsch, da es nur auf die Proportionalität ankommt.

1061) Da

$$C = \frac{a}{\pi} \cdot J\pi \sin^2 S\,,$$

so folgt für $J = 1$ dass $a = C : \sin^2 S$.

Es ist für mittlere Entfernungen

$$S = s = 32'\ 3''.6 \text{ nach Greenwicher Beob.}$$
$$\sigma = 31\ \ 5.7 \text{ nach Küstner.}$$

1063) Dass sich die Bodenerhebungen im Endresultat compensiren, weil man sich jedes Element der wahren Oberfläche an die ihm parallele Stelle der geometrischen Kugeloberfläche übertragen denken dürfe, ist im Allgemeinen nicht richtig. Denn findet eine solche Compensation bei einer bestimmten Phase (z. B. Vollmond) wirklich statt, so ist leicht zu sehen, dass bei anderen Phasen (z. B. erstes Viertel) die Abweichung um so grösser sein muss. Man erinnere sich auch der in Note § 1030 bis 1038 a) erwähnten Zöllner'schen Bemühungen.

§ 1064: Der Mond als spiegelnde Kugel. Die Constanten erhält man so wie L., wenn man die *Dichtigkeit* der Sonnenstrahlen beim Auffallen auf den Mond, d. h. *die Beleuchtung* eines zu den Sonnenstrahlen senkrechten Mondelements = 1 setzt. Es wird also in der Formel § 653 (vergl. auch Note dazu) $\Delta = 1$.

§ 1065 bis 1074: Der Mond im Erdlicht (aschfarbenes Licht des Mondes). Es war c die Intensität, mit welcher ein von der Mondphase senkrecht beleuchtetes irdisches Element selbstleuchtend wird; dem entsprechend ist $\varkappa$ die Intensität, mit welcher ein von der Erdphase senkrecht beleuchtetes Mondelement selbstleuchtend wird. Fällt das Licht schief ein, nämlich unter dem Incidenzwinkel i'', so wird jene Intensität

$= \varkappa' = \varkappa \cos i''$. Bezeichnet man dann mit $d\varphi''$ ein Element der scheinbaren Mondoberfläche, so bildet L. hier den Ausdruck

$$K = \frac{\int \varkappa' \, d\varphi''}{\int d\varphi''} .$$

1069) Die Bezeichnung c hat mit derjenigen § 1067 nichts zu thun; es ist vielmehr das c der Tabelle identisch mit dem η § 1046 und § 1057.

1072) Diese Art, die Albedo zu bestimmen, ist, abgesehen von den Zahlwerthen, formell schon deshalb nicht statthaft, weil der Begriff der Albedo nur beim *Lambert*'schen Grundgesetz anwendbar ist, und dieses hat für die Atmosphäre der Erde nach L.'s eigenen Ueberschlagsrechnungen keine Geltung.

§ 1075 bis 1078: Vergleichung des Mondlichts mit dem Kerzenlicht. Dasjenige, was L. hieraus berechnet, ist die »mittlere Helligkeit« des Vollmondes, verglichen mit der Intensität einer Kerze.

Gewöhnlich pflegte man später die *Beleuchtungen* zu vergleichen, welche einerseits der *Vollmond*, andererseits die *Sonne* oder die *Planeten* und *Sterne* unter gleichen Umständen auf der Erde erzeugen. Eine Aufzählung der bis dahin bekannten Vergleichungen findet man bei *Seidel* »Untersuchungen über die gegens. Helligkeiten etc.« Erwähnt seien hiervon und von späteren:

Bouguer (Essai I, 7) . . . . $\frac{\text{Sonne}}{\text{Vollmond}}$	= 300 000
Wollaston (Phil. Trans. Vol. 119) . . .	801 072
Bond (Mem. of the Amer. Acad. 1861) .	470 980
Zöllner (Phot. Unt. S. 105) erste Methode:	618 000
Zöllner (Phot. Unt. S. 110) zweite Methode:	619 600

Um für derartige Vergleichungen auch solche Beobachtungen verwerthen zu können, die in einer beliebigen Mondphase angestellt waren, bedurfte man einer Reductionsformel von der Beleuchtung durch die Phase auf die Beleuchtung durch die volle Scheibe. Hierzu verwendete *Zöllner* speciell für den Mond nicht die Formel (α) in Note § 1056 bis 1063, sondern die in Note § 1030 bis 1038 unter a) erwähnte Interpolationsformel. Indem er dann aus den beiden Gleichungen für die Beleuchtungen durch die Sonne und durch den Vollmond die Grösse J eliminirt und dann den Elevationswinkel der Mondberge $\beta = 52^\circ$ setzt, findet er die wahre Albedo des Mondes $= 0.1736$. Wegen der in Note § 1030 bis 1038 unter b) erwähnten sehr grossen Helligkeitsverschiedenheiten auf der Mondoberfläche glaubte er für die hellen Theile eine so grosse Albedo annehmen zu dürfen, welche mit seiner Ansicht, dass die hellen Stellen aus Schnee- und Eismassen beständen, in Einklang wäre. Man vergl. auch die folgende Note.

Kapitel 2. Anwendungen auf die Planeten.

