



OBSERVATIONS TRIGONOMÉTRIQUES.

PAR MR. LAMBERT.

§. I.

Quoique tous les cas qui peuvent se présenter dans la résolution des triangles soient discutés & résolus depuis longtems, & qu'à cet égard la Trigonométrie soit de toutes les parties des Mathématiques la plus complete; cependant il s'en faut de beaucoup qu'elle ne laisse plus rien à désirer, surtout lorsqu'il s'agit d'abrégier les opérations trigonométriques autant qu'il est possible. On fait que dans les triangles obliquangles il n'y a qu'un seul cas où l'on puisse se contenter d'une seule analogie, & que tous les autres demandent, ou quelque préparation, ou deux analogies, ou l'un & l'autre. Et quelquefois la préparation n'est pas moins longue que la seconde analogie qu'elle devoit rendre superflue. Ce n'est pas cependant que ces sortes de préparations soient inutiles; elles peuvent être d'un grand usage lorsqu'il s'agit de calculer des Tables. C'est alors qu'on peut souhaiter une préparation qui rende la seconde analogie superflue. Mais ces sortes de préparations ne sont point encore trouvées pour tous les cas, & elles semblent même pour plusieurs cas demander des Tables trigonométriques différentes de celles que nous avons. Je doute que ces nouvelles Tables soient calculées dans le siècle où nous sommes, mais ce que je vais examiner dans ce Mémoire en fera voir & la possibilité & l'usage.

§. 2. Je commencerai par un exemple. On fait que toutes les fois que le Soleil, ou quelque étoile, ne se trouve pas dans l'équateur & que le spectateur n'est, ni sous l'équateur, ni sous le pôle, la hauteur du Soleil ou de l'étoile ne se calcule que moyennant deux analogies.

Mais

Mais, si pour cette hauteur il s'agit de calculer une Table, en supposant la déclinaison constante, alors il n'est pas inutile de commencer par chercher l'arc diurne; & moyennant cette préparation chaque hauteur se calcule par la simple addition de trois logarithmes. Car, soit l'arc semi-diurne = ϕ , l'élongation du Soleil du midi = a , la distance du Soleil du pôle = B , la distance du zénith du pôle = C , la hauteur du Soleil = H ; on aura

$$\sin H = 2 \sin B. \sin C. \sin \frac{\phi + a}{2} . \sin \frac{\phi - a}{2}.$$

Or le logarithme de $2 \sin B. \sin C$ est constant, ainsi il est constamment ajouté aux $\log. \sin \frac{\phi + a}{2}$ & $l. \sin \frac{\phi - a}{2}$, pour avoir par une simple addition le $\log. \sin H$.

§. 3. De cette façon le travail pour calculer la Table se réduit à la moitié. Mais il faut bien remarquer que cette formule n'est d'aucun usage toutes les fois que l'astre reste constamment au dessus de l'horizon. Car alors l'arc diurne ϕ , tel qu'il est employé dans cette formule, est un arc imaginaire, & partant les $\sin \frac{\phi + a}{2}$, $\sin \frac{\phi - a}{2}$

Planche II. font des sinus imaginaires. C'est ce qu'on peut rendre visible de la façon suivante. Soit HZON le méridien, HCO l'horison, ZCN le vertical, P, p les pòles, AE l'équateur, SM le parallèle de l'équateur répondant à la déclinaison AS. Qu'on tire SB, MA parallèles à l'horison, & il fera CA le sinus de la hauteur méridienne de l'astre, CB le sinus de sa dépression sous l'horison à minuit. Sur AB décrivez le cercle AGBF, & divisez-le en 24 heures. L'arc FAG fera l'arc diurne, & GBF l'arc nocturne. Soit AQ une heure quelconque. Abaissez QK perpendiculaire sur l'horison, & tirez FQ, QG. Il fera

$$QK = \frac{FQ \cdot QG}{AB}.$$

Or QK est le sinus de la hauteur de l'astre en Q. Ainsi ce sinus est en

en raison du produit $FQ \cdot QG$, qui revient à $\sin \frac{\phi + a}{2} \cdot \sin \frac{\phi - a}{2}$ de la formule précédente. Mais on voit que cette analogie n'est possible qu'entant que l'horison HCO passe par le cercle $AGBF$, ce qui n'arrive que lorsque l'astre se leve & se couche. Donc, dans tous les cas où l'astre reste constamment au dessus de l'horison, les points d'intersection F, G , sont purement imaginaires.

§. 4. On peut à la vérité pour ces cas encore trouver une autre formule, en faisant

$$\frac{\text{cof}(B - C)}{2 \text{f}B \cdot \text{f}C} = \text{tang } \psi^2$$

$$\sin \frac{1}{2} a = \text{tang } \varrho.$$

Car cela donnera

$$\sin H = \frac{2 \text{f}B \cdot \text{f}C}{\text{cof } \psi^2} \cdot \frac{\sin(\psi + \varrho) \cdot \sin(\psi - \varrho)}{\text{cof } \varrho^2}.$$

Mais cette formule est plus prolixé, en ce qu'elle contient trois termes variables, & qu'il faut même prendre le quarré du troisieme. De la sorte l'opération est beaucoup moins abrégée qu'elle ne l'étoit dans le premier cas. Voilà donc ce qui m'a fait penser aux moyens de rendre la premiere formule (§. 2.) applicable, même dans les cas où l'arc diurne est imaginaire. On fait que des sinus imaginaires deviennent des quantités réelles quand on les transfere à l'hyperbole. Il s'agissoit donc d'examiner de quelle maniere les fonctions hyperboliques analogues aux fonctions circulaires peuvent être mises en usage dans la Trigonométrie, & quels sont les avantages qui en résultent, surtout lorsqu'il s'agit de calculer des Tables entieres. Voici ce que j'ai trouvé à cet égard.

§. 5. Soit C le centre commun du cercle QD & de l'hyperbole équilatérale QE , Q le sommet, CQB l'axe, CA l'asymptote de l'hyperbole, AQ la tangente initiale, q un point quelconque pris sur l'hyperbole, qp son ordonnée orthogonale, Cq la droite tirée par le point q & le centre C , qui coupe la tangente AQ en T .

Fig. 1.

Qu'on tire qP perpendiculaire à AQ , ou parallèle à CQ , & en joignant les points C , P , par la droite CP qui coupe le cercle en S , il fera

$$\begin{aligned} SR &= QT \\ CP &= Cp \\ QP &= qp \end{aligned}$$

& partant la droite ST fera pareillement parallèle à CQ . Abaissons encore NM perpendiculaire à CQ , & posons le rayon $CQ = r$. Soit enfin l'angle

$$\begin{aligned} qCQ &= \phi \\ PCQ &= \omega \end{aligned}$$

& il fera

$$\sin \omega = \text{tang } \phi.$$

C'est sur ces deux angles que roulera la comparaison à faire entre les fonctions circulaires & hyperboliques.

§. 6. Pour cet effet je nommerai l'abscisse Cp le *cosinus hyperbolique* & l'ordonnée pq le *sinus hyperbolique*, par la même raison que l'abscisse CM est nommée le *cosinus circulaire* & l'ordonnée MN le *sinus circulaire*. Dans cette dénomination que je trouve déjà employée par le R. P. *Riccati* dans ses *Opuscules*, il n'y a rien qui répugne à la signification primitive du terme *sinus*. Mais voici ce qu'il faut bien observer. Les *sinus* & *cosinus circulaires* peuvent se rapporter indifféremment à l'*arc*, à l'*angle* & au *secteur*, à cause de la proportionnalité constante qui s'y trouve. Il n'en est pas de même pour ce qui regarde les *sinus* & les *cosinus hyperboliques* pq , Cp . C'est aux *secteurs* $QCqQ$ que ces fonctions veulent principalement être rapportées, afin d'être à tous égards analogues aux *sinus* & *cosinus circulaires*. Les angles $QCq = \phi$, & $QCP = \omega$ entrent pareillement en considération, & ils seront d'usage lorsque des fonctions circulaires il s'agit de passer aux fonctions hyperboliques, ou réciproquement de celles-ci à celles-là. A cet égard l'un & l'autre mérite d'être

d'être désigné par un nom plus ou moins significatif. J'observe donc que l'angle $QCq = \phi$ peut être considéré comme *commun* au cercle & à l'hyperbole, en ce qu'il est également

$$\text{tang } \phi = \frac{NM}{MC} = \frac{qp}{pC}.$$

On voit donc que, si la tangente de l'angle $QCq = \phi$ est donnée, on peut l'exprimer par les *sinus* & *cosinus circulaires*, ou par les *sinus* & *cosinus hyperboliques*.

