III.
Anmerkungen und Zusätze
zur
Trigonometrie.

§. 1.

Man kann die Trigonometrie als eine Wissenschaft ansehen, welche in Absicht auf ihre Vollständigkeit den übrigen Wissenschaften zum Muster dient. Sie zählt alle mögliche Fälle vor, die bey Auflösung der Triangel sich erdäugnen können. Sie vertheilt dieselben in ihre behörigen Classen, und da sie beweißt, daß weder mehr noch minder Fälle möglich sind, so giebt sie von jedem die Auflösung, und setzt dadurch ihre Besitzer in den Stand, ein jedes Stück eines Triangels aus denjenigen, die dazu nothwendig und zureichend sind, in jedem Falle zu finden. Wenn man sich dermalen noch Mühe giebt, etwas zu dieser Wissenschaft beyzutragen, so geschieht dieses nicht, um die Anzahl der möglichen Fälle zu vermehren, weil sich keine mehr hinzu setzen lassen, sondern nur um die Auflösung der Aufgaben schöner, kürzer und zu jeden Absichten bequemer zu machen, und hierinn läßt sie allerdings noch ein weites Feld zum Nachsinnen offen.

§. 2.

Die Abkürzung der Auflösungen richtet sich schlechthin nach den Absichten, zu denen man die trigonometrischen Aufgaben gebraucht. Wir können dieselben in drey Classen eintheilen. Einmal giebt es unzählige Fälle, wobey die bekannte Stücke eines Triangels in Zahlen gegeben sind, und auch die gesuchten in Zahlen verlangt werden. Dazu sind nun die trigonometrischen Tafeln gewidmet, und diejenige Auflösung wird für die schönste gehalten, welche zeigt, wie man das gesuchte vermittelst der Tabellen am kürzesten, und ohne überflüßige Rechnungen zu machen, finden könne. Schon vor der Erfindung der Logarithmen hat man sich bemühet alle Auflösungen in bloße Proportionen zu bringen, und nachdem der unsterblich verdiente Nepper die Logarithmen eingeführt, so ist diese Absicht noch ungleich nothwendiger geworden.

§. 3.

Sodann hat man angefangen die Trigonometrie mit großem Vortheil in den algebraischen Aufgaben, und daher hinwiederum die Algeber in den trigonometrischen zu gebrauchen. Jenes geschahe, um sich bey Berechnung allgemeiner Lehrsätze nicht nur der Linien und des pythagorischen Lehrsatzes, sondern auch der Winkel zu bedienen. Dadurch wurden

den viele Wurzelzeichen aus den Gleichungen weggeschaft, die Ausdrücke selbsten geschmeidiger gemacht, die Irrationalitäten in bloße Verhältnisse verwandelt, viele und verschiedene Verhältnisse durch einen einigen Winkel ausgedrückt, und die Lehrsätze, welche man zu Verwandlung der Irrationalgrößen jedesmal aus dem pythagorischen Lehrsatze und seinen Folgen herleiten mußte, wurden trigonometrische Lehrsätze, welche man sich nur wohl bekannt machen durfte, um Rechnungen zum Ende zu bringen, welche ohne dieselben ungemein weitläuftig und verwirrt würden gewesen seyn.

§. 4.

Diese Vortheile machten die Anwendung der Algeber auf die Trigonometrie noch nothwendiger, und es mußten für alle Fälle, die in derselben vorkommen, allgemeine Formeln gefunden werden, welche zu jeden besondern Absichten die bequemsten wären. Die Regeln, welche diese Formeln angeben, sind von denen, so man für die Zahlen gefunden, fast nothwendig verschieden. Sie treffen nur da zusammen, wo die ganze Auflösung in einer einigen Proportion besteht. Sobald man aber Perpendicularen fällen, Winkel und Seiten dadurch theilen, einen Theil durch den andern bestimmen, und nebst den Proportionen noch Winkel oder Seiten addiren und subtrahiren muß, da gebrauchen die algebraischen Auflösungen andere Kunstgriffe, und gehen von den Regeln, so man für Zahlen gebraucht, dadurch nothwendig ab.

§. 5.

Die dritte Absicht, wozu man angefangen, die Trigonometrie mit Vortheil zu gebrauchen, findet bey der Infinitesimalrechnung statt. Im Integriren verfällt man öfters und ohne Vermuthen auch da auf Circulbögen, ihre Sinus und Tangenten, wo man bey der ganzen Rechnung an keine Figur gedacht hatte. Die Integralrechnung würde uns gelehrt haben, die Winkel, Circulbögen und ihre Linien als Verhältnisse ansehen, wenn man auch sonsten nicht darauf gefallen wäre. Es ist leicht zu erachten, daß man auch hier auf neue Formeln in der Trigonometrie hat bedacht seyn müssen, welche von den beyden erstern Arten um so viel mehr verschieden waren, da es hier auf Differentialgleichungen und ihre Integration ankömmt. Und da dieser Theil der Trigonometrie ganz neu ist, so ist sich nicht zu verwundern, daß man die Anzahl der möglichen Fälle zur Zeit noch nicht bestimmt, noch in ihre gehörigen Classen gebracht hat. Es wird sich dieses auch nicht so leicht thun lassen, weil die Anzahl der Stücke, die in einer Differentialformel vorkommen können, nothwendig unbestimmt ist. Doch würde es Mittel

geben,

geben, die einfachern Classen derselben zu durchgehen, und vollständige Auflösungen davon zu geben.

§. 6.

Wir können diese drey Absichten als den Umfang der Trigonometrie ansehen, bis sie sich mit der Zeit noch weiter entwickelt. Man sieht leicht, daß, was man hierinn noch thun kann, keine bloße Nachlese ist, sondern daß besonders in den zwo letztern Absichten noch Hauptstücke zurück bleiben, die weder so leicht noch so bald werden ins reine gebracht werden. Ich werde in dieser Abhandlung dasjenige vortragen, was mir gelegentlich darüber eingefallen, und es wird dem Leser nicht unangenehm seyn, wenn es mit schon bekannten Stücken vereinigt so vorgestellt wird, daß man, was zusammen genommen ein ganzes ausmacht, auf einen Anblick übersehen kann. In der Trigonometrie ist dieses so nothwendig als nützlich.

§. 7.

Man hat sich bisher in der sphärischen Trigonometrie einer Induction bedient, welche allerdings nach den strengsten Regeln zulässig ist, aber dabey man doch einen eigentlichen Beweiß verlangen kann, weil derselbe allemal auch vor der strengsten Induction merkliche Vorzüge hat. Man erweißt nemlich, daß bey den rechtwinklichten sphärischen

Triangeln in allen 30 Fälle vorkommen. Der rechte Winkel weggelassen, sind noch fünf Stücke übrig. Von diesen fünf Stücken kann jedes ein Quäsitum seyn, und um dasselbe zu finden, muß man noch zwey von den vier übrigen wissen. Diese lassen sich auf sechserley Arten mit einander zu zwey und zwey combiniren. Daher kann jedes von den fünf Stücken auf sechserley Arten gefunden werden. Diß giebt in allem $5 \cdot 6 = 30$ Fälle.

§. 8.

Diese 30 Fälle lassen sich auf 10 bringen, wenn man zwischen den datis und dem quæsito keinen Unterschied macht, sondern nur auf die Verhältniß sieht, wodurch die fünf Stücke in einem rechtwinklichten Triangel zu 3 und 3 genommen einander bestimmen. Und auch diese 10 Fälle werden auf 6 gebracht, wenn man nicht auf die Lage der Theile sieht, sondern die so auf beyden Seiten des rechten Winkels liegen, oder die Cathetos und die an der Hypothenusa liegende Winkel verwechselt. Wir lassen es aber hier bey den 10 Fällen bewenden, um auch noch auf die Verschiedenheit der Lage zu sehen. Die Induction ist nun folgende.

§. 9.

Man erweißt die Verhältniß für jeden von diesen 10 oder auch von den 6 Fällen besonders. Und dabey blieb es, bis Nepper, dem wir so vieles in der Trigonometrie zu danken haben, auf den Einfall kam, diese zehen Auflösungen unter einander zu vergleichen, und etwas allgemeines dabey wahrnahm. Bey fünfen fand er die Verhältniß durch lauter Sinus, und bey den andern fünfen durch Sinus und Tangenten ausgedruckt. Dadurch und durch eine geschickte Benennung der Theile wurden alle 10 und daher auch alle 30 Fälle, so bey rechtwinklichten sphärischen Triangeln vorkommen können, auf zwo allgemeine Regeln gebracht, die man nun in allen Anfangsgründen der Sphärie findet, und mit großem Vortheil gebraucht.

§. 10.

Allerdings ist diese Induction so strenge, als man sie immer fordern kann. Man weiß alle mögliche Fälle: Man theilt sie in zwo Classen. Von jedem der zu einer dieser Classen gehört erweißt man eine gleiche Regel: Und man schließt mit Recht: Was von jedem insbesondere gilt das gilt von allen, und folglich von der ganzen Classe. Wären alle unsere allgemeine Sätze in der Naturlehre so richtig!

§. 11.

Allein sollte man wohl in der Meßkunst vermuthen, daß es darinn eine so richtige allgemeinere

gemeinere Regel gäbe, und dennoch der Beweiß nicht anders als durch eine Induction aus jeden einzeln Beweisen könnte gefunden werden? Sollte nicht der Beweis so allgemein seyn können, als die Regel ist, oder muß man denselben hier nothwendig in fünf Theile zerfällen, und je einen Theil aus dem andern beweisen? Dieses leztere scheinet daher nothwendig zu seyn, weil die Nepperische Regel ohne Absicht auf den Unterschied zwischen Winkel und Seiten, die drey Theile des Triangels schlechthin den mittlern und die beyden anliegenden, oder die beyden abgesonderten benennt. Hingegen kommt in den Fällen selbsten der Unterschied zwischen Winkel und Seiten vor, und die Vorbereitung zum Gebrauch der Regel will, daß man für die Cathetos ihre Complemente nehmen soll.