Die Constanten der Reductionsformel. Man kann, welches auch das Grundgesetz sei, der Reductionsformel von der Phasenbeleuchtung auf die Opposition, die wir als durch die Beobachtungen bestätigt ansehen wollen, stets die Gestalt geben

$$\text{Beleuchtung} = J\pi \sin^2 s \sin^2 \sigma \cdot M \cdot f(\alpha) ,$$

wo M eine Constante und $f(0) = 1$ sein soll. Vergl. z. B. Note § 1056 bis 1063 Formeln (A), (B), (C) und (α). Dann bieten sich folgende Aufgaben:

1) Man vergleicht die Oppositionsbeleuchtung des Planeten mit der Beleuchtung durch einen Fixstern. Dann hat man ein Hilfsmittel zu entscheiden, ob das J der Sonne eine mit der Zeit veränderliche Grösse ist. Diese Frage ist seit *Seidel* theils verneint, theils bejaht worden.

2) Man vergleicht die Oppositionsbeleuchtungen zweier Planeten gegenseitig, nämlich

$$\begin{aligned} \text{einmal } & J\pi \sin^2 s_1 \sin^2 \sigma_1 \; M_1 \\ \text{und einmal } & J\pi \sin^2 s_2 \sin^2 \sigma_2 \; M_2 \end{aligned}$$

(wobei also die Function f für beide Planeten eine verschiedene sein darf). Dann kann man die gegenseitigen Verhältnisse der M bestimmen und es fand *Seidel* (Untersuchungen über die Lichtstärke der Planeten etc.), dass das M des Mars etwa den fünften Theil desjenigen von Venus, Jupiter und Saturn beträgt, woraus sich mit Sicherheit auf einen *verschiedenen* Oberflächencharakter des Mars gegenüber den anderen schliessen lässt. Aus der *Gleichheit* der M würde sich nichts schliessen lassen.

3) Ueber diese zwar eingeschränkte aber sichere Fragestellung ist *Zöllner* weit hinausgegangen. Selbst wenn die Beobachtungen ergeben haben, dass $f(\alpha)$ dem letzten Factor der Gleichung (α) Note § 1056 bis 1063 gleich ist, so folgt doch noch nicht, dass das Grundgesetz das Lambert'sche ist, nämlich

$$dq = \varDelta\, df' \, \frac{A}{\pi} \cos i' \cos \varepsilon' ,$$

mithin ist es auch noch nicht ausgemacht, dass man $M = \frac{2}{3} A$

setzen und A als Characteristicum einer Planetenoberfläche ansehen dürfe. Indem dies Zöllner gleichwohl that, fand er (Phot. Unt. S. 165):

Mars $A =$	0.2672
Jupiter	0.6238
Saturn	0.4981
Uranus	0.6406
Neptun	0.4648

und indem er diese Zahlen mit den entsprechenden Werthen irdischer Substanzen verglich, z. B.

Frisch gefallener Schnee $A =$	0.783
Weisses Papier	0.700
Weisser Sandstein	0.237
Thonmergel	0.156
Quarzporphyr	0.108
Feuchte Ackererde	0.079
Dunkelgrauer Syenit	0.078

glaubte er zu seinen bekannten im vierten Theile der Phot. Unt. ausgesprochenen Schlüssen über die Oberflächenbeschaffenheit der Planeten vordringen zu können. Eine formell einwurfsfreie Untersuchung dieser Art wäre nur möglich, wenn man eine zweite Interpolationsformel, nämlich für die Lichtvertheilung in der Opposition kennen würde, sodass es möglich wäre, die Beleuchtung durch die Kugelfläche auf eine Beleuchtung durch eine ebene, senkrecht bestrahlte und senkrecht ausstrahlende Scheibe zu reduciren; dieselbe wäre dann mit der Beleuchtung durch ein senkrecht bestrahltes und senkrecht ausstrahlendes irdisches Element allerdings vergleichbar. Man vergleiche auch die Bemerkungen *Seeliger*'s in der Schrift »Zur Photometrie zerstreut reflectirender Substanzen.«

Der Einfluss der ellipsoidischen Gestalt der Planeten auf die Beleuchtungsformel. *Seeliger* hat in der Abhandlung »Zur Theorie der Beleuchtung der grossen Planeten, insbesondere des Saturn« die Beleuchtungsformeln für das Rotationsellipsoid entwickelt und zwar einerseits unter Zugrundelegung der Formel (2a) Note § 696 bis 702 bis zur dritten Potenz des Phasenwinkels, was dort, wo Abplattungen auftreten, genau genug ist, andererseits streng für die Formel (2b). Es wird dann gezeigt, dass der Factor $f(\alpha)$ gegenwärtiger Note für eine genügend genaue Rechnung beim Ellipsoid sich ersetzen lässt im ersten Fall durch

$$\tfrac{3}{2}\cos\alpha\,(P\cos^2 A + R\sin^2 A)$$

und im zweiten Fall durch

$$(1 - \sin\tfrac{1}{2}\alpha\,\mathrm{tg}\,\tfrac{1}{2}\alpha\,\log\mathrm{cotg}\,\tfrac{1}{4}\alpha)\sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2}\sin^2 A}\,.$$

Dabei sind a und b die Halbaxen des Planeten, P und R sind 2 nur von der Abplattung abhängige Grössen und A ist die Elevation der Erde über dem Aequator der Planeten. Zur Berechnung der vorstehenden Ausdrücke sind für die vorkommenden Fälle am Schluss der Abhandlung Tafeln mitgetheilt.

Die geometrischen Verhältnisse des Saturnsystems (die physischen wurden Note Theil V, Kapitel 2 erwähnt) veranlassen weitere Complicationen dadurch, dass der Ring einen Theil des Saturnkörpers, dieser einen Theil des Ringes verdeckt, ferner durch den Schattenwurf des Ringes auf den Saturn und umgekehrt. Auch dieser Gegenstand ist durch *Seeliger* in der gleichen Abhandlung erledigt und die Reduction der Beobachtungen unter Vermeidung mechanischer Quadraturen durch Hilfstafeln erleichtert. Eine Zusammenstellung der Formeln, welche vollständig genug sein soll, um mit ihrer Hilfe die Seeliger'schen Tafeln benutzen zu können, findet man Astronomische Nachrichten Nr. 2881 (Bd. 121).

