fecisse videatur. Nam inprimis ab eo postul. ri poterat, ut suam ἰσότητα usu loquendi demonstraret, quod plane neglexit: deinde, ut auctoritatibus doceret, opinionem de corporibus Angelorum, temporibus Christi, fuisse vulgo receptam probatamque. Quid multis? auctor causam malam et dubiam pessime defendisse videtur, et argumentando, seu potius argutando, plane obscuram et incertam, quantum in ipso fuerat, effecisse.

ADNOTATA QUAEDAM DE NUMERIS eorumque Anatomia. Auctore I. H. LAMBERT.

§. 1.

Ab antiquissimis retro temporibus, de inveniendis numerorum divisoribus cogitarunt, quotquot Numerorum doctrinam susceperunt augendam promovendamque. Problema quidem eatenus solutum est, quatenus tot instituendae sunt divisiones, quot dantur numeri primi, radice quadrata numeri propositi inferiores. Quodsi enim ex his nullus sit, qui propositum numerum metiatur, tuto colligitur, numerum istum esse primum. At vero si dicendum quod res est, hac ratione tentando potius, quam methodo certa, eaque directa, expeditur negotium. Haec ipsa vero methodus adhucdum in desideratis est, atque plus una laborat difficultate. Quoniam vero eius impossibilitas neque demonstrata est, neque facile a quoquam demonstrabitur, operam haud perdidisse censendus est, qui vel unum in ista re passum ulterius progrediatur. Hanc ob caussam, quae sequuntur, cum lectoribus communicare haud ambigo.

§. 2.

Si per numerum quemcunque a dividatur unitas, producaturque ſeries decimalis, haec finita eſt abrumpiturque, quoties numerus a fuerit ex claſſe numerorum $2^n \,.\, 5^m$.

§. 3.

Quodſi vero numerus a non ſit ex iſta claſſe, ſeries in infinitum producitur, ita tamen, ut quotientes, qui initio diviſionis prodierunt, poſt certum terminorum numerum eodem ordine recurrant, ut adeo ſeries iſtas haud incongrue *periodicas* nominaveris. Ita v. gr

$\frac{1}{7} = 0, 142857, 142857, 142857, 14$ etc. in infinitum.

$\frac{1}{41} = 0, 024390, 24390, 24390, 24$ etc. in infinitum.

Prior ergo fractio producit periodum 6 terminorum, poſterior 5.

§. 4.

Numerus membrorum periodi, ſi maximus eſt, unitate minor eſt numero a, per quem dividendo periodus iſta producitur. Plerumque tamen longe minor prodit.

§. 5.

Si proponatur periodus quaelibet, numerus a, qui iſtam producit, dividendo facile reperitur. Sit v. gr. periodus

$$6489$$

ſcribatur fractio

$$\frac{6489}{9999}$$

ita ut denominator tot conſtet novenariis, quot ſunt periodi membra: haec fractio reducatur ad minimos terminos, eritque

$$\frac{6489}{9999} = \frac{721}{1111}$$

Ergo

Ergo periodus ista producitur, si 721. per 1111. dividatur.

§. 6.

Theoremata haec iam in Tomo 3. *Actor. Helveticorum* dedi demonstrata. Uberius vero hic exponam, quae inde consequuntur, ad Anatomiam numerorum facientia.

§. 7.

Sit a numerus primus, b vero numerus quilibet per a non divisibilis, dico fore

$$\frac{b^{a-1}-1}{a} = \text{numero integro. } f$$

Ponatur

$$b = c + 1$$

erit

$$b^{a-1}-1 = -1+c^{a-1}+(a-1)c^{a-2}+(a-1).\frac{(a-2)}{2}c^{a-3}+\text{etc.}+1.$$

