Beschreibung und Gebrauch der logarithmischen Rechenstäbe

in Auflösung

aller zur Proportion/ gemeinen und sphärischen Trigonometrie gehörigen

Rechnungen

und in Vorstellung

unzähliger

mathematischen Tabellen

als eine Verbesserung des Scheffeltischen Pes mechanicus und des Bilerischen Universal-Instrumentes

entworfen von

J. H. Lambert.

AUGSBURG,

bey Eberhard Kletts sel. Wittib/ 1761.

Vorbericht

Gegenwärtige kleine Abhandlung hatte ich eigentlich zu einer Sammlung kleiner mathematischer Schriften gewiedmet und derselben bereits noch verschiedene andere abgekürzte Rechnungs-Arten beygefügt, welche aber hier eben so wie die sonst dazu gehörende Kupferblatte weggeblieben sind.

Der Grund dieses geänderten Entschlusses mag den Liebhabern der hier beschriebenen Stäbe zu mehreren Vortheile dienen, da sich der vortrefliche *Mechanicus* zu Augsburg, **Herr G. F. Brander**, da er meine Beschreibung gesehen, seiner andern wichtigern mechanischen Beschäftigung ungeacht, selbsten die Mühe genommen, die zu Bestimmung jeder Theilungspuncten behörige Anstalten vorzukehren, damit sie auf eine bequemere Art auf Holz oder Metall getragen, und daher die Stäbe den Liebhabern nach Belieben ausgefertigt werden könnten. Ihre Länge ist von 4 Schuhen, damit sie desto bequemer würden. Was demnach in dieser

Abhandlung bey der Beurtheilung ihrer Genauigkeit von Decimallinien gesagt wird, da die Stäbe von 5 Schuhen angenommen worden, wird sich ebenfalls auf die von 4 Schuhen anwenden, wenn man Duodecimallinien verstehen will.

Da hiedurch Liebhaber diese Stäbe in *natura* haben können, so ist die Figur, die dennoch nur klein gewesen wäre, denselben überflüßig. Andere können sie in Scheffelts *Pes Mechanicus* finden, oder sie sich aus den logarithmischen Tabellen entwerfen, um sich die Vorstellung von ihrem Gebrauche zu erleichtern. Was diese Stäbe vorzüglichers und bequemers an sich haben, und wie weit ihre Genauigkeit reicht, ist aus der Abhandlung selbst zu ersehen.

Logarithmische Rechenstäbe.

§. 1.

Die Beschwerlichkeit mit grossen Zahlen zu multipliciren und zu dividiren hat, ausser den logarithmischen Tabellen, die Erfindung von vielerley Rechenmaschinen und andern Instrumenten veranlaßt, dadurch man gesucht hat, die Arbeit abzukürzen. Man findet dieselben hin und wieder, ins besondere aber in Leupolds Theatro Machinarum fast alle beysammen beschrieben. Was aber bey allen noch mangelt, ist, daß sie die Vortheile nicht gewähren, die man von einem wirklich brauchbaren Recheninstrument hoffen sollte. Um dieses zu zeigen, wollen wir anmerken, daß sie sich in zwo Hauptclassen abtheilen. Die ersten, welche in eigentlichem Verstande Maschinen heissen können, sind so eingerichtet, daß sie das Product oder den Quotienten genau, und mit eben denen Zahlen angeben, welche man findet, wenn man das Exempel selbsten in Zahlen berechnet. Ihre Einrichtung gründet sich auf das Zahlengebäude, und auf die mechanische Art, wie in dem multipliciren und dividiren eine Zahl nach der andern herfürgebracht wird. In so ferne sie also der Genauigkeit ein völliges Genügen leisten, kann man sie in ihrer Art als vollkommen ansehen, allein dieses macht sie noch lange nicht bequem, weil sie bey jedem Exem-

Exempel wieder müssen so gestellt werden, daß die vorgegebene Zahlen darauf stehen, und dieses fodert fast immer eben so viele Zeit, als man gebraucht, um das Exempel selbsten zu rechnen. Man giebt die Leibnitzische als die vollständigste an, ungeacht ich nicht glaube, daß jemand sich dieselbe nach ihrer völligen Structur vorstellen könne, weil Leibnitz in seiner Beschreibung nur angegeben, wozu sie dienen sollte, nicht aber wie er sie innwendig zu dieser Absicht einrichten wollen. Und wenn sie auch wirklich zu Stand gebracht worden wäre, so würde sie vielmehr eine neue Probe von der Grösse seines Geistes, als aber wirklich bey dem Gebrauche bequem gewesen seyn. Man kann von den andern Maschinen, so man in dieser Absicht ausgesonnen, eben dieses Urtheil fällen. Wenigstens hatte es immer eine ziemliche Uebung erfordert, um ein Exempel geschwinder zu berechnen, als man es mit Zahlen thun kann, besonders wenn man die Vortheile weiß, die die Rechnung abkürzen und die sich auf die besondern Eigenschaften jeder Zahl und auf ihre Verhältnisse zu andern Zahlen gründen.

§. 2. Die zweyte Art betrift die Instrumente, die man zur Abkürzung der Rechnungen ausgesonnen. Da die beschwärlichen Rechnungen das Multipliciren, das Dividiren und das Ausziehen der Wurzeln sind, welche man vermittelst der Logarithmen so leichte zu Ende bringt, so hat man auch zeitig angefangen, die Logarithmen auf Instrumente zu bringen, um auch noch der Mühe des Aufschlagens und des Ausschreibens überhoben zu seyn. Schon zu Ende des vorigen Jahrhunderts hat Biler damit den Anfang gemacht, und seine Erfindung unter dem Titel eines mathemathischen Universalinstrumentes beschrieben. Da er zugleich dieses Instrument zum Feldmessen gebrauchen wollte, so gab er ihm die Gestalt eines halben Circuls, und zeichnete auf dem Umkreise die Zahlen, Sinus und Tangenten, wo ihre Logarithmen hätten stehen sollen.