Soviel über die neuere Forschung. Jetzt zu Lambert.

§ 1079 bis 1086: Mittlere scheinbare Helligkeit der Planeten.

1080) Infolge dieses Irrthums von Lambert, welcher die »mittlere Helligkeit« als maassgebend ansieht, während in Wirklichkeit die Beleuchtung dasjenige ist, was mit dem Photometer gemessen wird, kann dem ganzen Kapitel nur allenfalls eine historische Bedeutung zuerkannt werden.

1085) *Lahire* lebte 1640 bis 1718. Er schrieb: »La gnomonique«, »Théorie des coniques«; betheiligte sich mit den Cassini an der Fortsetzung der Picard'schen Gradmessung. Das citirte Werk heisst: Tabulae astronomicae ex ipsis observationibus deductae, cum usu tabularum. Parisiis 1687—1702.

§ 1087 bis 1090: Der Phasenwinkel.

1087) Man berechnet den Phasenwinkel α gewöhnlich durch die Formel

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{(R + r' - r)\,(R + r - r')}{r\,r'}}\,,$$

wo R die Entfernung Sonne-Erde bedeutet. Doch lässt sich bei geeigneten Ephemeriden namentlich für die oberen Planeten die Rechnung wesentlich vereinfachen.

1089) Diese Zahlen sind mittlere scheinbare Helligkeiten, nicht Beleuchtungen.

§ 1091 bis 1101: Weggelassen ist der Versuch, die in § 1090 bezeichnete Aufgabe zu lösen. L. leitet eine Gleichung ab zwischen dem gesuchten Maximum der Elongation $= \omega$ und dem Winkel φ am äusseren Planeten zwischen der Tangente der Bahn und dem Radiusvector nach der Sonne. Der weitere Gang der Rechnung wird nur angedeutet und dann schliesst L. mit den Worten: »Wenn sich der Winkel auf einem kürzeren Wege nicht finden lässt, so wird ihn kaum Jemand auf diese Weise bestimmen.«

§ 1102 bis 1125: Weggelassen. L. sucht hier zu erklären, warum das mit dem blossen Auge angesehene Bild der Planeten grösser erscheint, als es geometrisch sein sollte. Hierbei wird mehrfach Bezug genommen auf das Werk von *Jurin: Essay upon distinct and indistinct vision*, welches in deutscher Umarbeitung, welche Kästner ebensowenig eine Uebersetzung wie einen Auszug nennt, der Smith-Kästner'schen Optik angehängt ist. *Jurin* erklärte die Erscheinung sehr ausführlich durch *ungenügende Accommodation*. Hierzu fügt aber *Lambert* von § 1115 ab noch 3 weitere Ursachen hinzu:

1) die Dämpfe in der Luft (§ 1119),
2) das Auge steht nicht absolut ruhig (§ 1120),
3) die benachbarten Fibrillen werden in Miterregung gezogen (§ 1121).

Wegen des letzten Punktes vergl. Note § 832 bis 834.

Die wirkliche Hauptursache ist jedenfalls die *Beugung* am Rande der Pupille. In der That zeigt man, dass der Durchmesser des Beugungscheibchens, welches von einem leuchtenden Punkt erzeugt wird, etwa 2 Minuten beträgt (erstes Minimum). Gleichwohl wird auch die »*Irradiation*« mitspielen. Da *Helmholtz* die letztere durch ungenaue Accommodation und bei genauer Accommodation durch monochromatische Abweichungen erklärt, während *Plateau* die Ansicht vertritt, dass die benachbarten Netzhautstellen physiologisch in Miterregung gezogen werden, so hat der weggelassene Abschnitt das Interesse, wohl aber nur dieses einzige, zu zeigen, wie diese beiden neueren Ansichten in denen von *Jurin* und *Lambert* ihre Vorläufer haben.

§ 1126 bis 1128: Die Beleuchtung durch einen Planeten.

1126) Führt man die hier angedeuteten, zum Theil sich gegenseitig aufhebenden Operationen durch, so gelangt man in der That auf die einfache Formel (α), Note § 1056 bis 1063:

$$\text{Normale Beleuchtung} = J\pi \sin^2 s \sin^2 \sigma\, A\, \tfrac{2}{3}\, \frac{\sin v - v \cos v}{\pi}$$

bis auf den Factor $J\pi$, welchen L. weggelassen hat.

1127) Die Formel der vorigen Note denkt sich L. hier so geschrieben (S = scheinb. Sonnenhalbm. von der Erde aus):

$$J\pi \sin^2 S\, \tfrac{2}{3}\, A \cdot \frac{\sin^2 s}{\sin^2 S} \cdot \sin^2 \sigma \cdot \frac{\sin v - v \cos v}{\pi}$$

und den ersten Factor (bis zum ersten Punkt) = 1 gesetzt, während der zweite Factor die aus § 1085 entnommene »centrale Helligkeit« gibt, welche also nicht mit der früheren (§ 1050) identisch ist. Statt des dritten Factors setzt L. quadrirte Secunden und der vierte ist hier = 1.

1128) Bei Mercur und Venus ist der letzte Factor falsch angebracht. Berichtigt man dies, so sind die L.'schen Zahlen für diese beiden Planeten mit $\frac{1}{2}$ zu multipliciren.