§. 12.

Der allgemeine Beweiß dieser Regel sezt also die Verwandlung der Seiten in Winkel und der Winkel in Seiten zum voraus, und man sieht leicht, daß fünf dergleichen Verwandlungen vorgehen müssen. Man nenne die beyden Winkel A, B, die Hypothenusa H, den Cathedum am Winkel A nenne man C, und den andern K, so hat man 1.° Für den mittlern und die anliegende Theile

HAB, ACH, CKA, BKH, KCB

für

für die beyden abgesonderten

HCK, ABK, CHB, BAC, KAH

Es entstehen daher fünf Triangel, da von jedem die Seiten und Winkel in die Seiten und Winkel vom folgenden oder in deren Complemente verwandelt werden, und es ist leicht zu erachten, daß die Complemente vorkommen müssen, so bald die Verwandlung einen Cathetum betrift. Diß folgt aus der erstbemeldten Vorbereitung zum Gebrauch der Nepperischen Regel.

§. 13.

Ein Versuch, den ich hierüber angestellt, hat mich gelehrt, daß diese fünf Triangel auf der Kugelfläche wirklich nicht nur hinter einander liegen, sondern daß sie um die Kugel herum einen Kreyß schliessen, und der fünfte eben so an den ersten stößt, wie der erste an den zweyten, und dieser an den dritten u. s. f. Die erste Figur stellt sie nach eben der Projection vor, nach welcher die Astrolabia entworfen werden, wenn das Aug im Pole und die Tafel in der Fläche des Aequators ist.

§. 14.

Es seyn AadF und ADcH zween größte Circul der Kugel, P und C ihre Pole. Durch Fig. 1. diese gehe der Circul cQPa, welcher zufolge der Projection hier als eine gerade Linie erscheinet, weil das Auge im Nadir des Pols P ist. Ferner sey dPC ein jeder anderer Circul, durch den Pol P gezogen, welcher in C einen rechten Winkel macht, und den Triangel ABC ausbildet, den wir den ersten nennen wollen. Endlich ziehe man den Circul HGQb durch den andern Pol Q auf dC senkrecht, so werden durch die gezogenen Circul die fünf Triangel, die wir in der Figur schattirt haben, abgeschnitten, und es ist zu beweisen, daß es die verlangten sind. Hiebey kömmt es auf folgende Sätze an, die man aus den ersten Grundlehren der Sphäric leicht einsehen wird.

1.° Bey C, D, E, F, G sind die fünf rechte Winkel zu den fünf Triangeln.

2.° Die Bögen Aa, AD, Ac, AF, PC, Pd, Pa, PF, QD, Qc, QG, Qb sind Quadranten.

3.° Die Puncte A, B, H sind die Pole der Circul cPa, GQb, dPC. Daher sind auch

4.° Die Bögen Bb, BG, HC, Hd, HE Quadranten, woraus man leicht sieht, welche Bögen Complemente von den andern sind.

5.° Die Bögen Da = cF, Eb, aC = Fd, Db = cG und dE sind das Maaß der Winkel A, B, P, Q, H, weil ihre Schenkel Quadranten sind, und auf diesen Bögen

Bögen stehen. Hieraus ergiebt sich die Verwandlung der Winkel in Seiten und der Seiten in Winkel.

§. 15.

Wenn wir z. E. den Winkel A in seinen Verwandlungen durch alle fünf Triangel verfolgen, so finden wir

$A = aD = 90° - DB = QP = 90° - FQ = cF = A.$

Er bleibt also im ersten und fünften ein Winkel, im dritten wird er zur Hypothenusa, und im zweyten und vierten ist sein Complement ein Cathetus. Der Winkel B hat eben diese Verwandlungen, wenn wir vom 2ten Triangel den Anfang machen, oder vom ersten auf den fünften rückwerts gehen.

§. 16.

Ueberhaupt sieht man, daß jede Hypothenuse ihre zwey Complemente neben sich hat, welche in den anstoßenden Triangeln Catheti werden, und in den zwey entferntesten wird sie zum Scheitelwinkel, welcher in dem Fünfecke ABPQH der Hypothenuse gegen über liegt.

§. 17.

Wenn wir die Cathetos in ( ) einschließen, und dadurch ihre Complemente verstehen,

hen, so wird folgende Tabelle alle Verwandlungen vorstellen.

Triangel

1		2		3		4		5
A	=	(PD)	=	QP	=	(FQ)	=	A
B	=	B	=	(QE)	=	QH	=	(HG)
(AC)	=	P	=	P	=	(FH)	=	AH
(BC)	=	PB	=	(EP)	=	H	=	H
AB	=	(BD)	=	Q	=	Q	=	(AG)
C	=	D	=	E	=	F	=	G

§. 18.

Man sieht hieraus, daß jede Linie und Winkel des ersten Triangels in jedem der übrigen Triangel eine besondere Stelle hat, und daß folglich diese fünf Triangel alle mögliche Verwandlungen derselben vorstellen. Ferner ist dieses besonders dabey, daß eben die Theile die nach der Neppeřischen Regel die mittlern und anliegenden, oder die mittlern und abgesonderten heissen, durch alle fünf Verwandlungen ihre Natur nicht ändern. Denn alle fünf Stücke liegen in allen fünf Triangeln in eben der Ordnung, wenn man den rechten Winkel wegläßt, weil sich dieser in jedem Triangel zwischen zwey andere von den fünf Stücken einrückt, und daher durch alle fünf Stellen geht.

§. 19.

Damit diese wunderliche Verwechslung deutlicher in die Augen falle, habe ich in der 2ten Figur eben diese Triangel entworfen, die Winkel und Seiten besonders, und zwar die Cathetos, für welche man immer ihre Complemente nehmen muß, durch die Buchstaben des kleinern Alphabets vorgestellt. So sieht man auf einen Anblick die fünf Stücke A, B, C, D, E in jedem Triangel in eben der Ordnung herum liegen, sich in ihre Complemente verwandeln, und aus diesen wieder ihre erste Größe erlangen. Fig. 2.

§. 20.

Alle fünf Triangel werden durch fünf Circul bestimmt. Jeder dieser Circul giebt zween Cathetos und eine Hypothenuse, und jene beyde sind das Complement von dieser, welche in die Mitte zwischen ihre anliegenden Cathetos fällt. Die fünf Hypothenusen schließen das Fünfeck, welches innerhalb den Triangeln liegt, und die fünf rechten Winkel liegen aussen herum.

§. 21.

Ferner sind die Puncte, wo zwo Hypothenusen zusammen stoßen die Pole des Circuls, welcher die in dem Fünfeck gegenüberliegende Hypothenuse enthält. Diese ist den Winkeln, so die zween Triangel an ihrem Pole einander entgegen kehren, gleich, daher man sie auch in der Figur mit eben den Buchstaben bezeichnet findet.

§. 22.

Sodann steht jeder dieser Pole von den den zween gegenüberstehenden 90 Grad ab, weil diese auf dem Circul liegen, der aus jenem beschrieben wird.

§. 23.

Die fünf Pole haben auf der andern Helfte der Kugel ihre Nadir, in welchen sich die fünf Circul ebenfalls durchschneiden. Daher kommen das Fünfeck und die fünf Triangel auf der Kugel doppelt vor, und jedem Triangel steht ein anderer gegen über, welcher demselben in allen Stücken gleich und ähnlich ist.

§. 24.

Ueberdiß ist das ganze System allemal so eingeschlossen, daß die Fläche der fünf Triangel und die gedoppelte Fläche des Fünfeckes zusammen genommen $\frac{1}{8}$ von der Fläche der ganzen Kugel, oder $\frac{1}{4}$ von der halben Kugelfläche ist.

§. 25.

Um dieses zu beweisen, wollen wir die ganze Kugelfläche in 720 Theile eintheilen, welche

che man Grade nennen kann. Jeder von diesen Graden ist einem Triangel gleich, dessen zween grössere Schenkel Quadranten sind, und einen Winkel von einem Grade einschliessen. Es scheinet dieses der bequemste Maaßstab zu seyn, um die Theile einer Kugelfläche durch die ganze zu bestimmen. Denn in solchen Theilen kann man den Inhalt eines jeden sphärischen Triangels, dessen Seiten Bögen von gröſten Circuln sind, sehr leicht aus den Winkeln des Triangels finden, wenn man diese zusammen addirt, und von der Summe 180° als die Summe der Winkel eines geradlinichten Triangels abzieht. Der Ueberschuß wird den Inhalt des sphärischen Triangels in solchen Theilen oder Graden angeben, davon die ganze Kugelfläche 720 hat.

§. 26.

Eben so findet man in gleichen Theilen den Inhalt eines jeden Viereckes der Kugelfläche, wenn man von der Summe seiner Winkel die Summe der Winkel eines geradlinichten Vieleckes von gleich vielen Seiten abzieht.

§. 27.

Man nenne demnach die Fläche des Fünfeckes $= V$, die Summe der Flächen der fünf Triangel $= \Delta$, so ist

$V = 5.190° - A - B - C - D - E - 3.180°$

Daher

Daher

$$V = 360° - (A + B + C + D + E)$$

Ferner ist

$$\Delta = 2(A + B + C + D + E) + 5 \cdot 90° - 5 \cdot 180°$$

folglich

$$\Delta = 2(A + B + C + D + E) - 450.°$$

und demnach

$$2V + \Delta = 270.° = \tfrac{270}{720} = \tfrac{3}{8}$$ der Kugelfläche.

§. 28.