Scheffelt

Scheffelt brachte hierauf eine ähnliche Eintheilung nebst noch andern auf einen Stab, dessen Länge ein Rheinländischer Schuh ware, und beschrieb die Aufgaben, die damit konnten aufgelößt werden in einem weitläufigen Quartbande, dem er den Titel: Pes Mechanicus vorsetzte. Gunter ein Engelländer hat hiezu eine logarithmische Meßleiter ausgesonnen, und überhaupt ist es leicht den Logarithmen noch andere Gestalten zu geben, wie wenn man zum Exempel Spirallinien dazu gebrauchen will.

§. 3. Es ist unstreitig, daß die Rechnung mit solchen Instrumenten sehr kurz und leicht ist. Allein, da sie eine bestimmte Grösse haben, so läßt sich die Rechnung nicht bis auf kleine Theile genau machen, und bey jedem Instrumente muß man aus seiner Grösse bestimmen, wie weit die Rechnung zuverläßig seye. So stehen auch hierinn die Genauigkeit und Bequemlichkeit einander im Wege. Die erstere befindet sich bey den Maschinen, aber sie sind unbequem; die Instrumente sind bequem, aber sie geben nicht die höchste Schärfe. Solle man hierinn eine Wahl treffen, so wird sie dennoch auf die Instrumente fallen. Die Genauigkeit bey den Maschinen hat keinen Vorzug, so lange man die Rechnung nicht kürzer machen kann, als wenn man sie selbsten macht. Hingegen giebt es unzählige Fälle, wo man eben nicht die gröste Schärfe sucht, und mit derjenigen, die die Instrumente geben, zufriden seyn kann. Und in eben diesen Fällen ist die Bequemlichkeit eine Hauptabsicht. Was man nicht sehr genaue zu wissen verlangt, muß gar nicht mühsam gesucht werden, und der leichteste Weg ist hiebey der beste.

§. 4. Diese Betrachtungen bestimmen den Entwurf gegenwärtiger Abhandlung. Da ich vor 8. Jahren auf die Biletische Beschreibung des Universalinstruments gefallen, so bemerkte ich gleich, daß die Genauigkeit bey demselben sehr geringe wäre. Ich veränderte daher seine halben Circul in zween Stäbe von 4 Schuhen lang, und fande, daß man damit jede Zahl bis auf ihren 1000ten oder 2000ten Theil berechnen konnte. Dieses ist in unzähligen Fällen zureichend, und ich hatte eine geraume Zeit diese Stäbe als eine neue Verbesserung des Bilerischen Instrumentes angesehen. Als ich hierauf Scheffelts Werke zu sehen bekam, so sahe ich zwar, daß er mir darinn zuvorgekommen, aber meine Stäbe behielten dennoch einen gedoppelten Vorzug. Denn weil sie viermal länger waren, so waren sie auch viermal genauer, und weil ich zween Stäbe gebrauchte, die gleiche Eintheilungen hatten, so fande ich sie auch in diesem Stücke ungleich bequemer, weil ich damit auf einmal ganze Tabellen vorstellen konnte, da hingegen Scheffelt statt des andern Stabes einen Handcircul gebrauchen mußte. Die vier Hauptlinien, welche ich die Arithmetische, die Geometrische, die Sinus und Tangenten benennt habe, und sie allein auf meinen Stäben angebracht hatte, schienen mir zureichend, und ich werde sie daher auch in gegenwärtiger Beschreibung alleine beybehalten.

§. 5. Um die Verfertigung dieser Stäbe kurz zu beschreiben, so nimmt man zween Stäbe, die gleich lang, und deren Seiten gleich breit sind, und genau rechte Winkel mit einander machen. Sie können von Metall oder von Holz seyn, und die Eintheilungen entweder darauf gestochen, oder, wenn sie mit Papier überzogen sind, darauf mit der Feder gezeichnet werden Alles dieses fordert die äusserste Genauigkeit, weil man sich darauf in allen Rechnungen muß verlassen können. Die Länge der Stäbe mag 4 und 5 Schuhe seyn, will man sie noch länger machen, so ist es noch besser. Man muß aber auf den Raum sehen, den sie einnehmen, daß sie eben nicht das ganze Zimmer ausfüllen. In der Beurtheilung ihrer Genauigkeit werden wir sie von 5 Schuhen annehmen.

§. 6. Beyde Stäbe werden auf eine gleiche Art eingetheilt, nur muß man die Eintheilung an dem einen zur Rechten an dem andern zur Linken machen, weil sie genaue an einander passen müssen, wenn man den einen Stab an den andern legt.

§. 7. Man fängt bey der Arithmetischen Seite an, und theilt sie in 20 gleiche Theile, und jeden derselben wieder in 100 andere wirklich ein. Alle diese Theile werden sich gar wohl noch zeichnen lassen. Denn wenn der Stab 5 Schuhe lang ist, so hat seine Länge 500 Decimallinien, und daher wird ein Theil $\frac{1}{4}$ Decimallinie haben. Man kann also noch kleinere Theile darauf unterscheiden.

§. 8. Da die Zahlen hier in Arithmetischer Progression fortgehen, und gleiche Zwischenräume haben, so habe ich sie die Arithmetische Seite genennt. Es ist klar, daß man vermittelst derselben addiren und subtrahiren kann. Hier aber sind diese Zahlen Logarithmen, und in dieser Absicht dienen sie zur Eintheilung der übrigen Seiten.

§. 9. Die andere Seite ist die Geometrische, weil ihre Zahlen mit den Zahlen der ersten Seite verglichen, in geometrischer Progression fortgehen. Da der Logarithmus von $1 = 0$, und der von $100 = 2$. ist, so fängt diese Seite von 1 an, und geht bis 100. Um ihre Eintheilung zu machen, so legt man die Arithmetische Seite des andern Stabes an dieselbe. Man schlägt so dann in den Logarithmischen Tabellen die Logarithmen von jeden Zahlen 2, 3, 4, 5 --- 100. und ihren Decimaltheilen auf. Diese Logarithmen werden auf der Arithmetischen Seite aufgesucht, und der Punct, so auf der geometrischen Seite daran

 liegt,

liegt, gezeichnet, und die Zahl hingeschrieben. Die Eintheilung dieser Seite von 1 bis 10 und die von 10 bis 100 sind einerley, weil überhaupt auf derselben die Zahlen, so einerley Verhältniß haben, gleich weit von einander abstehen. Diese Art der Eintheilung ist die bequemste, man muß aber beyde Stäbe an einander so befestigen, daß die Ende sehr genau auf einander passen, und daß sie sich während der Eintheilung nicht verrücken.