In hac serie termini quilibet per a multiplicati, cum per a sint divisibiles, ponantur brevitatis ergo $= Aa$, eritque

$$b^{a-1}-1 = -1+Aa+c^{a-1}-c^{a-2}+c^{a-3}-\ldots\ldots+1.$$

Haec vero progressio cum sit geometrica, datur eius summa, estque

$$b^{a-1}-1 = -1+Aa+\frac{c^{a}+1}{c+1}$$

sive

$$b^{a-1}-1 = -1+Aa+c^{a-1}-\frac{c^{a-1}-1}{c+1}$$

Quare

$$\frac{b^{a-1}-1}{a} = A + \frac{c^{a-1}-1}{a} - \frac{c^{a-1}-1}{a(c+1)}$$

Eſt vero

$$\frac{c^{a-1}-1}{c+1} = \frac{c^{a-1}-1}{b} = \text{numero integro:}$$

Cumque b ponatur ipſi a incommenſurabilis, patet fore

$$\frac{c^{a-1}-1}{a(c+1)} = \text{numero integro}$$

quoties eſt

$$\frac{c^{a-1}-1}{a} = \text{numero integro.}$$

Hoc vero ſi fuerit, erit quoque

$$\frac{b^{a-1}-1}{a} = A + \frac{c^{a-1}-1}{a} - \frac{c^{a-1}-1}{a(c+1)} = \text{num. integro}$$

Theorema ergo de numero b verum erit, quoties verum eſt de numero c unitate minori. Et de hoc numero verum erit quoties verum eſt de numero $c - 1$, quare et de numeris $c - 2$, $c - 3$, $c - 4$ etc.... 1. Sed verum eſt de numero 1. unde reciproce verum erit de 2, 3, 4....... c, b.

En celebre illud *theorema Fermatianum*, cui demonſtrando Cel. *Eulerus* plurimam operam impendit. Demonſtrationem dedi, qualis meditanti mihi primum ſeſe obtulit.

§. 8.

Quodſi iam ponatur $b = 10$, theorema hoc ſeriebus decimalibus adplicabile eſt, quippe erit

10*

$$\frac{10^{a-1}-1}{a} = \text{numero integro},$$

duobus casibus exceptis, quibus $a = 2$ vel $a = 5$. Etenim $b = 10$ est multiplum numeri 2 et numeri 5.

§. 9.

Sit a numerus primus, exceptis 2 et 5, atque si fuerit

$$\frac{10^{m}-1}{a} = \text{numero integro},$$

it m vel multiplum ipsius $a - 1$, vel $= a - 1$, vel pars aliquota ipsius $a - 1$. Uterque casus prior per se patet. Tertius facile demonstratur. Etenim numerorum 10^{m-1} et $10^{a-1} - 1$ prior constat $m - 1$, posterior $a - 1$ novenariis. Quodsi ergo hic per illum dividatur, atque quotus non sit numerus integer, residuum constat certo numero novenariorum, qui est $< m - 1$. At vero quoniam ponitur, numerum $m - 1$ novenariorum esse minimum, qui divisionem per a admittat absolutam, consequens est, $a - 1$ per $m - 1$ debere esse divisibilem.

§. 10.

Si numerus primus a dividat $10^{m} - 1$, et numerus primus b dividat $10^{n} - 1$, sintque numeri m, n, inter se primi, numerus $a\,b$, qui inde sit dividet $10^{mn} - 1$. Si vero numeri m, n non sint primi inter se, sumatur minimus eorum communis dividuus, qui si sit c, dico numerum $a\,b$ numerum $10^{c} - 1$ dividere. Est enim

$$\frac{10^{c}-1}{10^{m}-1} = \text{numero integro}$$

et 10^c

$$\frac{10^c - 1}{10^n - 1} = \text{numero integro.}$$

Quoniam vero a metitur denominatorem $10^m - 1$, et b denominatorem $10^n - 1$, atque a, b, sunt numeri primi, patet, numerum ab metiri $10^c - 1$. Ceterum generalius haec patent: quippe si

$$\frac{d^m - 1}{a} = \text{num. integro.}$$

et

$$\frac{d^n - 1}{b} = \text{num. integro.}$$

atque c sit minimus, quem m et n metiantur, erit quoque

$$\frac{d^c - 1}{ab} = \text{num. integro.}$$

eoque magis

$$\frac{d^{fc} - 1}{ab} = \text{num. integro.}$$

Excipitur casus, ubi sumitur $a = b$, sive pro utroque idem numerus primus.

§. 11.

Si numerus impar quicunque g unitatem dividendo producat periodum $g - 1$ membrorum, numerus g erit primus. Si negas, sint a, b eius factores, ut sit $ab = g$. Iam dividendo unitatem seorsim per a et per b, prodeat priori casu periodus m membrorum, posteriori casu periodus n membrorum. Sed ad summum est $m = a - 1$, et $n = b - 1$ (§. 4.), unde periodus, quae prodit dividendo per $g = ab$, ad summum est $\frac{(a-1).(b-1)}{2}$ membrorum, (§. 10.) cum $a - 1$ et $b - 1$ sint numeri pares. Quoniam

ergo

ergo $a > 1$ et $b > 1$, erit $\frac{(a-1).(b-1)}{2} < ab - 1$.

adeoque periodus minor quam $g - 1$ membrörum. Quod cum evertat hypothesin, liquet, numerum g esse primum.