§ 1129 bis 1134: Der Widerspruch der Resultate mit dem Augenschein, d. h. bei Beobachtung mit dem blossen Auge. Dieser Widerspruch, den L. nicht zu lösen vermag, ist ein doppelter:

A) Hinsichtlich der *Reihenfolge* der am Schluss von § 1128 aufgeführten Beleuchtungen klärt er sich dadurch auf, dass L.'s Durchmesserwerthe zum Theil falsch sind. Es beträgt

	der scheinbare Durchmesser nach Lambert:	in Wirklichkeit:	
für ♄	18″	19″	Opposition
♃	46	46	Opposition
♂	30	17	Opposition
♀	30	26	Halberleuchtet.
☿	9	7	Halberleuchtet.

Beispielsweise sinkt bei *Mars* schon hierdurch die Lambert'sche Zahl für die Beleuchtung auf den dritten Theil ihres Werthes, und da nach Seidel die Albedo des Mars den fünften Theil derjenigen des Jupiter beträgt (Untersuchungen über die Lichtstärke der Planeten S. 52), so wird die Beleuchtung durch Mars in der That wesentlich kleiner als die durch Jupiter.

B) Hinsichtlich der *starken Verschiedenheit* der Zahlen klärt sich die Sache auf durch das *Fechner*'sche Gesetz, nach welchem man nicht die Zahlen, sondern die Logarithmen vergleichen darf. Nach Note § 265 bis 270 ist die empfundene Grösse

$$= x + \beta \log \text{Beleuchtung},$$

wo x und β Constanten sind. Wir legen nun L.'s Zahlen am Schluss von § 1128 zu Grunde und bestimmen β so, dass die Anzahl der Empfindungsstufen von Saturn bis Jupiter = 21 wird. Dann sind also

	die Beleuchtungen:	die empfundenen Grössen:
für ♄	1	$x + 0$
♃	22	$x + 21$
♂	108	$x + 32$
♀	307	$x + 39$
☿	97	$x + 31$

Die Constante x ist durch *eine* Schätzung der gegenseitigen Helligkeiten zweier dieser Planeten zu bestimmen. Da sie jedenfalls positiv ist, so sind die Zahlen in der That einander bedeutend näher gerückt.

1129) Als maassgebend erachtet also L. die mittlere Helligkeit des wahrgenommenen Bildes, d. h., wie in dem citirten aber weggelassenen Paragraphen erklärt wird, desjenigen Bildes, welches durch Mitschwingen der benachbarten Fibrillen entsteht (imago sensibilis zum Unterschied von imago depicta = geometrisches Bild).

1130) Mit den Zahlenwerthen des *Tycho*, wie sie Houzeau's Vademecum mitgetheilt sind, stimmen diese Angaben L.'s für die scheinbaren Durchmesser durchaus nicht überein.

1132) Der *arcus visionis* ist die Tiefe der Sonne unter dem Horizont beim ersten Aufleuchten des Sterns.

1134) Der arcus visionis ist um so kleiner, je weiter der Planet zur Zeit seines Unterganges infolge der veränderlichen Lage der Ekliptik vom Vertical der Sonne entfernt ist. Dies wird breit auseinandergesetzt in

§ 1135 und 1136, welche weggelassen sind.

Kapitel 3. Die Fixsterne.

Die Photometrie der Fixsterne, welche erst seit der Wiedererweckung der Photometrie durch Seidel und Zöllner entstanden ist, verfolgt zwei Ziele: I) die Ableitung eines Helligkeitskatalogs der Fixsterne, II) die Theorie der veränderlichen Sterne.

I. Das wissenschaftliche Endziel der **Helligkeitskataloge** liegt vorzugsweise auf rein astronomischem Gebiete und besteht darin, statt der nur beschränkt verwendbaren Parallaxenbestimmung aushelfend einzutreten und auch in anderer Weise zur Stellarastronomie Beiträge zu liefern. Deshalb ist es wohl kein Zufall, dass die hervorragende Pflege, welche der Herstellung von Helligkeitskatalogen in neuerer Zeit gewidmet worden ist, zeitlich mit der Aera der Zonenbeobachtungen zusammenfällt. Solche Helligkeitsverzeichnisse können angefertigt werden:

1) **durch directe Messung.** Erwähnt seien die Arbeiten von:

J. Herschel, dessen Resultate, jedoch vielfach verdächtigt worden sind,

Seidel, dessen sehr exacte Verzeichnisse einmal die *Fixsterne erster Grösse* (Bayer. Acad. Bd. 6, 1852), das zweite Mal *208 der hellsten Fixsterne* (ebendas. Bd. 9, 1863) umfassen,

Zöllner: Mehrere Hundert Fixsterne in den »Grundzügen einer allgem. Phot. des Himmels«.

Peirce (Photometric researches, Annals of Harvard College, Vol. 9, 1878).

