X.
Anmerkungen und Zusätze zur Gnomonic.

§. 1.

Tab. III. IV. V. Man wird nicht leicht eine Wissenschaft finden, die in so viele verschiedene Formen gebracht, und auf so unzählig mannigfaltige Art angewandt worden, als die Gnomonic. Man kann anstehen, ob es möglich sey, eine Art von Sonnen-Uhren zu erdencken, die nicht schon irgend beschrieben und angebracht worden wäre. Selbst auch die Methode, jede Sonnenuhr zu zeichnen, und die dazu dienlichen Instrumente und Tabellen sind eben so häufig als mannigfaltig. Es scheint daher daß, was man noch etwann darüber erfinden kann, schlechthin nur eine Nachlese ist, und daß man alle über die Gnomonic herausgekommene Schriften müsse durchgangen haben, wenn man sich berechtiget achten will, es eine Nachlese zu nennen.

§. 2.

Betrachtungen von dieser Art, bothen sich mir bey dem Entschlusse an, hier einige Anmerkungen über die Gnomonic zu liefern. Ich habe lange nicht alle Schriften über diese Wissen-

Wissenschaft gelesen, und in soferne muß ich unentschieden lassen, ob, was ich hier vortragen werde, durchaus neu sey oder nicht. Ich kann aber darauf zählen, daß sich viele meiner Leser in eben dem Fall befinden, und daß es folglich denselben so gut neu seyn werde, als es mir ware, da ich darauf verfiele. Verschiedenes davon wird dienen zu zeigen, daß öfters die ersten Erfinder zufrieden sind, wenn sie etwas finden.

I. Anmerkungen über die Azimuthaluhren.

§. 3.

Die Azimuthaluhren sind vielleicht zuerst erfunden, und zuletzt berichtigt worden. Ich will sagen, der erste, der sich in Sinn kommen liesse, die Zeit nach dem Schatten der Sonne zu messen, steckte etwan einen Stab gerade aufgerichtet in die Erde, beschrieb einen Circul darum, und theilte denselben, so gut er es verstunde, in Stunden, und vermuthlich machte er jede Stunde gleich groß. Von diesem ersten Anfange an, bis zu der Bemerkung, daß man die Stunden ungleich machen, und sie entweder von Tag zu Tag ändern, oder dem Zeiger eine schiefe mit der Weltaxe parallele Lage geben müsse, war noch sehr weit, und es musten vorerst die Gründe der sphärischen Astronomie erfunden werden, welche sodann

zeig-

zeigten, daß man nicht bey Azimuthaluhren, sondern bey Aequinoctialuhren den Anfang machen müsse.

§. 4.

Indessen muß man doch sagen, daß der erste Einfall, die Zeit nach dem Schatten eines aufrechtstehenden Stabes zu messen, auf die genaueste Sonnenuhr führte, weil in der That die Azimuthaluhren allein von den Anomalien der Refraction frey sind. Da sich aber die Stundenwinkel davon beständig ändern, so haben sie die Unbequemlichkeit, daß man entweder einen Calender dabey anbringen, oder den Zeiger beweglich machen muß, und auch in dem letztern Fall wird der Calender dabey nothwendig. Man hat daher diesen vorgezogen, und die Azimuthaluhr dergestallt zeichnen
Fig. I. gelehrt, daß die Stunden in der Ellipse ADBE herum liegen, der Zeiger aber auf der Linie Gg, als der kürzern Axe der Ellipse, hin und her geschoben wird. Die Methode, sowohl die Ellipse als den Calender in Gg zu zeichnen, findet sich in mehreren gnomonischen Schriften. Sie wird aber darin nur als eine Azimuthalsonnenuhr beschrieben, und weder durch die Eigenschaften der Ellipse kenntlicher, noch durch andere dabey mit vorkommende Umstände, brauchbarer gemacht. Hierin besteht nun meine Nachlese, und die Zeichnung der Uhr wird sich folgender massen angeben lassen:

§. 5.

§. 5

Machet den Winkel DFC so groß als die Polhöhe des Ortes, für welchen die Uhr dienen solle, und nachdem ihr DF willkührlich angenommen, so ziehet DC aus D auf FC senkrecht. Traget DF aus C in A und B, und machet CE = CD, so ist AB die grössere, DE die kleinere Axe, und F der Brennpunct der Ellipse ADBE. Traget CF in Cf, so ist f der andere Brennpunct. Machet ferner jeden Winkel GfC der Declination der Sonne gleich, so wird sich auf Gg der Thierkreis oder der Calender zeichnen lassen. Endlich machet jeden Winkel DCK dem Stundenwinkel, und CK der halben Axe CB gleich, und fället aus K die Perpendiculair KP auf AB, so wird H der Punct seyn, wo die Stunde muß hingeschrieben werden. Und wenn die Declination der Sonne = GfC ist, so ist DGH das Azimuth der Sonne zu der Stunde H. DE ist die Mittagslinie, D liegt gegen Mitternacht, und der Zeiger wird in G aufgerichtet. Ferner ist für eben den Tag jede Linie GH allemale dem Cosinus der Sonnenhöhe gleich, und wird aus G die Normallinie GL auf die Ellipse gezogen, so zeigt sie die Stunde des Aufganges der Sonne, so wie die andere Normallinie Gl die Stunde des Niederganges bezeichnet, und zugleich der Halbmesser des Circuls ist, auf welchem GH den Cosinus der der Sonnenhöhe giebt. Auf eben diesem Circul

cul ist CK der Cosinus der Declination der Sonne.

§. 6.

Der Beweis von allen diesen Sätzen wird nicht schwer, wenn man sich die ganze Figur als eine ortographische Projection der Sphäre vorstellt. Man fälle nemlich aus jeden Puncten des Parallelkreises der Sonne, Perpendiculairen auf die Fläche des Horizontes, so bezeichnen diese die Ellipse ADBE. Der Diameter AB behält seine Länge, welche den doppelten Cosinus der Declination gleich ist. Hingegen wird DE in Verhältniß des Halbmessers zum Sinus der Polhöhe verkürzt. Und dieses ist der Grund, warum der der Polhöhe gleich gemachte Winkel DFC in den Brennpunct F trift. Denn FD ist in der Ellipse allemal = AC = CB, und so wird hier CB : CD = FD : CD = 1 : sin. eleu. poli. Fällt man ferner aus dem Scheitelpunt der Sphäre eine Perpendiculairlinie auf den Horizont, so trift diese in G. Hingegen ist C die Projection desjenigen Punctes der Weltaxe, welcher in der Fläche des Parallelkreises der Sonne liegt, und von dem Mittelpunct der Sphäre um den Sinus der Declination entfernt ist. Da dieser Mittelpunct in G fällt, so ist GC die Projection von diesem Sinus der Declination, und wegen der schiefen Lage der Weltaxe im Verhältniß des Halbmessers zum Cosinus der

Polhö-

Polhöhe verkürzt. G H ist für jede Stunde die Projection des Sinus des Abstandes der Sonne vom Scheitelpunct, und folglich des Cosinus der Sonnenhöhe. Diese Linie hat in der Lage GL, Gl ihre beyden Maxima; und L, l sind die Projection der Puncte, wo der Parallelkreis der Sonne den Horizont durchschneidet. Nimmt man demnach G L = 1 an, so ist CB der Cosinus der Declination, CF = Cf im Verhältniß des Cosinus der Polhöhe kleiner, und CG in Verhältniß der Tangente der Declination kleiner als CF, folglich in zusammengesetzter Verhältniß der Tangente und des Cosinus der Declination und des Cosinus der Polhöhe kleiner als CL = 1, demnach in Verhältniß des Sinus der Declination und des Cosinus der Polhöhe. Hieraus ergiebt sich, warum der Calender in G g aus dem Brennpunct f kann verzeichnet werden. Endlich ist C P allemal die Projection des Sinus des Stunden-Bogens, welcher, wenn CK = CB als Halbmesser angenommen wird, dem Winkel DCK gleich wird.

§. 7.