§. 12.

Si numerus quicunque g unitatem dividendo producat periodum m membrorum, atque $g - 1$ per m dividi nequeat, numerus g non erit primus. Quodsi enim primus esset, $g - 1$ per m divideretur (§. 9.) Quare primus esse nequit.

§. 13.

Si numerus quicunque g unitatem dividendo producat periodum m membrorum, atque $g - 1$ per m dividi possit, sitque m numerus primus, tunc numerus g aut est primus, aut si divisores habet, erunt isti ex classe numerorum $2^n . 5^m$, aut ternarius, aut novenarius, aut denique numeri tales, qui unitatem dividendo producunt periodum, quae itidem est m membrorum. Quoniam enim numeri ex classe $2^n . 5^m$ producunt seriem finitam, haec periodos non mutat, quoad numerum membrorum. Similiter ternarius et novenarius producunt periodum μονόκωλον, unde nec isti periodorum longitudinem mutant (§. 10.). Quoniam vero facile dignoscitur, an numerus propositus per 2, 5, dividi possit, dividatur, quöties has divisiones admittet, atque quotus, quem ponemus $= q$, nihilominus unitatem dividendo producet periodum m membrorum. Quodsi et $q : 9 = r$ sit numerus integer, etiam r unitatem dividendo producet periodum m membrorum. Ponas iam r non esse primum, verum $= ab$. Unitas dividatur per a, b seorsim. Quodsi ergo prodeant periodi m membrorum, constat propositum. Ponas vero periodos prodeuntes esse p et q membrorum, atque per §. 10. patet, m debere esse multiplum ipsius p, et ipsius q. Quoniam vero m ponitur esse numerus primus, aut erit

$p = m$, $q = 1$, aut $p = 1$, $q = m$, aut $p = m$, $q = m$. Sed $p = q = 1$ eſt periodus μονόκωλος quae nonniſi ternario aut novenario debetur. Quare vel p vel q debet eſſe $= m$, vel uterque erit $= m$.

§. 14.

Quodſi vero m non ſit numerus primus, tunc utique multiplum eſſe poteſt ipſorum p, q, unde pluribus modis poſſibile eſt ut numerus g non ſit primus.

§. 15.

Si numerus primus a unitatem dividendo producat periodum $a - 1$ membrorum, ut ſit

$$\frac{10^{a-1} - 1}{a} = \text{numero integro}$$

erit quoque

$$\frac{10^{(a-1):2} + 1}{a} = \text{numero integro.}$$

Etenim ob a numerum primum, erit $a - 1$ numerus par. Ponatur ergo $a = 2m + 1$
erit

$$a - 1 = 2m$$
$$\frac{a - 1}{2} = m$$

Unde

$$\frac{10^{a-1} - 1}{a} = \frac{10^{2m} - 1}{a} = \frac{(10^m + 1).(10^m - 1)}{a}$$

Sed a ipſum $10^m - 1$ non metitur, quia periodus eſſe ponitur $a - 1$ membrorum. Quare oportet a metiatur factorem alterum $10^m + 1$.

§. 16.

Hac ergo ratione his casibus divisio si actu sit instituenda ad dimidiam operationis partem reducitur. Dato enim quotus pro

$$\frac{10^m + 1}{a} = q$$

dabitur quoque pro

$$\frac{10^{2m} - 1}{a} = (10^m - 1)\, q = 10^m . q - q.$$

adeoque per simplicem subtractionem ipsius q a $10^m\, q$. Ita v. gr.

$$\frac{10^3 + 1}{13} = 77.$$

unde

$$77000 - 77 = 76923.$$

Est ergo

$$\tfrac{1}{13} = 0,\ 076923,\ 076923,\ 076 \text{ etc.}$$

§. 17.

