II.

Die Visirkunst

sowohl ganz als nicht ganz angefüllter liegender Fässer, auf ihre einfachsten Gründe und Regeln gebracht.

§. 1.

Die Werke der Natur und der Kunst hängen von unzähligen besondern Umständen ab, welche alle dazu beytragen, daß man in demjenigen, so daran auszumessen ist, an keine geometrische Schärfe gedenken kann. Kömmt dabey irgendwo eine krumme Linie vor, so sind diejenigen, von welchen wir die Gleichungen wissen, viel zu einfach, als daß sich die Natur damit begnügen könnte, und daher kömmt es, daß was wir aus solchen Gleichungen finden, nach aller Strenge zu reden, sich nur auf die angenommene Hypothese erstreckt, mit der Sache selbsten verglichen, davon immer mehr oder minder abweicht, und alles was man dabey thun kann, ist daß man suche die Abweichung so gering zu machen als möglich ist.

§. 2.

§. 2.

Es ist daher schon längst eingeführt, daß man in der Ausübung nur in so ferne auf solche Abweichungen sieht, in so ferne man sie nicht als Kleinigkeiten ansehen kann, oder in so ferne sie in der That eine Verbesserung zulassen. In den übrigen Fällen begnügt man sich die Ausmessung brauchbar und leichte zu machen, und dieser Absicht wird öfters eine schärfere Bestimmung aufgeopfert, so bald sie in der Ausübung schwerer und mühsamer wird.

§. 3.

Ohne hievon andere Beyspiele anzuführen, werde ich bloß bey demjenigen bleiben, welches den Innhalt dieser Abhandlung ausmacht. Die Ausmessung der Fässer leidet unstreitig keine geometrische Schärfe, und diese Schärfe würde auch dann noch fehlen, wenn sich der Arbeiter alle Mühe gäbe, ein Faß vollkommen cylindrisch zu machen. In diesem Falle würde zwar unstreitig die Ausmessung leichter, und der Fehler geringer, allein man müßte dennoch immer nur annehmen, daß das Faß vollkommen cylindrisch sey, und daß man seine innwendige Länge und Höhe ebenfalls vollkommen genau gemessen habe. Das letztere geht nicht an, weil bey den schärfesten Ausmessungen Fehler unterlaufen, und das erstere wird aus vielen Gründen eben so unmöglich,

möglich, als es unmöglich ist geometrische Linien und Flächen zu machen. Man kann denselben mit mehrerer Sorgfalt näher kommen, aber die Beschaffenheit der Materie und die Arbeit selbsten läßt die völlige Vollkommenheit nicht zu. Ueberdiß ist keine Materie unveränderlich, und bey dem Holze mag besonders die Feuchtigkeit seine Figur alle Augenblicke ändern.

§. 4.

Dieser letzte Umstand ist eine der Hauptursachen, warum die Fässer nicht cylindrisch, sondern in der Mitte erhaben gemacht werden. Dieses geht nicht an, wenn das Faß cylindrisch ist. Bey diesen müßte jeder Reif mit Schrauben zusammen gezogen werden, wozu wegen des starken Anreibens eine nicht geringe Kraft erfordert würde, und man erhielt dadurch eine andere Hauptabsicht nicht, daß das das Faß stärker zusammen hält, wenn es mehr eine sphärische als cylindrische Figur hat, und seine Böden werden dadurch ungleich fester, daß sie dem Druck der flüßigen Materie, damit das Faß ausgefüllt ist, viel grössern Widerstand thun können.

§. 5.

Hiedurch aber wird die Berechnung des Innhalts der Fässer schwerer und weitläuftiger. Man kann das Faß nimmer als einen

einfa-

einfachen Cylinder ansehen, und betrachtet es demnach als das Mittel von zween Cylindern, deren Diameter dem grössern und kleinern Diameter des Fasses gleich sind, und die beyde mit dem Fasse gleiche Länge haben. Andere haben es als zween abgestumpfte Kegel betrachtet. Noch andere haben die Krümmung der Dauben, als Theile von Parabeln, Hyperbeln oder Ellipsen angesehen, und den Innhalt solcher Fässer berechnet, welche diese Figur haben. Diese Ausmessungen sind allerdings von einander unterschieden. Die zween Kegel fehlen am meisten, das Mittel zwischen beyden Cylindern fast eben so viel, doch etwas weniger, die Kegelschnitte kommen der Wahrheit viel näher.

§. 6.

Um aber zu sehen, worauf hier die Hauptsache ankomme, so müssen wir die Fehler von einander unterscheiden, die man bey allen Ausmessungen entweder nothwendig zulassen muß, oder die man verbessern kann. Es stelle ABCD den Abschnitt des Fasses der Länge nach vor, so betrachtet man IL als eine Axe, und man setzt, die Figur des Fasses entstehe, wenn sich AEDI um die Axe IL herum drehet, oder als wenn AED der Lehrbogen wäre, nach welchem man die Figur des Fasses an einer Drechselbank bilden wollte. Dieses wird bey allen Ausmessungen zum voraus gesetzt. Fig. 1.

setzt. Es ist klar, daß einige Dauben mehr oder minder gekrümmt seyn können, als der angenommene Lehrbogen AED. Allein man betrachtet diese Abweichung als eine Kleinigkeit, so lange dieselbe nicht merklich in die Augen fällt.

§. 7.

Aus eben dem Grunde nimmt man an, die beyden Böden stehen auf der Axe senkrecht, ihre innere Fläche sey eben, und beyde einander parallel. Auch hier giebt es kleine Abweichungen, welche aber wiederum als Kleinigkeiten angesehen werden. Der Boden AB mag in I etwas dicker seyn als in A und B. Daher ist AD etwas länger als IL, und mißt man IL, so muß man ehender zugeben als verkleinern.

§. 8.

Es sey EH der größte Diameter, so ist öfters GL grösser als GI, und die beyden Diameter AB, DC werden ungleich. Dieser Umstand, welcher öfters vorkommt, hat am wenigsten zu bedeuten, weil jede Helfte besonders gemessen werden kann.

§. 9.

Ist das Faß voll, so kann man die inwendige Länge IL nicht messen. Man mißt die Auswendige, und zieht die Dicke beyder Böden

Böden davon ab. Muß diese Dicke nur geschätzt werden, so ist diß ein Uebel, den die Theorie nicht helfen kann.

§. 10.

Es kömmt also fürnehmlich auf die Krümmung der Dauben AED an. Was hierinn gefehlt wird, zieht sich um das ganze Faß herum, und mag einen desto merklichern Fehler geben. Aus diesem Grunde wird der Innhalt des Fasses augenscheinlich zu klein, wenn man die Puncte A, E, D beybehält, aber die Linien AE, ED gerade sezt, und daher die beyden Helften des Fasses als abgestumpfte Kegel annimmt.

§. 11.

Die wahre Krümmung der Dauben AED läßt sich deßwegen nicht auf eine allgemeine Formel bringen, weil sie bey jedem Fasse, und man kann sagen bey jeder Daube, und bey einer und eben derselben zu verschiedenen Zeiten verschieden ist. Wir haben schon angemerkt, daß die ab und zunehmende Feuchtigkeit die Figur eines Fasses mehr oder minder ändern kann. Ueberdiß müßte die wahre Krümmung aus mechanischen und hydrodynamischen Gründen bestimmt werden. So weit sind aber diese Wissenschaften noch nicht gebracht. Man könnte AED als die Krümmung einer elastischen Linie ansehen, allein

dieses

dieses währte nur so lange, als die Daube mit andern noch nicht zusammen gebunden wird. Wer es auf Versuche will ankommen lassen, der kann jeden innern Diameter MN und seinen Abstand ME oder MA messen. Dadurch wird sich die krumme Linie construiren lassen.

§. 12.

Diese Umwege mögen aber als überflüssig angesehen werden. Da man in der Theorie dem ganzen Fasse eine gewisse Regelmässigkeit geben muß (§. 6. 7.) so wollen wir zu den beyden erst angezogenen noch eine dritte mitnehmen, und ohne aus AED eben eine Parabel oder andere speciale Linie zu machen, wird es genug seyn, wenn wir setzen, die Krümmung von E in A und D sey einförmig. Da sie überhaupt nicht groß ist, so läßt sich hier weder an Asymtoten, noch an Wendungspuncte noch andere dergleichen Umschweife gedenken. Die Faßdauben haben ohnehin eine ziemlich einförmige Krümmung, man mag sie nun vom Biegen oder von ihrer allmähligen Schmälerung gegen beyde Ende herleiten. Und da sie sich nicht alle auf gleiche Art schmälern, so kann aus allen zusammen das Mittel genommen werden. Es ist für sich klar, daß dieses Mittel regulärer seyn wird, als jede Daube für sich betrachtet. Jeder Diameter MN ist in Verhältniß

niß des Mittels, so man aus allen Dauben in der Weite AM nimmt, und EH höchstens um einen vierten Theil grösser als AB.

§. 13.