§. 10. Die Seite der Sinus wird vermittelst ihrer Logarithmen eben so eingetheilt. Der Logarithmus des Halbmessers oder vielmehr seine Characteristica ist hier = 2, daher muß man die Characteristica der Sinus in den Tabellen um 8 vermindern. Wird demnach die arithmetische Seite an die Seite der Sinus gelegt, so schreibt man auf dieser jede Grade und Minuten dahin, wo auf jener die Logarithmen ihrer Sinus fallen. Die Eintheilung fängt bey 0°, 34′ an, und geht bis 90 Grade.

§. 11. Die Tangentenseite ist von dem Sinus darin verschieden, daß man auf derselben die Grade und Minuten dahin schreibt, wo auf der Arithmetischen Seite die Logarithmen ihrer Tangenten stehen. Sodann hat sie eine gedoppelte Eintheilung, weil die Complemente der Winkel neben den Winkeln zu stehen kommen.

§. 12. Die Arithmetische Seite ist in 2000 Theile wirklich eingetheilt, davon jeder sich noch mit dem Auge wenigstens in 5 kleinere eintheilen läßt, wenn die Stäbe 5 Schuhe lang sind. Man kann sie demnach als in 10000, und ihre Helfte als in 5000 Theile getheilt ansehen. Daher lassen sich auf der Geometrischen Seite noch solche Zahlen unterscheiden, deren Logarithmen um 0, 0·02 von einander unterschieden sind, und die sich folglich wie 2000 zu 2001 verhalten.

ken. Demnach kann man, wenn man mit blossen Zahlen multiplicirt oder dividirt, das Product oder den Quotienten wenigstens bis auf $\frac{1}{2000}$ finden.

§. 13. Bey der Tangentenseite lassen sich noch aller Orten Minuten eines Grades erkennen, weil

$$\begin{array}{lr} \text{Log. Tang. } 45^\circ = & 10{,}0000000. \\ \text{und Log. Tang. } 45^\circ{,}1' = & 10{,}0002527. \\ \text{folglich der Unterschied} \ldots\ldots = & 0{,}0002527. \end{array}$$

ist. Sind die Winkel oder ihre Complemente unter 20 Gr. so erkennt man noch halbe Minuten. Bey 12 Gr. kömmt man auf $\frac{1}{3}$ Minuten. Bey 9 Gr. giebt es $\frac{1}{4}$ Minuten, und je kleiner der Winkel oder sein Complement ist, desto kleinere Theile von Minuten lassen sich noch erkennen.

§. 14. Hingegen bey der Seite der Sinus ist es etwas anders. Von 0° bis auf 30° ist ihre Genauigkeit von den Tangenten nicht viel verschieden. Von 30 bis 50 Gr. lassen sich noch zwo Minuten erkennen. Bey 70 Gr. nur noch 4 oder 5 Minuten. Bey 80 noch 10 oder 12 Minuten. Bey 85° noch $\frac{1}{3}$ Grade ꝛc. Wenn demnach ein Winkel, der von 90° nicht viel unterschieden ist, durch seinen Sinum solle gefunden werden, so geben diese Stäbe keine merkliche Genauigkeit. Ist aber der Fall umgekehrt, daß man aus dem Winkel seinen Sinus suchen, oder diesen zu andern Rechnungen gebrauchen muß, so hat es nichts zu sagen, weil man allemale den Sinus bis auf seinen 2000ten Theil findet. In dem erstern Fall aber muß man die Tabellen oder Umwege gebrauchen.

§. 15. Da diese Stäbe eben den Dienst wie die Logarithmen in den Tabellen thun, so ist es unnöthig, alle Aufgaben hier anzubringen, welche dadurch aufgelöst werden können. Wir werden also nur diejenigen hersetzen die fürnehmlich die Brauchbarkeit und Bequemlichkeit dieser Stäbe anzeigen, und zugleich dienen werden, dieselben auch in andern Fällen zu gebrauchen. Da wir voraussetzen, daß die Leser den Gebrauch der Triogonometrischen Tabellen wissen, so binden wir uns an keine didactische Ordnung, die man allenfalls bey Scheffelt finden kann, sondern werden die wählen, wodurch die vorgestellten Absichten mehr in die Augen fallen. Wir fangen demnach bey den Tabellen an.

I. Tabellen für gemeine Rechnungen.

§. 16. Hier haben wir folgende.

1. Das Einmal eins. Dazu gebraucht man beyde Geometrische Seiten. Den Anfang der einen legt man neben jede Zahl, welche mit jeden andern solle multiplicirt werden, zum Exempel, wenn man unzählige Zahlen mit 24 multipliciren will, so legt man die Stäbe so an einander, daß 1 oder der Anfang der einen geometrischen Seite neben 24 auf der andern zu liegen komme, und genaue daran passe. Auf jener sucht man jede Zahl auf, die man multipliciren will, so werden auf dieser die Producte neben diesen Zahlen stehen. So zum Exempel, findet man 48 neben 2; 72 neben 3 ꝛc. Es ist hier zu merken, daß die Zahlen auf der Geometrischen Seite viel oder wenig gelten, nachdem man will. Aus 10 kann man 100, 1000 ꝛc. oder auch 1 ; 0,1 ; 0,01 machen. Aendert man diese Bedeutung, so muß man sich auch im Producte darnach richten, welches denen nicht schwer fallen wird, die wissen, was Decimalbrüche sind.

2. Divisionstabellen. Hier gebraucht man wiederum die beyden Geometrischen Seiten. Der Divisor, zum Exempel, 36 auf der einen Seite wird neben

neben den Anfang der andern gelegt. So sind auf jener alle Dividendi, auf dieser neben den Dividendis alle Quotienten. So, zum Exempel, neben 72 liegt 2, neben 90 liegt 2,5 ꝛc.