Vicissim, si fuerit

$$\frac{10^n + 1}{a} = \text{numero integro} = q$$

erit

$$\frac{10^{2n} - 1}{a} = (10^n - 1)\, q = \text{numero integro.}$$

Ita v. gr. reperitur

$$\frac{10^5 + 1}{9091} = 11$$

Quare erit

$$\frac{10^{10}-1}{9091} = 1100000 - 11 = 1099989$$

adeoque

$$\tfrac{1}{9091} = 0,\ 0001099989,\ 000109 \text{ etc.}$$

§. 18.

Similiter si $\frac{1}{a}$ producat periodum $2m$ membrorum, adeoque sit

$$\frac{10^{2m}-1}{a} = \text{numero integro},$$

erit quoque

$$\frac{10^{m}+1}{a} = \text{numero integro}.$$

ponendo nempe a esse numerum primum. Est enim

$$10^{2m}-1 = (10^m+1).(10^m-1)$$

sed

$$\frac{10^m-1}{a}$$

produceret periodum minorem quam $2m$, unde oportet sit

$$\frac{10^m+1}{a} = \text{numero integro}.$$

§. 19.

Si numerus a non sit primus, atque unitatem dividendo producat periodum $2m$ membrorum, erit a ipsi 10^m+1 commensurabilis. Quoniam enim

$$\frac{10^{2m}-1}{a} = \text{numero integro},$$

et

10^{2m}

$$10^{2m} - 1 = (10^m + 1) \cdot (10^m - 1)$$

patet

$$\frac{10^m - 1}{a}$$

non esse numerum integrum. Quare ad summum factores quidam metientur Numerum $10^m - 1$. Quoniam ergo oportet reliqui factores metiantur ipsum $10^m + 1$, patet propositum. Ita v. gr.

$$\frac{1}{81103} = 0,\ 00001233,\ 000012 \text{ etc.}$$

producit periodum 8 membrorum; quare cum sit

$$\frac{10^8 - 1}{81103} = \text{num. integro,}$$

numerus 81103 aut metietur ipsum $10^4 + 1$, aut ipsi erit commensurabilis. Instituto examine

$$\begin{array}{r|r|l}
10001 & 81103 & 8 \\
 & 80008 & \\
\hline
1095 & 10001 & 9 \\
 & 9855 & \\
\hline
146 & 1095 & 7 \\
 & 1022 & \\
\hline
73 & 146 & 2 \\
 & 146 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

patet, utrique esse communem divisorem 73. Quare

$$\frac{81103}{73} = 1111 = 11 \cdot 101$$

ut adeo numeri 81103 factores sint $73 \cdot 11 \cdot 101$.

§. 20.

Si numerus a non ſit primus, atque unitatem dividendo producat periodum $2m$ membrorum, ut ſit

$$\frac{10^{2m} - 1}{a} = \text{numero integro,}$$

dico, ſingulos numeri a diviſores, exceptis iis qui ſub forma $2^p . 5^q$ continentur, periodum $2m$ membrorum eſſe producturos, quoties fuerit m numerus primus, et

$$\frac{10^m + 1}{a} = \text{numero integro.}$$

Ponatur numeri a diviſor quilibet $= b$, et factor alter $= c$, ut ſit

$$a = bc$$

Erit ergo

$$\frac{10^{2m} - 1}{a} = \frac{(10^m + 1).(10^m - 1)}{bc}$$

Ponas iam b metiri ipſum $10^m - 1$. Quoniam vero a metitur ipſum $10^m + 1$, patet, hunc numerum quoque diviſibilem eſſe per b. Habent itaque $10^m + 1$ et $10^m - 1$ communem factorem b. At vero $10^m + 1$ et $10^m - 1$, quoniam impares ſunt, et binario differunt, diviſorem communem habent nullum. Quare b ipſum $10^m - 1$ metiri nequit. Quoniam ergo metitur ipſum $10^m + 1$, ac proinde ipſum $10^{2m} - 1$, patet, b unitatem dividendo producere periodum $2m$ membrorum. Eſt enim $2m$ duplum numeri primi, adeoque in alias periodos non reſolubilis. Ita v. gr.

$$\frac{1}{91} = 0,010989,010989, \text{etc.}$$

producit periodum 6 membrorum. Cumque $\frac{6}{2} = 3$ ſit numerus primus, conſequens eſt, diviſores numeri 91, ſi

quos

quos habet, unitatem dividendo, producere periodos 6 membrorum. Eſt vero $91 = 7 \cdot 13$, et

$$\tfrac{1}{7} = 0,\ 142857,\ 1428 \text{ etc.}$$
$$\tfrac{1}{13} = 0,\ 076923,\ 076 \text{ etc.}$$

§. 21.