§. 7. Il n'en est pas de même de l'angle $QCP = \omega$. Cet angle sert pour passer des fonctions circulaires aux fonctions hyperboliques. Car on peut à certains égards considérer le *cosinus hyperbolique* Cp comme un *cosinus circulaire imaginaire*, & le *sinus hyperbolique* pq comme un *sinus circulaire imaginaire*. Ce qu'il y a d'imaginaire en cela regarde simplement la dénomination. Mais on fait depuis longtems que dans les calculs analytiques il arrive quelquefois que la solution change les dénominations dans lesquelles le problème étoit d'abord proposé, du moins pour certains cas qu'on croyoit être compris dans le problème. Tel est p. ex. le cas de l'arc diurne imaginaire dont j'ai parlé ci-dessus (§. 3. 4.).

§. 8. Comme il est (§. 5.)

$$\begin{aligned} Cp &= CP = \sec \omega \\ pq &= PQ = \text{tang } \omega, \end{aligned}$$

on voit que les *cosinus* & *sinus hyperboliques* peuvent toujours être regardés comme des *secantes* & *tangentes circulaires*, & que réciproquement, au lieu des *secantes* & *tangentes circulaires*, on peut substituer les *cosinus* & *sinus hyperboliques*. De là il suit encore que les *secantes* & les *tangentes circulaires* peuvent être regardées comme des *cosinus* & *sinus circulaires imaginaires*, & réciproquement. Et comme c'est à cela que se réduit l'usage de l'angle PCQ , je pourrai le nommer *l'angle de commutation*, en empruntant ce terme de l'Astronomie, ou bien

l'angle transcendant, parce qu'en effet c'est cet angle qui nous fait passer des fonctions circulaires aux fonctions hyperboliques. Quant à l'angle $qCQ = \phi$, je le nommerai simplement *l'angle commun*, par la raison rapportée ci-dessus (§. 6.).

§. 9. Quant à l'aire du secteur hyperbolique $qCQq$, il est assez indifférent de quelle unité l'on se sert pour l'exprimer, tout comme dans la Trigonométrie on exprime les angles par des degrés & leurs parties sexagésimales. Mais, comme en posant l'arc $QN = v$, l'aire du secteur circulaire $QNCQ$ devient $= \frac{1}{2}v$, on pourra à cet égard exprimer l'aire du secteur hyperbolique $qCQq$ par $\frac{1}{2}u$. C'est aussi ce que j'ai fait dans un Mémoire inséré dans ceux de l'Académie de 1761. De cette manière on trouve

$$\text{pour le secteur circulaire } dv = \frac{d \operatorname{tang} \phi}{1 + t\phi^2}$$

$$\text{pour le secteur hyperbolique } du = \frac{d \operatorname{tang} \phi}{1 - t\phi^2}$$

& partant

$$2u = \log \frac{1 + t\phi}{1 - t\phi} = \log. \operatorname{tang} (45^\circ + \phi)$$

§. 10. Posons donc

$$Cp = \operatorname{cof} u$$

$$pq = \sin u$$

& il fera

$$\operatorname{tang} \phi = \frac{\sin u}{\operatorname{cof} u}$$

Et comme il est (§. 5.)

$$\operatorname{rang} \phi = \sin \omega$$

on voit qu'il sera

$$2u = \log \frac{1 + \sin \omega}{1 - \sin \omega} = 2 \log. \operatorname{tang} (45^\circ + \frac{1}{2}\omega)$$

ou bien

$$u = \log \operatorname{tang} (45^\circ + \frac{1}{2}\omega).$$

§. 11.

§. 11. J'ai déjà dit qu'il est assez indifférent de quelle unité on se sert pour exprimer l'aire des secteurs hyperboliques. Cela fait que je regarderai cette aire comme exprimée par u , & qu'au lieu des logarithmes hyperboliques je prendrai simplement les logarithmes tabulaires. L'avantage qui en résulte consiste en ce que les Tables qu'il faudroit calculer pour les sinus & cosinus hyperboliques se trouvent, ou peu s'en faut, toutes calculées dans les Tables trigonométriques, si on met pour base l'angle transcendant ω . Car de cette manière on aura pour ces nouvelles Tables

- 1^{re} Colonne. L'angle transcendant ω en degrés & minutes depuis 0 jusqu'à 90°.
- 2^{de} Colonne. Le secteur hyperbolique
 $u = \log. \text{tang} (45^\circ + \frac{1}{2}\omega)$.
- 3^{me} Colonne. Le sin. hyp. de $u = \text{tang} \omega$.
- 4^{me} Colonne. Le cos. hyp. de $u = \text{sec} \omega$.
- 5^{me} Colonne. Le log. sin hyp. $u = \log. \text{tang} \omega$.
- 6^{me} Colonne. Le log. cos. hyp. $u = \log. \text{sec} \omega = -\log \cos \omega$.
- 7^{me} Colonne. La tang $\phi = \sin \omega$.
- 8^{me} Colonne. Le log. tang $\phi = \log \sin \omega$.
- 9^{me} Colonne. L'angle ϕ répondant.

§. 12. Il n'y a donc que les trois dernières colonnes qui ne se trouvent pas immédiatement dans les Tables, si on veut les réduire aux mêmes angles ω qu'on a mis pour base pour les colonnes précédentes. Mais, si pour ces trois dernières colonnes on met pour base l'angle ϕ , ces trois colonnes se trouvent également toutes calculées: mais dans ce cas il faut y joindre une colonne qui donne pour chaque angle ϕ le secteur hyperbolique répondant

$$u = \frac{1}{2} \log \text{tang} (45^\circ + \phi)$$

& cette colonne se calcule en prenant la moitié de tous les log. tang
T t 3 (45^c)

(45° + 0) qui se trouvent dans les Tables. Je m'en tiendrai néanmoins au premier arrangement, & je donnerai à la fin de ce Mémoire un échantillon dans une Table qui n'est calculée que de degrés en degrés.

§. 13. Maintenant il s'agit de faire voir le parallélisme qui se trouve entre la Trigonométrie circulaire & l'hyperbolique. C'est ce qu'on verra comme d'un coup d'œil dans la liste suivante.

<i>Formules circulaires.</i>	<i>Formules hyperboliques.</i>
Soient deux secteurs circulaires $y, z.$	Soient deux secteurs hyperboliques $y, z.$
Il fera	Il fera
1°. $\sin(y+z) = \sin y \cos z + \cos y \sin z$	1°. $\sin(y+z) = \sin y \cdot \cos z + c.y \cdot f.z$
2°. $\sin(y-z) = \sin y \cos z - \cos y \sin z$	2°. $\sin(y-z) = \sin y \cdot \cos z - c.y \cdot f.z$
3°. $\cos(y+z) = \cos y \cdot c.z - \sin y \cdot f.z$	3°. $\cos(y+z) = \cos y \cdot \cos z + f.y \cdot f.z$
4°. $\cos(y-z) = \cos y \cdot c.z + \sin y \cdot f.z$	4°. $\cos(y-z) = \cos y \cdot \cos z - f.y \cdot f.z$
5°. $2 \sin y \cdot \cos z = \sin(y+z) + \sin(y-z)$	5°. $2 \sin y \cdot \cos z = f(y+z) + f(y-z)$
6°. $2 \cos y \cdot \sin z = \sin(y+z) - \sin(y-z)$	6°. $2 \cos y \cdot \sin z = f(y+z) - f(y-z)$
7°. $2 \cos y \cdot c.z = c.(y+z) + \cos(y+z)$	7°. $2 \cos y \cdot c.z = c.(y+z) + c.(y-z)$
8°. $2 \sin y \cdot f.z = c.(y+z) - \cos(y+z)$	8°. $2 \sin y \cdot f.z = c.(y+z) - c.(y-z)$
9°. $\sin y + \sin z = 2 \sin \frac{y+z}{2} \cdot \cos \frac{y-z}{2}$	9°. $\sin y + \sin z = 2 \sin \frac{y+z}{2} \cdot \cos \frac{y-z}{2}$
10°. $\sin y - \sin z = 2 \cos \frac{y+z}{2} \cdot \sin \frac{y-z}{2}$	10°. $\sin y - \sin z = 2 \cos \frac{y+z}{2} \cdot \sin \frac{y-z}{2}$
11°. $\cos y + \cos z = 2 \cos \frac{y+z}{2} \cdot \cos \frac{y-z}{2}$	11°. $\cos y + \cos z = 2 \cos \frac{y+z}{2} \cdot \cos \frac{y-z}{2}$
12°. $\cos z + c.y = 2 \sin \frac{y+z}{2} \cdot \sin \frac{y-z}{2}$	12°. $\cos y - c.z = 2 \sin \frac{y+z}{2} \cdot \sin \frac{y-z}{2}$