Man findet also den Inhalt des Fünfeckes, wenn man die Summe seiner Seiten von 360° abzieht. Und da man die Gleichung

$$\Delta = 2(A + B + C + D + E) - 450°$$

leicht in folgende verwandelt

$$\Delta = A + B + C + D + E - a - b - c - d - e$$

so findet man den Inhalt aller fünf Triangel, wenn man von der Summe ihrer Hypothenusen die Summe ihrer Complementen abzieht.

§. 29.

Die fünf Circul, welche das ganze System ausmachen, durchschneiden einander so, daß jeder in acht Theile zerfällt, davon je eines das Complement des folgenden ist. End-
lich

sich liegen auf der Kugelfläche außerhalb den 2 Fünfecken und 10 Triangeln noch 10 Viereck, davon alle Seiten bekannt sind. Jedes derselben hat drey rechte Winkel, und kann folglich in zween rechtwinklichte Triangel zerfällt werden, von welchen man die Catheros weiß. Sie sind nemlich eine Seite des Fünfeckes, und das Complement der anliegenden. Daher ist die ganze Kugelfläche in 2 Fünfecke und dreyßig rechtwinklichte Triangel eingetheilt. Die Seiten der Fünfecke sind A, B, C, D, E, und die Catheti der Triangel

ab, bc, cd, de, ea.
aB, bC, cD, dE, eA.
Ab, Bc, Cd, De, Ea,

§. 30.

Man kann zu dieser aufgehäuften Menge von Aehnlichkeiten noch diese beyfügen, daß, da jeder von den fünf Circuln die Kugelfläche in zwey gleiche Theile theilt, hiedurch 10 halbe Kugelflächen entstehen, auf deren jeder einerley Stücke liegen, wie auf den andern, nemlich das Fünfeck, nebst 15 rechtwinklichten Triangeln, von denen wir erst die Cathetos angegeben haben.

§. 31.

Ungeacht ich vermuthe, daß unter so vielen Uebereinstimmungen noch verschiedene allgemeine Gesetze verborgen liegen, so habe ich ausser dem Beweise der Nepperischen Regel kein anderes finden können. So z. E. ist daraus, daß die fünf Triangel um das Fünfeck herum liegen, und einen Creys schließen, daß drey von diesen Triangeln die übrigen zwey bestimmen, und daß endlich ihr Inhalt und der doppelte Inhalt des Fünfeckes ein bestimmtes Verhältniß zu der ganzen Kugelfläche haben, zu vermuthen, daß sich aus den fünf Stücken eines rechtwinklichten sphärischen Triangels, das eine durch die übrigen vier noch auf eine andere Art bestimmen lasse, als durch die bißherigen trigonometrischen Regeln, ungeacht durch diese aus zweyen die übrigen drey gefunden werden.

§. 32.

Der Beweis der beyden Nepperischen Regeln wird nun keine Schwürigkeit geben. Die dritte und vierte Figur stellen die ganze Trigonometrie der sphärischen rechtwinklichten Triangel vor, und die dabey gesetzten zwo Gleichungen legen sie aus, ohne daß es viele Erläuterung gebrauchte. Denn die dritte Figur enthält die fünf Fälle für den mittlern, und die abgesonderten Theile, die vierte aber für den mittlern, und die anliegenden (§. 12. 18.)

§. 33.

Hat man also die bey der Figur geschriebene Verhältniß für einen der fünf Triangel erwiesen, so ist klar, daß auch der Beweis für die übrigen vier gilt, und die Neppersche Regel sich von selbsten auf alle fünf Fälle erstreckt. Dadurch wird also der Beweis für jeden Fall besonders überflüßig gemacht, und die Induction, deren man sich hiebey bedient hatte, abgeschaft.

§. 34.

Da alle Fälle bey den rechtwinklichten Triangeln durch eine einzige Analogie aufgelößt werden, so lassen sich die Logarithmen dabey gebrauchen, und die algebraische Auflösung ist von der Auflösung in Zahlen nicht verschieden. Dieser Unterschied äußert sich bey dem schiefwinklichten Triangeln in den meisten Fällen, und es kommen dabey mehrere Umstände vor, welche verursachen, daß man sie nicht auf so einfache Regeln bringen kann, weil mehrentheils zwo Analogien und noch eine Vorbereitung dabey erfordert wird. Wir wollen einige bereits bekannte Formeln voraus setzen, welche eben so viele trigonometrische Lehrsätze sind, und in allen Rechnungen, wobey Winkel vorkommen einen allgemeinen Nutzen haben.

§. 35.

Es seyn y, z zween Circulbögen oder Winkel, und $y > z$, so ist

1.° $\sin(y+z) = \sin y . \cos z + \cos y \sin z$
2.° $\cos(y+z) = \cos y . \cos z - \sin y . \sin z$
3.° $\sin(y-z) = \sin y . \cos z - \cos y . \sin z$
4.° $\cos(y-z) = \cos\sin y . \cos z + \sin y . \sin z$

5.° $2 . \sin y . \cos z = \sin(y+z) + \sin(y-z)$
6.° $2 . \cos y . \sin z = \sin(y+z) - \sin(y-z)$
7.° $2 . \cos y . \cos z = \cos(y-z) + \cos(y+z)$
8.° $2 . \sin y . \cos z = \cos(y-z) - \cos(y+z)$

9.° $\sin y + \sin z = 2 . \sin \frac{y+z}{2} . \cos \frac{y-z}{2}$

10.° $\sin y - \sin z = 2 . \cos \frac{y+z}{2} . \sin \frac{y-z}{2}$

11.° $\cos y + \cos z = 2 . \cos \frac{y+z}{2} . \cos \frac{y-z}{2}$

12.° $\cos y - \cos z = 2 . \sin \frac{y+z}{2} . \sin \frac{y-z}{2}$

13.° $\tang(y+z) = (\tang y + \tang z) : (1 - \tang y \tang z)$
14.° $\cot(y+z) = (1 - \tang y \tang z) : (\tang y + \tang z)$

15.° $\sin y (+ \sin z) : (\sin y - \sin z) = \tang \frac{a+b}{2} : \tang \frac{a-b}{2}$

16.° $(\cos y + \cos z) : (\cos z - \cos y) = \cot \frac{a+b}{2} : \tang \frac{a-b}{2}$

17.° sin

17.° $(\sin y + \sin z) : (\cos z + \cos y) = \mathrm{tang}\, \frac{y+z}{2} : 1$

18.° $(\sin y + \sin z) : (\cos z - \cos y) = 1 : \mathrm{tang}\, \frac{y-z}{2}$

19.° $(\sin y - \sin z) : (\cos z + \cos y) = \mathrm{tang}\, \frac{a-b}{2} : 1$

20.° $(\sin y - \sin z) : (\cos z - \cos y) = 1 : \mathrm{tang}\, \frac{y+z}{2}$

21.° $(\sin y + \sin z) : (\cos z + \cos y) = (\cos z - \cos y) : (\sin y - \sin z)$

22.° $(\sin y + \sin z) . (\sin y - \sin z) = \sin (y+z) . \sin (y-z) : 1$

23.° $(\mathrm{tang}\, y + \mathrm{tang}\, z) : (\mathrm{tang}\, y - \mathrm{tang}\, z) =$

24.° $(\cot z + \cot y) : (\cot z - \cot y) =$ $\Big\}\ \sin(y+z) : \sin(y-z)$

25.° $(\mathrm{tang}\, y + \mathrm{tang}\, z) : (\cot z + \cot y) =$

26.° $(\mathrm{tang}\, y - \mathrm{tang}\, z) : (\cot z - \cot y) =$ $\Big\}\ (\sin y . \sin z) : (\cos y . \cos z)$

Ferner um bey den verschiedenen Functionen eines gleichen Winkels die Irrationalität zu heben

27.° $\sin 2y = 2 \mathrm{tang}\, y : (1 + \mathrm{tang}\, y^2)$

28.° $\cos 2y = (1 - \mathrm{tang}\, y^2) : (1 + \mathrm{tang}\, y^2)$

29.° $\mathrm{tang}\, 2y = 2 \mathrm{tang}\, y : (1 - \mathrm{tang}\, y^2)$

30° $\cot 2y = (1 - \mathrm{tang}\, y^2) : 2 \mathrm{tang}\, y$

31.° $\sec 2y = (1 + \mathrm{tang}\, y^2) : (1 - \mathrm{tang}\, y^2)$

32.° $\mathrm{cosec}\, 2y = (1 + \mathrm{tang}\, y^2) : 2 \mathrm{tang}\, y.$

Endlich, um in der 5ten Figur die Verhältniß der gleichnamigten Theile eines schiefwinklichten Triangels auf beyden Seiten des

Senkstriches vorzustellen, kommen noch folgende Formeln hinzu

33.° $\cos A : \cos B = \cos a : \cos b.$

34.° $\cos C : \sin D = \cos c : \sin d.$

35.° $\sin A : \sin a = \sin c : \sin C.$

36.° $\cos D : \cot A = \cos d : \cot a.$

37.° $\sin B : \cot C = \sin b : \cot c.$

38.° $\tan B : \tan b = \cot d : \cot D.$

Diese sechs letzten Formeln fliessen fast unmittelbar aus den Nepperischen Regeln, die übrigen aber sind der Ordnung nach aus den 4 ersten hergeleitet. Bey allen aber wird der Halbmesser = 1 gesetzt.

§. 36.

In jeden sphärischen Triangel sind drey Stücke zureichend um jedes der übrigen drey zu bestimmen. Es kommen also bey allen Auflösungen vier Stücke vor, und auf so vielerley Arten alle 6 Stücke zu 4 und 4 können combinirt werden, so viele Verhältnisse giebt es. Da nun diese Combination 15mal angeht, so sind 15 Verhältnisse, und daher in allem 60 Fälle, weil von jeden 4 Stücken eines Verhältnisses ein jedes derselben als unbekannt kann angesehen werden.