Da also die Krümmung AED sehr einförmig, und überdiß nicht groß ist, so kann man dafür ohne merklichen Fehler einen Circulbogen setzen, es sey, daß derselbe durch die drey Puncte A, E, D gehe, oder daß sein Halbmesser dem Halbmesser der Krümmung der Dauben in E gleich sey. So wie die Fässer sind, muß dieses nothwendig angehen. Der Bogen AE reicht selten auf 25 Grade, und bey den meisten Fässern ist er geringer, daher sind diese beyden Circulbögen von einander wenig unterschieden, und da der erstere zum Gebrauch bequemer ist, und leichter kann gefunden werden, so werden wir auch dabey bleiben.

§. 14.

Man verfällt zwar hiebey auf eine etwas weitläuftige Differentialrechnung, allein wir werden sehen, daß sie sich sehr in die Kürze ziehen, und zu dem Gebrauch eben so bequem machen läßt, als wenn man das Mittel zwischen zween Cylindern nähme.

§. 15.

Es sey EK der Halbmesser des Circulbogens AED, mnNM stelle einen Abschnitt des

Fasses vor, dessen Breite Pp unendlich klein ist, und es soll desselben Inhalt gefunden werden. Man nenne

$$EK = r \qquad KG = a$$
$$AKE = v$$

Der Inhalt des Theiles MNHE sey $= z$, folglich des Theiles $mnNM = dz$, die Verhältniß des Diameters zum Umkreyse setze man $= 1 : \pi$, so ist

$$MP = r.\cos v - a$$
$$Pp = r.\, d\sin v$$

folglich

$$dz = \pi\,(r\cos v - a)^2\, r\, d\sin v$$

diese Formel integrirt, giebt

$$\frac{z}{\pi} = r^3 \sin v - \tfrac{1}{3} r^3 \sin v^3 - r^2 a\, v - r^2 a \sin v \cos v + a^2 r \sin v$$

§. 16.

Die Theile dieser Formel sind aber nicht diejenigen, welche zum Gebrauche die bequemsten wären, weil man eigentlich AB, EH, IG ausmißt. Man setze demnach

$$AI = \tfrac{1}{2}\,AB = \beta.$$
$$EG = \tfrac{1}{2}\,EH = b$$
$$IG = x$$

und

$$b - \beta = c$$

so ist für das halbe Faß AEHB

$r =$

$$r = \frac{xx + cc}{2c}$$

$$a = \frac{xx + cc - 2bc}{2c}$$

$$r \sin v = x$$

$$r \cos v = \frac{xx - cc}{2c}$$

und der Bogen AE bey nahe

$$rv = \frac{3x(xx + cc)}{3xx + cc}$$

§. 17.

Werden diese Ausdrücke in der gefundenen Gleichung substituirt, und die Reduction so vorgenommen, daß man alle Glieder, in welchen c über den vierten Grad steigt, als viel zu klein, wegläßt, so erlangt man

$$z = \pi x\left(bb - \tfrac{2}{3}cb + \tfrac{2}{9}c^2 + \frac{2bc^3}{9xx} - \frac{2c^4}{27xx}\right)$$

§. 18.

Die beyden letzten Glieder dieser Gleichung können noch füglich weggelassen werden, weil c fast immer kleiner als $\frac{1}{4}b$ ist. Man setze $c = \frac{1}{4}b$, so ist

$$\frac{2bc^3}{9xx} = \frac{b^4}{288x^2}$$

$$\frac{2}{27}\frac{c^4}{xx} = \frac{b^4}{3402 x^4}$$

Nun ist in den meisten Fässern $b < x$, folglich wenn man den Ausdruck $2bc^3 : 9xx$ wegläßt, so fehlt man auf 300 Maaß kaum eine. Es ist klar, daß dieser Fehler beym Visiren unmerklich wird. Wir haben demnach

$$z = \pi x (bb - \tfrac{2}{3} cb + \tfrac{2}{9} c^2)$$

§. 19.

Diese Formel kann auf verschiedene Arten brauchbar gemacht werden. Die erste ist folgende: Man mißt den Inhalt der beyden Böden AB, CD, und den Inhalt des Circuls der durch EH gehet. Diesen nimmt man vierfach, und addirt die beyden Böden dazu. Von der Summe wird der 6te Theil genommen, und mit der ganzen Länge des Fasses multiplicirt. Denn der Inhalt des Bodens ist $= \pi\beta\beta = \pi (b^2 - 2bc + cc)$ der Inhalt des Circuls QH ist $= \pi bb$, folglich dieser zweymal zu jenem addirt, giebt $\pi (3b^2 - 2bc + cc)$ und daher

$$z = \pi x \left(bb - \tfrac{2}{3} bc + \frac{cc}{3}\right)$$

Es sollte aber seyn

$$z = \pi x (bb - \tfrac{2}{3} bc + \tfrac{2}{9} cc)$$

Daher der Unterschied nur auf $\frac{1}{9}cc$ sich beläuft, welches auf 150 Maaß kaum eine fehlt.

§. 20.

§. 20.

Aus dieser Methode sieht man, daß der Inhalt des Fasses nicht das Mittel zwischen dem äussern und innern Cylinder ist. Denn der äussere Cylinder ist $= 2x\pi bb$ der innere $= 2x\pi(bb - 2bc + cc)$ folglich das Mittel

$$z'' = 2x\pi(bb - bc + \tfrac{1}{2}cc)$$

Es sollte aber seyn

$$z = 2x\pi(bb - \tfrac{2}{3}bc + \tfrac{2}{9}cc)$$

Daher fehlt es um

$$2x\pi(\tfrac{1}{3}bc - \tfrac{5}{18}cc)$$

und um so viel giebt die gemeine Methode zu Visiren zu wenig. Ist $c = \frac{1}{4}b$, so wird auf jede 12 Maaß eine gefehlt.

§. 21.

Man kömmt also der Wahrheit ungleich näher, wenn man den äussersten Cylinder doppelt genommen zu dem innern addirt, und von der Summe den dritten Theil nimmt. Denn der Fehler beträgt auf 150 Maaß kaum eine, und mehrentheils ist er geringer.

§. 22.

Die andere Methode ist diese. Man nehme den Diameter der Spundtiefe vierfach, und addire die Diameter der beyden Böden dazu, von der Summe nehme man den sechsten Theil, so wird man den Diameter eines Cylinders bekommen, welcher bey nahe mit dem Fasse von gleichem Inhalt ist. Wir wollen dieses wiederum von der einen Helfte des Fasses zeigen. Es ist demnach

$$2EG = 2b$$
$$AI = b - c$$

folglich

$$\frac{2EG + AI}{3} = b - \tfrac{1}{3}c$$

daher

$$z''' = \pi x(bb - \tfrac{2}{3}bc + \tfrac{1}{9}cc)$$

Es sollte aber seyn

$$z = \pi x(bb - \tfrac{2}{3}bc + \tfrac{2}{5}cc)$$

Der Fehler ist wie vorhin $= \frac{1}{5}cc$, und daher auf 150 Maaß kaum eine. Dieser Fehler aber ist dem bey der ersten Methode entgegen gesetzt. Es entsteht daher also die dritte Methode.

§. 23.

Man vereinige nemlich beyde erstere Methoden, und nehme das Mittel daraus. Denn es giebt

die erste $z' = \pi x(bb - \tfrac{2}{3}bc + \frac{cc)}{3}$ (§.19)

die andere $z''' = \pi x(bb - \tfrac{2}{3}bc + \tfrac{1}{9}cc)$ (§.22.)

Das

Das Mittel

$$\frac{z' + z''}{2} = \pi x(bb - \tfrac{2}{3}bc + \tfrac{2}{9}cc)$$

Es kömmt also mit der angenommenen Formel vollkommen überein.

§. 24.

Da aber diese Formel wegen der weggelassenen Glieder in der Gleichung (§. 18.) auf 300 Maaß eine zu wenig giebt, hingegen die erste Methode auf 150 Maaß eine mehr als die angenommene Formel, so ist klar, daß sich diese Fehler gewissermaaßen compensiren, und wir können demnach die erste Methode als die leichteste und richtigste angeben, zumal bey denen Fässern, die eine stärkere Krümmung haben.

§. 25.

Um noch aus andern Betrachtungen zu zeigen, daß wir für die Krümmung AED sicher einen Circulbogen setzen können, so dürfen wir nur andere krumme Linien dafür annehmen, welche von der wahren Krümmung der Dauben nicht augenscheinlich abweichen. Wir wollen ein einiges Beyspiel anführen. EK sey die Axe einer Parabel, die durch die 3 Puncte A, E, D geht. Man setze $QM = \xi$, und die übrigen Benennungen seyn wie vorhin, so findet man

$$EG - MP = n\xi\xi$$

daher

$$dz'''' = \pi(b - n\xi\xi)^2 d\xi$$

und integrirt

$$z'''' = \pi\xi\left(bb - \frac{2n\xi\xi b}{3} + \frac{n^2\xi^4}{5}\right)$$

oder für die ganze Länge $GI = x$

$$z'''' = \pi x\left(bb - \tfrac{2}{3}cb + \tfrac{1}{5}cc\right)$$

Es ist aber

$$z = \pi x\left(bb - \tfrac{2}{3}cb + \tfrac{2}{9}cc\right)$$

Daher ist das parabolische Faß um $\frac{1}{45}cc$ kleiner als das circulare. Ist $c = \frac{1}{4}b$, so wird der Unterschied auf 720 Maaß eine betragen. Hiezu muß man noch den Fehler rechnen, den wir wegen der Weglassung zweyer Ausdrücke bey der Formel §. 18. für geringe geachtet. Er betrug auf 300 Maaß höchstens eine. Dadurch wird der Unterschied auf 210 Maaß höchstens eine betragen. Bey andern krummen Linien, die nicht augenscheinlich von der Krümmung der Dauben abgeben, ist derselbe nicht grösser, und daher beym Visiren der Fässer zu verachten.