Das Ziel, alle noch sichtbaren Sterne bis zur sechsten Grösse photometrisch zu bestimmen, wird verfolgt durch drei Arbeiten von:

Pickering (Annals of the Harvard College, Vol. 14),

Th. Wolff (Photometr. Beobachtungen an Fixsternen, Leipzig 1877, und ebenso Berlin 1884),

Pritchard (Uranometria nova Oxoniensis, in den Oxforder Astronomical observations),

2) **auf indirectem Wege** dadurch, dass man das ungeheure Material von Grössenschätzungen, welches in den astronomischen Katalogen der Fixsternpositionen niedergelegt ist, durch Umwandlung der Sterngrössen in photometrische Helligkeiten allgemein verwendbar macht. Hierzu bedarf man einer Beziehung zwischen Lichtstärke und Grössenklasse. Den Schlüssel hierzu gibt, worauf schon Fechner selbst hinweist, das *psychophysische Gesetz* desselben. Man schreibe mit Weglassung von H_0 die Hauptgleichung Note § 265 bis 270 so:

$$E = A \log C + A \log H ,$$

wo E die *empfundene*, H die *objective* Lichtstärke (nach L.'s

Ausdrucksweise: Beleuchtung) darstellt und A und C Constanten bedeuten. Dann ist

für die Grössenklasse m : $E_m = A \log C + A \log H_m$
für die Grössenklasse $m+1$: $E_{m+1} = A \log C + A \log H_{m+1}$
für die Grössenklasse $m+n$: $E_{m+n} = A \log C + A \log H_{m+n}$.

Nun ist, wenn wirklich die Zunahmen der Empfindungsstufen proportional sind den Zunahmen der Grössenklassen, $E_m - E_{m+n} = n(E_m - E_{m+1})$, mithin erhält man aus den vorigen 3 die folgenden 2 Gleichungen:

$$(E_m - E_{m+1}) = A \log \frac{H_m}{H_{m+1}} \qquad (\nu)$$

$$n(E_m - E_{m+1}) = A \log \frac{H_m}{H_{m+n}}$$

und hieraus durch Elimination der Klammer die Hauptgleichung

$$\log \frac{H_{m+n}}{H_m} = -n \left[\log \frac{H_m}{H_{m+1}}\right], \qquad (\text{n})$$

wo die eckige Klammer wegen (ν) eine Constante ist. Diese Gleichung dient, aus den gegebenen Grössenklassen $m+n$ und m das Helligkeitsverhältniss $H_{m+n} : H_m$ zu berechnen und umgekehrt. Zu Ueberschlagsrechnungen wählt man für die constante Klammergrösse die sog. *Pogson*'sche *Zahl*

$$\log \frac{H_m}{H_{m+1}} = 0.40\,, \quad \text{mithin} \quad \frac{H_m}{H_{m+1}} = 2.5\,,$$

welche zufällig die Eigenschaft hat: Numerus mal Logarithmus $= 1$, so dass

$$\frac{H_{m+1}}{H_m} = 0.40\,.$$

Schon lange vor der Entdeckung des Fechner'schen Gesetzes hatte *Steinheil* (Elemente der Helligkeitsmess.) die Gleichung (n) aufgestellt und auch die Klammergrösse bestimmt. Er fand dieselbe $= 0.45$. *Seidel* (Result. phot. Mess.) fand 0.46, *Johnson* (Radcliffe observations vol. 12) und *Pogson* (ebendas., vol. 15) fanden 0.38, *Peirce* nimmt 0.35 willkürlich an (Photom. researches) und verwandelt umgekehrt seine photometrischen Messungen mit Hilfe dieser Zahl in Grössenklassen. Aehnlich auch *Pickering*.

Für *Argelander's Uranometria nova*, deren Grössenangaben man in derselben Weise für die mit blossem Auge sichtbaren Sterne als maassgebend zu erachten pflegt, wie die der Bonner Durchmusterung für die telescopischen, hat *Th. Wolff* (Photometrische Beobachtungen an Fixsternen, Berlin 1884) die Zahl 0.37 abgeleitet und zugleich gefunden, dass diese Zahl nicht vollständig constant ist.

Die *Bonner Durchmusterung* wurde zuerst durch *Rosén* (Studien und Messungen an einem Zöllner'schen Astrophotometer, Petersburg 1869, aus dem Bulletin de l'Académie) bearbeitet, welcher für die Grössen der 5. bis 9. Klasse die Zahl 0.39 fand; später in eingehender Weise durch *Lindemann* (Photometrische Bestimmung der Grössenklassen der Bonner Durchmusterung, Petersburg 1889, Supplément II aux Observations de Poulkova). Er fand

für die Grössen:	$\log \frac{H_m}{H_{m+1}}$:
3 bis 5	0.29
5 und 6	0.30
6 und 7	0.39
7 und 8	0.39
8 und 9	0.44
9 und 9.5	0.79 .

Die letzte Zahl erklärt sich zwar durch die vielbesprochene Thatsache, dass die Bonner Grösse 9.5 auch viel schwächere Sterne umfasst, doch zeigt auch der Verlauf der anderen Zahlen, dass die Frage noch nicht endgiltig gelöst ist.

II. Die Theorie der veränderlichen Sterne. Die plausibelsten der aufgestellten Theorien sind

1) die von *Zöllner* (Phot. Unt. S. 252 fgde.) in den Grundzügen entworfene *Fleckentheorie*, welche durch *Bruns* (Bemerkungen über den Lichtwechsel der Sterne vom Algoltypus) ausgebildet worden ist. Das Resultat von Bruns ist, dass sich unendlich viele Fleckenvertheilungen angeben lassen, vermöge deren der rotirende Stern jeder beliebigen Lichtcurve Genüge leistet.

2) Die von *Pickering* (Dimensions of the fixed stars) für die Sterne vom Algoltypus vertretene *Trabantentheorie*, welche die Lichtabnahme durch Verfinsterung erklärt. Die mathematische Seite des Gegenstandes, insbesondere die Aufgabe, die Bahn des

Trabanten aus der Lichtcurve zu bestimmen, kann trotz mehrerer neueren Versuche nicht als erledigt betrachtet werden.