Die erst angegebene Verzeichnung der Azimuthaluhren hat für diejenigen, welche die Ellipsen aus der höhern Geometrie kennen, etwas geschmeidiges, wodurch sie faßlicher wird. Der Gebrauch des Brennpuncts wird dadurch merkwürdig, daß er sowohl die Polhöhe DFC

als

als die Declination der Sonne GfC, und damit den auf G g gezeichneten Calender bestimmen hilft. Es ist ferners merkwürdig, daß die aus jedem Punct G auf die Ellipse gezogene Normallinien G L, G l die Stunde des Auf- und Unterganges der Sonne angeben. Es ist unnöthig hier mit anzumerken, daß die Puncte L, F, G, f, l sämtlich in dem Umkreise eines Circuls liegen, weil dieses aus dem, daß GL, G l Normallinien sind, für sich folgt. Da man aber, um diesen Circul zu ziehen, nur drey Puncte nöthig hat, so kann man die Puncte L, l bestimmen, wenn man den Circul durch f, G, F zieht; und hinwiederum wird G bestimmt, wenn der Circul durch L, F, G gezogen wird. Im ersten Fall findet man aus der Declination die Länge des Tages LADBL, im andern aus der Länge des Tages die Declination. Endlich ist hiebey merkwürdig, daß diese Azimuthaluhr, vermittelst der Linie GH, nicht nur die Stunde H, und ihr Azimuth DGH angiebt, sondern ihre Länge selbst den Cosinus der Sonnenhöhe vorstellt, wenn GL zum Halbmesser angenommen wird.

§. 8.

Es kömmt aber bey dieser Azimuthaluhr noch ein anderer Umstand vor, welcher unerwarteter ist. Man darf nemlich nur setzen, daß AC die Mittagslinie sey, und über derselben einen Zeiger aus C aufrichten, welcher mit derselben einen Winkel mache, der der Polhöhe DFC gleich sey, so wird, wenn man in A 12 Uhr schreibt, und so die Stunden ändert, die Uhr eine Horizontaluhr für eben die Polhöhe seyn, für welche sie vorhin eine Azimuthaluhr war. Denn bey den Horizontaluhren sind die Tangenten der Stundenwinkel in der Verhältniß des Halbmessers zum Sinus der Polhöhe kleiner als die Tangenten der Stundenbögen. Es sey demnach jeder Stundenbogen $=$ KCB, seine Tangente $=$ KP, wenn man nemlich CP als einen Halbmesser ansieht. Da nun PH in der Verhältniß von FD zu CD, oder des Halbmessers zum Sinus der Polhöhe kleiner ist als PK, so ist PH die Tangente des Stundenwinkels der Horizontaluhr, und folglich HCB der Stundenwinkel selbst.

§. 9.

Ungeachtet aber die Ellipse ADBE eben so wohl zu einer Azimuthaluhr als zu einer Horizontaluhr gebraucht werden kann; so macht dennoch die verschiedene Lage der Mittagslinie, als welche im ersten Fall die kürzere, im andern Fall aber die längere Axe ist, daß man sie nicht zugleich zu beyden Absichten gebrauchen kann, wenn man sich des Schattens beyder Zeiger bedienen will. Will man aber an dem Zeiger der Azimuthaluhr, welcher auf der Linie G g senkrecht steht, einen gleichfalls aufrechtstehenden Spiegel befestigen, so, daß derselbe mit beyden

Axen der Ellipse einen Winkel von 45 Graden mache, so wird der, vermittelst des Spiegels, reflectirte Schatten des Azimuthalzeigers, die Stunden von D an gerechnet, eben so zeigen, wie der auf C B stehende Zeiger der Horizontaluhr die Stunde, von B an gerechnet, weisen wird, wenn die längere Axe in der Mittagslinie liegt. In jeder andern Lage treffen beyde Stunden nicht zusammen. Man hat sich auch dieses Umstandes längst schon bedient, um durch die Vereinigung der Azimuthal- und Horizontaluhren die Lage der Mittagslinien zu finden, dabey aber jede Uhr besonders verzeichnet. Läßt sich aber der Spiegel gut anbringen, so gebraucht es, nach der hier angegebenen Methode, dieser gedoppelten Zeichnung nicht, weil man bey der Ellipse ADBE bleiben, und schlechthin nur die Zahlen, sowohl von D als von B an gerechnet, herum schreiben darf.

II. Bestimmung des Azimuth durch die Höhe der Sonne.

§. 10.

In den Anweisungen zur Gnomonic begnügt man sich mehrentheils die Verfertigung der Sonnen-Uhren, und etwann auch der Mond- und Sternuhren anzugeben, das will sagen, man macht die Bestimmung der Zeit darin zur Hauptabsicht; und dieses hat

hat allerdings seine gute Gründe, weil man den übrigen Umständen seltener als der Zeit nachfragt. Indessen hat die Bestimmung des Azimuth, und folglich der Mittagslinie, noch genug Erhebliches, daß man die dazu dienlichen Mittel vervielfältigen sollte. In der Gnomonic selbst kömmt die Frage von Bestimmung der Mittagslinien bey den meisten Sonnenuhren vor. In der practischen Geometrie kann sie ebenfalls sehr gute Dienste leisten; und bey der Schiffahrt wird sie unentbehrlich. Da das Azimuth am unmittelbarsten aus der Höhe der Sonne gefunden wird, so werde ich einige darüber angestellte Untersuchungen hier mit anbringen.

§. 11.

Es ist unnöthig aus dem vorhingesagten zu wiederholen, daß die erstbeschriebene Azimuthaluhr dazu dienen kann, sofern man GL, als den Sinus totus, und GH als den Cosinus der Sonnenhöhe ansieht, (§. 5.) und sofern GI, GL das Azimuth der auf- und untergehenden Sonne ist. Es ist vielmehr die Frage, das Azimuth unmittelbar auf den Quadranten zu verzeichnen, mit welchem die Höhe der Sonne gemessen wird. Dazu dienen nun folgende Betrachtungen:

§. 12.

Es sey HZON der Mittagskreiß, HCO der Horizont, GCF der Aequator, KSI Fig. II.

X 2 ein

ein Parallelkreiß des Aequators, S der Ort der Sonne, SZ ihr Abstand vom Zenith, SP ihr Abstand vom Pole, SPZ der Stunden-Winkel, SZI der Azimuthalwinkel. Man setze:

$$PZ = e$$
$$PS = c$$
$$ZS = k$$
$$PZS = a$$

so giebt die Trigonometrie folgende Gleichung:

$$\cos c = \cos e . \cos k + \sin e . \sin k . \cos a$$

oder wenn man durch sin. k dividirt

$$\cos c . \operatorname{cosec} k = \cos e . \cot k + \sin e . \cos a.$$

§. 13.

Fig. III. Da wir den sphährischen Triangel PSZ in einen geradlinichten verwandeln, in welchem e ein Winkel werde, so seyn in dem geradlinichten Triangel $\alpha\,\varepsilon\,\beta$ vier auf einander folgende Stücke, nemlich die Winkel δ, ε und die Seiten α, β; so wird die Verhältniß dieser vier Stucke durch die Gleichung

$$\alpha \operatorname{cosec} \varepsilon = \beta . \cot \varepsilon + \beta . \cot \delta$$

ausgedrückt. Wird diese Gleichung mit der letztern des vorhergehenden §. verglichen, so läßt sich

$$\operatorname{cosec} \varepsilon = \operatorname{cosec} k$$
$$\cot \varepsilon = \cot k$$

demnach

$$\varepsilon = k$$

setzen.

setzen. Dadurch aber wird

$$\alpha = \cos c'$$
$$\mathfrak{G} = \cos e$$

und da nun nur noch

$$\mathfrak{G} \cot \delta = \sin e . \cos a$$

bleibt, so findet sich

$$\cot \delta = \frac{\sin e . \cos a}{\mathfrak{G}} = \tang e . \cos a$$

Und auf diese Art sind die vier Stücke $\varepsilon, \alpha, \mathfrak{G}, \delta$ des geradlinichten Triangels durch die vier Stücke k, c, e, a des sphärischen Triangels dergestalt bestimmt, daß die Seite k des letztern im erstern der Winkel ε wird. Es ist demnach in dem geradlinichten Triangel der Winkel ε das Complement der Sonnenhöhe, die Seite $\mathfrak{G}$ der Sinus der Polhöhe, die Seite α der Sinus der Declination. Und da

$$\cot \delta = \tang e . \cos a$$

ist, so ergiebt sich hieraus, daß der Winkel δ dem Bogen NL gleich ist. Denn der Triangel LGN ist in G rechtwinklicht, und

$$GN = 90° - e$$
$$GNL = a$$

demnach

$$\cos a = \cot e . \cot NL = \cot e . \cot \delta$$
$$d = NL.$$

§. 14.