§. 26.

Setzt man hingegen AEHB sey ein abgestümpfter Kegel, so findet man auf eben die Art seinen

Inhalt $= \pi x\left(bb - cb + \tfrac{1}{3}cc\right)$

Der wahre ist $z = \pi x\left(bb - \tfrac{2}{3}cb + \tfrac{2}{9}cc\right)$

Es

Es ist also der Inhalt des Kegels um $\pi x(\frac{1}{3}cb - \frac{1}{9}cc)$ kleiner, und folglich der Fehler, wie bey dem Mittel aus zween Cylindern auf 12 Maaß eine. (§. 20.) In den kleinern Unterschieden trift dieses Mittel noch näher zu als der Kegel.

§. 27.

Wir können es demnach als ausgemacht ansehen, daß man das Faß weder als zween abgestumpfte Kegel noch als das Mittel aus dem grössern und kleinern Cylinder genau berechnen könne, sondern daß die Berechnung am genauesten seyn werde, wenn man von dem grössern Cylinder zween Drittel nimmt, und sie zu einem Drittel des kleinern Cylinders addirt. Wir werden es im folgenden durch wirklich angestellte Proben bestätigen. Es ist für sich klar, daß diese Methode nicht schwerer noch weitläuftiger ist, als die gemeine, die man bißher gebraucht hat, und daß sie keine andere Ausmessungen erfordert. Hingegen der Fehler 20 bis 30 mal geringer wird. Allein da sie sich nur auf solche Fässer erstreckt, die ganz voll sind, oder deren ganzen Inhalt man wissen will, so müssen wir noch eine Methode für solche suchen, die nicht ganz voll sind, und nach der Länge liegen, und diese Methode soll nicht viel weitläuftiger seyn als die erst gefundene für ganz angefüllte Fässer ist.

§. 28.

§. 28.

Man stelle sich vor, daß man ein liegendes
Fig. 2. des Faß von vorne betrachte. AQB sey sein Boden, AB desselben Diameter, EMH sey der gröste Umfang der durch das Spundloch gehe, EH desselben Diameter, G der gemeinsame Mittelpunct. EH sey vertical, und die Oberfläche des Weins reiche bis an die horizontale Linie mPNM, so ist nNB der Abschnitt des Bodens, und zugleich der kleinste, mMH aber der so durchs Spundloch geht, und daher der gröste. Diese beyde Abschnitte stehen um die halbe Länge des Fasses von einander ab, und man kann sich zwischen denselben unzählige andere gedenken, die desto grösser werden, je näher sie bey dem grösten mMH sind, weil die Dicke des Fasses bis zum Spundloch immer zunimmt. Alle sind auf der Axe des Fasses senkrecht, und daher unter sich parallel.

§. 29.

Man ziehe die beyden Linien GN, GQM aus dem Mittelpunct G in N und M, so läßt sich die Helfte des Fasses EHME in folgende vier Stücke zerfällen, wenn man sich vorstellt, es werde der Länge nach durch die Linien HGE, PM, GN, GM, NQ durchschnitten.

1.° GPN ist ein dreyeckiges Prisma, dessen Basis GPN, und alle Seiten flach sind.

2.° GNQ

2.° GNQ ist ebenfalls ein Prisma, oder wenn man lieber will ein Ausschnitt eines Cylinders, dessen Grundfläche GNQ oder ein Ausschnitt aus dem Boden des Fasses ist.

3.° GQMH ist ein wirklicher Ausschnitt des Fasses, daher ist sein Inhalt dem Inhalte des ganzen Fasses proportional.

4.° NQM ist ein Ausschnitt, den die 3te Figur vorstellt. In dieser ist nqQN die Fläche, welche an dem Ausschnitte des Cylinders (No. 2) liegt, und folglich ein wenig ausgehölt. NQM ist die Basis auf dem Circul, der durchs Spundloch geht, nN die halbe Länge des Fasses. Die Fläche nMq ist convex, und liegt an den Faßdauben an, weil sie ihre Krümmung hat. Der Raum nqMQN ist mit Wein ausgefüllt.

Diese vier Ausschnitte werden nun folgender maaßen verglichen.

§. 30.

Da sie alle gleiche Länge haben, so dürfen wir nur auf ihre Grundflächen sehen, und dieses hat bey dem Prisma und Ausschnitte des Cylinders (§. 29. No. 1. 2.) keine Schwürigkeit. Der Ausschnitt des Fasses (No. 3) Fig. 2. ist dem ganzen Fasse proportional, seine größte Grundfläche GMH verhält sich zur kleinsten GQB, wie die Circul, daraus sie geschnitten sind. Man coaequirt sie demnach, wenn man

⅔ von

$\frac{1}{2}$ von GMH zu $\frac{1}{3}$ von GQB addirt, und die Summe mit der Länge des Fasses multiplicirt giebt den Inhalt des Ausschnittes. Denn es ist klar, daß dieser Inhalt auf eben die Art gefunden wird, wie der vom ganzen Fasse.

§. 31.

Der Ausschnitt (No. 4.) den die dritte Figur vorstellt, wird folgendermaaßen coac-
Fig. 3. quirt. Da die Fläche NQqn einwerts hohl, die Fläche nMq aber auswerts erhaben ist, und beyde Krümmungen überdiß sehr geringe sind, so compensiren sie einander, und man kann sie beyde als flach ansehen. Wenn man sich daher ein Prisma nmqMQN vorstellt, dessen Basis NQM ist, so fällt davon die Pyramide Mnqm und folglich der 3te Theil weg. Daher findet man den Inhalt des Ausschnittes (No. 4.) sehr genau, wenn man $\frac{2}{3}$ von der Basi NMQ mit der Länge des Fasses multiplicirt.

§. 32.

Indem wir auf diese Art jeden der vier Ausschnitte allein betrachten, so scheinet es, als wenn jeder besonders müßte berechnet werden, und dieses würde allerdings weitläuftig fallen. Allein sie lassen sich zu allem Glücke so unter einander vergleichen, daß man diese Mühe sparen kann. Denn da wir für die beyden irregulairen Ausschnitte ihre coaequirte Gründ-

Grundfläche gefunden haben, so können wir die Länge des Fasses anfangs bey Seite setzen, weil die Ausschnitte sich wie die gefundenen Grundflächen verhalten. Demnach ist

No. 1 $= GPN$ Fig. 2.
No. 2 $= GNQ$
No. 3 $= \frac{2}{3}GMH + \frac{1}{3}GQB$
No. 4 $= \frac{2}{3}NMQ$

Folglich die Summe von allen

$= GPN + GNQ + \frac{2}{3}GMH + \frac{1}{3}GQB + \frac{2}{3}NMQ$

ist die ganze Basis, welche mit der Länge des Fasses multiplicirt werden muß, um den Inhalt seiner Helfte EMH zu finden.

§. 33.

Es ist aber

$GPN = \frac{2}{3}GPN + \frac{1}{3}GPN$
$GNQ = \frac{2}{3}GNQ + \frac{1}{3}GNQ$

Hiedurch läßt sich die gefundene Summe in folgende zwo vertheilen, sie ist

$= \frac{2}{3}(GPN + GNQ + GMH + NMQ)$
$+ \frac{1}{3}(GPN + GNQ + GQB)$

§. 34.

Der erste dieser Theile macht $\frac{2}{3}$ von dem Abschnitte MHP, und die andere $\frac{1}{3}$ von dem Abschnitte NBP aus. Daher ist die gefundene Summe der coaequirten Grundflächen kürzer

$= \frac{2}{3}MHP + \frac{1}{3}NBP$

§. 35.

§. 35.

Da diese mit der Länge des Fasses multiplicirt, nur die Helfte seines Inhalts giebt, so dürfen wir, um den ganzen zu finden, weiter nichts thun, als die ganzen Abschnitte mHM, nBN nehmen. Ist demnach die Länge des Fasses $= l$, sein Innhalt $= z$, so ist

$$z = l\left(\tfrac{2}{3}\,mHM + \tfrac{1}{3}\,nBN\right)$$

§. 36.

Hiedurch haben wir für die Visirung der Fässer, die nach der Länge liegen eine allgemeine Regel, die wir folgendermaaßen mehr in die Sinne fallend machen wollen.

Setzet, das Faß habe in der Mitte bey dem Spundloch noch einen Boden, der mit den beyden andern parallel sey. Messet den Raum aus, den der Wein auf diesen dreyen Boden benetzet oder bedeckt. Den Raum des mittlern Bodens nehmet vierfach, und addirt dazu den Raum der äussern Böden. Die Summe wird durch 6 getheilt, und was herauskömmt mit der Länge des Fasses multiplicirt, so wird das Product der Inhalt des Fasses seyn, so weit es angefüllt ist.