Von *praktischen* Arbeiten seien nur erwähnt: die *Schönfeld*'schen *Kataloge* und *Monographien*, die vielfachen Beobachtungen von *Pickering* in mehreren Bänden der Annalen des Harvard College, die umsichtigen Untersuchungen von *Safarik* (Ueber den Lichtwechsel einer Anzahl von Sternen, 1886, Böhm. Gesellschaft der Wissensch., Sitzungsberichte) und der ausführliche *Katalog* von *Chandler* (Astronomical Journal Nr. 179 u. 180), welcher für die Nomenclatur als Norm angesehen wird. Die Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft theilt jährlich Ephemeriden der veränderlichen Sterne mit.

Soweit die neuere Forschung.

§ 1137 bis 1141: Lambert's Ansichten über das Fixsternsystem. Dieser Abschnitt, obwohl nicht photometrisch, musste aufgenommen werden, weil man ihn häufig citirt findet. Uebrigens ist der Gegenstand weit ausführlicher erörtert in den *cosmologischen Briefen* Lambert's.

1137) Die *erste* Parallaxe, welche gefunden wurde, ist die von 61 Cygni $= 0''.31$ (Bessel 1838), die *grösste* Parallaxe, welche gefunden wurde, ist die von α Centauri $= 0''.92$ (Henderson und Maclear 1842 bis 1848). Diesen entsprechen in L.'s Ausdrucksweise 670 000 bezw. 220 000 Radien der Erdbahn. Man bemerke übrigens, dass L. unter *Parallaxe* das Doppelte dessen versteht, was man heute so nennt.

Der Versuch von *Huyghens* steht im *Cosmotheoros* (Buch 2, S. 136). Es wurde die Lichtstärke der Sonne mit der des Sirius verglichen, indem ein äusserst kleiner Theil der Sonnenoberfläche durch ein weit vom Auge in einem Schirm befindliches sehr kleines Loch betrachtet wurde.

1138) Die Schrift von *Cheseaux* heisst: Traité de la Comète qui a paru en 1743 et 1744. Lausanne et Genève 1744. Hier findet sich auch eine solche Abschätzung der Entfernung der Fixsterne erster Grösse, wie sie L. in § 1142 bis 1152 mittheilt.

Die Extinction des Fixsternlichts im Weltraum, welche mit den interessantesten Fragen der Stellarastronomie zusammenhängt, ist später mehrfach erörtert worden, z. B. von *Olbers* und *Steinheil*, am ausführlichsten wohl von *F. G. W. Struve* in den Études d'Astronomie stellaire, St. Pétersbourg 1847. Struve findet

$$\text{Lichtstärke} = 0.990651^x,$$

wo x die Entfernung bedeutet, gemessen in Einheiten der Entfernung der Fixsterne erster Grösse. Als Factor kommt natürlich $1 : x^2$ hinzu.

1139) Mit dem unklar ausgesprochenen Schlusssatz soll gesagt sein, dass die kugelförmige Anordnung nur dann zugestanden werden kann, wenn die Dichtigkeit der Sterne eine sehr ungleichmässige ist.

1140) Die L.'sche Vorstellungsweise ist hier nicht weiter ausgeführt. Lambert unterscheidet: Systeme *erster* Ordnung, z. B. die Sonne und ihre Planeten, Systeme *zweiter* Ordnung, welche Glieder des Milchstrassensystems sind, Systeme *dritter* Ordnung, z. B. die Milchstrasse, Systeme *vierter* Ordnung u. s. w. Als ein muthmaassliches System dritter Ordnung, also der Milchstrasse coordinirt, sieht er den Orionnebel an. Für unser System zweiter Ordnung vermuthet er einen an Masse derart überwiegenden Körper, dass die Bewegungen sich in derselben Weise vereinfachen wie im Planetensystem der Sonne. Dieser Körper ist dunkel und es kann sich seine Existenz durch die Störungen verrathen, welche er auf die Bewegung der Planeten um die Sonne ausüben wird.

§ 1142 bis 1152: **Abschätzung der Entfernung der nächsten Fixsterne.**

1144) Da L. hier die Beleuchtungen durch den Fixstern und den Planeten einander gleichsetzt, so ist seine Untersuchung hier frei von den Folgen der in früheren Noten mehrfach betonten falschen Anschauung, welche die »mittleren Helligkeiten« als maassgebend ansieht. Die Ausdrücke »scheinbare Helligkeit und Grösse« beziehen sich hier auf das zerstreute Netzhautbild.

1145) Bei der *Entwickelung* der ersten Hauptgleichung, die man übrigens durch Gleichsetzung der früher abgeleiteten Beleuchtungsformeln direct hätte hinschreiben können, sind constante Factoren weggelassen, die sich aber in der resultirenden Gleichung wegheben.

1148) $1'' = 60''' = 60 \cdot 60''''$.

1152) Es hat also die auf sehr hypothetischen Voraussetzungen (Grösse = Sonne, Intensität = Sonne, $A = \frac{1}{7}$) beruhende Schätzung ein Resultat (Entfernung = 500 000, Parallaxe = $0''\!.4$) ergeben, welches mit den heute bekannten Parallaxenwerthen so gut stimmt, wie es von einer Schätzung zu erwarten ist.

Theil VII. Die Farben und der Schatten.
Kapitel 1. Die Farben.