<p>13°. $\text{rang}(y+z) = (ty+tz) : (1-ty.tz)$</p> <p>14°. $t(y-z) = (ty-tz) : (1+ty.tz)$</p> <p>15°. $ty+tz = f(y+z) : \text{cof} y . \text{cof} z$</p> <p>16°. $ty-tz = f(y-z) : \text{cof} y . \text{cof} z$</p> <p>17°. $(ty+tz) : (ty-tz) = f(y+z) : f(y-z)$</p> <p>18°. $(fy+tz) : (fy-tz) = t \frac{y+z}{2} : t \frac{y-z}{2}$</p> <hr/> <p>19°. $2 \sin y^2 = 1 - \text{cof} 2y$</p> <p>20°. $2 \text{cof} y^2 = 1 + \text{cof} 2y$</p> <p>21°. $\sin y^2 + \text{cof} y^2 = 1$</p> <p>22°. $\text{cof} y^2 - \sin y^2 = \text{cof} 2y$</p> <hr/> <p>23°. $\text{rang} 2y = 2ty : (1-ty^2)$</p> <p>24°. $\sin 2y = 2ty : (1+ty^2)$</p> <p>25°. $\text{cof} 2y = (1-ty^2) : (1+ty^2)$</p> <p style="text-align: center;">&c.</p>	<p>13°. $t(y+z) = (ty+tz) : (1+ty.tz)$</p> <p>14°. $t(y-z) = (ty-tz) : (1-ty.tz)$</p> <p>15°. $ty+tz = f(y+z) : \text{cof} y . \text{cof} z$</p> <p>16°. $ty-tz = f(y-z) : \text{cof} y . \text{cof} z$</p> <p>17°. $(ty+tz) : (ty-tz) = f(y+z) : f(y-z)$</p> <p>18°. $(fy+tz) : (fy-tz) = t \frac{y+z}{2} : t \frac{y-z}{2}$</p> <hr/> <p>19°. $2 \sin y^2 = \text{cof} 2y - 1$</p> <p>20°. $2 \text{cof} y^2 = \text{cof} 2y + 1$</p> <p>21°. $\text{cof} y^2 - \sin y^2 = 1$</p> <p>22°. $\text{cof} y^2 + \sin y^2 = \text{cof} 2y$</p> <hr/> <p>23°. $t 2y = 2ty : (1+ty^2)$</p> <p>24°. $f 2y = 2ty : (1-ty^2)$</p> <p>25°. $\text{cof} 2y = (1+ty^2) : (1-ty^2)$</p> <p style="text-align: center;">&c.</p>
--	---

§. 14. Comme donc les formules hyperboliques ne diffèrent des formules circulaires répondantes que tout au plus dans les signes + —, & que même dans la plus grande partie de ces formules l'identité s'étend jusques sur les signes, on conçoit aisément qu'on peut attendre des formules hyperboliques les mêmes avantages qu'on a eus des formules circulaires répondantes. Du reste toutes ces formules se trouvent aisément, en ce qu'il est

pour le cercle	pour l'hyperbole
$\sin y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} - 1 - e^{-y\sqrt{-1}} - 1}{2\sqrt{-1}}$	$\sin y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$
$\text{cof} y = \frac{e^{y\sqrt{-1}} - 1 - e^{-y\sqrt{-1}} + 1}{2}$	$\text{cof} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$

e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique est = 1.

§. 15. Je vais maintenant éclaircir par quelques exemples plus détaillés l'usage qu'on pourra faire de la Trigonométrie hyperbolique.

Fig. 2. Soient dans un triangle sphérique les quatre parties continues A, c, B, a . L'angle c & le côté B sont donnés, & il s'agit de calculer une Table qui pour chaque angle c indique l'angle répondant a . La Trigonométrie donne pour le cas de quatre parties continues

$$\sin B. \cot A = \operatorname{cof} c. \operatorname{cof} B + \sin c. \cot a.$$

Et dans cette formule les côtés & les angles sont supposés ne point excéder les 90 degrés. Nous aurons donc

$$\frac{\cot a}{\operatorname{cof} B} = \operatorname{t} B. \cot A. \operatorname{cof} c - \cot c.$$

Faisons

$$\begin{aligned} \operatorname{t} B. \cot A &= \operatorname{t} k \\ c &= 90^\circ - c' \end{aligned}$$

& il sera

$$\frac{\cot a}{\operatorname{cof} B} = \operatorname{t} k. \sec c' - \operatorname{t} c'$$

Or, pour transférer cette formule à l'hyperbole, on regardera k comme un angle commun, & c' comme un angle transcendant. Soient les sécateurs hyperboliques répondans κ, γ , & il sera

$$\frac{\cot a}{\operatorname{cof} B} = \operatorname{t} \kappa. \operatorname{cof} \gamma - \sin \gamma$$

& partant

$$\frac{\cot a}{\operatorname{cof} B} = \frac{\operatorname{f} \kappa \operatorname{cof} \gamma - \operatorname{cof} \kappa \operatorname{f} \gamma}{\operatorname{cof} \kappa}$$

ce qui donne

$$\cot a = \frac{\operatorname{cof} B}{\operatorname{cof} \kappa} \cdot \sin (\kappa - \gamma)$$

ou,

ou, pour distinguer les fonctions hyperboliques des circulaires,

$$\cot a = \frac{\text{cof } B}{\text{cof h. } \kappa} \cdot \text{fin hyp } (\kappa - \gamma).$$

De cette maniere le calcul est réduit à une seule analogie, ou bien à la simple addition du logarithme constant de

$$\frac{\text{cof } B}{\text{cof hyp. } \kappa}$$

au logarithme variable de

$$\text{fin hyp. } (\kappa - \gamma).$$

§. 16. Voici maintenant comment ce calcul peut être arrangé en nombres. Soit

$$B = 37^{\circ}. 30'$$

$$A = 70^{\circ}. 0.$$

On aura d'abord

$$\log. \text{r } B = 9,8849805$$

$$\log. \cot A = 9,5610659$$

donc

$$\log. \text{r } K = 9,4460464.$$

Ce logarithme étant cherché dans la 8^{me} Colonne (§. 11) donnera dans la 2^{de} Colonne le secteur hyperbolique répondant

$$\kappa = 0,1245962$$

& dans la 6^{me} Colonne le

$$\log. \text{cof hyp } \kappa = 0,0176718:$$

mais il est

$$\log \text{cof } B = 9,8994667$$

donc

$$\log \frac{\text{cof } B}{\text{cof. hyp. } \kappa} = 9,8817949.$$

Et voilà la préparation faite. On cherchera donc chaque angle c' dans la premiere Colonne, & la seconde donnera le secteur γ répondant; par-là on trouve $\kappa - \gamma$ par la simple soustraction. Et en cher-

chant le facteur $\kappa - \gamma$ dans la seconde Colonne, on trouvera dans la 5^{me} le log. fin. hyp ($\kappa - \gamma$) répondant, auquel on ajoutera le log (cof B : cof hyp κ) qu'on vient de trouver, & la somme donnera le log. cot a moyennant lequel l'angle a se trouve dans les Tables circulaires. Voici le calcul pour les angles c' de 15 en 15 degrés.