§. 37.

Der Fehler, den diese Regel giebt, ist an sich betrachtet am kleinsten, wenn das Faß

halb

halb voll ist, in Vergleichung mit der Quantität Weines wird er desto geringer, je mehr das Faß angefüllt ist, vorausgesetzt, daß man die Höhe des Weines genau ausmesse. Da aber bey der Ausmessung aus verschiedenen Ursachen kleine Fehler unterlaufen, so werden ihre Folgen am größten, wenn das Faß halb voll ist. Denn alsdenn ist die Oberfläche des Weins am breitesten.

§. 38.

Um diese Regel brauchbar zu machen, kömmt alles auf ein Mittel an, den Inhalt der Abschnitte nBN, mHM auf eine leichte Art durch die gemessenen Tiefen PB, PH zu bestimmen, und denselben in Maaße zu verwandeln.

§. 39.

Wir wollen bey der Ausmessung der Fässer, die ganz voll sind, den Anfang machen, und da wir überhaupt den cylindrischen Visirstab gebrauchen werden, so werden wir desselben Verfertigung mit wenigem berühren. Es ist bekannt, daß man denselben deßwegen eingeführt hat, weil sein Gebrauch sehr leicht ist, und weil man jedes Faß in einen Cylinder verwandelt, welcher mit demselben gleiche Länge hat, und dessen Grundfläche das Mittel zwischen der Fläche des größten und kleinsten Durchschnittes des Fasses ist. Da die Cylinder in Verhältniß ihrer Höhen und ihrer der Grundflächen sind, so nimmt man ein cylindrisches Gefäß an, daß ein Maaß hält, man vergleicht seine Höhe mit der Höhe des Fasses, und bestimmt wie vielmal jene in dieser enthalten. Ferner sieht man auch wie vielmal der Diameter in dem Diameter des Cylinders enthalten, in welchen man das Faß verwandelt. Diese leztere Zahl wird quadrirt, und das Quadrat mit der erstern multiplicirt, und so findet man, wie viel Maaß das Faß hält.

§. 40.

Um sich die Mühe des Quadrirens zu ersparen, hat man einen doppelten Maaßstab angenommen. Man stellt sich eine Reyhe cylindrischer Gefäße von gleicher Höhe vor, die der Ordnung nach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 rc. Maaß halten, und sucht ihre Diameter. Da sich diese wie die Quadratwurzeln der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 rc. verhalten, so können sie alle berechnet werden, so bald man den Diameter von einem dieser Gefäße weiß. Ueberhaupt nimmt man dazu das Gefäß an, so nur ein Maaß hält. Es ist aber für sich klar, daß wenn man seine Höhe und seinen Diameter nicht genau weiß, der Fehler sich vergrössert. Da es aber nothwendig ist, den Visirstab genau zu machen, so thut man besser, wenn man zur Grundlage desselben ein grösseres Gefäß annimmt, und die gesuchten Diame-

Diameter daraus berechnet. Man kann sich hiezu ein cubisches Gefäß machen lassen, und dasselbe mit etlichen Eymern Wasser füllen, und sodann in Cubiczollen, und ihren Decimaltheilen den Inhalt berechnen. Dieser wird durch die Anzahl von Maaßen dividirt, die man hineingegossen, und so erhält man den Inhalt einer Maaß in Cubiczollen und ihren Decimaltheilen. Diese verwandelt man in einen Cylinder von gleicher Höhe und Diameter, welcher aber wiederum sehr genau muß berechnet werden. Da man hiedurch die Höhe des zum Grunde gelegten Cylinders findet, so wird sie auf der einen Seite des Visirstabes herumgetragen, und da diese Seite dazu dient, die Länge des Fasses auszumessen, so wollen wir sie die Längenseite nennen. Jeden Theil kann man in 10 kleinere, und diese wiederum in 10 andere eintheilen, um nicht nur die Länge des Fasses desto genauer zu messen, sondern auch die Rechnung auf Decimalbrüche zu bringen, welche viel leichter sind.

§. 41.

Den ebenfalls gefundenen Diameter der cylindrischen Maaße quadrirt man, und das Quadrat wird der Ordnung nach mit 1, 2, 3, 4 2c. multiplicirt, und aus dem Producte die Quadratwurzel gezogen, und so erhält man die Länge der Diameter von solchen Cylindern, die gleiche Höhe haben, aber 2, 3, 4, 5 Maaß halten. Oder man sucht von dem einfachen Diameter seinen Logarithmus, und addirt zu demselben der Ordnung nach die Helfte der Logarithmen von 2, 3, 4, 5, 6 ꝛc. so erhält man die Logarithmen der gesuchten Diameter. Oder man theilt den einfachen Diameter in 1000 Theile wirklich ein, und in solchen Theilen findet man die Diameter von 2, 3, 4, 5 ꝛc. Maaß aus solchen Tabellen, die man zur Vervielfältigung der Figuren schon längst berechnet hat. Diese gefundene Diameter werden auf die andere Seite des Maaßstabes getragen, welche die Flächenseite heißen mag. Es ist gut wenn man auch hier Decimaltheile mitnimmt, so weit es sich wegen der allmähligen Verschmälerung der ganzen Theile thun läßt.

§. 42.

Fig. 1. Der gemeine Gebrauch dieser zwo Seiten ist folgender. Mit der Längenseite mißt man die innere Länge des Fasses IL, oder wenn man die äussere mißt, so muß die Dicke beyder Böden abgezogen werden. Mit der flachen Seite mißt man die Diameter EH, AB und auch DC, wenn AB und DC ungleich sind. Von den beyden Böden nimmt man in solchem Fall das Mittel, und endlich von diesem Mittel und dem Diameter EH, das andere Mittel, und dieses wird mit der gefundenen Länge IL multiplicirt, so erhält man den

Inhalt

Inhalt eines Cylinders, welcher das Mittel zwischen dem grösten und dem kleinsten ist, und welchen man dem Inhalt des Fasses gleich setzt.

§. 43.

Wir haben aber schon gesehen, daß man auf diese Art auf jede zwölf Maaß eine fehlen kann, welcher Fehler allerdings beträchtlich ist. Es ist also zu zeigen, wie man mit diesem Visirstaabe der Wahrheit näher kommen könne. Und hiezu gebrauchen wir die oben erwiesene erste Methode, mit welcher man, wenn bey dem Ausmessen selbst keine Fehler vorgehen, und das Faß keine merkliche Irregularität hat, auf 150 Maaß kaum eine fehlt.

§. 43.

Mit der Längenseite wird IL wie vorhin ausgemessen. Eben so mißt man mit der Flächenseite die Diameter EH, AB, DC. Von der für EH gefundenen Zahl nimmt man zween Drittel, und von AB deßgleichen von DC einen Sechstel, und addirt diese Theile zusammen. Die Summe wird mit der gefundenen Länge multiplicirt, und das Product giebt die Anzahl von Maaßen, die das Faß hält, oder wovon es kaum um $\frac{1}{150}$ unterschieden ist, wenn keine andere Unrichtigkeiten dazu kommen.

§. 44.

Wenn man den Diameter des einen Bodens nicht mißt, so nimmt man von dem gemessenen einen Drittel, und addirt ihn zu den $\frac{2}{3}$ von der Spundtiefe EH, um die Summe mit der Länge zu multipliciren, und dadurch den Inhalt zu finden.

§. 45.

Will man der Mühe überhoben seyn, von EH zween Drittel, und von AB einen Drittel zu nehmen, so ist das beste, wenn man die Zahlen auf der Flächenseite des Visirstabes gleich Anfangs dazu einrichtet. Es ist klar, daß man zu dem Ende diese Seite doppelt eintheilen muß. Für die erste Abtheilung nimmt man für jede drey Maaße nur zwo, und für die andere Abtheilung nur eine. Jene mag die Spundseite, diese aber die Bodenseite heißen. In diesem Fall aber muß entweder nur ein Boden gemessen, oder von beyden das Mittel genommen werden, wenn sie ungleich sind, ehe man die Zahl zu derjenigen addirt, so man bey Ausmessung der Spundtiefe gefunden.

§. 46.

Um nun auch die Genauigkeit durch angestellte Proben zu untersuchen, so sind mir folgende mitgetheilt worden. Die Fässer wurden nach der Methode des §. 43. gemessen.

Faß

Faß No.	Längenmaaß von IL	Flächenmaaß von AB	DC	EH	gemessener Inhalt
I.	9,83	18,75	18,75	29,15	255 Maaß
II.	9,80	21,45	21,35	29,15	260
III.	9,60	19,35	18,95	31,90	260
IV.	6,97	29,92	30,25	39,70	252

§. 47.

Wird nun $\frac{1}{6}AB + \frac{1}{3}DC + \frac{1}{2}EH$ mit IL multiplicirt, so findet man den Inhalt

Faß	gemessen	berechnet	Unterschied
I.	255	252,4	—2,6.
II.	260	260,3	+0,3.
III.	260	264,9	+4,9.
IV.	252	254,4	+2,4.