3. Zinßtabellen. Wenn zum Exempel der Zinß 5 pro Cento ist, so legt man auf den Geometrischen Seiten die Zahlen 100 und 5 neben einander, so werden auf der ersten alle Capitalien, auf der andern neben jedem Capital sein Zins stehen. Man kann auch 10 neben 5 legen. Und in diesem Fall muß man jeden Zahlen auf der ersten Seite noch eine 0 anhängen, wie wir dieses bereits erinnert haben. Uebrigens glaube ich wohl nicht, daß man diese Stäbe zu wirklichen Zinsrechnungen gebrauchen werde, theils weil hier Decimalbrüche vorkommen, fürnehmlich aber weil man auf 1000 oder 2000 eins fehlen kann. Ich führe also diese Tabellen hier nur an, um die Stäbe auf allen Seiten zu betrachten.

4. Reductionstabellen. Sollen unzählige Zahlen in einer gegebenen Verhältniß vergrössert oder verkleinert werden, z. E. wie 17 zu 13: so legt man auf den Geometrischen Seiten die Zahlen 17, 13 neben einander, und auf der erstern sucht man jede Zahlen auf, so stehen auf der andern Seiten neben denselben die reducirten Zahlen.

5. Andere Divisionstabellen. Solle eine Zahl zum Exempel 45 durch unzählige andere dividirt werden, so legt man den Anfang der einen Seite umgekehrt neben 45 auf der andern. Auf der einen werden die Divisores und auf der andern die Quotienten neben einander stehen, und wo der Divisor dem Quotienten gleich wird, da hat man die Quadratwurzel des fürgegebenen Dividendi. Zu dieser Absicht ist es gut, wenn die Eintheilung auf den geometrischen Seiten doppelt und daher an jedem Rande eine ist, damit

bey

bey Umwendung derselben die Zahlen dennoch an einander kommen.

Diese Tabellen mögen zureichend seyn, um die Eigenschaften und den Gebrauch der geometrischen Seiten bey Rechnungen in blossen Zahlen zu zeigen. Das wunderbare bey den Logarithmen fällt dadurch mehr in die Augen.

II. Trigonometrische Tabellen.

§. 17. Jede Seite genau neben eine jede andere gelegt stellt eine Tabelle vor. Die vornehmsten sind folgende.

1. Die Arithmetische neben der Geometrischen. Hier hat man auf dieser jede Zahlen, und neben denselben auf jener ihre Logarithmen.

2. Die Geometrische neben dem *Sinus*. Da hat man auf dieser die Grade der Winkel, auf jener ihre Sinus neben denselben.

3. Die Geometrische und Tangentenseite. Diese giebt die Grade und jene ihre Tangenten, bis auf 45. Wird aber die Tangentenseite umgewendet, so hat man die Winkel von 45°. bis 89°. 26′, und ihre Tangenten.

4. Legt man die Seite der Sinus umgekehrt an die Geometrische Seite, so hat man auf jener die Winkel, auf dieser ihre Cosecanten neben einander.

5. Gebraucht man in den drey letztern Fällen statt der geometrischen Seite die arithmetische, so hat man statt der Sinus, Tangenten und Cosecanten ihre Logarithmen.

III. Astro-

III. Astronomische Tabellen.

§. 18. Hier giebt es eben so viele, als man durch einzele rechtwinklichte sphaerische Triangel berechnen kann. zum Beyspiel

1. Declinationstabellen. Man lege den 90ten Grad der Sinusseite neben 23°, 29′ der andern Sinusseite: so sind an jener die Grade der Ecclipic, auf dieser ihre Declinationen.

2. Tabellen für die Höhe jeder Puncte des Aequators. Man lege wiederum den 90ten Grad der Sinus neben den Grad der Aequatorshöhe auf der andern Sinusseite, so hat man auf der erstern den Abstand jeder Puncte vom Horizonte, auf der andern ihre Höhe über demselben.

3. Die *Ascensiones rectae* der *Ecclipic.* Man lege die Sinus und Tangentenseite neben einander, und bemerke wo der 66°, 31′ von jener auf dieser hintrift. Sodann legt man an diesen Punct der Tangentenseite den 45° der andern Tangentenseite: so wird man auf dieser letztern die Grade der Ecclipic, auf jener aber ihre Ascensiones rectas haben.

4. Die *Ascensionaldifferenzen.* Hier giebt es drey Fälle.

   α) Wenn die Polhöhe 45° ist, da legt man die Tangentenseite genau an die Sinusseite, so hat man auf jener die Declination, auf dieser die Ascensionaldifferenz.

   β) Wenn die Polhöhe über 45° ist; Hier legt man den Anfang der Sinus an den Grad der Aequatorshöhe der Tangentenseite, und wo der 45° von dieser auf jener hintrift, da bemerket man den Punct, und schiebt den Anfang

fang der Tangentenseite dahin, so ist alles wie in dem ersten Fall.

γ) Wenn die Polhöhe unter 45° ist. Hier legt man den Anfang einer Tangentenseite an den Grad der Polhöhe der andern, und schaut wo der 45° von dieser auf jener hintrift. Dahin schiebt man den Anfang der Sinusseite, so hat man, wie in den beyden ersten Fällen, auf dieser die Ascensionaldifferenzen, auf jener aber die Declinationen.

5. Die *Amplitudines ortivae.* Auf den beyden Sinusseiten legt man den 90° und den Grad der Aequatorshöhe neben einander, so hat man auf dieser die Declinationen und auf jener die Amplitudo ortiva.

6. Die Grade der Parallelcircul des Aequators. Man setze, ein Grad des Aequators habe 15 Meilen, und lege daher den 90ten Grad der Sinusseite neben die Zahl 15 auf der geometrischen Seite, so hat man auf jener die Grade der Aequatorshöhe, auf diesen die Meilen eines Grades der Parallelcircul.