$c' = 0$	$\Phi = 0,1245962$	$\Phi - \gamma$	9,8817948	1 cot a
15	$\gamma = 0,0000000$	+ 0,1245962	9,4636576	9,3454524
30	$= 0,1150195$	+ 0,0095767	8,3357462	8,2175410
45	$= 0,2385606$	- 0,1139644	9,4239595	9,3057543
60	$= 0,3827754$	- 0,2581795	9,7994183	9,6812131
75	$= 0,5719475$	- 0,4473513	10,0871152	9,9789100
90	$= \text{infini.}$	- infini.	infini.	infini.

Il fera donc

c'	c	a
90	0	180°. 0'. 0''
75	15	154. 35. 8
60	30	133. 36. 34
45	45	115. 38. 22
30	60	101. 25. 49
15	75	89. 3. 6
0	90	77. 30. 31.

On voit que pour continuer il faut prendre c négatif, ce qui dans la troisieme Colonne, au lieu de $\Phi - \gamma$, donnera $\Phi + \gamma$. Du reste les angles a représentent dans cet exemple les azimuths pour l'élévation du Pole $90^\circ - B = 52^\circ. 30'$, & la déclinaison boréale $90^\circ - A = 20^\circ$, & les angles horaires c, c' .

§. 17. Comme l'angle commun k ne fauroit surpasser les 45° , on voit que, s'il avoit été

$$\text{tang } B. \text{ cot } A > 1$$

au lieu de

$$\frac{\cot a}{\text{cof } B} = \tau k. \text{ fec } c' - \tau c'$$

il eût fallu faire

$$\frac{\cot a}{\text{cof } B. \tau k} = \text{fec } c' - \cot k. \tau c'$$

ce qui, en faisant $\cot k = \tau \lambda$, eût donné

$$\frac{\cot a}{\text{cof } B. \cot \lambda} = \frac{\text{cof hyp } \gamma. \text{ cof hyp } \lambda' - \text{f hyp } \gamma. \text{ f hyp } \lambda'}{\text{cof hyp } \lambda}$$

& partant

$$\cot a = \frac{\text{cof } B}{\text{fin hyp } \lambda} \cdot \text{cof hyp } (\lambda' - \gamma).$$

§. 18. De cette manière j'ai repassé les autres cas des triangles obliquangles, pour voir si moyennant quelque préparation le calcul des Tables peut être réduit à une seule analogie, soit avec les Tables circulaires, soit en employant encore les Tables hyperboliques. Voici le résultat de mes essais.

§. 19. Comme l'exemple que je viens de détailler est pris du cas des parties continues A, c, B, a , on voit que les Tables qu'on pourra avoir besoin de calculer seront de 6 espèces: car elles pourront faire voir le rapport entre

$$\begin{array}{l} AB, \quad Ba, \quad ac \\ Aa, \quad Bc, \\ Ac. \end{array}$$

Ces 6 espèces se doublent lorsqu'on a égard à la différence entre la quantité donnée & celle qu'on cherche. En voici la spécification.

§. 20. La formule générale pour les parties continues est

$$\text{f } B. \cot A = \text{cof } c. \text{ cof } B \pm \text{f } c. \cot. a.$$

Qu'il s'agisse maintenant d'exprimer

I°. A par a .

On aura

$$\frac{fB. \cot A}{fc} = \cot c. \operatorname{cof} B + \cot a.$$

Qu'on fasse

$$\cot c. \operatorname{cof} B = \cot \psi$$

& il sera

$$\frac{fB. \cot A}{fc} = \cot \psi + \cot a = \frac{f(a + \psi)}{f\psi. fa}$$

ce qui donne

$$\cot A = \frac{fc}{fB. f\psi} \cdot \frac{f(a + \psi)}{f\psi}.$$

Or le facteur

$$\frac{fc}{fB. f\psi}$$

étant constant, on voit que la Table se calcule par une simple analogie, & il n'y entre que des fonctions circulaires.

II°. a par A.

On aura

$$\frac{fc. \cot a}{fB} = \cot A - \cot B. \operatorname{cof} c.$$

Qu'on fasse

$$\cot B. \operatorname{cof} c = \cot \psi$$

& on aura

$$- \cot a = \frac{fB}{fc. f\psi} \cdot \frac{\operatorname{fin}(A - \psi)}{fA}$$

formule qui se réduit à une simple analogie, & où il n'entre que des fonctions circulaires.

III°.

III°. A par c.

On aura

$$\frac{fB. \cot A}{\cot a} = \text{cof } c. \text{ t } a. \text{ cof } B + f c.$$

Qu'on fasse

$$\text{t } a. \text{ cof } B = \text{t } \psi$$

& il fera

$$\cot A = \frac{\cot a}{fB. f\psi} \cdot f(c + \psi)$$

analogie simple & fonctions circulaires.

IV°. c par A.

On aura (N°. III.)

$$f(c + \psi) = (fB. f\psi. \text{t } a). \cot A;$$

or $c + \psi$ étant trouvé, c se trouve sans peine.

V°. a par B.

On aura

$$\cot a. \text{t } A. f c = fB - \text{cof } c. \text{t } A. \text{cof } B.$$

Qu'on fasse

$$\text{cof } c. \text{t } A = \text{t } \psi$$

& il fera

$$\cot a = \frac{\cot A}{f c. \text{cof } \psi} \cdot \text{fin } (B - \psi)$$

analogie simple & fonctions circulaires.

VI°. B par a.

On aura (N°. V.)

$$f(B - \psi) = \cot a. (\text{t } A. f c. \text{cof } \psi)$$

& $B - \psi$ étant trouvé, on ajoute ψ pour avoir B.

VII°. A par B.

On aura

$$\frac{\cot A}{\operatorname{cof} c} = \cot B + t c. \cot a. \operatorname{cof} ec B.$$

Qu'au lieu de B on prenne $90^\circ - B = B'$, & en faisant

$$t c. \cot a = \operatorname{tang} \psi$$

il fera $\cot A = t B' + t \psi. \operatorname{sec} B'$.

Faisant donc $t B' = \operatorname{fin} \operatorname{hyp} \mathfrak{E}.$

$$\operatorname{sec} B' = \operatorname{cof} \operatorname{hyp} \mathfrak{E}.$$

& nommant ψ' le secteur hyperbolique répondant à l'angle commun ψ , on aura

$$\frac{\cot A}{\operatorname{cof} c} = \operatorname{fin} \operatorname{hyp} \mathfrak{E} + \operatorname{cof} \operatorname{hyp} \mathfrak{E}. t \psi' = \frac{\operatorname{fin} \operatorname{hyp} (\mathfrak{E} + \psi')}{\operatorname{cof} \operatorname{hyp} \psi'}$$

ce qui donne $\cot A = \frac{\operatorname{cof} c}{\operatorname{cof} \operatorname{hyp} \psi'}. \operatorname{fin} \operatorname{hyp} (\mathfrak{E} + \psi').$

Le calcul est fort ressemblant à celui que j'ai détaillé ci-dessus (§. 15 - - 17). Et s'il se trouve

$$t c. \cot a > 1$$

on fera $\frac{\cot A}{t c. \cot a} = \cot c. t a. \cot B + \operatorname{cof} ec B$

$$90^\circ - B = B'$$

$$t B' = \operatorname{fin} \operatorname{hyp} \mathfrak{E}$$

$$\operatorname{sec} B' = \operatorname{cof} \operatorname{hyp} \mathfrak{E}$$

$$\cot c. t a = t \psi$$

& il fera

$$\frac{\cot A}{t c. \cot a} = t \psi'. \operatorname{fin} \operatorname{hyp} \mathfrak{E} + \operatorname{cof} \operatorname{hyp} \mathfrak{E} = \frac{\operatorname{cof} \operatorname{hyp} (\mathfrak{E} + \psi')}{\operatorname{cof} \operatorname{hyp} \psi'}$$

ce qui

ce qui donne $\cot A = \frac{f c \cdot \cot a}{\text{cof hyp } \psi'} \cdot \text{cof hyp } (\xi + \psi')$.

VIII°. B par A.

On aura (N°. VII.)

$$\text{fin hyp } (\xi + \psi') = \cot A \cdot \frac{\text{cof hyp } \psi'}{\text{cof } c}$$

ou dans le second cas

$$\text{cof hyp } (\xi + \psi') = \cot A \cdot \frac{\text{cof hyp } \psi'}{f c \cdot \cot a}$$

Ici le log. fin. ou le log. cof. hyp. du secteur $\xi + \psi'$ étant cherché dans la 5^{me} ou 6^{me} Colonne (§. 11), on trouvera dans la seconde Colonne le secteur hyperbolique $\xi + \psi'$ répondant, duquel le secteur ψ' étant soustrait, on cherchera le secteur ξ dans la seconde Colonne, & on aura dans la première Colonne l'angle $B' = 90 - B$ répondant.