Si numerus a, non primus, unitatem dividendo, producat periodum m membrorum, ſitque m numerus primus, diviſores numeri a, ſaltem unus eorum, producet periodum m membrorum, reliqui aut ſunt ternarius, aut novenarius, aut ex claſſe $2^p \cdot 5^q$. Hic enim periodorum longitudinem non mutant, atque ſi ſoli eſſent, vel feriem finitam, vel periodum μονόκολον producerent. Quoniam vero periodus ponitur eſſe m membrorum, patet, alios inſuper adeſſe diviſores, ſaltem unum. Ponas vero plures adeſſe, et quoniam m eſt numerus primus, periodus m membrorum ex aliis minoribus conflata eſſe nequit. Quare ſinguli iſti diviſores periodum m membrorum producunt. Ita v. gr. numerus 4187, qui per 2, 3, 5 non dividitur, producit periodum 13 membrorum, cum ſit

$$\tfrac{1}{4187} = 0,\ 0002388344877,\ 0002388 \text{ etc.}$$

Quoniam ergo 13 eſt numerus primus, conſequens eſt, diviſores numeri 4187, ſi quos habet, itidem producere periodos 13 membrorum. Sit ex diviſoribus aliquis b numerus primus. Quoniam ergo producit periodum m membrorum, erit $b - 1$ multiplum ipſius m (§. 9.). Ponatur $b - 1 = n \cdot m$, eritque

$$b = nm + 1$$

Quare in caſu exempli propoſiti oportet b ſit ex ſerie 14, 27, 40, 53, 66, 79 etc. Quoniam vero b eſt numerus primus, atque minor aſſumi poteſt radice quadrata numeri

4187, patet, ex hac ferie unicum numerum 53 affumendum effe, quo, inftituta divifione, reperiri posfit, an numerum 4187 metiatur. Reperitur vero

$$4187 = 53 \cdot 79$$

patet ergo et his cafibus, ubi m eft numerus primus, divifores facile reperiri.

§. 22.

Si numerus a per 2, 3, 5 non divifibilis producat periodum mn membrorum, periodus ifta in alias minores refolvi poteft. Etenim $10^{mn} - 1$ dividitur per $10^m - 1$ aeque ac per $10^n - 1$. Ponamus m, n effe numeros primos. Quoniam ergo a neque $10^m - 1$, nec $10^n - 1$ metitur, aut primus eft, aut utrique $10^m - 1$, $10^n - 1$ eft commenfurabilis, aut factores habet, qui itidem producunt periodum mn membrorum. Cafu primo et tertio res liquet. Pro fecundo ponatur $a = bc$, et b, c producant periodos p, q membrorum. Erit ergo $p < mn$ et $q < mn$. Unde cum mn debeat effe multiplum ipfius pq, et praeter m, n alios divifores non agnofcat, patet effe $p = m$, $q = n$. Producit ergo divifor b periodum m membrorum, et divifor q periodum n membrorum. Quare cum fit

$$\frac{10^m - 1}{b} = \text{num. integro}$$

et

$$\frac{10^m - 1}{c} = \text{num. integro}$$

erit $10^m - 1$ et $10^n - 1$ ipfi a commenfurabilis. Ita v. gr. numerus 1517 producit periodum 15 membrorum, quae cum in periodos 3 et 5 membrorum refolvi posfit, pericuriculum fiat, an 1517 ſit ipſi $10^3 - 1$ et $10^5 - 1$ commenſurabilis. Reperitur vero

999	1517 / 999	1
518	999 / 518	1
481	518 / 481	1
37	481 / 481	13
	0	

1517	99999 / 98605	65
1394	1517 / 1394	1
123	1394 / 1353	11
41	123 / 123	3
	0	

Sunt ergo 37 et 41 diviſores numeri 1517.

§. 23.