7. Tabelle der kürtzesten Demmerung. Man setze die Demmerung höre auf oder fange an wenn die Sonne 18° unter dem Horizonte ist. Von diesen 18° nimmt man die Helfte oder 9° auf der Tangentenseite, an welche man die Sinusseite gelegt hat, und sieht, wo auf dieser der 9te Grad der Tangentenseite hintrift. An diesen gefundenen Punct der Sinusseite legt man den 90ten Gr. der andern Sinusseite, so hat man auf dieser letztern die Grade der Polhöhe, auf jener aber die entsprechende Grade der Declination der Sonne.

IV. Andere Tabellen.

§. 19. Wir fügen noch einige Tabellen den vorigen bey, um zu zeigen, daß man auch in andern vorkommenden Fällen diese Stäbe dazu gebrauchen kann, weil sie überhaupt dienen, wo viele Zahlen oder Sinus oder Tangenten gegen einander müssen proportionirt werden.

1. Die Strahlenbrechung. Zum Exempel im Glase, wo sie wie 3 zu 2 ist. Man lege den 90° der Sinusseite an die Zahl 3 der geometrischen, und schaue, wo von dieser die Zahl 2 auf jener hintrift. Dahin schiebe man den 90° der andern Sinusseite: so wird man auf der letztern die Neigungswinkel in der Luft, und auf der erstern die im Glase haben. Bey dem Wasser gebraucht man die Zahlen 4 : 3, und bey andern durchsichtigen Materien andere Verhältnisse.

2. Die Tage, an welchen die Zeit, innert welcher ein Regenbogen möglich ist, nach Verschiedenheit der Polhöhen am kürzesten wird. Die Sonne muß tiefer seyn als 42°, 2′. Man nehme die Helfte von dieser Höhe, und verfahre damit wie bey der kürzesten Demmerung.

3. Tabellen, in welchen die Zahlen nach den Sinus der Winkel abnehmen sollen, wie zum Exempel bey den Einfallswinkeln rc. Auf der Geometrischen Seite sucht man die Zahl auf, die man für den rechten Winkel annimmt. An diese legt man den 90ten Grad der Sinusseite, so hat man auf dieser die Grade der Winkel, auf jener die entsprechenden Zahlen neben einander.

§.20. Aus diesen Beyspielen wird zureichend klar seyn, daß unsere logarithmische Stäbe unzählige andere Tabellen vorstellen können, und daß dieses geschehen kann, so ofte mehrere Zahlen in einer gegebenen Proportion müssen vermehrt oder vermindert werden. Das Maas der Proportion ist auf der geometrischen Seite der Abstand der Zahlen, durch welche sie ausgedrücket wird. Indem man aber beyde Stäbe gebraucht, und diese zwo Zahlen an einander legt, so ist der Anfang des einen Stabes von dem Anfange des andern um diesen Abstand entfernt, daher kommen alle die Zahlen neben einander zu liegen, zwischen welchen eben die Verhältniß ist.

§. 21. Mehrentheils gebraucht es einer Vorbereitung hiezu, und dieß geschieht, wenn die fürgegebene Proportion von einer Seite auf eine andere gebracht werden muß. Solche Vorbereitungen sind in den angeführten Tabellen schon etliche male vorgekommen. Wir wollen sie demnach nur durch einige Beyspiele erläutern.

§. 22. Man solle eine Tabelle vorstellen, daß auf dem einen Stabe die Ascensiones rectae, auf dem andern die Ascensionaldifferenzen an einander zu liegen kommen. Hier haben wir folgende Proportion: der Sinus der Ascensio recta verhält sich zum Sinus der Ascensionaldifferenz, wie die Tangente der Aequatorshöhe zur Tangente der Obliquitaet der Eccliptic. Die zwey letztern Glieder dieser Proportion sind das Maas der Verhältniß zwischen den zweyen erstern. Dieses Maas muß demnach von der Tangentenseite auf die Sinusseite gebracht werden, und es ist klar, daß wenn man beyde Sinusseiten gebraucht, der Anfang der einen von dem Anfange der andern eben so weit müsse weggerückt werden, als auf der Tangentenseite der Grade der Aequatorshöhe von dem 23°, 29′ oder dem Grad der grösten Abweichung der Eccliptic absteht. Man legt

legt daher den Anfang der Sinusseite des ersten Stabes an den 23°, 29′ der Tangentenseite des andern. Auf dieser wird der Grad der Aequatorshöhe aufgesucht, und man bemerkt wo derselbe auf der Sinusseite des ersten Stabes hintrift. An diesen Punct legt man den Anfang der Sinusseite des andern Stabes, so ist die Tabelle fertig. Auf der ersten Seite wird man die Ascensiones rectas, auf der andern die Ascensionaldifferenzen haben.

§. 23. Wiederum man solle für einen gegebenen Tag des Jahrs eine Tabelle vorstellen, da auf dem einen Stabe die Polhöhen auf dem andern die Ascensionaldifferenzen an einander liegen. Hier hat man die Proportion: Wie sich der Sinus totus zur Tangente der Declination der Sonne am vorgegebenen Tage verhält, so verhält sich die Tangente der Polhöhe zum Sinus der Ascensionaldifferenz. Demnach ist auf der Tangentenseite der Abstand zwischen 45° und dem Grade der Declination das Maas der gesuchten Verhältnisse zwischen den Tangenten der Polhöhe und ihren Ascensionaldifferenzen. Da aber die Tangentenseite eine gedoppelte Eintheilung hat, so giebt es hier zween Fälle. In beyden aber legt man erstlich die Tangenten und Sinusseite schlechthin an einander, und auf dieser merkt man den Punct, wo der Grad der Declination von jener hintrift. An diesen Punct schiebt man den 45° der Tangentenseite und die Tabelle wird für die Polhöhen, so unter 45° sind fertig seyn. Für die so über 45° sind, muß man die Tangentenseite umgekehrt legen. Denn der gefundene Punct der Sinusseite ist wirklich die Ascensionaldifferenz für die Polhöhe von 45°. Diese aber nimmt zu und ab, wie die Tangenten der Polhöhe.