IX°. a par c.

C'est le cas détaillé ci-dessus (§. 15, 16, 17); on aura donc

$$\cot a = \frac{\text{cof } B}{\text{cof hyp } \kappa} \cdot \text{fin hyp } (\kappa - \gamma) \quad (\S. 15)$$

ou bien $\cot a = \frac{\text{cof } B}{\text{fin hyp } \lambda} \cdot \text{cof hyp } (\lambda - \gamma) \quad (\S. 17).$

X°. c par a.

On aura (N°. IX.)

$$\text{fin hyp } (\kappa - \gamma) = \cot a \cdot \frac{\text{cof hyp } \kappa}{\text{cof } B}$$

ou bien $\text{cof hyp } (\lambda - \gamma) = \cot a \cdot \frac{\text{fin hyp } \lambda}{\text{cof } B}.$

Ici le secteur $\lambda - \gamma$ ou $\kappa - \gamma$ étant trouvé, le secteur γ se trouve par une simple soustraction, & en le cherchant dans la seconde

conde Colonne, on trouvera dans la premiere l'angle $c' = 90 - c$ répondant.

XI°. & XII°. B par c , ou c par B.

Ces deux cas font les moins traitables. Tout ce qu'on pourra faire fera d'exprimer B $\mp c$ par B $- c$, ou réciproquement B $- c$ par B $\mp c$.

Fig. 3. §. 21. Si les quatre parties du triangle sphérique, qui entrent dans le calcul, font les trois côtés A, B, C, avec l'angle a , que je suppose être opposé au côté A; on aura la formule générale

$$\text{cof A} = \text{cof B. cof C} \mp \text{fin B. fin C. cof } a.$$

Voici la spécification des cas particuliers qui peuvent se présenter lorsqu'il s'agit de calculer des Tables.

I°. A par a .

On aura
$$\frac{\text{cof A}}{\text{f B. f C}} = \text{cot B. cot C} \mp \text{cof } a.$$

Qu'on fasse
$$\text{cot B. cot C} \mp \text{cof } \psi$$

& on aura
$$\text{cof A} = 2 \text{f B. f C. cof } \frac{\psi + a}{2} \cdot \text{cof } \frac{\psi - a}{2}.$$

Ces fonctions seront circulaires toutes les fois qu'il sera

$$\text{cot B. cot C} < 1.$$

Mais lorsqu'il est $\text{cot B. cot C} > 1$

on fera
$$90^\circ - a = a'$$

$$\text{cot B. cot C} = \text{fin hyp } \psi$$

on cherchera fin a' dans la troisieme Colonne de la Table, & dans la seconde on trouvera le secteur hyperbolique répondant. Ce secteur étant posé $= a$, on aura

$$\frac{\text{cof A}}{\text{f B. f C}} = \text{fin hyp } \psi \mp \text{fin hyp } a = 2 \cdot \text{f hyp } \frac{\psi + a}{2} \cdot \text{cof hyp } \frac{\psi - a}{2} \quad \&$$

& partant $\text{cof } A = 2 \text{ fB. fC. f hyp } \frac{\psi + \alpha}{2}, \text{ cof hyp } \frac{\psi - \alpha}{2}.$

II°. a par A .

On aura $\text{cof } a = \frac{\text{cof } A - \text{cof } B. \text{cof } C}{\text{fB. fC}}.$

Qu'on fasse $\text{cof } B. \text{cof } C = \text{cof } \psi$

& il fera $\text{cof } a = \frac{2}{\text{fB. fC}} \cdot \text{f } \frac{\psi + A}{2} \cdot \text{f } \frac{\psi - A}{2}.$

Ces fonctions sont toujours circulaires.

III°. A par B .

On aura $\text{cof } A = \text{cof } C (\text{cof } B + \text{fB. tC. cof } a).$

Qu'on fasse $\text{tC. cof } a = \text{t } \psi$

& il fera $\text{cof } A = \frac{\text{cof } C}{\text{cof } \psi} \cdot \text{cof } (B - \psi).$

Ces fonctions sont toujours circulaires.

IV°. B par A .

On aura (N°. III.)

$$\text{cof } (B - \psi) = \frac{\text{cof } \psi}{\text{cof } C} \cdot \text{cof } A.$$

V°. a par B .

On aura $\text{fB. fC. cof } a = \text{cof } C \left(\frac{\text{cof } A}{\text{cof } C} - \text{cof } B \right).$

Qu'on fasse $\frac{\text{cof } A}{\text{cof } C} = \text{cof } \psi$

& il fera

$$\text{cof } a = 2 \text{ cot } C \cdot \text{f } \frac{B + \psi}{2} \cdot \text{f } \frac{B - \psi}{2} : \text{fin } B.$$

Ces fonctions ne sont circulaires que lorsqu'il est

$$\frac{\operatorname{cof} A}{\operatorname{cof} C} < 1.$$

Voici une autre solution. Comme il est

$$\begin{aligned} \operatorname{cof} a. \operatorname{fc} C &= \operatorname{cof} A. \operatorname{cof} ec B - \operatorname{cof} C. \operatorname{cot} B, \\ \text{faisons } 90^\circ - B &= B' \\ \frac{\operatorname{cof} A}{\operatorname{cof} C} &= \operatorname{tang} k, \end{aligned}$$

$$\text{il fera } \operatorname{cof} a. \operatorname{t} C = \operatorname{t} k. \operatorname{fec} B' - \operatorname{t} B'.$$

Or ici k est un angle commun, & B' un angle transcendant. Cherchant donc $\operatorname{t} k$ dans la 8^{me}, ou $\log \operatorname{t} k$ dans la 7^{me} Colonne, on trouvera dans la 2^{de} Colonne le secteur hyperbolique répondant, qui soit $= \kappa$. Ensuite, en prenant B' dans la première Colonne, on trouvera dans la seconde le secteur hyperbolique répondant, qui soit $= \mathcal{E}$. De cette façon on aura

$$\operatorname{cof} a. \operatorname{t} C = \frac{\operatorname{fin} \operatorname{hyp} (\kappa - \mathcal{E})}{\operatorname{cof} \operatorname{hyp} \kappa}$$

$$\& \text{ partant } \operatorname{cof} a = \frac{\operatorname{cot} C}{\operatorname{cof} \operatorname{hyp} \kappa} \cdot \operatorname{fin} \operatorname{hyp} (\kappa - \mathcal{E}).$$

Cette formule sert pour tous les cas.

VI°. B par a .

On aura (N°. V.)

$$\operatorname{fin} \operatorname{hyp} (\kappa - \mathcal{E}) = \operatorname{cof} \operatorname{hyp} \kappa. \operatorname{t} C. \operatorname{cof} a.$$

Par cette formule on trouve le secteur hyperbolique $\kappa - \mathcal{E}$, qu'on soustrait du secteur κ , afin d'avoir le secteur \mathcal{E} , lequel étant cherché dans la seconde Colonne donne dans la première l'angle répondant $B' = 90^\circ - B$.

VII°. A par C. Tout comme A par B. (N°. III.)

VIII°.

VIII°. C par A. Tout comme B par A. (N°. IV.)

IX°. a par C. Tout comme a par B. (N°. V.)

X°. C par a. Tout comme B par a. (N°. VI.)

Car on voit par la formule générale que les côtés B, C, peuvent être changés l'un contre l'autre.

XI°. XII°. B par C, ou C par B. Ces deux cas qui en effet ne diffèrent point l'un de l'autre, sont les moins traitables, & tout ce qu'on peut faire c'est de déterminer B + C par B — C, ou réciproquement B — C par B + C.

§. 22. Le troisieme cas général est celui où les quatre parties du triangle sphérique sont les trois angles a, b, c & un côté A qu'on suppose être opposé à l'angle A. La formule générale pour ce cas étant

Fig. 4.

$$\operatorname{cosec} a = \operatorname{cosec} b \cdot \operatorname{cosec} c - \operatorname{cosec} b \cdot \operatorname{cosec} c \cdot \operatorname{cosec} A,$$

on voit qu'elle ne diffère que dans les signes de la formule du second cas général (§. 21). Et ainsi les 12 cas particuliers se traitant d'une façon tout à fait semblable, je ne m'arrêterai pas à les exposer tout au long.