§. 48.

Der Unterschied bey dem dritten Fasse ist bey nahe 5 Maaß auf 260, folglich auf 52 Maaß eine, welches ziemlich merklich ist, und vermuthlich von der Irregularität des Fasses, oder vielleicht auch von einem kleinen Fehler in der Ausmessung herkömmt. Die Fehler bey dem ersten und vierten Fasse sind $2\frac{1}{2}$ Maaß. und daher auf 100 Maaß eine, welches erträglicher ist. Aber alle diese Fehler sind geringe gegen die, welche nach der gemeinen Art vorkommen, wo man zwischen AB und EH das Mittel nimmt, oder $\frac{1}{4}AB + \frac{1}{4}CD + \frac{1}{2}EH$ mit IL multiplicirt. Denn so bekommen wir

Faß	gemessen	berechnet	Unterschied.
I	255	235,0	— 20,0.
II	260	247,6	— 12,4.
III	260	245,0	— 15,0.
IV	252	243,2	— 8,8.

§. 49.

Der kleinste Fehler beläuft sich hier auf 9 Maaß, und ist nur deßwegen geringer als die übrigen, weil bey dem 4ten Fasse die Diameter AB, EH nur um den achten Theil von einander unterschieden waren. Denn es ist klar, daß die gemeine Visirart richtig zutreffen würde, wenn diese Diameter vollkommen gleich wären. Hingegen bey dem ersten Fasse waren die Diameter AB, EH wie 4 zu 5, und daher um den 5ten Theil unterschieden, und dieser Umstand brachte den Fehler bis auf 20 Maaß. Bey dem 2ten Fasse waren die Diameter bey nahe wie 6 zu 7. Und dieses machte wiederum den Fehler kleiner. Endlich bey dem 3ten Fasse waren sie wie 7 zu 9. Und daher müßte der Fehler geringer als bey dem ersten, hingegen aber grösser als bey dem zweyten seyn. Es ist also auch hieraus offenbar, daß bey der gemeinen Visirart der Fehler zugleich mit der Krümmung der Dauben grösser wird.

§. 50.

Bey unserer Methode verhält es sich ganz anders, und man kann aus diesen Beyspielen sehen,

sehen, daß sich der Fehler nicht nach der Krümmung der Dauben richtet, sondern bloß von der Irregularität des Fasses und von der Genauigkeit in der Ausmessung abhängt. Denn das erste Faß hatte die stärkste, das vierte aber die kleinste Krümmung, und die Fehler waren gleich, und zwar noch mit dem Unterschied, daß die Rechnung bey dem ersten Fasse $2\frac{1}{2}$ Maaß zu wenig, bey dem vierdten aber zu viel gab.

§. 51.

Da übrigens die Fässer mit Eymern gefüllt werden, so giebt es noch einen andern Umstand, welcher machen kann, daß das wirklich genommene Maaß fehlt, und diesen müssen wir hier anführen, weil auch bey Verfertigung der Visirstäbe viel darauf ankömmt.

§. 52.

Einmal wenn man solche Eymer zum Messen gebraucht, die bis oben angefüllt werden müssen, so läßt sich die Fläche des Wassers nicht so eben machen, als wenn man ihn mit Sand gefüllt und abgestrichen hätte. Ist der Eymer in Ruhe, und sein oberer Stand ist nicht benetzt, so kann man ungleich mehr Wasser hinein gießen, als es gebrauchte, um ihn eben anzufüllen, zumal wenn man sachte eingeußt. Man darf sich hier nur erinnern, daß man in gleichen Umständen das Wasser in einem Glase aufthürmen kann, wenn man allmählig kleine Münzen hineinsinken läßt. Doch so sachte geht man mit dem Auffüllen nicht um, und die Eymer werden selten oder gar nicht bis oben angefüllt. Sie haben mehrentheils an der innern Seite zwey Zeichen, bis an welche die Fläche des Wassers gehen muß. Da aber wenn die innere Seite des Eymers einmal naß ist, das Wasser an derselben sich herauf zieht, und daher höher steht als in der Mitte, so wird gewöhnlich geschehen, daß in der That weniger Wasser eingegossen wird, als es seyn sollte. Hat der Eymer überdiß eine breite Fläche, so hat man bald eine Maaß und mehr weniger, als man anrechnet. Will man aber dem Maaße zugeben, so daß das Zeichen in dem Wasser stehe, so ist nichts leichters als daß man der Sache zu viel thut, und daher mehr Wasser hineingeußt, als nöthig wäre um das Maaß auszumachen.

§. 53.

Um die Ausmessung solcher Fässer, die nicht ganz angefüllt sind, leicht und genau zu machen, wozu man bißher noch kein Mittel gehabt, werden wir oben (§. 36.) angegebene allgemeine Methode gebrauchen, und zu dem Ende folgende Betrachtungen voraus schicken.

§. 54.

Diese Methode fordert, daß man die beyden Ausschnitte nBN, mHM ausmesse. Soll man hiezu den cylindrischen Maaßstab gebrauchen, so stelle man sich zwey Gefäße vor, deren Grundfläche die Abschnitte nBN, mHM, die Höhe aber der Länge des Fasses gleich ist. Solche Gefäße sind Abschnitte von Cylindern, und ihr Inhalt wird gefunden, wenn man ihre Höhe mit der Grundfläche multiplicirt. Fig. 24

§. 55.

Die Höhe ist der Länge des Fasses gleich, und wird daher mit der Längenseite des Visirstabes schlechthin ausgemessen. Demnach kömmt die ganze Schwürigkeit auf die Ausmessung der Grundfläche an. Zu diesem Ende wollen wir anmerken, daß der Abschnitt mHM zu dem ganzen Circul mEMH eine bestimmte Verhältniß hat, so bald die Verhältniß zwischen dem Diameter EH und dem Theile PH bestimmt ist, und überhaupt verhalten sich ähnliche Abschnitte eines Circuls, wie die Quadrate der Diameter.

§. 56.

Wenn man demnach den Diameter EH in 100 gleiche Theile theilt, und für jeden Theil HP den Inhalt des Abschnittes mHMm in solchen Theilen berechnet, deren der ganze

Circul 10000 hat, so entsteht eine Tabelle, in welche man für jede hundertste Theile des Diameters den Inhalt des dazu gehörigen Abschnittes in 10000ten Theilen des Inhalts des ganzen Circuls findet. Diese Tabelle ist folgende:

HP	mHM	HP	mHM	HP	mHM	HP	mHM
0	0	25	1955	50	5000	75	8045
1	17	26	2066	51	5128	76	8155
2	48	27	2179	52	5255	77	8263
3	87	28	2293	53	5382	78	8369
4	134	29	2407	54	5509	79	8473
5	189	30	2523	55	5636	80	8576
6	247	31	2641	56	5762	81	8677
7	308	32	2759	57	5888	82	8777
8	374	33	2878	58	6014	83	8875
9	443	34	2998	59	6139	84	8970
10	518	35	3119	60	6264	85	9060
11	597	36	3241	61	6389	86	9149
12	679	37	3363	62	6513	87	9236
13	764	38	3487	63	6637	88	9321
14	851	39	3611	64	6759	89	9403
15	940	40	3736	65	6881	90	9482
16	1030	41	3861	66	7002	91	9557
17	1125	42	3986	67	7122	92	9626
18	1223	43	4112	68	7241	93	9692
19	1323	44	4238	69	7359	94	9753
20	1424	45	4364	70	7477	95	9811
21	1527	46	4491	71	7593	96	9866
22	1631	47	4618	72	7707	97	9913
23	1737	48	4745	73	7821	98	9952
24	1845	49	4872	74	7934	99	9983
25	1955	50	5000	75	8045	100	10000.

§. 57.

§. 57.

Will man nun den wahren Inhalt des Abschnittes mHM vermittelst des cylindrischen Maaßstabes finden, so gebraucht man erstlich die Längenseite, und mit dieser mißt man sowohl den Diameter EH, als die die Höhe des Weins HP. Sodann macht man die Regel de Tri: Wie sich EH zu HP verhält, so verhält sich 100 zu der vierten Zahl, welche man auch in Decimaltheilen suchen muß, eben so wie auch EH und PH bis auf Decimaltheile müssen gemessen werden. Hat man nun diese vierte Zahl gefunden, so wird sie in vorstehender Tabelle in der Columne HP aufgesucht, und die nebenstehende Zahl in der Columne mHM herausgenommen, welches, wenn es vorkömmt mit dem sogenannten Proportionaltheil geschehen muß.

§. 58.

Sodann gebraucht man die Flächenseite des Visirstabes, und mit derselben mißt man nochmals den Diameter EH, um den Inhalt des ganzen Circuls EmHM in Maaßen zu finden. Dißgiebt die zweyte Regel de Tri: Wie sich 10000 zu der erst aus der Columne mHM genommenen Zahl verhält, so verhält sich die gefundene Anzahl der Maaße des ganzen Circuls EmHM zu der vierten Zahl, und

diese

diese wird sodann der gesuchte Inhalt des Abschnittes mHMm seyn.