Wir führen diesen letztern Umstand nur an, um zu zeigen, daß der Winkel δ auch auf der

Sphäre eine Bedeutung hat. Es ist aber zu unserm Vorhaben genug, wenn wir aus der Gleichung

$$\cot \delta = \tang e . \cos a$$

die Anmerkung ziehen, daß sich der Winkel δ schlechthin nach dem Azimuth a verändert, und daher beständig ist, so lange man bey einerley Azimuth bleibt. Da nun die demselben gegenüberstehende Seite $\varepsilon = \cos e$ durchaus beständig ist, so wird der Punct δ allemal in dem Umkreise des Circuls $\varepsilon\,\delta\,\gamma$ liegen, und auf diese Art wird α durch ε, oder hinwiederum ε durch α bestimmt. Es ist demnach nur die Frage, diesen Circul für jedes Azimuth zu bestimmen. Dieses wird nun am leichtesten geschehen, wenn wir den Winkel ε rechtwinklicht nehmen.

§. 15.

Fig. IV. Es sey demnach AC zu AB wie der Sinus totus zur Tangente e, und A ein rechter Winkel. Ferner sey für jedes Azimuth

$$AB : AD = 1 : \cos a$$

so wird

$$AC : AD = 1 : \tang e . \cos a = 1 : \cot \delta$$

demnach

$$\delta = CDA$$

seyn. Man halbire DC in E, und aus E beschreibe man mit dem Halbmesser ED den Bogen ADC, so ist dieses der für das Azimuth a gesuchte Bogen. Nimmt man nun jedes Azimuth

muth von 10 zu 10 Graden, so werden die denselben entsprechende Bögen auf eben die Art beschrieben, wie sie die Figur vorstellt. Zieht man durch E eine Parallele HEG mit AB, so liegen alle Mittelpuncte auf HG, und es ist für jedes Azimuth

$$HF : EF = 1 : \cos a.$$

§. 16.

In dieser Figur ist nun

$$AC = 6 = \cos e$$

folglich

$$CB = CM = \text{sin. tot.}$$

ferner jede Linie

$$Cd = \cos c = \alpha$$

$$dCA = k$$

$$dCK = 90° - k$$

und der Circul ADdC zeigt das dazu gehörige Azimuth an.

§. 17.

Daferne das auf diese Art zu verfertigende Instrument nur für die Sonnenhöhen und deren Azimuthe dienen solle, so gebraucht man nicht die ganze Figur, sondern man macht CL dem Sinus der grösten Declination der Sonne gleich; und indem man aus C den Bogen Ll beschreibt, so ist der Theil LlC alles, was man von der Figur gebraucht. Auf CL werden aus C die Sinus der Declination für jede Grade der Ecliptic getragen, und mit

L I concentrische Bögen aus C beschrieben. Wo nun diese Declinationsbögen die Azimuthalbögen durchschneiden, da ergiebt sich zugleich die dazu gehörende Höhe der Sonne durch den Winkel, den die aus C in diese Durchschnittspuncte gezogenen Linien mit CK machen. Die fünfte Figur stellt einen solchen für die Grade der Ecliptic verzeichneten Azimuthalquadranten grösser und deutlicher vor, und die Verzeichnung auf eine bloß practische Art vorgetragen, ist folgende.

§. 18.

Fig. V. Nach einer beliebig angenommenen Scale mache man C F dem halben Sinus der Polhöhe, F H dem halben Cosinus derselben gleich und den Winkel F von 90 Graden. Sodann sehe man F H als einen Halbmesser an, und trage auf denselben aus F gegen H und G alle Sinus des Azimuth, von Grad zu Grad, oder von 5 zu 5, oder, wie es in der Figur geschehen, von 10 zu 10 Graden, so hat man eben so viele Mittelpuncte, aus welchen man durch C eben so viele Circulbogen zieht, und auf dieselbe die Grade des Azimuth von Mittag und von Mitternacht an gerechnet, zeichnet. Der Winkel H C N wird von 90 Graden gemacht, und so erhält man N C L die gantze Oefnung, so der Quadrant haben muß. Ferner mache man C L dem Sinus der grösten Declination der Sonnen gleich, und beschreibe

aus

aus C den äusserſten Bogen LKN, welcher ſodann in Grade getheilet wird, die von K aus vor- und rückwärts gezählet werden, ſo, daß der 90ſte Grad in L falle. Sodann werden auf CL aus C die Sinus der Declination von allen Graden der Ecliptic aufgetragen, oder welches einerley iſt, man ſieht CL als einen Halbmeſſer an, und trägt alle Sinus darauf, oder man fällt aus jeden Grade des Bogens LK Perpendicularen auf CL, und ſchreibt die nördliche Zeichen des Thierkreyſes da, wo die Sinus ihrer Declination hinfallen. Auf CN werden auf gleiche Art die ſüdlichen Zeichen geſchrieben. Die Dioptern werden auf CL angemacht, ſo, daß für die nördliche Zeichen C, für die ſüdlichen L gegen die Sonne gerichtet wird. Den in C angemachten Faden CP mit dem Gleichgewichte P und der daran beweglichen Perle p, läßt man frey herunter hängen, nachdem man denſelben anfangs auf CL, oder CN gelegt, um die Perl auf den Ort der Sonne zu ſchieben. Auf dieſe Art wird z. E. wenn die Sonne im 23ſten Grad ♉, oder 7 Grad ♌ und 20 Grad hoch iſt, die Perl in p ſeyn, und den 95ſten Grad des Azimuth, von Mittag an gerechnet, oder auf den 85ſten Grad von Mitternacht an gerechnet, anzeigen. Wäre bey gleicher Höhe der Sonne eben die Declination ſüdlich, ſo würde die Perl in q auf den 21ſten Grad von Mittag, oder auf den 159ſten Gr. von Mitternacht an gerechnet,

 fallen.

fallen. Will man aber den Quadranten feste stellen, und die Dioptern anstatt des Fadens, auf ein bewegliches Lineal bringen, so muß CK immer horizontal liegen, und die auf CL, CN geschriebene Grade und Zeichen werden auf das Lineal gezeichnet.

§. 19.

Wer leicht einige gnomonische Schriften gelesen hat, wird ohne Mühe auf die Anmerkung fallen, daß man längst schon einen Quadranten von dieser Art gesucht hat, auf welchem die hier verzeichneten Azimuthalbögen, Stundenbögen wären, und zwar mit dem Bedinge, daß es Circulbögen blieben. Denn wenn man andere krumme Linien dazu gebrauchen will, so lassen sich unzählige dergleichen verzeichnen. Man findet auch hin und wieder solche Quadranten beschrieben, wo man mit Hindansetzung der geometrischen Schärfe Circulbögen dazu gebraucht. Mit geometrischer Schärfe läßt sich eben dieser Azimuthalquadrant dazu gebrauchen, wenn man die Declination und die Sonnenhöhe verwechselt. Man nimmt nemlich die Declination auf dem Bogen KL, oder KN, und den Sinus der Sonnenhöhe auf CL, oder CN, und verwandelt die Grade des Azimuth, so die Perl anzeigt, in Stunden, indem man sie durch 15 theilt. So z. E. wenn man setzt, die Declination sey 20 Grad nördlich, die Sonnenhöhe $18\frac{1}{2}$ Grad, so wird die

Perl,

Perl, wie vorhin, in p seyn, und von Mittag an gerechnet 95 Grad, oder, durch 15 getheilt, 6 St. 20 Min. angeben, welches Nachmittags-Stunden sind. Theilt man aber die von Mitternacht an gerechnete 85 Grad durch 15, so erhält man 5 St. 40 Min. welches Vormittags-Stunden sind.

§. 20.

Der Grund, warum diese Verwechselung angeht, ist, weil man in beyden Fällen in dem Triangel PZS drey Seiten und einen Winkel hat. Der Quadrant ist für den Azimuthalwinkel Z construirt. Will man statt dessen den Stundenwinkel P nehmen, so steht diesem nicht mehr die Seite PS, sondern die Seite ZS gegenüber. Demnach müssen diese Seiten verwechselt werden. Da die Seite PZ an beyden Winkeln liegt, so bleibt sie in beyden Fällen unverändert. Da übrigens die Scale CL nur bis auf $23\frac{1}{2}$ Grad geht, so sieht man leicht, daß sie nicht für alle Sonnenhöhen dient, und daß man folglich dieselbe bis auf den Sinus der größten Sonnenhöhe verlängern müsse. Fig. II. Fig. V.

§. 21.