§. 23. Enfin le quatrieme cas général est celui des parties opposées A, a, B, b. Et comme ici il est simplement

Fig. 5.

$$\operatorname{cosec} A : \operatorname{cosec} a = \operatorname{cosec} B : \operatorname{cosec} b$$

on voit que cette analogie peut toujours être employée sans aucune autre réduction.

Mais il ne fera pas inutile de rendre visible le passage des quantités circulaires aux quantités hyperboliques. Je reprendrai pour cet effet l'exemple que j'ai rapporté ci-dessus (§. 3.) & la construction que j'en ai donnée pour le cas où les quantités circulaires n'offrent rien d'imaginaire, c'est à dire, pour le cas où l'horison passe en effet par le cercle AGBF. Retenons la signification que j'ai donnée aux lettres a, B, C, H, φ (§. 2) & la formule générale est

Fig. 7.

$$\sin H = \cos B. \cos C + \sin B. \sin C. \cos a.$$

Cette formule se change en

$$\frac{\sin H}{\sin B. \sin C} = \cot B. \cot C + \cos a,$$

& en faisant $\quad \quad \quad - \cot B. \cot C = \cos \phi$

il fera $\quad \quad \quad \frac{\sin H}{\sin B. \sin C} = \cos a - \cos \phi,$

& ϕ exprimera l'arc semidiurne. Soit donc dans la 7^{me} figure le rayon $DL = 1$, on aura

$$AQ = a, \quad DT = \cos a$$

$$AQG = \phi, \quad DC = - \cos \phi$$

donc $\cos a - \cos \phi = DT + DC = TC = QK.$

Ainsi il fera $QK = \frac{\sin H}{\sin B. \sin C} = \cos a - \cos \phi.$

Fig. 8. Mais, dans les cas où le cercle AB n'est plus coupé par l'horizon, comme dans la 8^e Figure, on voit que DC ne pourra plus représenter un cosinus circulaire, parce que le point C ne se trouve pas au dedans du cercle AB . Qu'on décrive donc l'hyperbole équilatérale ILV , qui ait le même centre D , & dont l'axe soit DL , on aura

$$DC = kc, \text{ sinus hyperbolique du secteur } LkD,$$

$$DT = qt, \text{ sinus hyperbolique du secteur } LqD.$$

Et comme il est $\frac{\sin H}{\sin B. \sin C} = QK = DT + DC,$

il fera également $\frac{\sin H}{\sin B. \sin C} = qt + ck.$

Faisant donc $qt = \cos a = \sin \text{hyp } a$
 $ck = \sin \text{hyp } \psi$

il fera

il fera
$$\frac{\sin H}{\sin B. \sin C} = \sin \text{hyp } \alpha + \sin \text{hyp } \psi$$

$$= 2 \sin \text{hyp } \frac{\psi + \alpha}{2} \cdot \text{cof } \frac{\psi - \alpha}{2},$$

donc
$$\sin H = 2. \sin B. \sin C. \sin \text{hyp } \frac{\psi + \alpha}{2} \cdot \text{cof } \frac{\psi - \alpha}{2},$$

tout comme §. 21. N^o. I. On voit que ψ représente ici le secteur LkD , qui pour une même déclinaison est constant, & α représente le secteur LqD , qui varie avec l'arc horaire AQ , en sorte que Qq est toujours parallèle à l'horison.

§. 24. Les secteurs hyperboliques employés dans ces formules sont en effet des logarithmes (§. 9. 10.). Ainsi, en prenant la somme ou la différence de deux secteurs hyperboliques, c'est prendre la somme ou la différence de deux logarithmes; mais, comme ces secteurs ne sont des logarithmes que relativement à quelque fonction circulaire de l'angle commun ou de l'angle transcendant, il est clair que la somme ou la différence de deux secteurs ne sera non plus un logarithme que relativement à une semblable fonction. De cette manière on pourroit plus ou moins faire abstraction des fonctions hyperboliques; mais, outre que les formules ne s'abregent point par-là, l'analogie qu'il y a entre les fonctions hyperboliques & les fonctions circulaires se perdrait de vue: & il est très sûr que cette analogie mérite l'attention & les recherches des Géomètres, d'autant que son usage ne se borne pas au calcul trigonométrique.

§. 25. Ainsi p. ex. on fait que les racines imaginaires d'une équation quelconque peuvent être représentées par des facteurs de la forme $0 = x^2 - 2a \text{cof } \omega. x + a^2.$

Si donc, au lieu du $\text{cof } \omega$ circulaire, on emploie des $\text{cof } \psi$ hyperboliques, le facteur de la forme

$$0 = x^2 - 2a. \text{cof hyp } \psi. x + a^2$$

exprimera deux racines réelles, & toutes les conséquences qu'on a déduites de la première de ces formules se déduiront de la seconde. On pourra même réunir ces deux formules en laissant indéterminé, si le cosinus qui s'y trouve est circulaire ou logarithmique.

§. 26. Soit proposé p. ex.

$$0 = x^2 - 2a \cdot \text{cof } \phi \cdot x + a^2.$$

Qu'on fasse

$$y = x^m$$

on aura

$$0 = y^2 - 2a^m \text{cof } m\phi \cdot y + a^2.$$

Si donc $\text{cof } \phi$ est hyperbolique, le $\text{cof } m\phi$ le fera aussi, & les racines y seront réelles, quelle que soit la puissance m , & le second terme sera toujours négatif à moins que a ne soit négatif & m un nombre impair. Mais, si le $\text{cof } \phi$ est circulaire, le $\text{cof } m\phi$ le fera aussi, & le second terme sera positif ou négatif suivant la valeur qu'on donne à m . Si donc pour m on prend un nombre pair, tel que le second terme devienne positif, alors les racines y devant être positives, comme étant une puissance paire des racines x , on voit que par-là on peut s'assurer que dans une équation proposée il se trouve des racines imaginaires.

§. 27. On trouvera encore pour les sinus & cosinus hyperboliques des formules pour les sinus & cosinus des secteurs multiples. Ainsi p. ex. il est

$$\text{cof hyp } \omega = \text{cof hyp } \omega$$

$$\text{cof hyp } 2\omega = 2 \text{cof hyp } \omega^2 - 1$$

$$\text{cof hyp } 3\omega = 4 \cdot \text{cof hyp } \omega^3 - 3 \text{cof hyp } \omega.$$

&c.

Cette dernière formule fait voir qu'une équation cubique qui n'a qu'une racine réelle se réduit à la trisection d'un secteur hyperbolique, tout comme une équation cubique dont toutes les racines sont réelles se réduit à la trisection d'un arc ou d'un secteur circulaire.

§. 28.

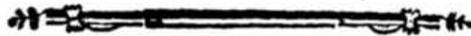
§. 28. Je passerai encore à d'autres cas qui peuvent se présenter dans la Trigonométrie sphérique. Soit AR l'horifon, AQ l'équateur, P son pole, V le zénith, M quelque point du ciel, dont il s'agit de trouver la hauteur MN, l'azimuth AN & l'angle parallactique $PMV = NMR$. Les données sont l'élévation du pole AP, la déclinaison QM, & l'arc horaire AQ. Ce probleme se réduit ordinairement au triangle PMV, dont on connoit les arcs PM, PV, & l'angle MPV qu'ils renferment. Si donc il faut trouver MV, PVM, PMV, il est clair que le calcul demande tout au moins quatre analogies, outre quelques réductions. Et comme ce cas revient assez souvent, il me semble qu'un Astronome attaché à un Observatoire facilitera le travail au moyen d'une Table subsidiaire qu'il calculera pour son Observatoire, dès qu'il en a bien constaté l'élévation du pole. Cette Table doit indiquer pour chaque arc horaire AQ, de degrés en degrés, l'amplitude AR, l'arc ou la déclinaison RQ, & l'angle ARQ compris entre ces deux arcs. Cette Table en renferme virtuellement une autre; car, en prenant AR pour l'arc horaire, AQ fera l'azimuth, RQ la hauteur du point de l'équateur R, & l'angle ARQ fera l'angle parallactique.