§. 59.

Auf eine ähnliche Art findet man auch den Innhalt des andern Abschnittes nBNn, und es gebraucht also in allem vier Regeln de Tri. Allein da man die Höhe des Weins PB nicht unmittelbar ausmessen kann, so muß man erstlich die beyden Diameter EH, AB messen, und sie von einander abziehen. Die Helfte des Unterschiedes ist BH, und muß von der Spundhöhe des Weins PH, die man ausgemessen hat, abgezogen werden, damit man PB bekomme.

§. 60.

Ein Beyspiel mag diese Regeln aufklären. Setzet, man habe mit der Längenseite gefunden

$AB = 4,34.$ den Circul $AnBN = 18,85$
$EH = 5,40.$ $EmHM = 29,25.$
$PH = 3,25.$

so ist

$EH - AB = 5,40 - 434 = 1,06$

folglich

$BH = 0,53$

und daher

$PB = PH - BH = 3,25 - 0,53 = 2,72$

Nun setzt man die Regel de Tri

5, 40

5,40 : 3,25 = 100 : 60,2.
4,34 : 2,72 = 100 : 62,7.

Diese zwo Zahlen 60,2 und 62,7 werden in der ersten Columne der Tafel aufgesucht, und die nebenstehende Zahl mit ihrem Proportionaltheil ist

für 60,2 = 6314.
für 62,7 = 6600.

Hieraus folgen die zwo andern Regeln de Tri

10000 : 6314 = 29,25 : 18,45.
10000 : 6600 = 18,85 : 12,44.

folglich hält der Abschnitt

mHM = 18,45 Maaß
nBN = 12,44 Maaß

§. 61.

Ist dieses gefunden, so wird $\frac{2}{3}$ von mHM zu $\frac{1}{3}$ von nBN addirt, und die Summe mit der Länge des Fasses multiplicirt, und das Product wird der gesuchte Inhalt des Weines seyn, mit welchem das Faß bis in mM angefüllt ist.

§. 62.

Es ist nicht zu läugnen, daß diese Methode weitläuftiger ist, als die für ganz volle Fässer. Indessen ist sie für solche Fälle, die man noch nicht berechnen können, und dabey die Hoffnung sie genau zu berechnen sehr gering war,

war, allerdings noch kurz genug. Folgende Betrachtungen werden dienen, sie noch kürzer zu machen.

§. 63.

Einmal, wenn man die vier Regeln de Tri beybehalten will, so kann man die vorstehende Tabelle vollständiger machen, und sie biß auf jede tausendste Theile des Diameters ausdehnen. Dieses wird die Mühe sparen den Proportionaltheil zu suchen, weil man denselben nicht leicht genauer gebraucht.

§. 64.

Ebenfalls wenn man die Regeln de Tri abkürzen will, kann man statt solcher Tabelle, logarithmische Tabellen gebrauchen, welche sich aus der Art wie die Regeln de Tri gebraucht werden, leicht finden und berechnen lassen. Will man es noch kürzer machen, so verfertigt man sich zween logarithmische Stäbe, welche denen, die Scheffelt beschrieben, ganz ähnlich seyn werden.

§. 65.

Allein alle diese Mittel sind für die Faßvisirer gar zu weitläuftig, welche viel lieber das Ausmessen abkürzen, und an statt sich mit Rechnungen den Kopf zu brechen, williger Octavbände von ausgerechneten Tabellen bey sich tragen, um jeden vorkommenden Fall

darin

darin berechnet zu finden. Zu diesen werde ich nun den Stoff und die Abkürzungen in der Rechnung angeben.

§. 66.

Es ist für sich klar, daß man hier Faßböden von verschiedenen Diametern, und für jeden Boden so viel Abschnitte berechnen müsse, als es nöthig ist, daß der Unterschied bey Weglassung des Proportionaltheils, welchen man aus Vergleichung zwoer Tabellen suchen müßte, sehr geringe sey. Der Proportionaltheil in einer jeden Tabelle für verschiedene Abschnitte mag beybehalten werden.

§. 67.

Da hier alles nach dem Längenmaaße genommen wird, und die Diameter der cylindrischen Maaße an verschiedenen Orten verschieden sind, so wollen wir dennoch mehrerer Deutlichkeit halben drey solche Diameter auf einen Schuh rechnen, weil die Größe der Fässer dadurch deutlicher wird.

§. 68.

Man setze, der Diameter des kleinsten Fasses sey ein Schuh, des größten aber 10 Schuh, und so weit mag also die Tabelle ausgedehnt werden. Es bleibt hiebey viel willkührliches. Es müssen daher von 3 bis 30 cylindrischen Maaßen alle Diameter angenommen werden,

welche

welche von $\frac{1}{10}$ zu $\frac{1}{10}$ von einander unterschieden sind. Hieraus entstehen so viele einzele Tabellen als Zahlen in der Reyhe 3,0; 3,1; 3,2; 3,3; 3,4 rc. = = = 29,9. 30,0 sind. Diese Zahlen sind zugleich die Ueberschrift der Tabellen dazu sie gehören. Und wenn der Visirer die Spundtiefe oder den Diameter des Bodens eines Fasses bis auf zehnte Theile seiner Längenseite mißt, und z. E. 4,3 findet, so wird er die Tabelle aufschlagen können. Hiedurch haben wir also die Anzahl der Tabellen bestimmt, und jede dient für einen besondern Diameter.

§. 69.

Jeder Diameter muß ferner in eine gewisse Anzahl gleiche Theile getheilt werden, damit man die dazu gehörigen Abschnitte berechnen könne. So z. E. kann man in den ersten Tabellen von 3,0 bis 10,0 bey jeden Decimaltheilen bleiben, daß man den Diameter 3,0 in 30, den Diameter 3,1 in 31, den Diameter 3,2 in 32 Theile eintheile. Von 10,0 bis 20,0 kann man zween Decimaltheile nehmen, und von 20, bis 30,0 drey, damit man einer Tabelle nicht überflüßig viel Columnen gebe.

§. 70.

Da wir hier die cylindrische Maaß gleich hoch und weit annehmen, so giebt das Quadrat

drat eines jeden Diameters, den Inhalt des Circuls in cylindrischen Maaßen. Daher kann vorstehende Tabelle, besonders wenn sie weiter ausgedehnt wird, zur Erleichterung der Berechnung dienen.

§. 71.

Sie wird noch auf folgende Art abgekürzt. Man nehme von 3, 0, bis 30,0 nur die Primzahlen, und berechne für selbige die Tabellen, so werden sich die übrigen Tabellen aus diesen durch eine leichte Multiplication und durch Aufsuchung der Proportionaltheile geben. Z. E. aus der Tabelle 3, 1 findet man die Tabelle 6, 2, 9, 3. 12, 4. 15, 5 ꝛc. wenn man ihre Zahlen mit 4, 9, 16, 25 ꝛc. multiplicirt, und die so dazwischen fehlen, einschaltet.

§. 72.

Eben so kann jede Tabelle nur bis auf die Helfte gerechnet werden, denn die andere Helfte findet man, wenn man die Zahlen der ersten von dem Inhalt des ganzen Circuls abzieht.

§. 73.

Sind diese Tabellen berechnet, so gebraucht der Visirer nur die Längenseite des cylindrischen Visirstabes. Er mißt die beyden Diameter AB, EH bis auf Decimal theile, und Fig. 1.
die Zahlen geben ihm die Tabellen an, die

er aufzuschlagen hat. Sodann mißt er die Höhe des Weins durch das Spundloch, und diese sucht er in der Tabelle auf, die er für EH aufgeschlagen, so findet er gleich daneben wie viel Maaß der Abschnitt des Circuls hält, der der Durchschnitt des Fasses beym Spundloch ist. Ferner zieht er die beyden Diameter von einander, und die Helfte des Unterschiedes von der Spundhöhe des Weines ab, den Ueberrest sucht er in der andern aufgeschlagenen Tabelle auf, und da findet er die Maaß Wein, der auf dem Abschnitte des Bodens ist. Von diesen addirt er den dritten Theil zu zween Drittel der erstern, und multiplicirt die Summe durch die Länge des Fasses, welche mit eben der Längenseite gemessen wird, um den Inhalt des Weins im Fasse zu finden.

§. 74.

Diese Methode Fässer zu visiren, die nicht ganz voll sind, ist die kürzeste, die ich habe finden können. Sie erspart dem Visirer die meiste Mühe, wenn diese Tabellen ein für allemal berechnet sind. Wenn es sich der vorkommenden Fälle halber die Mühe lohnt, die Tabellen zu berechnen, so bleibt noch zu zeigen, ob es ihre Genauigkeit ebenfals verdiene. Hierüber ist mir folgender Versuch mitgetheilt worden, den ich in die Kürze gezogen vortragen will.

§. 75.

§. 75.