§. 37.

Es lassen sich aber diese 60 Fälle sehr in die Kürze ziehen. Denn läßt man den Unterschied

terschied zwischen den bekannten und unbekannten weg, so bleiben nur 15. Wenn man ferner nur auf die Ordnung sieht, wie die fürgegebenen 4 Stücke in dem Triangel auf einander folgen, und den Unterschied, ob es Winkel oder Seiten sind, beybehält, so bleiben nicht mehr als vier Fälle. Denn unter den 4 Stücken ist entweder

1.° Eine Seite und da müssen alle drey Winkel seyn.

2.° Oder man hat alle 3 Seiten, und da muß noch ein Winkel dazu kommen.

3.° Oder man hat zwo Seiten und da gebraucht es noch zween Winkel. Diese aber können entweder den Seiten gegenüber liegen, oder

4.° Sie liegen so, daß einer derselben zwischen die Seiten fällt.

Denn da in diesem Fall ein Winkel weg bleibt, so ist es entweder der so zwischen den Seiten liegt, oder er liegt an dem Ende einer der Seiten.

§. 38.

Da jeder Triangel sich in einen andern verwandeln läßt, in welchem die Seiten zu Winkeln, und diese zu Seiten werden, so hat der erste und zweyte von diesen 4 Fällen einerley Auflösung. Man kann also alle 60

Fälle bey schiefwinklichten Triangeln auf die-
se 3 bringen, denn die 4 Stücke sind

1.° Endweder einander entgegen liegend: *Partes oppositae*.

2.° Oder sie folgen auf einander: *Partes continuae*.

3.° Oder eines ist von den andern abgesondert: *Partes seiunctae*.

Im ersten Falle liegen zwey und zwey Stücke an einander, und zwey und zwey stehen einander gegen über.

Im dritten Fall liegen drey Stücke an einander, und das vierte steht dem mittlern gegen über.

Im 2ten Fall hängen alle 4 Stücke an einander, und die äussersten stehen einander gegenüber.

Man kann sie demnach auch durch dieses entgegen stehen von einander unterscheiden. *Oppositio reciproca, media, extrema*, da nemlich die vier Stücke 1° wechselweise, 2° oder nur die mittlern, 3° oder nur die äussersten einander gegenüber stehen.

§. 39.

Wir werden aber diese letzte Abkürzung nicht gebrauchen, weil sie auf der Verwechslung der Winkel und Seiten beruht, welche so gar unbedingt nicht vorgeht, und der Un-

terschied

terschied, so dabey vorkömmt, aus den Formeln selbst deutlicher ersehen werden kann. Wir behalten demnach die vorhin (§. 37.) erwähnten vier allgemeinen Fällen. Für diese hat man längst schon eben so viel allgemeine algebraische Formeln gefunden, und dadurch die ganze sphärische Trigonometrie auf vier Gleichungen gebracht. Diese Gleichungen thun bey analytischen Auflösungen der sphärischen Aufgaben gute Dienste. Hingegen sind sie nicht alle gleich bequem, wo man mit Zahlen und besonders mit Logarithmen arbeiten will. Da sie sich aus den oben (§. 35.) gegebenen Formeln sehr leicht herleiten lassen, so werden wir sie kürzlich hier anbringen, besonders auch wegen der Art, sie so zu zeichnen, daß man sich ohne Figur jedesmal darein finden kann.

§. 40.

Zu diesem Ende

1.° Benenne ich die drey Seiten des Triangels mit den drey ersten Buchstaben des grössern Alphabets, und ihre gegenüberstehenden Winkel mit eben den Buchstaben des kleinern Alphabets, so daß A dem a, B dem b und C dem c gegenübersteht.

2.° Werde ich die Formeln so einrichten, daß A und a nothwendig darinn vorkommen.

kommen. Denn da in allen Fällen nothwendig wenigstens eine Opposition zweener Theile vorkömmt (§. 38.) so mache ich damit den Anfang, daß die Seite A und der Winkel a genennt wird. Die übrigen zwey Stücke geben sich von selbsten. Denn kömmt noch eine Seite vor, so heißt sie B, in den übrigen Fällen und Stücken bleibt nach dieser Voraussetzung keine Wahl mehr.

§. 41.

Hiedurch wird man in Stand gesetzt, jeden vorkommenden Fall zu zeichnen, und die dazu dienende Formel ohne andere Figur, als die man sich nach dieser Regel entwirft, zu erkennen, denn man wird für

3 Seiten und einen Winkel	A, a, B, C
3 Winkel und eine Seite	a, A, b, c
4 aufeinander folgende Stücke	A, a, B, c
4 gegenüberstehende Stücke	A, a, B, b

bekommen, und die dazu dienende Formel erkennen können.

§. 42.

Diß sind alle 4 mögliche Fälle, welche in der 6, 7, 8, 9 Figur vorgestellt werden. Die Buchstaben sind das Maaß der ganzen Winkel und Seiten. Es versteht sich von selbsten daß der Bogen, welcher durch jeden dieser Triangel geht die Perpendicular ist, die denselben

selben in zween rechtwinklichte zerfällt. Dieser Bogen theilt entweder eine der Seiten oder einen der Winkel, so in die Rechnung kommen. Der eine Theil ist mit x, der andere mit seinem Zusatze zum Ganzen bezeichnet. Nach dieser Vorbereitung besteht die Erfindung von dem Beweiß der gesuchten 4 Gleichungen schlechthin in einer Anwendung der Nepperischen Regel und einer der §. 35. gegebenen Formeln.

I. Fall.

§. 43.

Verhältniß zwischen 3 Seiten und einem Winkel.

Hier hat man Fig. 6.

$\cos A : \cos C = \cos(B - x) : \cos x$ (§. 35. No. 33)

$\cos(A - x = \cos B \cos x + \sin B \sin x$ (§. 35. No. 4.)

folglich

$$\cos A = \cos B \cos C + \sin B.\ \cos C.\ \mathrm{tang}\, x$$

Nach der Nepperischen Regel ist

$$\mathrm{tang}\, x = \mathrm{tang}\, C.\ \cos a$$

Daher

$$\cos A = \cos B.\ \cos C + \sin B.\ \sin C.\ \cos a.$$

die gesuchte Formel.

II. Fall.

§. 44.

Verhältniß zwischen den 3 Winkeln und einer Seite.

Hier

Hier ist

Fig. 7. $\cos a : \cos b = \sin(c - x) : \sin x$ (§. 35. No. 34)

$\sin(c-x) = \sin c . \cos x - \cos c . \sin x$ (§. 35. No. 3)

folglich

$\cos a = \cos b . \sin c . \cot x - \cos b . \cos c$

Nach der Nepperischen Regel

$\cot x = \cos A . \tang b$

Daher

$\cos a = \sin c . \sin b . \cos A - \cos b . \cos c$

die gesuchte Formel.

III. Fall.

§. 45.

Verhältniß zwischen 4 auf einander folgenden Stücken.

Hier ist

Fig. 8. $\cot A : \cot B = \cos(c - x) : \cos x$ (§. 35. No. 35)

$\cos(c-x) = \cos c . \cos x + \sin c . \sin x$ (§. 35. No. 4)

folglich

$\cot A . \tang B = \cos c + \sin c . \tang x .$

Nach der Nepperischen Regel ist

$\tang x = \cot a : \cos B$

Daher

$\sin B . \cot A = \cos c . \cos B + \sin c . \cot a$

die gesuchte Formel.

IV. Fall.

§. 46.

Verhältnis zwischen 4 gegenüber liegenden Stücken.

Hier

Hier ist schlechthin (§. 35. No. 35.) Fig. 9.
$\sin A : \sin a = \sin B : \sin b$.

§. 47.

Es sind also die 4 allgemeinen Formeln für alle Fälle bey schiefwinklichten sphärischen Triangeln folgende:

I.° $\cos A = \sin B . \sin C . \cos a + \cos B . \cos C$. Fig. 10.
II.° $\cos a = \sin b . \sin c . \cos A - \cos b . \cos c$.
III.° $\sin B . \cot A = \cos c . \cos B + \sin c . \cot a$.
IV.° $\sin A . \sin b = \sin B . \sin a$.

§. 48.

Diese vier Formeln sind zureichend, wenn man weiter nichts sucht als das Verhältniß zwischen jeden 4 gegebenen Stücken eines Triangels. Wir haben dabey alle Seiten und alle Winkel kleiner als 90° angenommen, damit die Cosinus, Tangenten und Cotangenten positiv blieben, wie man sie in der That annimmt. Wird aber ein Winkel oder eine Seite grösser als 90 Grad, so muß man bey seinem Cosinus, Tangente oder Cotangente das Zeichen ändern, wenn er gegeben ist. Ist er aber der gesuchte, so ändert sich das Zeichen von sich selbst. Die mechanische Einrichtung der Buchstaben Rechnung zieht dieses Phänomenon nothwendig nach sich. Man sieht leicht, daß die erste und zweyte dieser Formeln nur in dem Zeichen unterschieden sind, welches auch aus der be-

kannten

kannten Verwechslung der Winkel und Seiten nothwendig seyn muß.

§. 49.

In allen 4 Formeln lassen sich die gegenüberstehenden Stücke leichter finden, als die beyden übrigen, und die Leichtigkeit verdoppelt sich, wenn auch diese einander gegen überstehen, wie in der vierten Formel. Denn sie kommen nur einmal vor. Hingegen kommen die übrigen beyden in den drey ersten Formeln nicht nur zweymal, sondern auf eine Irrationale Art vor, weil jedes durch seinen Sinus und Cosinus ausgedruckt ist.

§. 50.