Ich werde mich aber dabey nicht länger aufhalten, sondern vielmehr die Anmerkung machen, daß alle die gnomonische Instrumente, wobey das, was man sucht, auf einer ganzen Fläche

Fläche herum getragen und gesucht werden muß, auf eine solche Art ins weitläuftige fallen, daß man, so sinnreich sie auch ausgesonnen sind, statt derselben, mit gutem Grunde, einfachere wünschen kan. So z. E. fällt das Geschmei-
Fig. I. dige der Azimuthaluhr der ersten Figur in die Augen. Die Stunden liegen auf einer einigen Linie herum, und der Zeiger wird auch nur auf der Linie Gg, als auf einer ganz einfachen Scale auf den Ort der Sonne gestellt. Ich habe daher auf Mittel gedacht, bey den Quadranten eben solche Abkürzungen und Geschmeidigkeiten zu erhalten, und werde nun das, so ich für das Azimuth gefunden, folgender massen vortragen.

§. 22.

Fig. II. Da die Sonnenhöhe, deren Complement der Bogen ZS ist, auf dem Quadranten durch einen Winkel vorgestellt und gemessen wird, so habe ich nach den bekannten trigonometrischen Regeln den Triangel ECA genommen, dessen drey Seiten ihre Pole in den Ecken P, Z, S haben. Hier ist nun

ECA die Höhe des Aequators $= e$
CEA das Complement der Sonnenhöhe $= k$
CAM das Complement der Declination $= c$
EC das Complement des Azimuth $= 180° - a$
CA der Stundenbogen $=$ SPZ.

Nun war es die Frage, den Triangel AEC dergestalt zu proiiciren, daß das Auge in dem

Nadir

Nadir des Puncts E und die Tafel auf der aus dem Auge in E gezogenen Linien senkrecht war. Man weiß, daß auf diese Art die Bögen E C, E A durch gerade Linien vorgestellt werden, deren Länge den Tangenten der Hälfte dieser Bögen gleich ist, daß der Winkel E bleibt, und A C durch einen Circulbogen vorgestellt wird, welcher die Linien E C, E A unter den Winkeln A, C schneidet.

§. 23.

Man mache demnach den Winkel Fig. VI.

$$AEC = k$$
$$EC = \tang \tfrac{1}{2} a$$
$$EQ = \cot a$$
$$CQR = 90 \text{ Gr.}$$
$$QCR = 90 - c$$

aus R beschreibe man den Bogen CAM, so wird der Winkel

$$ACE = e$$
$$MAE = c$$

und EAE der Declination der Sonne gleich seyn.

§. 24.

Nun ist

$$QC = \cot a + \tang \tfrac{1}{2} a = \operatorname{cosec} a$$

demnach

$$QE : QC = \cot a : \operatorname{cosec} a = \cos a$$

Nimmt man folglich QC und damit den ganzen Triangel QCR und den Bogen CM als beständ-

beständig an, und betrachtet QC als einen Halbmesser, so ist QE der Cosinus des Azimuth, und auf diese Art können die Azimuthe auf die Linie QC getragen werden. Da der Winkel AEC = k dem Abstand der Sonne vom Scheitelpunct gleich ist, so bleibt QC in allen Fällen vertical, und AE ist immer nach der Sonne gerichtet, und schneidet auf EC die Grade des Azimuth ab. Macht man demnach in R ein bewegliches Lineal AR, und auf denselben in A ein ander bewegliches Lineal AE mit Diogtern an, so muß der Winkel EAR immer der Declination der Sonne gleich gemacht, und so befestigt werden. Sodann dreht man den ganzen Winkel oder die beyden Lineale EAR bis AE gegen die Sonne gerichtet ist, so wird AE das Azimuth in E auf der Scale CQ abschneiden.

§. 25.

Nach dieser Anleitung läßt sich das Instrument aus zween Sectoren so verfertigen, wie
Fig. VII. es die 7te Figur vorstellt. Der erste Sector NRCM hat einen Bogen NMC, welcher doppelt so groß als die Höhe des Aequators ist. Die Chorde dieses Bogens NQC wird als ein Diameter angesehen, und die Sinus versus jeder Graden aus C gegen N getragen, und die Grade dazu hingezeichnet, welche sodann jede Azimuthe, von Mittag an gerechnet, vorstellen. Der andere Sector RDAF hat einen Bogen,

Bogen, der doppelt so groß als die Obliquität der Ecliptic ist. Die Linie A R theilt denselben in zween gleiche Theile, und ist von gleicher Länge wie der Halbmesser des ersten Sectors. A ist der Mittelpunct, aus welchem die Bögen D F beschrieben, und auf welche die Grade der Declination aufgetragen werden. Dieser zweyte Sector dreht sich in R um das Centrum des erstern, hingegen wird in seinem Centro A das Lineal A B angemacht, und mit Dioptern versehen, welche mit der Linie AB parallel sind.

§. 26.

Solte nun damit das Azimuth der Sonne gefunden werden, so wird das Instrument in die Verticalfläche der Sonne gestellt, so, daß die Chorde N C vertical stehe. Das Lineal AB wird in B auf den Grad der Ecliptic gedreht, in welchem die Sonne ist. Sodann dreht man den Sector ADRF bis die Diopter gegen die Sonne gerichtet sind, so wird die Schärfe des Lineals A B auf der Chorde N Q C das Azimuth der Sonne abschneiden, die Höhe der Sonne selbst aber wird MRA +BAR seyn.

§. 27.

Man thut hiebey wohl, wenn man den Sector DAFR etwas grösser als 47 Grad macht, damit, wenn das Lineal AB auf ♋

liegt,

liegt, es sich nicht an dem Arm AD so anschliesse, daß der Grad des Azimuth auf NQC, den es anzeigen solle, ganz bedeckt werde. Aus gleichem Grunde ist es gut, wenn man das Gewinde A nicht sehr groß macht, damit es, wenn A nahe an C kömmt, die Grade auf CQ nicht bedecke. Uebrigens da dieses nur um die Mittagszeit geschieht, wo ohnehin das Azimuth nicht sehr genau durch die Sonnenhöhe bestimmt werden kann, so hat es auch nichts auf sich, wenn gleich die 20 oder 30 erste Grade bedeckt werden, da es an sich rathsamer ist, daß man sie nie gebrauche, daß will sagen, das Azimuth Morgens früher, Nachmittags später zu bestimmen suche. Da endlich das Gewind A nie höher gegen R hinauf zu stehen kömmt, als bis dahin, wo der Arm AD horizontal liegt, so kann man von dem Sector CMNR den Theil, der noch höher ist, weglassen, und so wird er von nicht mehrern Graden seyn, als die gröste Sonnenhöhe; dabey aber bleibt die Chorde und ihre Eintheilung und Lage eben so, als wenn man den Sector ganz beybehielte. Es ist fast unnöthig zu erinnern, daß man an dem Gewinde A einen Stift befestigen kann, welcher auf einem um NMC herum beschriebenen concentrischen Bogen, Grade anzeige. Diese mögen dienen, den Sector ADRF, nach geschehener Observation, um so viel hinauf zu drehen, als die Refraction beträgt, wenn das Instrument

groß

groß genug ist, daß man bey kleinern Sonnenhöhen derselben, darauf Rechnung tragen kann.

III. Sector, um aus der Sonnenhöhe die Zeit zu bestimmen.

§. 28.

Das erst beschriebene Azimuthalinstrument hat nun den vorhin (§. 21.) verlangten Vortheil der einfachen und bloß linearen Scalen, und ist überdies sehr leicht und ohne weitläuftige Vorbereitung zu gebrauchen. Ueberdies kommt der Umstand dabey vor, daß die Ungleichheit der Grade auf der Chorde NQC gleichsam der Maaßstab von der Zuverläßigkeit der Observation angiebt, weil diese nur so weit geht, als die Theile, welche sich in jedem Fall auf NC noch unterscheiden lassen. Ich habe daher gesucht, ob diese Vortheile auch bey einem Sector erhalten werden könnten, welcher anstatt des Azimuth die Stunden angeben würde.

§. 29.