Ein Faß das 54 Eymer und 7 Maaß, oder jeden Eymer zu 32 Maaß gerechnet, in allem 1735 Maaß hielte, wurde nach und nach mit Wasser angefüllt. Von drey zu drey Eymern, die man hineingosse, wurde die Spundhöhe mit einem cylindrischen Visirstabe gemessen. Da es hiebey nur auf die Proportion ankömmt, so merke ich kürzlich an, daß sich der Diameter des Fasses beym Spundloche zum Diameter des Bodens wie 1000 zu 881 oder ihre Quadrate wie 125 zu 97 verhielten. Vertheilt man demnach die 1735 so, daß der Circul EMH doppelt, hin- Fig. 2. gegen AQB einfach genommen wird, um die Reductionen zu ersparen, so hat

2.EMHm = = 1250 Maaß
ANBn = = 485 Maaß.

Werden endlich beyde Diameter EH, AB in 1000 Theile getheilt, und in diesen Theilen die Höhen HP, BP für jede drey Eymer ausgedrückt, so kann der berechnete Inhalt aus obiger Tabelle gefunden, und mit dem gemessenen verglichen werden. Alles wird in folgender Tabelle vorgestellt:

HP	BP	gemessen	berechnet	Unterschied
118	69	96	98,0	+2,0
178	141	192	192,1	+0,1
232	201	288	287,1	−0,9
279	253	384	380,6	−3,4
328	309	480	481,2	+1,2
370	358	576	576,4	+0,4
417	407	672	673,5	+1,5
459	453	768	773,3	+5,3
502	502	864	871,3	+7,3
543	549	960	966,1	+6,1
585	597	1056	1051,5	−4,5
630	647	1152	1161,5	+9,5
672	699	1248	1257,5	+9,5
716	743	1344	1344,2	+0,2
760	794	1440	1437,6	−2,4
819	856	1536	1537,7	+1,7
880	920	1632	1632,0	+0,0
1000	1000	1735	1735,0	+0,0.

§. 76.

Die größten Unterschiede fallen in die Mitte, weil daselbst ein geringer Fehler in der Ausmessung der Spundhöhe des Weines sich auf die größte Fläche ausbreitet. Der größte ist $9\frac{1}{2}$ Maaß, und beträgt folglich auf 120 Maaß kaum eine, welches allerdings sehr wenig ist, und die Genauigkeit der Methode eben so wohl als die von der Ausmessung anzeigt.

§. 77.

Aufdem cylindrischen Maaßstabe gebraucht man die Flächenseite, um sich eine Multiplication zu ersparen. Ohne diesen Vortheil würde die Längenseite allein zureichend seyn. Setzet z. E. die Längenseite sey AB. Man habe mit derselben die Spundtiefe AD = 5, 6 Fig. 4. die Bodentiefe AE = 4, 1 gemessen so ist nach der zweyten Methode (§. 22.) die coäquirte Tiefe AF = 5, 1. Dieses wäre demnach der Diameter eines Cylinders, der mit dem Fasse einerley Länge AC = 9, 2 und Inhalt hätte.

§. 78.

Vermöge der Einrichtung des cylindrischen Maaßstaabes wird dieser Inhalt gefunden, wenn man den coäquirten Diameter AF = 5, 1 quadrirt, und das Quadrat 26,01 mit der Länge des Fasses AC = 9, 2 multiplicirt. Der Inhalt ist demnach $= 239\frac{1}{3}$ Maaß. Hätte man die Flächenseite gebraucht, so würde man darauf das Quadrat 26, 01 vermöge der obigen Methode (§. 43.) sogleich gefunden und sich daher diese erste Multiplication erspart haben. Hingegen bleibt die andere bey dieser Abkürzung noch nothwendig. Ich habe demnach auf ein Mittel gedacht, diese ebenfalls zu ersparen, welches ich nun folgender gestallt vortragen werde.

§. 79.

Der cylindrische Maaßstab ist so eingetheilt, daß wenn die Länge des Fasses dem coäquirten Diameter AF gleich wäre, dieser Diameter nur dürfte cubirt werden, um den Inhalt des Fasses zu haben. Denn man müßte das Quadrat von AF mit der Länge, welche in diesem Falle ebenmäßig AF ist, multipliciren, dadurch verfällt man nothwendig auf den Cubum von dieser Zahl. Dieser so schickliche Umstand würde die Längen- und Flächenseite des Visirstabes mit einem male überflüßig machen, weil man statt der Zahlen auf der Längenseite nur ihre Cubos hinschreiben dürfte, und das cubiren würde dadurch erspart, weil diese cubische Seite sogleich den Inhalt des Fasses angeben würde. Da aber die Fässer so schicklich nicht sind, so laßt uns sehen, wie man der ungleichen Länge und Tiefe ungeacht, diese Erleichterung erreichen kann.

§. 80.

Wir haben schon oben eine Verwandlung mit dem Fasse vorgenommen (§. 27.) welche dasselbe zu einem coaequirten Cylinder von gleichem Inhalt macht. Aber dieser Cylinder behielte eben die Länge, die das Faß hat. Diese erste Verwandlung bleibt immer nothwendig, und wir werden demnach AF als seinen Diameter, AC als seine Länge ansehen.

§. 81.

§. 81.

Nun ist die Frage diesen Cylinder in einen andern zu verwandeln, der von gleichem Inhalte, und dessen Diameter und Länge einander gleich seyn. Setzet dieser vergleichene Diameter und Länge seyen AG, so ist aus voriger Betrachtung (§. 79.) offenbar, daß sein Inhalt der Cubus von AG seyn werde. Dieser Inhalt aber ist dem von dem länglichten oder coaequirten Cylinder gleich, folglich haben wir

$$AG^3 = AF^2 \cdot AC$$

aus dieser Formel erhellt, daß AG die erste von den zwo mittlern Proportionalflächen sey, die zwischen AF und AC fallen. Denn die Regel für diese Proportionalzahlen giebt, daß man das Quadrat von AF mit AC multipliciren, und aus dem Product die Cubicwurzel ausziehen solle.

§. 82

Würde man demnach vermittelst der beyden Puncte F und C den Punct G auf eine leichte Art finden können, so ist unstreitig, daß der Visirstab AB nur die cubische Seite (§. 79.) haben dürfte, und daß man auf solche Art bey dem Punct G die Zahl $239\frac{1}{3}$ als den Inhalt des Fasses finden würde.

§. 83.

Eben so würde man den Punct G nicht einmal nöthig haben, wenn sich der Inhalt

$AF.^2 AC$ durch solche Cubos ausdrücken liesse, welche durch die beyden F, C gefunden werden könnten.

§. 84.

Diese Mittel sind möglich. Wir wollen bey dem letztern anfangen. Da die beyden Längen AF, AC gegeben sind, so haben wir den Cubum

ihrer Summe

$$(AC+AF)^3 = AC^3 + 3\,AC.^2 AF + 3\,AC.AF^2 + AF^3$$

ihrer Differenz

$$(AC-AF)^3 = AC^3 - 3\,AC.^2 AF + 3\,AC.AF^2 - AF^3$$

diese beyde Cubos addirt, geben

$$(AC+AF)^3 + (AC-AF)^3 = 2AC^3 + 6\,AC.AF^2$$

folglich der Inhalt des Fasses

$$AC.AF^2 = \frac{(AC+AF)^3 + (AC-AF)^3 - 2\,AC.^3}{6}$$

durch solche Cubos ausgedrückt, deren Puncte sich auf dem Visirstabe finden lassen.

§. 85.

Man trage nemlich den coaequirten Diameter EF, aus dem Längenpunct C in f und e, so ist der Inhalt des Fasses

$$AF.^2 AC = \frac{Af^3 + Ae^3 - 2.AC^3}{6}$$

Wären demnach bey den Puncten e, f, C die Cubi geschrieben, so würde man bey

f 2942

f 2924
e 69

finden, und von der Summe 2993 müßte man 1557 als die doppelte Zahl des Puncts C abziehen, und den Ueberrest 1436 durch 6 theilen, und so würde man den Inhalt $239\frac{1}{3}$ bekommen.

§. 86.

Will man die Tafeln von den Cubiczahlen hiebey gebrauchen, so kann man sich mit der Längenseite des Visirstabes begnügen. Die Rechnung wird folgende seyn. Man setze, der coaequirte Diameter AF sey 5, 1. Die Länge des Fasses AC sey 9, 2. Diese beyden werden addirt und subtrahirt, die Summe ist 14, 3, der Unterschied 4, 1. In den Tabellen findet man den Cubus

von der Summe	= 2924
von der Differenz	= 69
diese addirt, geben	2993
den doppelten Cubum von AC	= 1557
abgezogen bleiben	1436
Hievon der 6te Theil	= $239\frac{1}{3}$

giebt den Inhalt des Fasses.

§. 87.