Ferner sind in der ersten Formel die Seiten B, C, und in der zweyten die Winkel b, c auf eine ähnliche Art eingeflochten. Man findet also eines auf eben die Weise wie das andere, weil sie sich gegen einander verwechseln lassen. Wenn man nicht auf den Unterschied der Zeichen sehen will, so kann die eine von diesen Formeln weggelassen werden. Wir werden aber mehrerer Deutlichkeit halber beyde beybehalten, weil die Verwechslung der Winkel und Seiten, die die Wahl der Zeichen bestimmen müßte, zu weitläuftig ist.

§. 51.

Macht man zwischen den gegebenen und gesuchten Stücken einen Unterschied, so entstehen

stehen aus jeder der beyden ersten Formeln drey und aus der dritten vier andere. Die vierte Formel lassen wir, wie sie ist, weil sie nicht leichter kann gemacht werden.

§. 52.

Die Irrationalität, so bey den 3 ersten Fällen entsteht, kann auf verschiedene Art ausgedruckt werden. Am einfachsten geschieht es durch die Tangente des halben Winkels oder der halben Seite. Wir wollen es in einem Fall erläutern, weil sich die übrigen auf eben die Art finden.

§. 53.

Es sey demnach in der ersten Formel
$\cos A = \cos B . \cos C + \sin B . \sin C . \cos a$
die Seite B zu suchen. Man setze die Tangente ihrer Helfte $= z$, so ist $\tan g \frac{1}{2} B = z$, und (§. 35. No. 27.)

$$\sin B = 2z : (1 + zz)$$
$$\cos B = (1 - zz) : (1 + zz)$$

folglich

$$\cos A = \frac{1 - zz}{1 + zz} . \cos C + \frac{2z}{1 + zz} . \sin C . \cos a$$

$$\cos A + zz . \cos A = \cos C - zz \cos C + 2z . \sin C . \cos a$$

Daher

$$z = \frac{\sin C . \cos a + \sqrt{(\sin C^2 \cos a^2 + \cos C^2 \quad \cos A^2)}}{\cos C + \cos A}$$

oder

oder kürzer

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B = \frac{\sin C.\cos a + \sqrt{(\sin A^2 - \sin a.^2 \sin C^2)}}{\cos C + \cos A}$$

§. 54.

Sucht man auf eben die Art in der 2ten und 3ten Formel die halbe Tangente von b, B und c, so wird man für jede Data und Quaesita folgende 11 Formeln heraus bringen.

I. Fall. Drey Seiten und einen Winkel.

1.° $\cos A = \sin B.\sin C.\cos a + \cos B.\cos C$

2.° $\cos a = (\cos A - \cos B.\cos C) : \sin B.\sin C$

3.° $$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B = \frac{+\sin C.\cos a + \sqrt{(\sin A^2 - \sin C^2 \sin a^2)}}{\cos C + \cos A}$$

II. Fall. Drey Winkel und eine Seite.

4.° $\cos a = \sin b.\sin c.\cos A - \cos b.\cos c$

5.° $\cos A = (\cos a + \cos b.\cos c) : \sin b.\sin c$

6.° $$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}b = \frac{-\sin c.\cos A + \sqrt{(\sin a^2 - \sin c^2.\sin A^2)}}{\cos c - \cos a}$$

III. Fall. Vier auf einander folgende Stücke.

7.° $\cot A = (\cos c \cos B + \sin c.\cot a) : \sin B$

8.° $\cot a = (\sin B.\cot A - \cos c.\cos B) : \sin c$

9.° $$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}B = \frac{-\cos A.\sin a + \sqrt{(\sin a^2 - \sin c.^2 \sin A^2)}}{\sin A.\sin(a - c)}$$

10.° $$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c = \frac{+\sin A.\cos a + \sqrt{(\sin A^2 - \sin B^2 \sin a^2)}}{\sin a.\sin(B + A)}$$

IV. Fall.

IV. Fall.

Vier entgegen stehende Stücke.

11. $\sin A . \sin b = \sin B . \sin a$.

Diese Formeln sind die einfachsten, die man herausbringt, ohne in der Benennung der 4 Stücke eine merkliche Veränderung zu machen. Da man dieselben nicht leicht anders als bey der Erfindung allgemeiner sphärischer Lehrsätze und bey Differentialrechnungen gebraucht, wo man gewöhnlich die Winkel und Bögen selbsten beybehalten muß, so haben wir keine solche Veränderung dabey vorgenommen, und die beyden Ausdrücke $\sin (a - c)$ und $\sin (A + B)$ die wir in der 9ten und 10ten Formel gebraucht haben, werden vermittelst der obigen Lehrsätze (§. 35.) leicht wieder in einfachere aufgelößt, wenn man die Theile besonders haben muß.

§. 55.

Da die Größe unter den Wurzelzeichen sowohl positiv als negativ kann genommen werden, so geben die Formeln, in denen sie vorkommen zween Werthe, welche beyde gleich möglich sind, und nicht bloß von einer Vermischung der spitzen und stumpfen Winkel herrühren, die man hätte vermeiden können. Man muß also aus andern Umständen schliessen, welchen von diesen beyden Werthen man vorzüglich gesucht hat, oder gebrauchen will.

Da bey allen sphärischen Triangeln die Tangente eines halben Bogens oder eines halben Winkels nothwendig positiv ist, so muß auch die 3, 6, 9 und 10te Formel zween positive Werthe geben. Ist demnach einer darunter negativ, so fällt die Seite oder der Winkel so dadurch herauskömmt, ausserhalb denjenigen, den man suchte, und hat eine ganz entgegen gesetzte Lage. Doch hiebey werden wir uns nicht aufhalten, weil diese Formeln in den Rechnungen, wo man sie gebraucht, gemeiniglich durch die Bedingungen der Aufgaben, ihre Gestallt wieder ändern. Zu blosser Auflösung eines Triangels in Zahlen hat man andere Wege (§. 4.)

§. 56.

Hingegen läßt sich dieses hier anmerken, daß die Irrationalgrößen in diesen Formeln einander sämtlich ähnlich sind. Sie bestehen aus zweyen einander gegenüber stehenden Stücken, und noch einem dritten. Wenn man aus derselben nach der 11ten Formel das Stück sucht, so diesem dritten gegen über steht, so läßt die Irrationalgröße eine Reduction zu, durch welche sie ganz aufgehoben wird. So z. E. in der 3ten Formel ist.

$$\sin C . \sin a = \sin A . \sin c$$

folglich

$\sqrt{}$ (sin

$$\sqrt{(\sin A^2 - \sin C^2 \sin a^2)} = \sqrt{(\sin A^2 - \sin A^2 \sin c^2)} = \sin A . \cos c.$$

§. 57.

Wird diese Reduction vorgenommen, so haben wir

$3.°\ \mathrm{tang}\ \tfrac{1}{2} B = (\sin C . \cos a + \sin A . \cos c) : (\cos C + \cos A)$
$6.°\ \mathrm{tang}\ \tfrac{1}{2} b = (- \sin c . \cos A + \sin a . \cos C) : (\cos c - \cos a)$
$9.°\ \mathrm{tang}\ \tfrac{1}{2} B = (- \cos A . \sin a + \sin a . \cos C) : (\sin A . \sin (a - c))$
$10.°\ \mathrm{tang}\ \tfrac{1}{2} c = (\sin A . \cos a + \sin A . \cos b) : (\sin a . \sin (B + A))$

§. 58.

Hieraus erhellet, daß die Irrationalgrösse den Cosinum einer Seite oder eines Winkels in sich schlosse, welcher unter den 4 Stücken der Formel nicht begriffen war, und eben so wohl grösser als kleiner denn 90° seyn konnte.

§. 59.

Diese Formeln, welche das gesuchte Stück durch die Tangente seiner Helfte ausdrücken, sind die einfachsten, weil das Wurzelzeichen keinen andern Coefficienten hat. Wenn man aber den Sinus oder Cosinus statt dieser Tangente sucht, so wird die Formel der gefundenen ähnlich, allein es sind mehr Factores darinn. So z. E. findet man

$$3.°\ \sin B = \frac{\cos A . \sin C . \cos a + \cos C \sqrt{(\sin A^2 - \sin a^2 \sin C^2)}}{1 - \sin C^2 \sin a^2}$$

$$3.^\circ \cos B = \frac{\cos A.\cos C + \sin C.\cos a \sqrt{(\sin A^2 - \sin a^2 \sin C^2)}}{1 - \sin C^2 \sin a^2}$$

$$6.^\circ \sin b = \frac{\cos a.\sin c.\cos A + \cos c \sqrt{(\sin a^2 - \sin A^2 \sin c^2)}}{1 - \sin c^2 \sin A^2}$$

$$6.^\circ \cos b = \frac{-\cos a.\cos c + \sin c.\cos A \sqrt{(\sin a^2 - \sin A^2 \sin c^2)}}{1 - \sin c^2 \sin A^2}$$

$$9.^\circ \sin B = \frac{\sin A.\cos A.\cos a.\sin c + \sin A.\cos c \sqrt{(\sin a^2 - \sin A^2 \sin c^2)}}{\sin a\,(1 - \sin A^2 \sin c^2)}$$

$$9.^\circ \cos B = \frac{-\cos c.\sin c.\sin A^2 \cos a + \cos A \sqrt{(\sin a^2 - \sin A^2 \sin c^2)}}{\sin a\,(1 - \sin A^2 \sin c^2)}$$

§. 60.

Die Verhältniß zwischen dem Sinus einer jeden Seite und ihres gegenüberstehenden Winkels wird aus den drey Seiten oder aus den drey Winkeln auf folgende Art gefunden.