Die Aufgabe der Farbenphotometrie besteht darin, anzugeben, nach welchen Gesetzen Lichtintensitäten verschiedener Farbe gegenseitig vergleichbar sind. Dieser ganze Zweig steht heute noch in den ersten Anfängen, da es sich doch zuerst um die Feststellung der Gesichtspunkte handeln muss, rücksichtlich deren man *verschiedene Qualitäten* vergleichen will. Erwähnt seien also nur kurz:

Fraunhofer's *Intensitätscurve* (Bestimmung des Brechungs- und Farbenzerstreuungs-Vermögens verschiedener Glasarten, Gesammelte Schriften, herausgegeben von Lommel, München 1888, S. 21), welche für die Ablenkungen durch ein Prisma als Abscissen den Leuchtwerth der einzelnen Farben als Ordinaten nachweist.

Purkinje's *Phänomen* (Zur Physiologie der Sinne, Bd. 2, 1825): Schätzt das Auge eine blaue und eine rothe Fläche gegenseitig gleich hell, so wird bei gleichmässiger äusserer Abschwächung das blaue Licht intensiver erscheinen, bei Verstärkung das rothe.

Helmholtz' Untersuchungen in der *zweiten* Auflage der physiologischen Optik über die Verallgemeinerung des Fechnerschen Gesetzes bei Rücksicht auf die Young-Helmholtz'sche Hypothese der Lichtempfindung und über die Consequenzen.

§ 1153 bis 1172: Weggelassen. Der Inhalt ist: So oft ein Lichtstrahl an der Trennungsfläche zweier Medien nach dem Einfallsloth hin gebrochen wird, würde aus *Newton*'s Hypothese über das Wesen des Lichts für das zweite Medium eine grössere Fortpflanzungsgeschwindigkeit folgen. Hieraus ergibt sich mit Rücksicht auf die Verschiedenheit der Brechungsexponenten der verschiedenen Farben, dass im dichteren Mittel die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der verschiedenen Farben eine verschiedene ist (§ 1157 bis 1159). Dagegen ist nach *Euler*'s Hypothese für den vorigen Fall die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im zweiten Mittel kleiner (§ 1060). Doch glaubt *Lambert*, dass die Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten verschiedenfarbigen Lichts nicht bedeutend genug sei, um *hiermit* das Wesen der verschiedenen Farben begründen zu können.

§ 1173 bis 1181: Versuche über die Albedo homogenen Lichts.

1173) Dieser Versuch ist werthlos. Da die eine der zu vergleichenden Farben durch das Prisma, die andere direct gesehen wird, so wäre zuvor der photometrische Einfluss des Prismas zu erörtern. Es ist aber die dioptrische und die photometrische Theorie des Prismas erst von *Helmholtz* gegeben worden (Wiss. Abhandlungen, 2. Bd., S. 164 fgde.). Ueberdies complicirt sich die Sache hier dadurch, dass sich die verschiedenen prismatischen Bilder übereinander lagern. Von diesen Einwänden ist der folgende Versuch bei richtiger Anordnung frei.

1177) Nicht in J sondern in H sind die grünen Strahlen dichter als die anderen, da sich die Strahlen kreuzen. Aehnliches gilt für § 1179.

§ 1182 bis 1197: Weggelassen. § 1182 und 1183 zeigen, wie man auf Grund der zwei ersten Kapitel des zweiten Theiles den Versuch variiren kann; § 1185 bringt selbstverständliche Cautelen; Versuch § 1187 ist ähnlich dem Versuch § 1173, also zu ungenau. In Versuch 38 bis 40, § 1190 bis 1197 folgen drei Methoden, um Farbenmischungen herzustellen. Da der Farbstoff niemals genannt wird, so fehlt den Versuchen ein positives Interesse.

§ 1198 bis 1217: Mathematischer Ausdruck für die Albedo gemischten Lichts.

1199) Statt *Gattung der Strahlen* braucht L. hier und mehrfach den Ausdruck *vis*. Er scheint sich aber hierunter nicht die vis deflectens = Quadrat des Brechungsexponenten — 1 gedacht zu haben, was noch ziemlich präcis wäre, sondern jene für die verschiedenen Farben charakteristische vis, qua percutiuntur fibrillae.

1204) Da ein grosser Abschnitt des zweiten Theiles weggelassen ist, so muss bemerkt werden, dass dieses Citat auf Irrthum beruht.

1206) Natürlich meint L. nicht das Verhältniss, sondern das *umgekehrte* Verhältniss.

1207) Die falsche Nummerirung der Paragraphen musste der Citate wegen beibehalten werden.

1209) Die hier mitgetheilte Hauptformel hat freilich nur theoretischen Werth. Praktisch treten die Schwierigkeiten der Vergleichung verschiedenfarbigen Lichts doch wieder auf.

1217) In der *Pyrometrie* habe ich eine Stelle, welche sich auf die vorliegende beruft, nicht aufgefunden. Vielleicht ist der dritte Theil gemeint, welcher von der Mittheilung der Wärme handelt, und wo L. dem damals noch nicht aufgestellten Begriff der specifischen Wärme sehr nahe kommt.

Kapitel 2. Der Schatten.

§ 1218 bis 1219: Weggelassen. Inhaltlos.

§ 1220 bis 1222: Definitionen. Es ist jetzt die Formel Note 37) für die Beleuchtung eines Elementes df' durch ein scheinbares Element $d\varphi$ oder ein scheinbares Flächenstück φ, nämlich

$$dL' = J \cdot \cos i' \cdot d\varphi \quad \text{oder} \quad L' = \int J \cdot \cos i' \cdot d\varphi$$

dahin näher zu bestimmen, dass statt des Factors $\cos i'$ jedesmal dann der Factor 0 zu setzen ist, wenn $\cos i'$ negativ wird, und dass statt des Factors $d\varphi$ jedesmal dann der Factor 0 zu setzen ist, wenn die gerade Verbindungslinie von $d\varphi$ und df' einen undurchsichtigen Körper durchschneidet. Im ersten Fall sagt man: das Element df liege im *Schatten* schlechthin, im zweiten Fall: df' liege im *Schlagschatten.* Im letzteren Fall redet man von *Kern-* oder von *Halbschatten*, jenachdem die scheinbare Fläche φ ganz oder theilweise bedeckt ist. Dann ist L', im oben bezeichneten Sinne genommen, die *Beleuchtung* von df' im Halbschatten. Mit diesem letzten Satz sind alle einschlägigen Aufgaben implicite gelöst.