Si numerus a per 2, 3, 5 non diviſibilis producat periodum mnp membrorum, ſintque m, n, p numeri primi, periodus iſta in alias minores reſolvitur m, n, p, mn, mp, np membrorum. Quare eadem ratione fiat periculum, an numerus a ipſis $10^m - 1$, $10^n - 1$, $10^p - 1$, $10^{mn} - 1$, $10^{mp} - 1$, $10^{np} - 1$ ſit commenſurabilis. Hoc ſi fuerit, diviſores reperiunt. Quodſi vero nullo modo ſuccedat, numerus a aut erit primus, aut, ſi diviſores habet, ſinguli periodum mnp membrorum producent, eruntque uti §. 21. multiplum ipſius mnp unitate auctum. Ita v. gr. numerus 2449 producit periodum 195 membrorum, eſtque $195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$. Unde periodi minores erunt 3, 5, 13, 15, 39, 65 membrorum. Ex his tantum $10^{13} - 1$ et $10^{15} - 1$ reperiuntur ipſi 2449 commenſurabiles, ſuntque diviſores communes 31 et 79. qui ergo metiuntur numerum 2449. Similiter numerus 10001 quippe $= 1^4 + 1$, producit periodum 8 membrorum, quae in periodos 2, et 4 membrorum reſolvitur. At vero neque $10^2 - 1$ nec $10^4 - 1$ ipſi 10001 eſt commenſurabilis. Quare, ſi quos diviſores habet,

Q ſingu-

ſinguli periodos 8 membrorum producent, atque erunt numeri primi ex claſſe $8k+1$. Quare diviſione numeri 10001 per 17, 41, 73, 89, 97 $< \sqrt{10001}$ tentata, pro ſolo diviſore 73 ſuccedit, eſtque

$$10001 = 73 \cdot 137.$$

ut adeo et 73, et 137, periodos 8 membrorum producant. Similiter numerus 1000001 utpote $= 10^6 + 1$ producit periodum 12 membrorum. Et numeri 12 diviſores ſunt 2, 3, 4, 6, unde fiunt periodi 2, 3, 4, 6 membrorum. Videatur igitur, an $10^2 - 1$, $10^3 - 1$, $10^4 - 1$, $10^6 - 1$, ipſi 1000001 ſint commenſurabiles. Quod unico tantum caſu ſuccedit, reperiturque ipſi $10^4 - 1$, et ipſi 1000001 diviſor communis 101. Et eſt

$$\frac{1000001}{101} = 1901$$

Eſt ergo et 101 et 1901 numerus primus, et uterque producit periodum 10 membrorum. Simili ratione numeri 100001 reperiuntur factores 11 et 9091; et numeri 10000001 factores 11 et 909091.

§. 24.

Si numerus a unitatem dividendo periodum m membrorum, atque m non metiatur $a - 1$, vidimus ſupra (§. 12) a non eſſe numerum primum. Habet ergo factores b, c, ut ſit $a = bc$. Quodſi iam b, c unitatem dividendo producant periodos p, q membrorum, erit vel $m = pq$ vel pq erit multiplum ipſius m (§. 10). Quoniam ergo m non metitur $a - 1$, neque factum pq metietur $a - 1$. Quare vel p, vel q, vel p et q, erit ad $a - 1$ primus, et m in periodos minores reſolvi poteſt. Singulis ergo his caſibus diviſores numeri propoſiti a facile inveniuntur (§. 22.). Ita v. gr. numerus 1261 producit periodum 90 membrorum. At

vero

vero 96 non metitur $1261 - 1$. Quare numerus 1261 non est primus. Quoniam vero numeri 96 divisores sunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48. totidem existent periodi minores, ex quibus necessario saltem unica ipsi 1261 commensurabilis est. Reperitur vero, instituto examine, commensurabilem esse periodum 6 membrorum, cum 999999 et 1261 communi divisore 13 gaudeant. Est ergo

$$1261 = 13 \cdot 97$$

§. 25.

Numerus primus a sit duplum numeri primi b unitate auctum, sive $a = 2b + 1$, erit (§. 8.)

$$\frac{10^{2b} - 1}{2b+1} = \text{numero integro.}$$

Quodsi ergo $2b + 1$ unitatem dividendo producat periodum quae sit $< 2b$ membrorum, ista vel nulla, vel unius, vel 2, vel b membrorum erit. At inter numeros primos nonnisi 11 periodum bimembrem producit, et periodus unius membri inter numeros primos soli ternario debetur. His ergo casibus exceptis, periodus erit vel b, vel $2b$ membrorum, adeoque omnium maxima. Ita v. gr.