1.° Aus den Seiten. Hier ist (§. 54. No 1.)

$$\cos A = \sin B.\sin C.\cos a + \cos B.\cos C$$

Ferner (§. 38. No. 1. 2.)

$$\cos a = 1 - 2\sin \tfrac{1}{2} a^2 = 2\cos \tfrac{1}{2} a^2 - 1.$$

folglich

$$\cos A = \cos B.\cos C + \sin B.\sin C - 2\sin B.\sin C.\sin \tfrac{1}{2} a^2$$
$$= \cos B.\cos C - \sin B.\sin C + 2\sin B.\sin C.\cos \tfrac{1}{2} a^2$$

Nun ist (§. 37. No. 4. 2.)

$$\cos B.\cos C + \sin B.\sin C = \cos(B - C)$$
$$\cos B.\cos C - \sin B.\sin C = \cos(B + C)$$

Daher

Daher

$$2 \sin B . \sin C \sin \tfrac{1}{2} a^2 = \cos(B-C) - \cos A$$
$$2 \sin B . \sin C . \cos \tfrac{1}{2} a^2 = \cos A - \cos (B+C)$$

und (§. 37. No. 12.)

$$2 \sin B . \sin C . \sin \tfrac{1}{2} a^2 = 2 \sin \frac{A+B-C}{2} . \sin \frac{A-B+C}{2}$$

$$2 \sin B . \sin C . \cos \tfrac{1}{2} a^2 = 2 \sin \frac{B+C+A}{2} . \sin \frac{B+C-A}{2}$$

folglich

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \frac{\sqrt{\left(\sin \frac{A+B-C}{2} . \sin \frac{A-B+C}{2}\right)}}{\sqrt{\sin B . \sin C}}$$

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \frac{\sqrt{\left(\sin \frac{A+B+C}{2} . \sin \frac{B+C-A}{2}\right)}}{\sqrt{\sin B . \sin C}}$$

§. 61.

Hiedurch wird also der Sinus und Cosinus des halben Bogens besonders gefunden. Nun ist

$$\sin \tfrac{1}{2} a . \cos \tfrac{1}{2} a = \tfrac{1}{2} \sin a$$

folglich

$$\sin a = \frac{2\sqrt{\left(\sin\frac{A+B+C}{2}.\sin\frac{A+B-C}{2}.\sin\frac{A-B+C}{2}.\sin\frac{B+C-A}{2}\right)}}{\sin B.\sin C}$$

und daher

$$\sin a : \sin A = \frac{2\sqrt{\left(\sin\frac{A+A+C}{2}.\sin\frac{A+B-C}{2}.\sin\frac{A+C-B}{2}.\sin\frac{B+C-A}{2}\right)}}{\sin A.\ \sin B.\sin C}$$

2.° Aus den Winkeln. Wird auf eben die Art gefunden:

$$\sin\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left[\left(-\cos\frac{a+b+c}{2}.\cos\frac{c+b-a}{2}\right):\sin b.\sin c\right]}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\left[\left(+\cos\frac{a+c-b}{2}.\cos\frac{a-c+b}{2}\right):\sin b.\sin c\right]}$$

$$\sin A = \frac{2\sqrt{\left(-\cos\frac{a+b+c}{2}.\cos\frac{a+b-c}{1}.\cos\frac{a+c-b}{2}.\cos\frac{b+c-a}{2}\right)}}{\sin b.\ \sin c}$$

$$\sin A : \sin a = \frac{2\sqrt{\left(-\cos\frac{a+b+c}{2}.\cos\frac{a+b-c}{2}.\cos\frac{a+c-b}{2}.\cos\frac{b+c-a}{2}\right)}}{\sin a.\ \sin b.\ \sin c}$$

§. 62

Die Größe des Wurzelzeichens in den 2 letzten Formeln ist negativ, und scheint daher einen unmöglichen Werth zu geben. Allein da die 3 Winkel in einem sphärischen Triangel nothwendig grösser sind als 180 Grad, so ist die Helfte ihrer Summe grösser als 90 Grad, und daher wird der $\cos\frac{(a+b+c)}{2}$ negativ, und die scheinbare Unmöglichkeit verschwindet.

§. 63.

Diese Formeln sind so beschaffen, daß man die vorgegebene Verhältniß durch Logarithmen finden kann. Denn die 4 Factores in den Wurzelzeichen sind die Helfte der Summe, und ihr Ueberschuß über jeden der 3 Seiten oder der drey Winkel. Addirt man demnach die Logarithmen ihrer Sinus oder ihrer Cosinus, so muß von der Summe die Helfte genommen, und von dieser Helfte die Summe der Sinus aller 3 Seiten oder Winkel abgezogen werden. Der Ueberrest ist der Logarithmus von der gesuchten Verhältniß doppelt genommen.

§. 64.

Wenn der Triangel als unendlich klein angesehen wird, so kann man für die Sinus der Seiten, die Seiten selbst setzen, ihre Cosinus werden = 1, wenn sie in der Formel nicht allein vorkommen. Kommen sie aber allein oder nebst den Quadraten der Sinus vor, so wird $\cos A = 1 - \frac{1}{2} A^2$, $\cos B = 1 - \frac{1}{2} B^2$, u. s. w. und die höhern Dignitäten von der Seite werden weggelassen. Hiedurch verwandeln sich die obigen Formeln in solche, welche für geradlinichte Triangel dienen, wie man sie auch aus der Beschaffenheit dieser Triangel geradenwegs findet. Es sind folgende:

I. Fall. Drey Seiten und ein Winkel.

1.° $A^2 = B^2 + C^2 - 2BC . \cos a$

2.° $\cos a = (B^2 + C^2 - A^2) : 2BC$

3.° $B = C . \cos a + \sqrt{(A^2 - C^2 \sin a^2)}$

4.° $\sin \frac{1}{2} a = \sqrt{\left[\left(\frac{A+B-C}{2} . \frac{A-B+C}{2}\right) : BC\right]}$

5.° $\cos \frac{1}{2} a = \sqrt{\left[\left(\frac{A+B+C}{2} . \frac{B+C-A}{2}\right) : BC\right]}$

6.° $\sin a = 2\sqrt{\left(\frac{A+B+C}{2} . \frac{A+B-C}{2} . \frac{A+C-B}{2} . \frac{B+C-A}{2}\right)} : BC$

II. Fall. Drey Winkel und eine Seite. Ist unbestimmt.

III. Fall.

III. Fall. Vier auf einander folgende Stücke.

7.° $B = A(\cos c + \sin c.\ \cot a) = A.\sin(a+c) : \sin a$

8.° $\cot a = (B - A.\ \cos c) : \sin c.\ A.$

9.° $A = B : (\cos c + \sin c.\ \cot a) = \sin a.\ B : \sin(a+c)$

10.° $\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c = \dfrac{A.\ \cos a + \sqrt{(A^2 - B.^2 \sin a^2)}}{(A+B)\sin a}$

IV. Fall. Vier entgegen stehende Stücke.

11.° $A.\ \sin b = B.\ \sin a.$

§. 65.

Ungeachtet man die Perpendicular gewöhnlich nur deßwegen fällt, damit man den Triangel auflösen könne, so giebt es doch Fälle, wo man dieselbe selbsten finden muß. Unter diesen sind die schwersten diejenige, wo man nur die drey Seiten oder die drey Winkel des Triangels, oder die zwo Seiten, und den Winkel hat, aus welchem sie fällt. Wir wollen dazu zween Wege angeben, deren der erste für die Exempel, so man in Zahlen rechnet, der andere aber für die algebraischen Rechnungen dienlicher ist.

§. 66.

Man soll demnach aus den 3 Seiten A, B, C, die Perpendicular AC finden. Nun ist Fig. 11. (§. 35. No. 33.)

$\cos B : \cos C = \cos(A - y) : \cos y$

Daher durch eine leichte Verwandlung

$$(\cos B + \cos C) : (\cos C - \cos B)$$
$$= [\cos(A-y) + \cos y] : [\cos y - \cos(A-y)]$$

folglich (§. 35. No. 16.)

$$\mathrm{tang}\,\frac{B+C}{2} \,.\, \mathrm{tang}\,\frac{B-C}{2} = \mathrm{tang}\,\tfrac{1}{2}A \,.\, \mathrm{tang}\,(A-y)$$

$$\mathrm{tang}(\tfrac{1}{2}A - y) = \frac{\mathrm{tang}(\frac{1}{2}B + C) \,.\, \mathrm{tang}\,\frac{1}{2}(B - C)}{\mathrm{tang}\,\frac{1}{2}A}$$

Da man durch diese Proportion $\frac{1}{2}A - y$, und daher auch y findet, so hat man ferner

$$\cos p = \cos C : \cos y$$

§. 67.

Die algebraische Formel findet sich aus den Gleichungen.

$$\cos B : \cos C = \cos(A-y) : \cos y$$
$$\cos p = \cos C : \cos y$$

Denn es ist (§. 35. No. 4.)

$$\cos(A-y) = \cos A . \cos y + \sin A . \sin y$$

folglich

$$\cos B = \cos C . \cos A + \cos C . \sin A . \cot y$$

oder

$$\mathrm{tang}\, y = \cos C . \sin A : (\cos B - \cos C . \cos A)$$

Da nun

$$\mathrm{tang}.\, y^2 + 1 = \sec y^2 = 1 : \cos y^2$$

und

$$1 : \cos y = \cos p : \cos C$$

so

so findet man hieraus

$$\cos p = \frac{\cos C . \sqrt{(\cos B^2 + \cos C^2 - 2 \cos B . \cos C . \cos A)}}{\cos B - \cos C . \cos A}$$

§. 68.

Auf eine ähnliche Art, wenn B, C und a gegeben, findet sich

$$\cot p = \frac{\sqrt{(\cot B^2 + \cot C^2 - 2 \cot B . \cot C . \cos a)}}{\sin a}$$

Diese Formel läßt sich mit der ersten, so wir (§. 64.) für geradlinichte Triangel gegeben haben, vergleichen. Denn wenn man aus cot B und cot C Seiten eines Triangels macht, die den Winkel a einschließen, so wird die dritte Seite = cot p. sin a seyn.