§. 29. Mais le principal usage de cette Table consiste en ce que, pour un arc horaire AQ & une déclinaison MQ quelconque, on trouve MN, AN, NMR, moyennant le triangle rectangle RNM. Car, pour chaque angle horaire AQ, la Table donne QR, d'où on obtient RM par une simple addition ou soustraction. Ensuite la Table donne l'angle ARQ. Or, moyennant cet angle & l'arc RM, on trouve RMN, MN, RN, par trois analogies simples. Et RN étant soustrait de l'arc AR que donne la Table, on trouve AN. Si on ne vouloir chercher que la hauteur NM, elle se trouve par une simple analogie, quel que puisse être l'arc horaire & la déclinaison du point M. Un observateur qui se rencontre souvent dans ce cas trouvera sans contredit de l'avantage à calculer une Table semblable pour l'élévation du pole de son Observatoire.



§. 30. Supposons maintenant que AR soit l'équateur, AQ l'écliptique, M un point du ciel quelconque; AQ sera sa longitude, MQ sa latitude, AN son ascension droite, & NM sa déclinaison. Et il est clair qu'en calculant une Table semblable pour l'obliquité de l'écliptique, qu'on voudra mettre pour base, elle donnera les mêmes avantages lorsque la longitude & la latitude d'un point quelconque M étant données, on veut en trouver l'ascension droite & la déclinaison.

§. 31. Supposons réciproquement, que AR soit l'écliptique, AQ l'équateur; AQ sera l'ascension droite, RQ la déclinaison du point R, & ARQ l'angle de l'écliptique. Ensuite AQ sera l'ascension droite, MQ la déclinaison, AN la longitude, & NM la latitude d'un point quelconque M. Ainsi, moyennant une semblable Table, on trouvera avec une égale facilité AN, NM, moyennant AQ, QM.





T A B L E.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.
Angle transc.	Secteur hyperboli- que.	Sinus hyperbol.	Cofinus hyperbol.	Log. du si- nus hyper- bol.	Log. du cof. hyperbol.	Tang. de l'angle com- mun.	Log.rang. de l'angle com- mun.	Angle commun.
0	0,000000	0000000	1,0000000	infini négatif	10,0000000	0000000	infini négatif	0. 0. 0
1	75803	174551	1.0001523	8.2419215	10.0000662	174524	8.2418553	0.59.59.5
2	151628	349208	1.0006095	8.5430838	10.0002646	348995	8.5428192	1.59.55.7
3	227500	524078	1.0013723	8.7193958	10.0005956	523360	8.7188002	2.59.45.2
4	303441	699268	1.0024419	8.8446437	10.0010592	697565	8.8435845	3.59.25.0
5	379475	874887	1.0038198	8.9419518	10.0016558	871557	8.9402960	4.58.51.8
6	455626	1051042	1.0055082	9.0216202	10.0023857	1045285	9.0192346	5.58. 2.2
7	531916	1227846	1.0075099	9.0891438	10.0032493	1218693	9.0858945	6.56.54.0
8	608369	1405408	1.0098276	9.1478025	10.0042472	1391731	9.1435553	7.55.23.0
9	685011	1583844	1.0124651	9.1997125	10.0053801	1564345	9.1943324	8.53.27.5
10	761865	1763270	1.0154267	9.2463188	10.0066485	1736482	9.2396702	9.51. 3.9
11	838955	1943803	1.0187168	9.2886523	10.0080534	1908090	9.2805988	10.48. 9.7
12	916308	2125565	1.0223407	9.3274745	10.0095956	2079117	9.3178789	11.44.43.2
13	993948	2308682	1.0263039	9.3633641	10.0112761	2249511	9.3520680	12.40.39.8
14	1071902	2493280	1.0301635	9.3967711	10.0130959	2419219	9.3836752	13.35.59.3
15	1150195	2679492	1.0332762	9.4280525	10.0150562	2588190	9.4129962	14.30.38.9
16	1228856	2867454	1.0402994	9.4574964	10.0171584	2756374	9.4403381	15.24.36.7
17	1307911	3057307	1.0456918	9.4853390	10.0194037	2923717	9.4659353	16.17.50.7
18	1387390	3249197	1.0514622	9.5117760	10.0217937	3090170	9.4899824	17.10.19.3
19	1467320	3443276	1.0576207	9.5369719	10.0243299	3255682	9.5126419	18. 2. 1.0
20	1547732	3639706	1.0641778	9.5610658	10.0270142	3420202	9.5340517	18.52.54.2
21	1628657	3838640	1.0711450	9.5841774	10.0298483	3583679	9.5543292	19.42.57.8
22	1710126	4040262	1.0785347	9.6064096	10.0328341	3746066	9.5735754	20.32.10.6
23	1792171	4244749	1.0863604	9.6278519	10.0359739	3907311	9.5918780	21.20.31.7
24	1874826	4452287	1.0946363	9.6485831	10.0392698	4067366	9.6093133	22. 8. 0.1
25	1958127	4663077	1.1033779	9.6686725	10.0427243	4226183	9.6259483	22.54.35.3
26	2042108	4877326	1.1126019	9.6881818	10.0463397	4383712	9.6418420	23.40.16.5
27	2126807	5095254	1.1223262	9.7071650	10.0501190	4539905	9.6570468	24.25. 3.4
28	2212263	5317094	1.1325701	9.7256744	10.0540651	4694716	9.6716093	25. 8.55.4
29	2298515	5543090	1.1433141	9.7437520	10.0581807	4848096	9.6855712	25.51.52.4
30	2385606	5773503	1.1547005	9.7614394	10.0624694	5000000	9.6989700	26.33.54.2
31	2473580	6008606	1.1666334	9.7787737	10.0669344	5150381	9.7118393	27.15. 0.7
32	2562480	6248694	1.1791784	9.7957892	10.0715795	5299193	9.7242097	27.55.11.9
33	2652356	6494076	1.1923633	9.8125174	10.0764086	5446390	9.7361088	28.34.28.0
34	2743256	6745085	1.2062190	9.8289874	10.0814258	5591929	9.7475617	29.12.49.0
35	2835233	7002075	1.2207746	9.8452268	10.0866315	5735754	9.7585913	29.50.15.2
36	2928341	7265426	1.2360680	9.8612610	10.0920424	5877853	9.7692187	30.26.47.0
37	3022637	7535540	1.2521357	9.8771144	10.0976514	6018150	9.7794630	31. 2.24.7
38	3118182	7812856	1.2690182	9.8928098	10.1034679	6156615	9.7893420	31.37. 8.4
39	3215039	8097840	1.2867596	9.9083692	10.1094974	6293204	9.7988718	32.11.59.0
40	3313275	8390996	1.3054073	9.9238135	10.1157460	6427876	9.8080675	32.43.56.4
41	3412960	8692868	1.3250130	9.9391631	10.1222201	6560590	9.8169429	33.15.57.9
42	3514169	9004041	1.3456327	9.9544374	10.1289265	6691306	9.8255109	33.47.15.7
43	3616981	9325151	1.3673275	9.9696559	10.1358725	6819984	9.8337833	34.17.38.1
44	3721481	9656888	1.3901636	9.9848372	10.1430659	6946584	9.8417713	34.47.10.0
45	3827757	1.0000000	1.0000000	10.0000000	10.1505150	7071068	9.8494850	35.15.52.0