§. 24. Man kann überhaupt, so ofte beyde Abtheilungen der Tangentenseite in der gesuchten Tabelle vorkommen, allemal bey dem 45° anfangen. Die

Abtheilung von 45° bis 89°, 26′ ist nichts anders als die Fortsetzung der erstern, welche hätte in die Länge gehen sollen, wenn man die Stäbe nur wegen dieser Seite allein hätte wollen länger machen. Und es wird aus dieser Betrachtung nicht schwer seyn, in jedem Falle ihren Gebrauch zu bestimmen.

§. 25. Da die Sinus und Tangentenseite bey 34 Minuten anfangen, so sind die kleinern Winkel nicht darauf gezeichnet. Kömmt demnach der Fall vor, wo man dieselben gebraucht oder finden will, so kann man diese Seiten ohne merklichen Fehler vermittelst der Geometrischen verlängern, weil so kleine Sinus und Tangenten bey nahe wie ihre Winkel abnehmen. Der Sinus totus auf diesen Stäben ist = 100, und der Anfang der Sinusseite stellt den Sinus = 1 vor. Diesem entspricht den Bogen $34\frac{37}{100}$ Minuten. Wenn man demnach den Anfang der Sinusseite an die Zahl 34,37 der Geometrischen legt, so stellen jede Zahlen der letztern die Minuten der erstern vor, und hiedurch kann man bis auf einen Winkel von 1 Minute zurückgehen, und die Sinusseite dadurch sehr genaue verlängern. Eben dieses geht auch bey der Tangentenseite an, weil sich hiebey kein Unterschied äussert, der auf den Stäben zu merken wäre.

§. 26. Da wir gezeigt haben, wie die angeführten Tabellen auf den Stäben vorgestellt werden können, so ist für sich klar, daß wir dadurch eben so viele einzele Aufgaben aufgelöst haben. Es wäre lange nicht so schön gewesen, wenn wir, zum Exempel, in einer Aufgabe hätten zeigen wollen, wie man durch diese Stäbe für einen gegebenen Grad der Ecliptic seine Declination finden könne. Diese Aufgabe hätte das Ansehen gehabt, als wenn man für jeden andern Grad die Arbeit aufs neue wiederholen müßte, wie es bey der Himmelskugel, und bey Trigonometrischen Tabellen geschieht. Bey unsern Stäben ist es

anders

anders, und wenn man die Aufgabe für einen gegebenen Fall auflöst, so ist sie es zugleich für alle übrigen. Sucht man die Declination für den leichtesten Fall, zum Exempel, für den 90ten Grad der Ecliptic, so hat man die ganze Declinationstabelle auf den Stäben. Eben dieses gilt bey den übrigen Tabellen die wir beschrieben haben, und bey unzähligen andern, die man dadurch vorstellen kann. Es wäre ihnen unrecht geschehen, wenn man diesen Vortheil nicht in seinem völligen Liechte und Umfange gezeigt hätte. (§.4.) Ausser diesen Aufgaben giebt es noch genug andere, die man für einzele Fälle auflösen kann. Wir wollen davon einige Classen durchgehen.

V. Verkleinerung der Brüche.

§. 27. Solle ein Bruch durch kleinere und schickliche Zahlen ausgedruckt werden: zum Exempel, $\frac{72}{25,6}$, so legt man auf beyden geometrischen Seiten die Zahlen 72 und 25,6 neben einander und schauet welche Zahlen auf beyden Stäben entweder genaue oder sehr nahe neben einander liegen. Als in gegenwärtigem Exempel findet man, daß 36 und 12, 8, ferner 18 und 6,4, deßgleichen 9 und 3,2, wiederum 27 und 9,6, 45 und 16,0 ꝛc. genaue an einander liegen. Und in der That ist auch $\frac{72}{25,6} = \frac{9}{3,2}$. Ferner findet man daß 20 und 7,0 sehr nahe zusammen treffen, folglich kann man für den Bruch $\frac{72}{25,6}$ ziemlich genaue $\frac{2}{7}$ annehmen. Uebrigens muß man nachgehends wirkliche Proben anstellen, ob der verkleinerte Bruch dem fürgegebenen in der That gleich ist. Denn die Stäbe können um $\frac{1}{1000}$ fehlen (§. 12.) Achtet man aber einen so kleinen Theil nicht, so ist auch die Probe nicht nöthig, und in so ferne sind diese Stäbe sehr bequem jede Verhältniß durch kleinere Zahlen auszudrücken. Liegen diese Zahlen nicht völlig an einander, so kann man am Zehler in Decimaltheilen finden, ob der Unterschied merklich ist.

VI. Theiler der Zahlen.

§. 28. Da man bisher die Theiler der meisten Zahlen durch Versuche finden muß, so dienen unsere Stäbe, wenigstens diejenigen Zahlen zu erkennen, welche von der vorgegebenen Zahl gewiß keine Theiler sind, und man kann sich daher unnöthige Proben ersparen. Ferner wenn die fürgegebene Zahl wirklich Theiler hat, so lassen sie sich durch unsere Stäbe, wo nicht erkennen doch wenigstens vermuthen. Man legt den Anfang der einen geometrischen Seite umgekehrt an die fürgegebene Zahl der andern, so werden jede neben einander liegende Zahlen mit einander multiplicirt so viel ausmachen, als die Zahl, deren Theiler man sucht. Liegen demnach keine ganze Zahlen neben einander, so hat die Zahl keinen Theiler. Doch ist dieses nur von Zahlen zu verstehen, die nicht über 2000 gehen, weil grössere Zahlen solche Theiler haben können, die sich auf den Stäben nicht mehr genaue unterscheiden lassen. Liegen aber ganze Zahlen an einander, so ist das Sicherste, daß man sie oder wenigstens ihre letzten Ziffern mit einander multiplicirt, um zu sehen, ob im ersten Falle das Product oder im letztern die Endung mit der fürgegebenen Zahl einerley ist. Je nachdem diese Zahl grösser ist, muß mon von den neben einander liegenden Zahlen mehrere Endungszahlen nehmen, damit man sich der Uebereinstimmung des Productes mehr versichern könne. Die Grösse der Zahl, davon man die Theiler finden will, richtet sich nach ihren Theilern. Sind diese einander gleich, oder nicht merklich verschieden, so mag die Zahl viel grösser seyn als 2000. So, zum Exempel, von der Zahl 95563 lassen sich die Theiler 353 und 271 erkennen, und sie werden neben einander liegen,

liegen, wenn die Stäbe 5 Schuhe lang sind, ungeacht man die Zahl 95663 auf dem einen Stabe nicht genau erkennen kann. Die gemeldte Probe muß hier das Uebrige ausmachen. Da man aber an der Zahl nicht erkennen kann, ob sie so vortheilhafte Theiler hat, so haben wir für die gröste, von welcher man die Theiler nothwendig finden kann, nur 2000 gesetzt.