§. 69.

Wenn man in einem vorkommenden Fall mit Zahlen zu rechnen hat, so finden sich unter den bißher gegebenen Formeln wenige, bey welchen man füglich Logarithmen gebrauchen könnte. Indessen sind es gerade diejenigen, wo man die Logarithmen fast nicht wohl anders gebrauchen kann, als nach Anleitung der Formeln, nemlich für die gegen einander überstehende Theile die 4te Formel des §. 47. und für den Fall, wo man aus den Seiten einen Winkel, oder aus den Winkeln eine Seite zu finden hat, eine der Formeln des

§. 69

§. 60 und § 61. Diese Fälle haben in der Anwendung der Logarithmen etwas besonders, und gehen von den übrigen ab, welche sich auf eine allgemeine Regel bringen lassen. Doch wir müssen die Sache im Ganzen betrachten, weil der Gebrauch der Logarithmen Analogien fordert, und dabey auch zwischen den gegebenen und gesuchten Stücken ein Unterschied muß gemacht werden. Dieser Unterschied aber macht, daß wir uns nicht mehr an 4 allgemeinen Fällen begnügen können, sondern derselben in allen 12 finden, die sich aus den 4 allgemeinen (§. 41.) auf folgende Art herleiten lassen.

I. Bey drey Seiten und einem Winkel A, a, B, c giebt es 3 Fälle, weil man entweder den Winkel a, oder die gegenüberstehende Seite A, oder eine der anliegenden B, C zu finden hat.

II. Auf gleiche Art gibt es drey Fälle bey den 3 Winkeln und einer Seite. Denn man sucht entweder A oder a, oder einen der Winkel b, c.

III. Bey den auf einander folgenden Stücken A, a, B, c giebt es 4 Fälle, weil hier keine Gleichgültigkeit der Lage vorkömmt, folglich jedes dieser 4 Stücke etwas besonders hat.

IV. Bey den gegenüberstehenden Stücken A, a, B, b giebt es zween Fälle, indem man entweder

entweder eine der Seiten oder einen der Winkel sucht.

§. 70.

Von diesen 12 Fällen haben die von den gegenüberstehenden Stücken, und die, wo aus den Seiten ein Winkel, und aus den Winkeln eine Seite zu suchen ist, ihre eigene Auflösung, die wir schon oben angezeigt haben (60. 61. 47.) Bey den übrigen acht Fällen muß man eine Perpendicular fällen, um vermittelst zwoer Analogien das gesuchte zu finden. Man kann aber eine allgemeine Methode dazu angeben, und vermittelst einer schicklichen Bezeichnung der Theile alle acht Fälle auf einerley Art tractiren, und sie in allgemeinen Formeln vorstellen.

§. 71.

Wenn man sich die 4 Stücke des Triangels, welche in die Rechnung kommen, bemerkt hat, so ziehe man die Perpendicular dergestalt, daß sie nur eines dieser Stücke theile, und zwey andere bekannte auf einer Seite lasse. Diese zwey Stücke werden der Ordnung nach an dem getheilten liegen. Man nenne das getheilte Stück C, das anliegende oder mittlere A, das folgende oder äussere B, so wird das vierte a oder b seyn, je nachdem es dem A oder B gegenübersteht. Ferner benenne man die zween Theile le, worein C durch den Senkstrich zerfällt wird x und y, so daß x an dem A zu liegen komme.

§. 72.

Ist dieses geschehen, so wird man folgende Formeln bekommen.

1° $x + y = C$
2° $\tang x = \cos A . \tang B$
3° $\cos x . \cos a = \cos y . \cos B$
4° $\sin x . \tang A = \sin y . \tang b$.

Bey welchen zu merken, daß wenn C ein Winkel ist, man für x und y ihre Erfüllung zu 90 Grad nehmen müsse.

§. 73.

Von diesen 4 Formeln bleibt die dritte oder die vierte in jedem vorkommenden Fall weg, je nach dem man a oder b nicht unter den 4 Stücken hat, die in der Rechnung vorkommen. Das gesuchte Stück selbst wird immer C oder a oder b, und die Fälle selbst werden folgende seyn

aus	A, B, a sucht man	C.
	A, B, b	C.
	A, B, C	a.
	A, B, C	b.

§. 74

Die Ordnung der Rechnung ergiebt sich von selbsten. Man fängt immer bey der 2ten Formel

Formel an, wodurch man x findet. Ist C bekannt, so findet sich y durch die erste Formel, und sodann a oder b durch die dritte oder vierte. Ist aber C zu suchen, so findet man y durch die 3te oder 4te Formel, und sodann C durch die erste. Die 12, 13, 14 15 Figur stellen alle hiebey vorkommende Fälle vor.

§. 75.

Da man bey allen diesen Fällen zwo Analogien gebrauchen muß, so sind sie desto beschwerlicher, wenn man ganze Tabellen zu berechnen hat. Es wird sich daher allerdings der Mühe lohnen, zu sehen, ob man sodann durch eine schickliche Vorbereitung nicht eine Analogie ersparen könne? Es ist klar, daß die Arbeit dadurch um die Helfte abgekürzt würde. Ich habe gefunden, daß dieser Vortheil in verschiedenen Fällen angeht, und werde demnach die Methode, so ich dabey gebraucht, hier angeben.

§. 76.

Man habe aus einem Winkel und den beyden anliegenden Seiten die gegenüberstehenden zu finden. Dieser Fall kommt bey Berechnung von Tabellen der Sonnenhöhe, und daher sehr häufig vor. Denn der Winkel ist der Stundenbogen, die beyden anliegenden Seiten sind der Zusatz der Polhöhe und Abweichung der Sonne, und die

dritte

dritte dem Winkel gegenüberstehende Seite ist der Abstand der Sonne vom Scheitelpunct. Da wir demnach drey Seiten und einen Winkel haben, so gilt unter den Formeln des §. 47. die erste

$$\cos A = \cos B . \cos C + \sin B . \sin C . \cos a$$

Diese werden wir nun folgender Gestallt verwandeln. Erstlich ist

$$\cos a = 1 - 2 \sin \tfrac{1}{2} a^2$$

folglich

$$\cos A = \cos B . \cos C + \sin B . \sin C . (1 - 2 \sin \tfrac{1}{2} a^2)$$

Hieraus wird

$$\frac{\cos A}{2 \sin B . \sin C} = \frac{\cos B \cos C + \sin B . \sin C}{2 \sin B . \sin C} - \sin \tfrac{1}{2} a^2$$

Nun ist (§. 35. No. 4.)

$$\cos B . \cos C + \sin B . \sin C = \cos (B - C)$$

folglich

$$\frac{\cos A}{2 \sin B . \sin C} = \frac{\cos (B - C)}{2 \sin B . \sin C} - \sin \tfrac{1}{2} a^2$$

Man setze nun

$$\frac{\cos (B - C)}{2 \sin B . \sin C} = \sin \tfrac{1}{2} \varphi^2$$

so hat man

$$\frac{\cos A}{2 \sin B . \sin C} = \sin^2 \tfrac{1}{2} \varphi - \sin^2 \tfrac{1}{2} a = (\sin \tfrac{1}{2} \varphi + \sin \tfrac{1}{2} a) . (\sin \tfrac{1}{2} \varphi - \sin 2 a)$$

$$= \sin (\tfrac{1}{2} \varphi + \tfrac{1}{2} a) . (\sin \tfrac{1}{2} \varphi - \tfrac{1}{2} a) \text{ (§. 35. N. 22.)}$$

folglich

folglich

$$\cos A = 2.\sin B.\sin C.\sin\frac{(\phi + a)}{2}.\frac{(\sin\phi - a)}{2}$$

welches die gesuchte Formel ist.

§. 77.

Wird diese Formel auf die Berechnung der Sonnenhöhen angewandt, so ist a der Stundenbogen, C der Abstand des Pols vom Scheitelpunct, B der Abstand der Sonne vom Pol, und 90—A die Höhe der Sonne. Für einen gleichen Tag ist C und B folglich auch ϕ beständig. Hat man demnach ϕ gefunden, so sucht man den Logarithmus von 2 sin B. sin C, und die letzte Formel wird den Logarithmus des Sinus der Sonnenhöhe durch die bloße Addition zweyer Logarithmen zu demselben geben.

§. 78.

Es wird nicht schwer zu bestimmen, was in diesem Fall der Bogen ϕ vorstelle, welchen wir zur Abkürzung der Rechnung gebraucht haben. Zu diesem Ende setze man in der Gleichung

$$\frac{\cos A}{2\sin B.\sin C} = \sin\tfrac{1}{2}\phi^2 - \left(\frac{\sin a^2}{2}\right)$$

den $\cos A = 0$, und folglich $A = 90$ Grad, so hat man

$$0 = \sin\tfrac{1}{2}\phi^2 - \sin\tfrac{1}{2}a^2$$

daher

$$\sin\tfrac{1}{2}\Phi = \sin\tfrac{1}{2}a$$
$$\Phi = a$$

Demnach ist Φ der Winkel a, wenn der Bogen $A = 90$ Grad wird.

§. 79.

Wird dieses auf die Berechnung der Sonnenhöhe angewandt, so ist $A = 90$ Gr. wenn die Sonne am Horizont ist, daher ist a in solchem Fall der halbe Tagbogen, und so groß ist folglich Φ. In der gefundenen Formel haben wir $\frac{1}{2}(\Phi + a)$ und $\frac{1}{2}(\Phi - a)$. Diese beyden Bögen stellen demnach den Abstand der Sonne vom Aufgang und vom Untergang in Graden des Stundenbogens vor, und beyde zusammen geben den Tagbogen.