Zu diesem Ende kehrte ich zu dem Triangel Fig. II.
ECA zurücke (§. 22.) wobey nunmehr

ECA = e
CEA = k
CAM = c
AC = SPZ = ω

zu betrachten vorkömmt. Diesen proiicirte ich so, daß das Aug im Nadir des Eckes A und
Fig. VIII. die Tafel auf der aus dem Auge durch A gehenden Linien senkrecht war. Es sey demnach

$$MAC = e$$
$$AC = \text{tang.} \tfrac{1}{2}\,\omega$$
$$AQ = \cot \omega$$
$$AQR = 90 \text{ Grad}$$
$$RCQ = 90 - e$$

so wird, wenn man aus R den Bogen CN beschreibt, der Winkel

$$ECA = e$$
$$AEC = k$$

demnach AER die Höhe der Sonne seyn. Zieht man ferner RM auf EAM, und KR auf RQ senkrecht, so ist

$$KRM = 90^\circ - MAC = 90 - e$$

folglich KRM der Declination der Sonne gleich, und

$$MRE = 90^\circ - MER = k$$

demnach wenn RM vertical ist, so ist RE gegen die Sonne gerichtet, weil MRE ihrem Abstand vom Scheitelpunct gleich ist. Endlich haben wir

$$QC = \text{tang} \tfrac{1}{2}\,\omega + \cot \omega = \text{cosec}\, \omega$$
$$QA : QC = \cot \omega : \text{cosec}\, \omega = \text{cosin}\, \omega$$

Wird daher CQ und damit der ganze Triangel CRQ und der Bogen CN als beständig genommen, und CQ als ein Halbmesser angesehen, so ist AQ der Cosinus des Stunden-

bogens

bogens∞, und auf diese Art lassen sich auf QC die Stunden zeichnen, wenn man sie dahin zeichnet, wo die Cosinus ihrer Bögen hintreffen.

§. 30.

Will man demnach aus dieser Figur ein Instrument machen, so muß Fig. IX.

KRM die Declination der Sonne
RM vertical
ER gegen die Sonne gerichtet
EA horizonthal

seyn. Dieses kann nun auf folgende Art erhalten werden.

§. 31.

An dem Sector HCLNR wird der Bogen CL=LN der Höhe des Aequators gleich gemacht, die Chorde CQN gezogen, und indem man sie als einen Diameter ansieht, so trägt man die Sinus versus der Stundenbögen aus C gegen N darauf, um die Stunden und Minuten darauf zu verzeichnen. Von L in K zählt man 90 Grade, und trägt aus K vor- und rückwerts die Declination jeder Grade der Ecliptic, um die Zeichen des Thierkreises darauf zu zeichnen. In dem Centro R wird ein bewegliches Lineal RA angemacht und mit Dioptern versehen. In E aber wird ein Winkelhacken ABD angehenkt, so, daß durch die Schwere des Gewichtes D die Schärfe des Lineals AB allemal in eine horizontale Lage komme. Endlich hängt aus R der Faden R M mit dem Gewichte M herunter.

§. 32.

Soll nun die Stunde gefunden werden, so wird der Sector in die Verticalfläche der Sonne gestellt, so, daß der Faden R M auf den Ort der Sonne falle. Sodann richtet man die Diopter E N gegen den Mittelpunct der Sonne, und läßt den Winkelhacken A D B frey hangen und sich in Ruhe setzen. Dieser wird sodann in A die Stunde und Minute anzeigen.

§. 33.

Man kann diesen Sector mit Wegschaffung des rechten Winkels K R L folgendermassen abändern und geschmeidiger machen. Der Bogen N C bleibt wie vorhin der doppelten Höhe des Aequators gleich, und die Chorde N Q C wie eben so, in Stunden getheilt. Hingegen werden die Grade der Declination aus L vor- und rückwärts getragen. An dem Lineal R E läßt man aus E einen Faden E P mit dem Gewichte P herunter hangen, und die Diopter F B werden in D rechtwinklicht an dem Lineal R E D befestigt.

Fig. X.

§. 34.

Um nun damit die Stunde zu finden, dreht man das Lineal R E D auf das Zeichen und Grad der Ecliptic, in welchem die Sonne ist, und wendet sodann den ganzen Sector so, daß das Lineal eine verticale Lage bekomme, oder der Faden E P auf E R treffe, oder, welches einerley ist, der Ort der Sonne in M vertical über R sey. Sodann dreht man das Lineal, um die Diopteren B F gegen die Sonne zu richten, und läßt den Faden frey hangen und sich in Ruhe setzen, so wird derselbe in A die Stunde und Minuten weisen, die zu finden war.

IV. Methode diese Sectoren für jede Polhöhe universal zu machen.

§. 35.

Die erst beschriebene Sectoren, wodurch vermittelst der Höhe der Sonne sowohl das Azimuth als die Zeit gefunden wird, haben ausser der einfachen und blos linearen Scale noch den Vortheil, daß sie fast, ohne weitere Zubereitung, für jede Polhöhen allgemein gemacht werden können. Die Möglichkeit dieses beträchtlichen Vortheils rührt daher, daß die Eintheilung der Scale C N für jede Polhöhen einerley ist, und daß sich schlechthin nur der Winkel Q R C ändert, als welcher allemal der Höhe des Aequators gleich gemacht werden muß. Setzt man demnach Q C N beständig, so wird Q R desto länger, je grösser die Tangente der Polhöhe Q C R ist, und aus gleichem Grunde verlängert sich C R = E R in Verhältniß der Secante der Polhöhe. Dieses fordert demnach, daß man auf der Linie RQ noch ein Lineal befestige, und auf demselben die Tangente der Polhöhe aus R gegen Q trage, damit man die Scale CN, welche nunmehr beweglich gemacht werden muß, auf die Polhöhe schieben und befestigen könne. Eben so müssen auch die Secanten der Polhöhe auf dem Lineale RE aufgetragen werden, um den Faden EP jedesmal da anzuhängen, wo die Polhöhe gezeichnet steht. Beyden Linealen RQ, RE giebt man die Länge, welche die größte Pohlhöhe erfordert, wo man zu observiren gedenkt; und anstatt dem Instrumente die Figur eines Sectors zu geben, kann man es in ein Rectangel verwandeln, dessen Breite =CN, die Länge aber der Secante der größten Polhöhe gleich ist, für welche man es zu gebrauchen gedenkt.

§. 36.

Auf diese Art verwandelt wird nun das Instrument in der 11. Figur vorgestellt, wie es vom Aequator bis unter dem Polarcircul gebraucht werden kann. Die Stundenleiter NC läßt sich an den beyden Rahmen HN, GC schieben und bey jeder Polhöhe befestigen. Auf NC sind die Stunden nach den Sinus versus der Stundenbögen, auf HN und GC die Tangenten der Polhöhen, und auf RED ihre Secanten aufgetragen. Auf dem Bogen M

Fig. XI.

finden

finden sich die Zeichen und Grade des Thierkreises nach ihrer Declination. Die Dioptern FB sind ebenfalls auf DR rechtwinklicht. Wird nun NC auf die Polhöhe geschoben und befestigt, der Faden EP bey der Polhöhe E angeschraubt, der Ort der Sonne M vertical über R gestellt, und die Dioptern BF gegen die Sonne gerichtet, so schneidet der Faden in A die Stunde und Minuten ab. Die Verticallinie MR geht immer in K durch den Punct des Auf- und Unterganges der Sonne. KQ ist der Sinus der Ascensionaldifferenz, QA der Sinus des Stundenbogens, von 6 Uhr an gerechnet, KRE = REA das Complement der Sonnenhöhe, RKA=KAE das Complement der Declination, und

RE : KA = sin RKA : sin KRE.

§. 37.

Alles dieses geht nun bey dem vorhin (§. 25 seqq.) beschriebenen Azimuthalsector auch an, und die Verwandlung fällt so aus, wie es die 12te Figur vorstellt. Die Azimuthalscale NC, welche nach den Sinus versus des Azimuth eingetheilt ist, läßt sich an den beyden Rahmen HN, GC schieben, und bey der Polhöhe, die nach ihren Tangenten aufgetragen ist, befestigen. Auf dem andern Sector DAF, sind auf AR die Grade der Polhöhe nach ihren Secanten, und auf dem Bogen DF die Zeichen und Grade des Thierkreises Fig. XII.

nach ihrer Declination aufgetragen. Die Polhöhe fällt in R, und der Sector läßt sich um diesen Punct drehen, so wie die Diopteren AB sich um sein Centrum A drehen läßt. NC oder HG wird immer vertical gestellt, und AB in B auf den Ort der Sonne gelegt, sodann der ganze Sector DAF so gedreht, daß AB gegen die Sonne gerichtet sey; und so wird die Schärfe AB auf NC den Grad des Azimuth, von Mittag an gerechnet, abschneiden.

§. 38.