VII. Ausziehung der Wurzeln.

§. 29. Für die Ausziehung der Quadratwurzel haben wir (§. 16. Nro. 5.) bereits eine Methode angegeben. Folgende ist allgemeiner. Man lege die arithmetische und geometrische Seite neben einander. Auf dieser suche man die vorgegebene Zahl auf, so hat man auf jener ihren Logarithmum. Diesen theile man für die Quadratwurzel in 2, für die Cubicwurzel in 3, für die Biquadratwurzel in 4 gleiche Theile, und so fort. Den gefundenen Theil sucht man auf der arithmetischen Seite, und neben demselben wird die gesuchte Wurzel auf der geometrischen liegen.

§. 30. Es ist klar, daß man hiebey auch die Eintheilung mit dem Circul verrichten kann. So, zum Exempel, wenn man aus dem Quadrat von 64 die Cubicwurzel ausziehen wollte, so würde man auf der geometrischen Seite den Abstand von 1 bis 64 in drey gleiche Theile theilen, und der dritte Theil von 1 zweymal bis auf 16 getragen, würde anzeigen, daß 16 die gesuchte Wurzel wäre.

§. 31. Wenn man hingegen eine Zahl, zum Exempel, 3 quadriren, cubiren, biquadriren, oder noch mehrere male mit sich selbst multipliciren will, so faßt man auf der Geometrischen Seite den Abstand von 1 bis 3, und trägt ihn aus 3 in 9, aus 9 in 27, aus 27 in 81, und da es nicht mehr weiter geht, so setzt man den Zirkel auf 8,1, und trägt ihn auf 24,3, von da auf 72,9 ꝛc. und wiederum von 7,29 auf 21,87 ꝛc. und die Zahlen

3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187

werden die gesuchten Dignitaeten seyn.

VIII. Geometrische Progreßionen.

1. Wenn das erste und zweyte Glied der Progreßion gegeben, und man will die folgenden finden. Zum Exempel, 8 und 12. so faßt man auf der geometrischen Seite den Abstand von 8 zu 12, und trägt ihn aus 12 in 18, aus 18 in 27, aus 27 in 40,5, aus 40,5 in 60,75, ꝛc. so findet man dadurch die Reyhe von Zahlen

   8; 12; 27; 40,5; 60,75; ꝛc.

2. Wenn das erste und letzte Glied nebst der Anzahl der Glieder gegeben, die mittlern zu finden. Zum Exempel, man hätte 8 und 60,75 und es sollen noch drey mittlere Glieder gefunden werden, so wird der Abstand von 8 bis 60,75 in 4 gleiche Theile getheilt, und der Zirkel wird sodann aus 8 in 12, aus 12 in 27, aus 27 in 40,5 und aus 40,5 in 60,75 getragen.

Der letztere Fall ist genauer, weil sich der Fehler verkleinert. Er begreift zugleich die Erfindung der mittlern Proportionalzahlen unter sich.

IX. Geradlinichte Triangel.

§. 33. Hiebey giebt es sehr allgemeine Fälle. So, zum Exempel,

1. Wenn in einem rechtwinklichten Triangel die Hypothenuse gegeben, so sucht man die Zahl auf der geometrischen Seite, neben dieselbe legt man den 90° der Sinusseite, so hat man auf jener alle mögliche Cathetos, auf dieser die ihnen gegenüberstehenden Winkel.

2. Wenn in jedem Triangel ein Winkel und die gegenüberstehende Seite gegeben; so legt man auf der geometrischen Seite die Zahl, so die Seite des △ ausdrückt, neben den Winkel auf der Sinusseite, und man wird auf dieser jede andere Winkel, auf jener die ihnen gegenüberstehenden Seiten haben. In diesen beyden Fällen stellen die Stäbe ganze Tabellen von Triangeln vor.

3. Wenn in einem rechtwinklichten Triangel ein Cathetus gegeben, so sucht man entweder den andern Cathetum oder die Hypothenuse.

   1. Für den andern *Cathetum*. Man sucht die Zahl, so den gegebenen Cathetum ausdrückt auf der geometrischen Seite, und legt den 45° der Tangentenseite gerade oder umgekehrt an dieselbe: so hat man auf dieser jeden an dem gegebenen Catheto liegenden Winkel, auf jener den ihm gegenüberstehenden Cathetum, und hinwiederum rc.

2. Für die *Hypothenusa*. Man sucht die Zahl des gegebenen Catheti wiederum auf der Geometrischen Seite, und legt den 90°. der Sinusseite umgekehrt an dieselbe, so hat man auf dieser die Complemente der an dem gegebenen Catheto liegenden Winkel, auf jener die Hypothenusen, so dazu gehören.

§. 34. In den übrigen Fällen bey schiefwinklichten Triangeln muß man die Perpendicular fällen, und dieselben lassen sich vermittelst unserer Stäbe eben so berechnen, wie man es mit den Logarithmen thut.

X. Sphaerische Triangel.

§. 35. Auch hier werden wir nur bey den rechtwinklichten stehen bleiben, und die allgemeine Regel, die man dabey für alle Fälle giebt auf unsere Stäbe beziehen.