$2 \cdot 3 + 1 = 7$ dat periodum 6 membrorum
$2 \cdot 11 + 1 = 23$ 22
$2 \cdot 23 + 1 = 47$ 46
$2 \cdot 29 + 1 = 59$ 58
$2 \cdot 41 + 1 = 83$ 82
$2 \cdot 53 + 1 = 107$ 106
etc.

Contra ea
$2 \cdot 1 + 1 = 3$ 1
$2 \cdot 2 + 1 = 5$ 0
$2 \cdot 5 + 1 = 11$ 2

Et
$2 \cdot 113 + 1 = 227$ 113

§. 26.

§. 26.

Sint numeri primi $2a+1$, $2b+1$, prior unitatem dividendo producat periodum A membrorum, alter periodum B membrorum, et qui inde fit $(2a+1).(2b+1) = 4ab + 2a + 2b + 1$ producat periodum C membrorum; erit $2a$ vel $= A$, vel eius multiplum, et $2b$ vel $= B$, vel eius multiplum (§. 9.). At vidimus, C non femper metiri ipfum $4ab + 2a + 2b$. Quo ergo inveftigentur conditiones, generaliffime ponemus

a effe factum ex numeris primis $tmnpqr$.
b . . . . $tmnPQR$.

erit ergo

$2a = 2tmnpqr$.
$2b = 2tmnPQR$.

Factores ifti prout cafus tulerit ponentur $= 1$, et fi plures dentur, fub his fubintelligi poterunt. Ita v. gr. fi a, b fint inter fe primi, fiet $t = m = n = 1$. Si b fit multiplum ipfius a, fiet $p = q = r = 1$. Et fi a vel b vel uterque fit primus, ad p vel P reducitur, pofitis reliquis factoribus $= 1$. Iam ponatur

$$A = (2)\ tmpq$$
$$B = (2)\ tnPQ$$

binarium parentheſi includendo, quoniam quandoque abeft, quandoque retinetur, quod fit quandocunque $\frac{2a}{A}$. vel $\frac{2b}{B}$ eft numerus impar. Quoniam dantur cafus, quibus $\frac{2a}{A} < a$ et $\frac{2b}{B} < b$, his cafibus quidam ex factoribus ipfius a vel ipfius b valorem A vel B non ingrediuntur. Hanc ob cau-

fam

ſam in valore A omiſſum vides factorem proprium r et communem n, ſimilique ratione in B omiſi factorem proprium R et communem m. Ponas enim eos non eſſe omittendos, cenſeri poterunt eſſe $= 1$, adſunt enim factores eorum vices tuentes. Iam ponetur (§. 10)

$$C = (2)\ tmnpqPQ.$$

In hoc valore (2) omittitur, ſi in utroque valore A, B omittatur, reliquis caſibus retinetur. Erit ſubſtitutis valoribus

$$\frac{(2a+1)(2b+1)-1}{C} = \frac{4tmnpqr.tmnPQR + 2tmnpqr + 2tmnPQR}{(2)\ tmnpqPQ}$$

$$= \frac{4rtmnR}{(2)} + \frac{2r}{(2)PQ} + \frac{2R}{(2)pq}$$

Patet ergo, diviſorem (2) etiamſi retineatur, non impedire, quo minus haec expreſſio ſit numerus integer. Pars eius prima

$$\frac{4\,ArtmnR}{(2)}$$

neceſſario eſt numerus integer, quare quaeſtio ad alteram partem

$$\frac{2r}{(2)PQ} + \frac{2R}{(2)pq}$$

ſive ſimpliciter

$$\frac{r}{PQ} + \frac{R}{pq}$$

reducitur. Haec vero fractio nunquam eſt numerus integer, niſi uterque diviſor ſit $= 1$, adeoque

$$A = (2)\ tm.$$
$$B = (2)\ tn.$$

 Quodſi

Quodsi ergo in valoribus A, B desint factores proprii ipsorum a, b, erit

$$\frac{(2a+1).(2b+1)-1}{C} = \text{numero integro}$$

reliquis casibus, iisque longe frequentissimis, non erit

$$\frac{(2a+1).(2b+1)-1}{C} = \text{num. integro.}$$

Ita v. gr. $\frac{1}{41}$ producit periodum 5 membrorum, et $\frac{1}{101}$ periodum 4 membrorum. Est ergo

$$\begin{array}{ll} 2a+1 = 41 & 2b+1 = 101 \\ a = 20 = 22.5 & b = 50 = 2.5.5 \\ A = 5 & B = 4 \end{array}$$