Die Genauigkeit dieser Instrumente hängt fürnehmlich von der Länge der Scale NC ab, weil sich auf derselben desto kleinere Theile noch unterscheiden lassen, je länger sie gemacht wird. Ist diese Länge von einem Fuß, oder 1440 Decimaltheile von Linien, so wird in Q eine Minute Zeit noch die Grösse von drey solcher Decimaltheile haben, oder beynahe $\frac{1}{3}$ Linie groß seyn. Von Q gegen C und N werden sie immer kleiner. Es ist dieses aber kein Fehler des Instruments, weil sich die Zeit aus der Sonnenhöhe desto minder genau finden läßt, je näher die Sonne bey dem Mittage ist. Man setze

Fig. X.

Fig. II.

$$PZ = e$$
$$ZS = k$$
$$PS = c$$
$$ZPS = \omega$$

so haben wir die Gleichung

$$\cos k = \cos e . \cos c + \sin e . \sin c . \cos \omega$$

Wird

Wird nun e, c beständig angenommen, und k, ω differentiirt, so ist

$$\sin k . dk = \sin e . \sin c . \sin \omega . d\omega$$

folglich ist

$$d\omega = \frac{\sin k}{\sin c . \sin e . \sin \omega} . dk$$

der Fehler in der Zeit, wenn dk der Fehler in der Höhe der Sonne ist. Setzt man nun, Fig. X.
die Höhe der Sonne werde mit dem Sector NEC gemessen, und CR sey $= 1$, so ist auf der Stundenleiter NC ein kleiner Theil der Zeit z. E. eine Minute desto weniger zu erkennen,

1°. je kleiner QC $= \sin e$ ist,

2°. je schiefer der Faden EAP die Linie NC schneidet, folglich je kleiner $\sin EAQ = \sin c$ ist,

3. je mehr die Zeittheile in A kleiner sind als in Q, folglich je kleiner $\sin \omega$ ist.

Demnach wächst aus diesen Gründen die Schwürigkeit, einen kleinen Zeittheil auf NC zu erkennen, in zusammengesetzter Verhältniß von $\sin c . \sin e . \sin \omega$. Dieses ist nun eben der Theiler der erstgefundenen Formel

$$d\omega = \frac{\sin k}{\sin c . \sin e . \sin \omega} . dk$$

Der Zähler ist

$\sin k\, dk = -d \cos k . = d \sin MRD$

und giebt folglich an, um wie viel der Perpendicul EP von der Verticale MR weggerückt wird, wenn man mit dem Instrument statt der wahren Sonnenhöhe eine grössere nimmt. Da die Möglichkeit diesen Fehler zu erkennen, mit dessen Grösse zunimmt, so nimmt die Schwürigkeit, denselben zu erkennen, in umgekehrter Verhältniß ab, und dieses macht, daß $\int k . dk$ die übrige Factoren $\int c . \int e \int \omega$ nicht multiplicirt, sondern dadurch getheilt wird. Da wir demnach die Formel

$$d\omega = \frac{\int k . dk}{\int c . \int e . \int \omega}$$

unmittelbar und ganz auf dem Instrumente finden, so ziehen wir die Folge daraus, daß es einerley ist, ob man die Zeit in A observirt, oder ob man die Höhe der Sonne mit dem Sector QNR nimmt und daraus die Zeit berechnet.

§. 39.

Man muß ferner bey diesen, und überhaupt bey allen gnomonischen Instrumenten, welche nach dem Ort der Sonne gerichtet werden müssen, diesen Ort genau wissen, und zwar nicht nur für die Mittagszeit, sondern für die Stunde der Observation. Da man nun diese Stunde erst durch das Instrument finden will, so kann man den Ort der Sonne anfangs so annehmen, wie derselbe für die Mittagszeit aus den Astronomischen Tafeln berechnet wird, und damit sehen, wie viel Uhr es seyn würde. Man sucht sodann den Ort der Sonne für diese Zeit, und stellt entweder die Observation aufs neue an, an, oder giebt auch nur den Instrument die Lage, die es würde gehabt haben, wenn man gleich anfangs den wahren Ort der Sonne gebraucht hätte. So z. E. müssen bey dieser Veränderung die Dioptern B F unbeweglich bleiben, und nur der Sector N C R gedreht werden, bis der wahre Ort der Sonne in die Verticallinie M R trift. Uebrigens, wenn das Instrument groß genug ist, daß sich solche kleinere Veränderungen darauf bemerken lassen, so muß man ebenfalls der Refraction Rechnung tragen, und dies geschieht, wenn man nach geschehener Observation die Dioptern so viel der horizontalen Lage näher rückt, als die Refraction beträgt.

V. Constructionen für die Sonnenhöhe.

§. 40.

Da bey dem erstbeschriebenen Sector der Winkel MRE der Höhe der Sonne, und E A Q den Abstand der Sonne vom Pol gleich ist, so darf man nur durch jede Zeit A eine Linie AE mit R M parallel ziehen, um die Höhe der Sonne E R M zu haben. Da nun M R allemal durch den Ort der Sonne M gezogen ist, so wird die Höhe der Sonne für jeden Tag und Stunde ohne Mühe bestimmt.

§. 41.

So leicht und allgemein nun diese Construction ist, so werde ich dessen unerachtet noch eine andere hersetzen, welche zwar nicht so allgemein ist, dabey aber dennoch etwas sehr einfaches und leichtes an sich hat. Man nimmt für den fürgegebenen Tag die Mittagshöhe und die Mitternachtstiefe der Sonne, oder welches einerley ist, die Summe und Differenz der Aequatorshöhe und der Declination. So-
Fig. XIII. dann, indem man in dem Circul AFBL den verticalen und horizontalen Diameter FL, AB gezogen, trägt man die Mittagshöhe aus B in D, die Mitternachtstiefe aus B in E, oder aus A in M, und zieht DG, EH mit dem Horizonte AB parallel. Auf GH beschreibt man den Circul GJHP und theilt denselben in 24 Stunden. Wird sodann durch jede Stunde J die Linie PJK horizontal, oder mit AB parallel gezogen, so findet sich BK, die dazu gehörende Höhe der Sonne, NGQ ist die Tageslänge, und NHQ die Nachtlänge, DE die doppelte Höhe des Aequators, RJ der Sinus der Sonnenhöhe in beständiger Verhältniß des Products der beyden Chorden NJ, QJ. Denn da NQ die Chorde des Nachtbogens, NJQ der Hälfte desselben gleich, folglich NQ zu sin. NJQ in beständiger Verhältniß ist, so ist auch NJ ∽ sin NQJ

QJ ∽ sin QNJ

Nun

Nun ist

$$JR = NJ.\sin QNJ$$

demnach

$$JR \backsim NJ.QJ.$$

Es ist aber, wenn man die wirkliche Gleichung sucht

$$\sin NJQ = NQ:GH$$

demnach
$$NQ = GH.\sin NJQ$$
$$NJ = GH.\sin NQJ$$
$$JR = GH.\sin NQJ.\sin QNJ$$

Nun ist, wenn man $AC = 1$ setzt

$$CG = \cos.(c-e)$$
$$CH = -\cos(c+e)$$

demnach

$$GH = \cos(c-e) - \cos(c+e) = 2\sin c.\sin e$$

und daher der Sinus der Sonenhöhe

$$JR = 2\sin c.\sin e.\sin NQJ.\sin QNJ$$

Es ist aber, wenn J eine Nachmittagsstunde ist, der Bogen NPJ die Zeit vom Aufgange der Sonne, JQ die Zeit bis zum Untergang der Sonne. Demnach läßt sich, wenn die Tageslänge bekannt ist, die Höhe der Sonne durch die blosse Addition von vier Logarithmen berechnen. Da übrigens DE die doppelte Aequatorshöhe ist, so ist die Chorde DE für jede Declination der Sonne von beständiger Grösse, und eben die, so in der 9ten, 10ten und 11ten Figur CN ist. Demnach läßt sich auch aus dieser 12ten Figur ein ähnliches Instrument herleiten.

VI.

VI. Anmerkungen über die Horizontal- und Verticaluhren.

§. 42.

Die Kunst Sonnenuhren zu machen wird häufig auch von solchen Leuten ausgeübt, die von allen dazu gehörigen Gründen schlechthin nichts verstehen. Unter andern Anlässen, die ich gehabt habe, ohne Rücksicht auf so viele selbst auf dem Lande anzutreffende Sonnenuhren diese Anmerckung zu machen, fande ich einen solchen Künstler, der ungefähr wußte, daß bey dem Horizonthal- und mittäglichen Verticaluhren die Stunden nicht gleich nahe bey einander sind. Dieses brachte ihn, oder einen seiner Vorgänger, auf den Einfall aus A und B die Bögen B D, A D zu beschreiben, jeden in sechs gleiche Theile zu theilen, und aus der Mitte C die Stundenlinien in die Theilungspuncte zu ziehen, sodann den Zeiger unter einen halben Winkel, das will sagen, unter 45 Graden auf C D aufzurichten. So wird unstreitig die Uhr leicht und geschwinde gezeichnet, nur muß man für die Genauigkeit derselben nicht gut stehen, weil diese eine beträchtliche Verbesserung der Methode erfordert, wenn man statt der Tangenten oder Aequinoctiallinie, solche Circulbögen, dergleichen A D, BD sind, dazu gebrauchen will.