1. Für die abgesönderten Theile ist die allgemeine Regel: daß der Cosinus des mittlern Theils mit dem Sinus totus so viel macht als die Sinus der beyden abgesönderten, und da muß man statt der Cathetorum ihre Complemente nehmen. Hat man diese Regel für einen gegebenen Fall bestimmt, so ist es zu unserer Absicht besser, die Bögen und Winkel so zu nehmen, daß die Formel ihre Sinus vorstellt; wie dieses, zum Exempel, von sich selbsten geschieht, wenn die drey vorkommende Stücke die Hypothenuse, ein Cathetus und sein gegenüberliegender Winkel ist. Ist diese Verwandlung geschehen, so legt man die eine Sinusseite umgekehrt so an die andere, daß entweder die beyden abgesönderten Theile, oder wenn nicht beyde gegeben sind, der mittlere Theil neben

neben den 90ten Grad zu liegen komme, weil allemal beydes zutreffen wird. Im ersten Fall findet man den mittlern Theil neben dem 90ten Grad; im andern aber, den gesuchten abgesonderten Theil neben dem gegebenen.

2. Für die anliegenden Theile. Hier ist die allgemeine Regel; daß der Cosinus des mittlern mit dem Sinus totus so viel mache, als die Cotangenten der beyden anliegenden. Hat man diese Regel auf den vorgegebenen Fall angewandt, so verwandelt man die Seiten und Winkel so, daß die Formel ihre Sinus und Tangenten enthalte. Die anliegende Theile sucht man auf den Tangentenseiten auf, und legt sie so an einander, daß die Zahlen in entgegengesetzter Ordnung zu liegen kommen. Und der Abstand zwischen beyden Gr. 45°, wird dem Abstand des mittlern Theiles auf der Sinusseite von dem 90ten Grade gleich seyn.

§. 36. Ich erkläre diese Regeln nicht weiter, weil ohnedeme die Erklärung weitläuftig wird, wenn man die Stäbe nicht vor sich hat, und man übrigens leichter jeden vorkommenden Fall in eine Regeldetri verwandlet, wovon man bey den oben angeführten astronomischen Tabellen Beyspiele findet.

XI. Sonnenuhren.

§. 37. Es sollen für eine Horizontalsonnenuhr die Stundenbögen in einer Tabelle vorgestellt werden. Hier hat man die Proportion: Wie der Radius zum Sinus der Polhöhe also die Tangente der Entfernung der Sonne vom Mittage zu der Tangente des Stundenbogens. Die Entfernung der Sonne vom Mittag

Mittag wird, wie bekannt ist, gefunden, wenn man die Zeit von Mittag an rechnet, und für jede Stunde 15 Grade nimmt. So, zum Exempel, hat man für 1 Uhr und 11 Uhr 15 Gr. für 2 Uhr und 10 Uhr 30 Gr. und so weiter. Man lege demnach die Sinus und Tangentenseite an einander, und auf der letztern sehe man, wo der Grad der Polhöhe der erstern hintrift. An diesen Punct lege man den 45° der andern Tangentenseite, so hat man auf dieser die Grade der Entfernung der Sonne vom Mittage, und auf jener die entsprechende Stundenbögen. Ist aber die Sonne über 45° vom Mittage, so wird die zweyte Tangentenseite umgekehrt an den gefundenen Punct gelegt, und in diesem Fall kehrt man auch die erste um, so bald der Stundenbogen über 45° wird.

§. 38. Bey verticalen mittäglichen Sonnenuhren gebraucht man statt der Polhöhe die Aequatorshöhe, und bey jeder andern Fläche den Winkel, den der Zeiger mit der Substylarlinie macht.

§. 39. Will man bey einer Horizontaluhr sehen, wie die Stundenbögen mit der Polhöhe zunehmen, so lege man den Grad der Entfernung der Sonne vom Mittag auf der Tangentenseite an den 90ten Grad der Sinusseite, so hat man auf dieser alle Grade der Polhöhe, auf jener die entsprechenden Stundenbögen.

§. 40. Die Genauigkeit der Rechnungen bey diesen Stäben haben wir schon oben (§. 12. seqq.) überhaupt betrachtet. Es kömmt dabey schlechterdings auf das Gesuchte an. Denn es ist genug daß die gegebene Stücke so genau darauf bemerkt werden, als es die Eintheilung an jedem Orte zuläßt. Die Puncte, wo sie hintreffen, wird man, wenn die Stäbe 5 Schuhe lang sind, wenigstens bis auf einen 10000ten Theil der ganzen Länge finden (§. cit.) Es ist für sich klar, daß die Eintheilung eben so richtig seyn und

alle

alle Aufmerksamkeit gebraucht werden muß. Da man die gefundene Puncte der gegebenen Stücke nur deßwegen gebraucht, damit man den Punct finde, wo das Gesuchte hinfällt, so muß dieser Punct sodann durch die Zahl ausgedrückt werden, die er vorstellt. Man findet demnach diese Zahl auf der geometrischen Seite bis auf ihren 2000ten Theil, auf der Tangentenseite jedesmal bis auf Minuten, und in den meisten Fällen bis auf Theile von Minuten (§. 13.) hingegen auf der Sinusseite lassen sich höchstens bis auf 30 Gr. noch einzele Minuten erkennen; von 30 bis 50° noch zwo Minuten, und so nimmt es immer ab, wie wir es schon oben bemerkt haben (§. 14.)

§. 41. Nach diesen Betrachtungen wird man zureichend sehen können, wie weit sich der Gebrauch der logarithmischen Stäbe ausdehnt, wenn man sie so verfertigt, wie wir sie angegeben haben. Es fällt ins Wunderbare, wenn man sieht, daß man hier mit eben denselben Zahlen unzählige und so sehr verschiedene Tabellen vorstellen kann. Da man in den meisten Fällen die Winkel nicht weiter als bis auf Minuten sucht, und bey Ausmessung der Längen sich öfters begnügt, wenn man auf 2000 höchstens 1 fehlt, so ist unstreitig, daß diese Stäbe nicht nur bequem sondern auch wirklich brauchbar sind. Unter den bisher erfundenen Rechenmaschinen werden sie diesen beyden Absichten noch am nächsten kommen.