I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.
Angle tranc.	Sec ^{teu} r hyperboli- que.	Sinus hyperbol.	Cofinus hyperbol.	Log. du si- nus hyper- bol.	Log. du cof. hyperbol.	Tang. de l'angle com- mun.	Log.tang. de l'angle com- mun.	Angle commun.
45	3827757	1.0000000	1.4142136	10.0000000	10.1505150	7071068	9.8494850	35. 15. 52.0
46	3935904	1.0355303	1.4395565	10.0151628	10.1582286	7193398	9.8569343	35. 43. 44.3
47	4046025	1.0723687	1.4662792	10.0303441	10.1662167	7313537	9.8641275	36. 10. 48.0
48	4158226	1.1106125	1.4944765	10.0455626	10.1744891	7431448	9.8710735	36. 37. 15.5
49	4272623	1.1503684	1.5242531	10.0608369	10.1830571	7547096	9.8777799	37. 2. 31.9
50	4389341	1.1917536	1.5557238	10.0761865	10.1919325	7660444	9.8842540	37. 27. 13.4
51	4508513	1.2348972	1.5890157	10.0916308	10.2011282	7771460	9.8905026	37. 51. 8.7
52	4630281	1.2799416	1.6242692	10.1071902	10.2106580	7880107	9.8965321	38. 14. 18.6
53	4754801	1.3270448	1.6616401	10.1228856	10.2205370	7986355	9.9023486	38. 36. 43.6
54	4882240	1.3763819	1.7013016	10.1387390	10.2307813	8090170	9.9079576	38. 58. 24.4
55	5012777	1.4281480	1.7434468	10.1547732	10.2414087	8191521	9.9133645	39. 19. 21.9
56	5146610	1.4825610	1.7882916	10.1710126	10.2524383	8290376	9.9185742	39. 39. 36.0
57	5283952	1.5398650	1.8360784	10.1874826	10.2638912	8386706	9.9235914	39. 59. 8.1
58	5425036	1.6003345	1.8870799	10.2042108	10.2757903	8480481	9.9284205	40. 17. 58.4
59	5570117	1.6642795	1.9416040	10.2212263	10.2881607	8571673	9.9330656	40. 36. 7.5
60	5719475	1.7320508	2.0000000	10.2385606	10.3010300	8660354	9.9375306	40. 53. 36.2
61	5873419	1.8040478	2.0626653	10.2562480	10.3144288	8746197	9.9418193	41. 10. 24.9
62	6032289	1.8807265	2.1300545	10.2743256	10.3283907	8829470	9.9459349	41. 26. 34.1
63	6296463	1.9626105	2.2026893	10.2928341	10.3429532	8910065	9.9498809	41. 42. 4.5
64	6566359	2.0503038	2.2811720	10.3118182	10.3581580	8987940	9.9536602	41. 56. 56.4
65	6842448	2.1445069	2.3662016	10.3313275	10.3740517	9063078	9.9572757	42. 11. 10.3
66	6725255	2.2460368	2.4585933	10.3514169	10.3906867	9135454	9.9607302	42. 24. 47.2
67	6915374	2.3558524	2.5593047	10.3721481	10.4081220	9205049	9.9640261	42. 37. 47.0
68	7113477	2.4750869	2.6694672	10.3935904	10.4264246	9271839	9.9671659	42. 50. 10.3
69	7320331	2.6050891	2.7904281	10.4158226	10.4456708	9335804	9.9701517	43. 1. 57.4
70	7536812	2.7474774	2.9238044	10.4389341	10.4659483	9396926	9.9729858	43. 13. 9.0
71	7763935	2.9042109	3.0715535	10.4630281	10.4873581	9455185	9.9756701	43. 23. 45.2
72	8002875	3.0776835	3.2360680	10.4882240	10.5100176	9510565	9.9782063	43. 33. 46.8
73	8255012	3.2708526	3.4203036	10.5146610	10.5340647	9563048	9.9805963	43. 43. 13.7
74	8521975	3.4874144	3.6279533	10.5425036	10.5596619	9612617	9.9828416	43. 52. 6.4
75	8805709	3.7320508	3.8637033	10.5719475	10.5870038	9659258	9.9849438	44. 0. 25.3
76	9108562	4.0107809	4.1335655	10.6032289	10.6163248	9702957	9.9869041	44. 8. 20.9
77	9433405	4.3314759	4.4454115	10.6366359	10.6479120	9743701	9.9887239	44. 15. 22.5
78	9783798	4.7046301	4.8097343	10.6725255	10.6821211	9781476	9.9904044	44. 22. 1.5
79	1.0164231	5.1445540	5.2408431	10.7113477	10.7194012	9816271	9.9919466	44. 28. 7.6
80	1.0580482	5.6712818	5.7587705	10.7536812	10.7603298	9848077	9.9933515	44. 33. 41.2
81	1.1040158	6.3137515	6.3924532	10.8002875	10.8056676	9876883	9.9946199	44. 38. 42.4
82	1.1553563	7.1153697	7.1852965	10.8521975	10.8564447	9902680	9.9957528	44. 43. 11.4
83	1.2133139	8.1443464	8.2055090	10.9108562	10.9141055	9925462	9.9967507	44. 47. 8.4
84	1.2809042	9.5142645	9.5667722	10.9783798	10.9807654	9945218	9.9976143	44. 50. 33.5
85	1.3599059	11.4300523	11.4737132	11.0580482	11.0597040	9961947	9.9983442	44. 53. 26.7
86	1.4569162	14.3006663	14.3355870	11.1553563	11.1564155	9975640	9.9989408	44. 55. 48.5
87	1.5819321	19.0811367	19.1073226	11.2809042	11.2811998	9986295	9.9994044	44. 57. 38.6
88	1.7580785	28.6362533	28.6537083	11.4569162	11.4571808	9993908	9.9997354	44. 58. 57.2
89	2.0591416	57.2899617	57.2986885	11.7580785	11.7581447	9998477	9.9999338	44. 59. 42.6
90	infini.	infini.	infini.	infini.	infini.	1.0000000	10.0000000	45. 0. 0.0

Fig. 1.

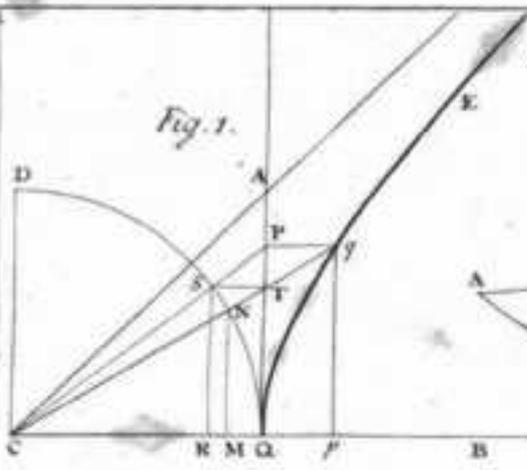


Fig. 6.

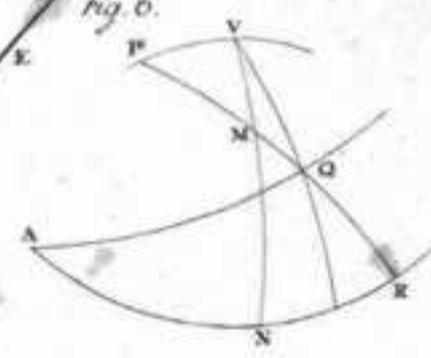


Fig. 7.

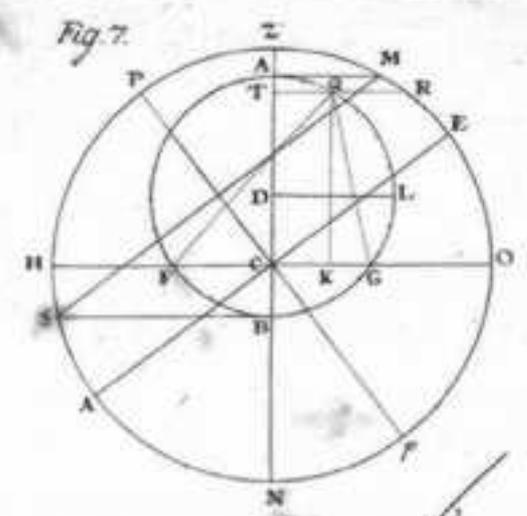


Fig. 2.

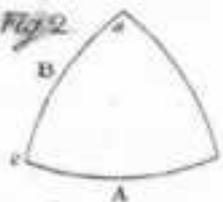


Fig. 3.

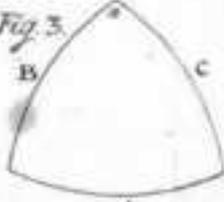


Fig. 4.

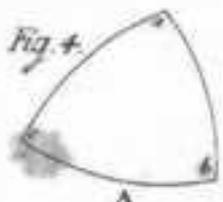


Fig. 5.

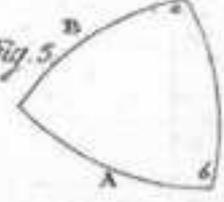


Fig. 8.