Quare

$$\begin{aligned} (2)\ a &= (2)\ tmnpqr \\ &= (2) \ast 5.2 \ast \ast 2 \\ (2)\ b &= (2)\ tmnPQR \\ &= (2) \ast 5.2 \ast \ast 5 \end{aligned}$$

Hinc

$$\begin{aligned} A &= (2)\ tm \ast pq \ast \\ &= \ast \ast 5 \ast \ast \ast \ast \quad \text{Hic enim omittitur } (2) \\ B &= (2)\ t \ast nPQ \ast \\ &= 2 \ast \ast 2 \ast \ast \ast = 4. \text{ Hic enim retinetur } (2) \end{aligned}$$

Quoniam ergo $p = q = P = Q = 1$, patet esse

$$\frac{(2a+1).(2b+1)-1}{C} = \text{numero integro.}$$

Quod facile examini subiicitur. Nam cum

$\frac{1}{41}$ producat periodum 5 membrorum .

$\frac{1}{101}$ . . . . . . 4 . . . .

conse-

consequens est (§. 10)

$$\frac{1}{41} \cdot \frac{1}{101} = \frac{1}{4141} \text{ producere periodum 20 membrorum.}$$

Sed

$$\frac{4141 - 1}{20} = \frac{4140}{20} = 207 = \text{numero integro.}$$

§. 27.

Ex his, quae hactenus de seriebus decimalibus exposui, plurima sunt quae et aliis progressionibus adplicantur. Decimales propterea reliquis praetuli, quod systema numericum iis est accommodatum. Hoc unum notabo, alias plerumque prodire periodos, si alia aliaque assumatur progressio. Ita v. gr. supra vidimus (§. 16.)

$$\frac{1}{13} = 0,\ 076923,\ 076923,\ 0 \text{ etc.}$$

in systemate decimali dare periodum tantum 6 membrorum, ut adeo hinc colligi nequeat, an 13 primus sit nec ne? (§. 11). At vero, si loco progressionis decimalis adhibeatur dyadica

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32 \text{ etc.}$$

periodus duodecim membrorum emerget, atque inde colligitur, 13 esse numerum primum. Est enim, residua duplicando, et si 13 exundant, 13 abiiciendo, residuorum series

1, 2, 4, 8, 16
3, 6, 12, 24
11, 22
9, 18
5, 10, 20
7, 14
1, 2 etc.

Sic et pro quovis numero primo a dantur progressiones

$$1,\ m,\ m^2,\ m^3,\ m^4, \text{ etc.}$$

quae

quae periodum producant $a - 1$ membrorum, quod cum de numeris compositis nunquam locum habeat, patet, et hinc peti posse numerorum primorum criterium. Denique si in serie decimali duo numeri primi, uti v. gr. 41 et 271, aequalem periodum 5 membrorum producant, alia adhibita progressione periodos producent inaequales. Simili ratione rarior ille casus numeri 4141, qui in systemate decimali periodum producit 20 membrorum, ceu partem aliquotam ipsius 4041 — 1, (§. 25) alia assumta progressione speciem numeri primi mentiri desinit. Etenim in systemate dyadico periodum producit 100 membrorum, et cum

$$\frac{4141 - 1}{100} \text{ non fit } = \text{ numero integro,}$$

hinc utique liquet, numerum 4141 non esse primum.

COMMENTARIUS IN MALACHIAM, CUM EXAmine critico versionum veterum, et lectionum variarum Houbigantii. Accedit specimen Bibliorum Polyglottorum, Auctore CAROLO FRIDERICO BAHRDT, Professore Erfordiensi.

Lipsiae, ex Officina Heinsia, 1768. plagg. 10. cum praef. octonis.

De huius commentarii indole ut eo accuratius dicamus, videndum est primo de prolegomenis ei praefixis. In his autem consultum duxit Cl. *Bahrdtius* plane tacere de *auctore* libri, de *nomine* et *aetate* Malachiae, de *statu Iudaeorum*, quem haec prophetia respicit, de *divina libri auctoritate*, aliisque eius generis rebus. Haec enim omnia, ab iis, qui vel in universam Scripturam Sacram introductiones dederunt, vel in singulos Scripturae libros commentati sunt, copiose exposita reperiuntur. Solum igitur huius libri argumentum