Fig. XIV.

§. 43.

Man ziehe nemlich den Circul HDM, und darin die beyden Diameter HM, VD perpendiculär. Den Circul HDM theile man in 24 gleiche Theile als Stunden. Sodann mache man VDC der Höhe des Aequators, und VDP der Hälfte desselben gleich, und aus dem Centro C beschreibe man durch D den Circul ADE. Aus P ziehe man in jede Stunden des Circuls HDM blinde Linien, und wo diese den Circul ADE durchschneiden, da ziehe man aus V Linien, welches die Stundenlinien der Horizontaluhr für die Polhöhe DCV seyn werden. Fig. XV.

§. 44.

Die Figur ist eine Projection der Sphäre auf den Horizont, wenn das Aug im Zenith ist. HDM ist der Horizont, ADE der Aequator, P der Pol, V das Zenith, VF ein Verticalcircul, DG der Stundenbogen auf dem Aequator, oder die Zeit vom Mittage an in Grade verwandelt, GDF die Höhe des Aequators, demnach, weil der Triangel DFG in F rechtwinklicht ist,

$$\cos GDF = \cot DG . \tang DF$$

daher ist DF der Stundenbogen, oder DVF der Stundenwinkel für die Horizontalsonnenuhr. Die blinden Linien PG sind schlechthin nur, um den Aequator ADE nach dem Regeln der Projection in Grade einzutheilen.

§. 45.

§. 45.

Nimmt man zu dem Winkeln VDC, VDP statt der ganzen und halben Aequatorshöhe, die ganzen und halbe Polhöhe, so erhält man statt der Horizontaluhr eine mittägliche Verticaluhr. Diese Verzeichnungsart ist dadurch geschmeidiger und in allem eben so einfach als die gewöhnliche, weil man hier anstatt einer geraden Aequinoctiallinie, welche für die Morgen- und Abendstunden, gar zu sehr verlängert werden muß, den Aequinoctialcircul ADE gebraucht.

§. 46.

Man kann sich ferner eben dieser Projectionsart bedienen, um eine Vorbereitung zu finden, nach welcher sodann jede Horizontal- und Verticaluhren für jede Polhöhen, durch blosse Zeichnung eines halben Circuls gezeichnet werden könnten. Die Vorbereitung selbst ist folgende:

§. 47.

Fig. XVI. Aus dem Durchschnitte der Perpendicularen ACB, DCE zieht man den Circul ABDE, und beschreibt sodann durch die Punct D, E Circulbögen, welche die Linie DE unter Winkeln von 15, 30, 45, 60, 75 Graden durchschneiden. Es ist klar, daß die Halbmesser dieser Bögen Secanten dieser Grade seyn, ihre Mittelpuncte auf AB liegen, und von C um die Tangenten dieser Grade entfernt seyn werden. Dieses ist nun die Vorbereitung.

§. 48.

§. 48.

Sollte nun eine Horizontaluhr verzeichnet werden, so macht man A P der Polhöhe gleich, zieht PQ mit AB parallel, und beschreibt aus der Mitte E den halben Circul PMK, so ist KM die Mittagslinie, der Zeiger wird in K aufgerichtet, und die Durchschnittspuncten 1, 2, 3 rc. 11, 10, 9 rc. geben die Stundenbögen der Horizontaluhr, wenn man aus denselben gerade Linien in k zieht. Macht man hingegen M P der Höhe des Aequators gleich, so erhält man auf eben die Art eine mittägliche Verticaluhr.

§. 49.

Es sey K das Zenith, PHQM der Horizont, KQ der Halbmesser, KD werde der Tangente und KE der Cotangente der halben Aequatorshöhe gleich gemacht, so sind D, E die beyden Pole, DNE ein Mittagskreis, MDN = MEN der Stundenwinkel, und ME die Polhöhe. Da nun in dem rechtwinklichten Triangel MEN Fig. XVII.

$$\sin EM = \cot MEN . \tang MN$$

so ist MN der Stundenbogen, oder MKN der Stundenwinkel für die Horizontaluhr. Man setze nun CA = 1, so ist CK = dem Sinus der Polhöhe, KQ = KM deren Cosinus. Da nun vermög der Projectionsart, jede Mittagscircul END, die Mittagslinie ED unter eben den Winkeln schneiden, unter welche sie auf der

Sphäre den Mittagskreis schneiden, so ergiebt sich hieraus die Construction der Uhr, wie sie in der 16ten Figur vorgestellet worden, wo die Buchstaben A, B, C, D, E K, M, P, Q eben die Bedeutung haben, wie in der 17ten Figur.

§. 50.

Man findet sehr häufig kleine Horizontaluhren, die man bey sich tragen kann, und wo die Mittagslinie entweder durch den darauf gezeichneten Thierkreis, oder vermittelst einer Magnetnadel gefunden wird. Solche Uhren sind nun allerdings für eine gewisse Polhöhe, und dieses mag der Grund seyn, warum Reisende sich lieber Aequinoctialuhren anschaffen, welche auf jede Polhöhe können gerichtet werden. Man kann aber diesen Vortheil auf eine eben so leichte Art bey jeder Horizontaluhr erhalten. Man setze z. E. die Uhr sey für den 55ten Grad der Polhöhe gezeichnet, so wird sie unter dieser Polhöhe in der That eine horizontale Lage haben. Will man sie aber unter einer andern Polhöhe z. E. unter dem 50sten Grade gebrauchen, so muß man sie gegen Mittag um 5 Grade erhöhen, damit der Zeiger einen Winkel von 50 Gr. mit dem Horizonte mache. Zu diesem Ende kann das Plättgen Fig. XVIII oder Täfelgen A C, auf welchem die Uhr verzeichnet ist, vermittelst eines Gewindes in A an ein anderes A B angeschraubt werden. Um demselben sodann die behörige Erhöhung

zu

zu geben, wird in B ein Circulbogen, dessen Centrum in A ist, so angemacht, daß man ihn sowohl legen als aufrichten kann. Oder man läßt durch C eine Stellschraube auf B gehen, durch deren Umdrehen man A C nach Erforderniß erhöhen kann. Es ist dabey möglich die Schraubengänge mit der Distanz A B so zu proportioniren, daß bey jedem Umgange der Schraube A C um einen Grad erhöht wird. Dieses geschieht, wenn A C so lang als $57\frac{3}{10}$ Schraubengänge genommen wird. Das leichteste und aus andern Absichten zugleich das vortheilhafteste Mittel aber ist das Unterschieden eines rechtwinklichten Prisma D. Denn A C wird um desto mehr erhöht, je näher D gegen A geschoben wird. Wie weit aber das Prisma D an jedem Orte müsse geschoben werden, läßt sich am bequemsten finden, wenn man auf dem untern Plättgen A B eine Landcharte verzeichnet. Denn so wird die Uhr auch von denen gebraucht werden können, die von der Polhöhe gar keinen Begrif haben.

§. 51.

Da die Höhe des Prisma D als beständig angesehen wird, so ist A D in Verhältniß der Cotangente des Winkels C A B. Da diese Cotangente unendlich wird, wenn C A D $= 0$ ist, so thut man am besten, wenn man dem Winkel C A B 5 Grade giebt, wenn D in B zu liegen kömmt, das will sagen, die Son-

nenuhr wird für eine Polhöhe verzeichnet, die 5 Grade grösser ist, als die gröste, so man auf der Landcharte anbringen will. Man setze z. E. es solle der 55te Grad der Polhöhe in B fallen, welches ungefähr die nördliche Grenzlinie von Deutschland ist, so sieht man die Länge AB als die Cotangente von 5 Graden an, und trägt nach gleichem Maaßstabe die Cotangenten von 6, 7, 8, 9, 10, 11 ꝛc. Graden aus A gegen B, und nach eben dem Maaßstabe erhält das Prisma D die Höhe von dem Halbmesser. Die Sonnenuhr auf dem obern Plättgen AB wird für den 60sten Grad der Polhöhe verzeichnet. Die Grade der Länge bleiben hiebey willkührlich. Man kann sie daher sowohl nach der Breite der Sonnenuhr, als nach dem Districte der Erdfläche richten, welches man auf die Landcharte bringen will. Man kann
Fig. XIX. aus der 19ten Figur sehen, wie die Sache ausfällt. AD ist der Halbmesser und zugleich die Höhe des Prisma, AB die Tangente von 85 Grad, und die übrigen Puncte der Scale AB sind die Tangenten von 84, 83, 82, 81 ꝛc. Graden. Die Uhr AC ist auf die Polhöhe 60 Grad gezeichnet, und daher ist bey B der 55ste Grad gesetzt, weil, wenn das Prisma in B untergestellt wird, die Fläche der Uhr um 5 Gr. erhöht, demnach der Zeiger um 5 Grad vertieft, daß will sagen, auf die Polhöhe von 55 Grad gerichtet wird.