Will man sich die Mühe ersparen den Cubum von AC zu verdoppeln, und den gefundenen Rest durch 6 zu theilen, so kann man sich hiezu besondere Tabellen berechnen, in welchen diese Division schon mitgenommen ist. Diese Tabellen haben drey Columnen. In der ersten stehen die Zahlen Ae, Af, AC der natürlichen Ordnung nach, in der zweyten steht der sechste, und in der dritten der dritte Theil von ihren Cubis. Die Zahlen Ae, Af, AC können mit ihren Decimaltheilen genommen werden. Diese Tabellen würden ungefehr so aussehen:

Theile	Summe und Differenz	Länge
1, 0	0, 2	0, 3
1, 1	0, 2	0, 4
1, 2	0, 3	0, 6
1, 3	0, 4	0, 7
1, 4	0, 5	0, 9
1, 5	0, 6	1, 1
1, 6	0, 7	1, 4
1, 7	0, 8	1, 6
1, 8	1, 0	1, 9
1, 9	1, 1	2, 3
2, 0	1, 3	2, 7
2, 1	1, 5	3, 1
2, 2	1, 8	3, 5
2, 3	2, 0	4, 1
2, 4	2, 3	4, 6
2, 5	2, 6	5, 2
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

§. 88.

Aus dieser Tabelle würde man für das vorige Exempel in der ersten Columne die Zahlen 14, 3; 4, 1 und 9, 2 aufsuchen. Neben den

den beyden erstern würde man in der zweyten Columne die Zahlen 487, 3 und 11, 5 finden, davon die Summe = 498, 8 ist. Von dieser Summe müßte man die Zahl 259, 5 welche in der dritten Columne neben der Länge des Fasses 9, 2 stünde, abziehen, und der Ueberrest 239, 3 oder 239$\frac{1}{3}$ würde den Inhalt des Fasses geben.

§. 89.

Es ist für sich klar, daß man die cubische Seite des Visirstabes auf eine ähnliche Art doppelt eintheilen kann. Wo auf der Längenseite die Längenmaaße würden zu stehen kommen, da müßte man auf der einen Eintheilung der cubischen Seiten den sechsten, auf der andern aber den dritten Theil des Cubi der Längenmaße hinschreiben. Die beyden Puncte e, f würden auf der ersten Eintheilung, der Punct C aber der zweyten genommen werden.

§. 90.

Da man den coäquirten Diameter AF von dem Längenpunct C an bis in f austragen muß, welches vermittelst eines jeden andern Stabes geschehen kann, so ist Af die Summe von dem Diameter und der Länge des Fasses. Hat demnach das Faß eine ansehnliche Größe, so ist leicht zu erachten, daß der Visirstab sehr lang seyn müßte, wenn man bey großen Fässern damit ausreichen wollte.

wollte. Man kann sich aber hiebey eines Vortheils bedienen, den wir bey dem einfachen cubischen Visirstabe (§. 79) durch ein Beyspiel erläutern wollen.

§. 91.

Es sey der Visirstab AB, der coaequirte Diameter AF, die Länge des Fasses AC. Da
Fig. 5. nun der Stab zu kurz ist, als daß er sollte die Summe von AC und AF fassen können, so merke man die Zahlen, so bey den Puncten C und F stehen. Diese sind 800 und 150. Für diese nehme man die zehnfach kleinere 80 und 15 bey c und f. Man trage sodann Af aus c in e und f, woselbst sie die Zahlen 6, 3 und 310, 8 abschneiden, welche ebenfalls zehnfach kleiner sind. Nun ist der Inhalt des Fasses

$$= 10. \left(\frac{Ae + Ag - 2\,Ac}{6}\right)$$

folglich

$$= \frac{10.(6{,}3 + 310{,}8 - 160)}{6} = 262 \text{ Maaß.}$$

§. 92.

Man sieht leicht, daß man statt des zehnten Theils auch nur die Helfte den dritten, vierten oder jeden andern Theil hätte nehmen können, weil man hiedurch die Ausmessung eines grössern Fasses auf ein anderes reducirt, daß der halbe, dritte, vierte &c. zehnte Theil von dem

dem vorgegebenen ist, und in allem gleiche Proportion mit demselben hat. Je weniger man hiebey verkleinern darf, desto genauer wird auch die Ausmessung, weil man in diesem Falle auf dem Stabe noch kleinere Theile unterscheiden kann. Der hier beschriebene Vortheil erstreckt sich ebenfalls auf die gedoppelte Eintheilung wovon wir vorhin (§. 89.) geredt haben.

§. 93.

Bey der Visirung ganzer Fässer, die wir hier angegeben haben, kömmt ein Umstand vor, welcher verdient mit andern Worten ausgedruckt zu werden, damit er desto klarer in die Augen falle. Denn will man das Faß in einen Cylinder verwandeln, der von gleichem Diameter und Länge sey, so muß man zwischen der Bodentiefe AE, der Spundtiefe AD und der Länge des Fasses AC auf zweyerley Art eine von zwo mittlern Proportionalgrößen suchen, und zwar Fig. 4.

1.° Zwischen den beyden Diametern AD und AE sucht man zwo arithmetische mittlere Proportionalgrößen, davon man die behält, die näher bey D ist, nemlich AF. Dieses geschieht schlechthin indem man ED in 3 Theile theilt, und einen dritten Theil aus D in F trägt.

2.° Hat man F arithmetisch gefunden, so müssen zwischen AF, als dem coaequirten Diameter und der Länge des Fasses AC,

zwo

zwo geometrische mittlere Proportionalgrößen gesucht werden, von welchen man die behält, die näher bey AF ist, nemlich AG, und diese wird der Diameter und die Länge des Cylinders seyn, der mit dem Fasse gleichen Inhalt hat (§. 81.)

§. 94.

Der Punct G kann nicht dadurch gefunden werden, daß man FC in drey gleiche Theile theile, und $FG = \frac{1}{3}$ FC mache, weil die Proportionalität geometrisch ist. Hingegen kann es durch die Logarithmen geschehen. Man ziehe von dem Logarithmo von AC den Logarithmum von AF ab. Von dem Ueberrest nehme man den dritten Theil, und addire ihn zum Logarithmo von AF, so findet man den Logarithmum von AG, und folgends AG.

§. 95.

Um sich den Gebrauch der Tabellen hiebey zu ersparen, so kann man die Logarithmen auf den Visirstab tragen, indem man jeden dahin schreibt, wo auf der Längenseite die ihm entsprechende Zahl steht, z. E. bey 1 schreibt man 0, bey 10 wird 1 gesetzt, und die übrigen Stellen vermittelst der Logarithmischen Tabellen ausgefüllt.

§. 96.

Da man auf diese Art neben den Puncten F, C sogleich ihre Logarithmen findet, so darf

man

man nur den dritten Theil ihres Unterschiedes zu dem Logarithmo von F addiren, und dadurch wird man den Punct G finden, welcher auf der cubischen Seite die Anzahl der Maaßen angeben wird, die das Faß hält (§. 82.)

§. 97.

Bey dieser Methode gebraucht man nur die cubische Eintheilung nebst den Logarithmen. Denn die drey Puncte E, D, C hat man durch die wirkliche Ausmessung. Man kann sie sogleich auf der logarithmischen Seite nehmen. Den Punct F findet man, weil $DF = \frac{1}{2}ED$ ist, und den Punct G mittelst der Logarithmen auf die erst beschriebene Art (§. 96.) Es ist demnach diese Methode für Fässer die ganz voll sind, unter allen die kürzeste, und hat mit den übrigen, die wir angegeben haben, gleiche Genauigkeit.

§. 98.

Um es aber an Methoden, den Visirstab auf alle Arten zu gebrauchen nicht ermangeln zu lassen, so wollen wir noch folgende beyfügen, welche zeigt, wie man den Inhalt des Fasses vermittelst der Längen- und Flächenseiten ohne Multiplication finden könne.

§. 99.

Auf der Längenseite nehme man die Länge des Fasses AC zum Exempel 10, auf der Fig. 6. Flächenseite die coaequirte Fläche AF z. E. 26.

Von

Von diesen beyden Zahlen nimmt man die Helften 5, 13. Man addirt und subtrahirt sie, so hat man 18 und 8. Diese beyden Zahlen werden auf der Längenseite aufgesucht, in K und H, so findet man auf der Flächenseite die entsprechenden Zahlen 324 und 64, welche von einander abgezogen, 260 als den Inhalt des Fasses geben.

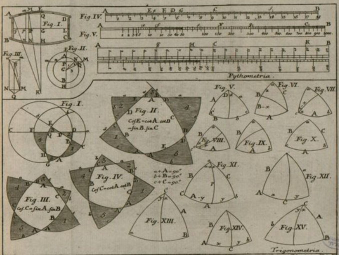
§. 100.

Der Beweiß dieser Regel gründet sich darauf, daß wenn man von zwoen Zahlen z. E. 26 und 10, ihre halbe Summe 18 und halbe Differenz 8 quadrirt, der Unterschied dieser Quadrate eben das giebt, was herausgekommen wäre, wenn man die beyden vorgegebenen Zahlen mit einander multiplicirt hätte. Die halbe Summe und halbe Differenz ist leicht genommen, das Quadriren wird erspart, weil die Zahlen der Flächenseite an und für sich schon die Quadrate der Zahlen auf der Längenseite sind.

§. 101.

Wenn der Visirstab nicht lang genug ist, um die halbe Summe auf der Längenseite zu finden, so darf man nur von derselben und von der halben Differenz den halben, dritten, vierten &c. Theil nehmen, und damit eben so verfahren, und man wird den Inhalt eines Fasses finden, welches 4, 9, 16 &c. mal kleiner ist.

III. An-



Pract. Mathem. Tab IV.