§ 1223 bis 1225: Erstes Beispiel.

1224) Die Rechnung ist unrichtig, da die mittlere Helligkeit aus der *ganzen* Himmelshalbkugel bestimmt ist, aber auf einen *Theil* derselben angewandt wird. Der Fehler würde sich nur dann wegheben, wenn das Himmelsgewölbe überall mit der gleichen Intensität leuchten würde, was nach L.'s eigenen früheren Rechnungen nicht der Fall ist. — Unter Helligkeit des Feldes ist die Intensität verstanden, mit welcher dasselbe selbstleuchtend geworden ist.

1225) In dem durch Worte ausgesprochenen Lehrsatz fehlt der Factor $\frac{1}{2}$.

§ 1226 bis 1230: Zweites Beispiel, weggelassen. Wie das vorige, doch *zwei* Mauern.

§ 1231 bis 1232: Anknüpfung an § 913 bis 915.

§ 1233 bis 1240: Die Mondfinsterniss.

1234) Man erhält die erste Gleichung, welche häufig auftritt, z. B. als Bedingungsgleichung bei der Vorausberechnung der Mondfinsternisse, viel einfacher, wenn man (am besten an einer viel einfacheren Figur) mit den *Halb*messern rechnet und statt des Punktes T, so oft er bei L. als Scheitel eines Winkels auftritt, das *Centrum* der Erde D setzt. Die Gleichung lautet:

Scheinbarer Halbmesser des Halbschattens = Scheinbarer Halbmesser der Sonne,
+ Mondparallaxe,
+ Sonnenparallaxe.

Dazu kommt die zweite Gleichung:

Scheinbare Breite des Halbschattens = Scheinbarer Durchmesser der Sonne.

1236) Denkt man sich eine Ebene, welche durch das Centrum des Mondes gehend auf der Richtung Sonne-Erde senkrecht steht, so berechnet L. die Lichtmenge, welche auf ein Element der Mondprojection in dieser Ebene auffällt, indem er stillschweigend annimmt, dass diese auch derjenigen Lichtmenge proportional sei, welche der Mond nach der Erde hin ausstrahlt. Wegen der kugelförmigen Gestalt des Mondes kommt aber für jedes Oberflächenelement der Incidenzwinkel, welcher hier gleich dem Emanationswinkel ist, nach Maassgabe der Function φ Note § 696 bis 702 in Frage. Demnach wäre *Lambert's* Rechnung in Uebereinstimmung mit den Formeln (2b) und (2c) jener Note, aber gerade *nicht* mit der Formel (2a), welches die Lambert-sche Formel ist. Es schwebt also von Lambert's eigenem Standpunkt aus von hier ab das Folgende in der Luft.

Die Aufgabe complicirt sich, wenn sich der Beobachter auf einem vierten Punkt, also ausserhalb des schattenwerfenden Körpers befindet. Dieser Fall tritt ein bei den Jupiterstrabanten. Da nämlich der gewöhnlich beobachtete Moment des Verschwindens des Trabanten im Schatten ein durch verschiedene Umstände unsicher gemachtes astronomisches Datum bezeichnet, so hat *Cornu* den Vorschlag gemacht, die Trabanten während der Dauer der Lichtabnahme möglichst oft photometrisch zu messen. Kennt man dann den *analytischen Ausdruck* für die Lichtstärke in jedem gegebenen Moment der Verfinsterung, so kann man umgekehrt genau den Zeitpunkt bestimmen, in welchem sich der Trabant in einem gewissen Stadium der Verfinsterung befand, beispielsweise den Augenblick, in welchem sein Mittelpunkt durch die Fläche des Tangentenkegels ging, welcher vom Centrum der Sonne aus an das Jupitersphäroid gelegt ist. Dieser analytische Ausdruck, neben den anderen erforderlichen Hilfsmitteln, ist abgeleitet in der Schrift: *Anding, Photometrische Untersuchungen über die Verfinsterungen der Jupiterstrabanten* und zwar unter Zugrundelegung des *Lambert'*schen photometrischen Gesetzes. Man vergleiche zur Erweiterung der vorliegenden Lambert'schen Aufgabe die Artikel 1, 3 und 4 dieser Schrift.

1239) Die Mondparallaxe ist nach Hansen: 57′ 0″.

1240) Die Tafel gibt nicht $AKvL$, sondern $1 - AKvL$.

§ 1241 bis 1243: Die Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen. Um dem von L. erwähnten Umstand rücksichtlich des Kernschattens Rechnung zu tragen, pflegt man bei der Berechnung der Mondfinsternisse für die Connaissance des Temps zum Erdhalbmesser den von *T. Mayer* herrührenden empirischen Factor $\frac{61}{60}$ hinzuzufügen. Man vergl. über den Gegenstand, der in neuerer Zeit viel besprochen worden ist, die beiden Schriften: *Brosinsky*, *Ueber die Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen*, Berlin, und *Hartmann*, *Die Vergrösserung des Erdschattens bei Mondfinsternissen*, Leipzig 1891.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.