§. 80.

Wenn man demnach die Tageslänge weiß, so läßt sich die Höhe der Sonne für jeden Augenblick durch die bloße Addition dreyer Logarithmen finden. Man verwandelt nemlich die Helfte der Zeit vom Aufgang der Sonne bis zu dem fürgegebenen Augenblick, und von diesem bis zum Untergang der Sonne in Grade, so hat man $\frac{1}{2}(\varphi + a)$ und $\frac{1}{2}(\varphi - a)$. Zu den Logarithmen der Sinus dieser Bögen addire man den Log. von $2 \sin B . \sin C$, so hat man den Log. des Sinus der Sonnenhöhe.

§. 81.

§. 81.

An denen Orten und Tagen, wo die Sonne nicht untergeht, läßt sich diese Regel nicht gebrauchen, weil daselbst der Ausdruck

$$\frac{\cos(B-C)}{2\sin B.\sin C} > 1$$

wird, und daher nicht durch einen Sinus ausgedruckt werden kann. Man setze aber in diesen Fällen

$$\frac{\cos(B-C}{2\sin B.\sin C} = \tang\psi^2$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a^2 = \tang\varrho^2$$

so hat man

$$\frac{\cos A}{2\sin B.\sin C} = \tang\psi^2 - \tang\varrho^2$$

$$= (\tang\psi + \tang\varrho).(\tang\psi - \tang\rho)$$

$$= \frac{\sin(\psi+\varrho).\sin(\psi-\varrho)}{\cos\psi.^2\cos\varrho^2}$$

folglich

$$\cos A = \frac{2\sin B.\sin C.\sin(\psi+\varrho).\sin(\varphi-\varrho)}{\cos\varphi^2.\cos\varrho^2}$$

Diese Formel läßt sich ebenfalls durch Logarithmen berechnen. Sie ist aber ungleich weitläuftiger als die erstere, hingegen geht sie in jeden Fällen an.

§. 82.

Auf eine ganz ähnliche Art läßt sich aus einer Seite und den beyden anliegenden Winkeln der dritte Winkel finden, welcher der Seite gegenüber steht. Dieser Fall kömmt vor, wenn man den Winkel finden will, welchen die Ecclivtic zu einer gegebenen Zeit mit dem Horizont macht. Denn da bilden der Horizont, der Aequator und die Ecclivtic einen Triangel in welchem man die beyden Winkel, so der Aequator mit dem Horizont und der Ecclivtic macht, nebst dem Bogen des Aequators gegeben annimmt, welcher zwischen dem Horizont und dem Aequinoctialpunct liegt. Man berechnet für jede Polhöhe Tabellen, die den Winkel der Ecclivtic mit dem Horizonte vorstellen. Es ist demnach klar, daß die Berechnung solcher Tabellen sehr abgekürzt wird, wenn man sie auf eine bloße Addition dreyer Logarithmen bringen kann. Diß geschieht nun auf folgende Art.

§. 83.

Da hiebey 3 Winkel und eine Seite vorkommen, so gebrauchen wir aus den Formeln des §. 47. die zweyte

$$\cos a = \sin b . \sin c . \cos A - \cos b . \cos c$$

in welcher der Winkel a durch b, c, A mittelst einer bloßen Multiplication soll ausgedruckt werden. Nun ist

cos A

$$\cos A = -1 + 2 . \cos \tfrac{1}{2} A^2$$

folglich

$$\cos a = 2 \sin b . \sin c . \cos \tfrac{1}{2} A^2 - \sin b . \sin c - \cos b . \cos c$$

Ferne. ist

$$\cos b . \cos c + \sin c . \sin b = \cos (b - c)$$

folglich

$$\cos a = 2 \sin b . \sin c . \cos \tfrac{1}{2} A^2 - \cos (b - c)$$

und

$$\frac{\cos a}{2 \sin b . \sin c} = \cos \tfrac{1}{2} A^2 - \frac{\cos (b - c)}{2 \sin b . \sin c}$$

Man setze nun

$$\frac{\cos (b - c)}{2 \sin b . \sin c} = \operatorname{cosin} \tfrac{1}{2} \Phi^2$$

so hat man

$$\frac{\cos a}{2 \sin b . \sin c} = \cos \tfrac{1}{2} A^2 - \cos \tfrac{1}{2} \Phi^2 = (\cos 2 A + \cos 2 \Phi) . (\cos 2 A - \cos \tfrac{1}{2} \Phi)$$

$$= (\sin \tfrac{1}{2} A + \tfrac{1}{2} \Phi) . (\sin (\tfrac{1}{2} A \tfrac{1}{2} \Phi))$$

daher endlich

$$\cos a = 2 . \sin b . \sin c . \sin (\tfrac{1}{2} \Phi + \tfrac{1}{2} A) . \sin (\tfrac{1}{2} A - \tfrac{1}{2} \Phi)$$

In dieser Formel wird $\Phi = A$, wenn $a = 90°$ wird. Stellet demnach a den Winkel vor, den die Ecliptic mit dem Horizont macht, so ist klar, daß diese Formel nirgends als zwischen den Wendecirculn kann gebraucht werden, weil nirgends sonsten $a = 90$ Grad wird.

§. 84.

Man setze demnach für die übrigen Fälle

$$\frac{\cos(b - c)}{2 \sin b . \sin c} = \tan \psi^2$$

$$\cos \tfrac{1}{2} A^2 = \tan \varrho^2$$

so hat man

$$\frac{\cos a}{2 \sin b . \sin c} = \tan \varrho^2 - \tan \psi^2 = (\tan \varrho + \tan \psi).(t\varrho - t\psi)$$

folglich

$$\cos a = \frac{2 \sin b . \sin c . \sin(\varrho + \psi) . \sin(\varrho - \psi)}{\cos \varrho^2 . \cos \psi^2}$$

Es ist aber diese Formel wiederum weitläuftiger als die vorige, ungeachtet sie von allgemeinerm Gebrauch ist.

§. 85.

Wir wollen noch ein drittes Beyspiel anbringen: Man habe bey 4 auf einander folgenden Stücken den äussersten Winkel zu finden. Dieser Fall kömmt bey der Berechnung von Azimuthaltabellen vor, wenn man nemlich das Azimuth aus dem Abstand der Sonne vom Pol, aus dem Stundenwinkel, und dem Abstande des Pols vom Scheitelpuncte zu suchen hat. Da hiebey 4 auf einander folgende Stücke sind, so haben wir aus den Formeln des §. 47. die dritte

$\sin B . \cot A = \cos c . \cos B + \sin c . \cot a.$

Da nun $\cot A = \cos A : \sin A$, so hat man

sin

$\sin B.\cos A = \cos c.\cos B.\sin A + \sin c.\cot a.\sin A.$

und hieraus

$\sin c.\sin A.\cot a = \sin B.\cos A - \cos B.\sin A.\cos c$

Nun ist

$\cos c = 2\cos\frac{1}{2}c^2 - 1$

folglich

$\sin c.\sin A.\cot a = \sin B.\cos A + \cos B.\sin A(1 - 2\cos\frac{1}{2}c^2)$

Es ist aber

$\sin B.\cos A + \cos B.\sin A = \sin(B + A)$

folglich

$\sin c.\sin A.\cot a = \sin(B + A) - 2\cos B.\sin A.\cos\frac{1}{2}c^2$

oder

$$\frac{\sin c.\cot a}{2\cos B.\sin A} = \frac{\sin(B + A)}{2\cos B.\sin A} - \cos\frac{1}{2}c^2$$

Man setze nun

$$\frac{\sin(B + A)}{2\cos B.\sin A} = \cos\frac{1}{2}\phi^2$$

so ist

$$\frac{\sin c.\cot a}{2\cos B.} = \cos\frac{1}{2}\phi^2 - \cos\frac{1}{2}c^2 = \sin\frac{1}{2}(\phi + c).\sin\frac{1}{2}(\phi - c)$$

daher endlich

$$\cot a = \frac{2.\sin(\frac{1}{2}\phi + \frac{1}{2}c).\sin(\frac{1}{2}\phi - \frac{1}{2}c).\cos B}{\sin c}$$

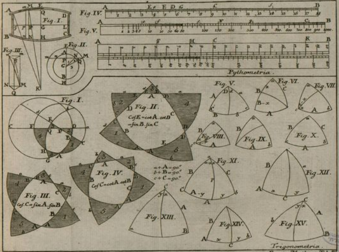
Nun ist $\phi = c$, wenn $\cot a = 0$, oder $a = 90°$ ist. Stellet demnach a das Azimuth vor, von

Mitternacht an gerechnet, so kann es nicht 90° werden, es sey denn A > B, oder der Abstand der Sonne vom Pol grösser als der Abstand des Pols vom Scheitelpunct. Und in diesem Fall stellt Φ den Stundenbogen vor, wenn das Azimuth der Sonne 90 Grad ist.

Theorie der Zuverläßigkeit der Beobachtungen und Versuche.

§. 1.

Wenn es Witz und Scharfsinnigkeit erfordert, bey den Versuchen eine solche Auswahl der Umstände zu treffen, welche die Theorie, so dadurch bekräftigt oder angewandt werden soll, voraus setzt und nothwendig macht; so erfordert es nachher nicht wenig Beurtheilungskraft, den wahren Werth der angestellten Versuche zu bestimmen, und dabey fest zu setzen, wie ferne man der geometrischen Schärfe, die man in der Ausübung niemals genau erhalten kann, nahe gekommen sey, und wie viel man zum höchsten noch davon abweiche? Diese Abweichung bestimmt den Grad der Zuverläßigkeit der Beobachtungen und Versuche, und da man diese in der Naturlehre und angewandten Mathematik als eben so viele Grundsätze gebraucht, so wird



Pract. Mathem. Tab. IV.