§. 52.

§. 52.

Es wird dem Leser von selbst beyfallen, daß die beyden Instrumente, so die 11te und 12te Figur vorstellt, ebenfalls von der Art sind, daß eine Landcharte darauf verzeichnet werden kann, und zwar desto besser, weil die in GC und HN verzeichnete Grade der Breite oder Polhöhe weniger ungleich sind. Fig. XI. et XII.

§. 53.

Wenn die Abweichung der Magnetnadel an einerley Ort beständig bliebe, so liessen sich auf der Landcharte die sogenannten Halleyschen Linien zeichnen, um den Gebrauch der Sonnenuhr auch auf diese Art allgemein zu machen. Man kann aber auch auf der Uhr selbst den Thierkreis zeichnen, und zwar für die Polhöhe von 60 Gr. für welche die Uhr horizontal ist. Unter jeder andern Polhöhe giebt man durch Unterschiebung des Prisma der Uhr die behörige Erhöhung, und dreht sie sodann herum, bis der Schatten auf den Ort der Sonne trift, um dadurch zugleich die Stunde und die Lage der Mittagslinie zu finden. Fig. XIX.

VII. Beschreibung eines halben Circuls, um aus der Höhe der Sonne die Zeit zu finden.

§. 54.

Fig. XX. Wir haben dieses Instrument oben (§. 19.) nur kurz angezeigt, und werden nun die Art dasselbe zu verzeichnen noch angeben. Man beschreibe auf einem Diameter CB, von beliebiger Länge, den halben Circul CNB, und mache den Winkel BCK der Polhöhe gleich. Aus dem Mittelpunct H ziehe man HF mit CK parallel, und aus C die Linie CF auf HF senkrecht. Man beschreibe sodann mit dem Halbmesser FH aus F den Circulbogen HQ, und theile denselben in Stunden. Aus jeder Stunde ziehe man Perpendicularen auf HF, so wird man eben so viele Centra haben, aus welchen durch C Circulbögen CD gezogen werden müssen, welche, wenn LCK = MCK der Obliquität der Ecliptic gleich gemacht wird, innert den Linien MC, LC sodann gezogen werden. Diesen Bögen werden die Stunden beygeschrieben, und aus K gegen L und M die doppelte Grade der Declination jeder Zeichen und Grade des Thierkreises aufgetragen. Endlich wird in C ein Faden CP mit einer Perl N und Gewichte P angehängt, und die Dioptern auf CB mit dieser Linie parallel angemacht.

§. 55.

§. 55.

Soll nun damit die Stunde gefunden werden, so richtet man die Dioptern C B gegen die Sonne, und läßt den Faden frey hangen. Sodann schiebt man die Perl in N auf den 12ten Stundenkreis, und legt den Faden auf den Ort der Sonne, z. E. in CR, so fällt die Perl in S auf 4 Uhr 25 Min. Nachmittag, oder 7 Uhr 35 Min. Vormittag.

§. 56.

Dieses Instrument hat zugleich den Vortheil, daß es nach geometrischer Schärfe genau ist, und auf eine sehr einfache und leichte Art verzeichnet werden kann. Bey den Quadranten, die man in den meisten Anweisungen zur Gnomonic angiebt, fehlt es an beyden. Denn werden sie durch lauter Circulbögen construirt, so geht der geometrischen Schärfe ab. Construirt man sie aber vermittelst der für jede Stunden und Zeichen voraus berechneten Sonnenhöhen durch krumme Linien, so muß man diese von freyer Hand ziehen, und die Arbeit wird weitläuftig. In dem Gebrauche ist gegenwärtiger halbe Circul von den Quadranten auch nur in sofern verschieden, daß man bey den Quadranten die Perl anfangs auf den Ort der Sonne schiebt, und sodann die Höhe der Sonne sucht, hier aber bey der Höhe anfängt, und dann die Perl aus N in S bringt.

VIII. Beschreibung eines gleichschenklichten Triangels, um aus der Sonnenhöhe die Stunden zu finden.

§. 57.

Fig. XXI. Man nimmt auf der verticalen Linie AE als einen Halbmesser an, und trägt die Sinus versus der Stunden aus A aufwerts. Sodann nimmt man auf gleicher Scale die Tangente der Polhöhe als einen Halbmesser an, und trägt die Tangenten der Declination jeder Zeichen und Grade des Thierkreises aus E aufwerts und unterwerts. Endlich nimmt man auf eben der Scale die halbe Secante der Polhöhe als einen Halbmesser an, und trägt auf den beyden Schenkeln CD, CF die Secanten der Declination jeder Zeichen und Grade des Thierkreises aus C gegen D und F. Diese beyden Schenkel haben in C ein Gewinde wie die beyden Schenkel eines Proportionalcirculs. In D wird gleichfalls ein bewegliches Gewinde angebracht, so, daß sich nicht nur CD an AD herumdrehen lasse, sondern daß der Mittelpunct des Gewindes D auf den sowohl auf CD als auf AD gezeichneten jedesmaligen Ort der Sonne geschoben werden könne. In F aber wird an dem Schenkel CF ein Stift angemacht, so, daß derselbe ebenfalls auf den auf diesem Schenkel gezeichneten jedesmaligen

Ort

Ort der Sonne geschoben und befestigt werden könne. Die Dioptern können auf C D oder auf F C kommen, weil jeder dieser Schenkel einerley Winkel mit dem Horizonte macht. Ist nun das Gewind in D und der Stift in F auf den Ort der Sonne gestellt, so rückt man den Stift F auf der Stundenlinie A B herauf oder herunter bis die Dioptern F C oder C D gegen die Sonne gerichtet sind, alsdenn zeigt der Stift die Stunde und Minute, die zu finden war.

§. 58.

Es sey, um dieses zu beweisen,

p die Polhöhe
d die Declination
h die Höhe der Sonne
ω die Stunde oder der Stundenbogen, von Mittag an gerechnet;

so ist vermög der Construction

$$AE = 1$$
$$ED = \text{tang } d \,.\, \text{tang } p$$
$$CD = CF = \tfrac{1}{2} \sec d \,.\, \sec p$$
$$EF = \cos \omega$$
$$DCF = 2h$$
$$DF = 2DC \,.\, \sin h = \sec d \,.\, \sec p \,.\, \sin h$$

Nun ist

$$DF = DE + EF$$

folglich

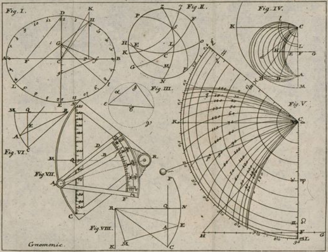
$$\sec d . \sec p . \sin h = \tang d . \tang p + \cos \omega$$

oder, wenn man durch $\sec d . \sec p$ dividirt

$$\sin h = \sin p . \sin d + \cos p . \cos d . \cos \omega$$

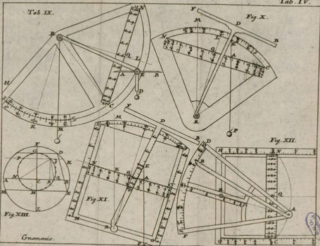
Da dieses die bekannte Gleichung zwischen der Polhöhe, Declination, Sonnenhöhe und Stundenbogen ist, so ist die Construction diejenige, welche diese Gleichung erfordert.

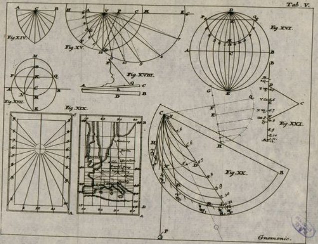
XI.



Gnomonic.

Tab. IV.





Gnomonic.