XI.
Gedanken über die Grundlehren des Gleichgewichts und der Bewegung.

§. 1.

Man ist überhaupt der Meynung, daß diejenigen Lehren, welche an Richtigkeit, Schärfe, Gewißheit und Augenscheinlichkeit (euidenz) den geometrischen, wo nicht durchaus gleich, jedennoch am nächsten kommen sollen, die mechanischen sind. Man hat daher schon längsten die Frage aufgeworfen: ob sich die ersten Sätze der Mechanic nicht eben so nothwendig und a priori erweisen lassen, als es Euclid in Absicht auf die geometrischen gethan? Diese Frage läßt sich auch dadurch noch gewissermassen rechtfertigen, weil man selbst in der Meßkunst, wenn von der Entstehensart oder Erzeugung der Figuren die Rede ist, Sätze zum Grunde legt, die von der Bewegung entlehnt sind. So z. E. erklärt man die Entstehung einer Linie durch das Fortfliessen eines Puncts. Die Entstehung eines Circuls durch das Herumdrehen einer geraden Linie um einen Punct ꝛc. Nun sind zwar solche mechanische Ausdrücke in der theoretischen Geometrie fremde. Indessen kann man derselben Tab. VI. VII.

selben dennoch nicht entbehren, sobald man die Geometrie practisch machen, oder auch nur die Möglichkeit der Figuren erweisen will. **Euclid** gebraucht sie zu dieser letztern Absicht, und da er voraus sieht, daß sich ohne die vorerst erwiesene Möglichkeit der Figuren, von denselben nichts categorisches erweisen läßt, so läßt er gleich auf die Grundsätze, seine Forderungen oder Postulata von Ziehung und Verlängerung gerader Linien und von Zeichnung eines Circuls folgen, und fängt sodann seine Theorie mit zwoen Aufgaben an, um dadurch die Möglichkeit seiner folgenden Lehren feste zu setzen.

§. 2.

Soferne man demnach in der Mechanic nur auf diejenigen Begriffe und Sätze sehen wolte, die selbst in der Geometrie gebraucht werden, so fern ist es unstreitig, daß die Mechanic mit der Geometrie, in Absicht auf die Nothwendigkeit, Schärfe, Gewißheit und Augenscheinlichkeit zu gleichen Schritten gehen würde. Allein dabey bleibt die Mechanic nicht stehen. In der Geometrie nimmt man die Bewegung, ohne auf etwas anders als auf die **Direction** und den **durchlaufenen Raum** zu sehen. Dieses ist in der Mechanic nicht genug. Denn das wenigste, was man noch mitnehmen muß, ist die **Zeit** und **Geschwindigkeit**. Und bleibt man bey diesen vier Begriffen, so läßt sich ohne alle Widerrede eine Theorie errichten,

richten, die der Meßkunst nichts nachgiebt. Man vergleicht darin die Bewegung einzeler Puncte nach jeder beliebigen Direction und Geschwindigkeit, welche man nach belieben annimmt und ändert, ohne darauf zu sehen, wober beyde entstehen, wenn die Bewegung in der That vorgeht. Man begnügt sich dabey mit der an sich ganz klaren Vorstellung, daß wir uns in **Gedanken** von jedem Punct des Raumes in jeden andern nach jeder beliebigen Richtung und Geschwindigkeit versetzen können, ungefehr wie wir in Gedanken den Umriß jeder Figur durchlaufen. In so fern aber ist dieser erste Theil der Mechanic, den wir die Phoronomie nennen können, eben so wie die Geometrie, und in eben dem Sinne, schlechthin nur ideal, weil alles dabey nur auf Vorstellungen beruht.

§. 3.

Wolte man aber dabey verbleiben, so würde unstreitig der Mechanic ihr wesentlichster Theil fehlen. Man sieht leicht, daß die **Kräfte** darinn betrachtet, und in jeden Absichten mit einander verglichen werden müssen. Und eben dieses ist es, worin die Vergleichung der mechanischen und geometrischen Evidenz nicht mehr so leicht zu seyn scheint. Die Kräfte liegen nicht so vor Augen, wie die Figuren. In der Bewegung läßt sich höchstens nur ihre **Wirkung** sehen, und auch dieses nur zum Theil. Und bey dem Gleichgewichte, wo alles in Ruhe ist, würden wir von dem Daseyn wirkender Kräfte, kaum träumen, wenn wir nicht den Begrif der Kraft durch das Gefühl hätten. In der That versichern wir uns auch nur dadurch, daß das, was wir bey dem Gleichgewichte eine Kraft nennen, im Stande ist, eine Bewegung herfür zu bringen, wenn das Gleichgewicht gehoben wird.

§. 4.

Durchgehen wir in dieser Absicht die Geschichte der Mechanic, so werden wir auch finden, daß eben daher, weil die Theorie des Gleichgewichtes näher an den Begrif gränzt, den wir unmittelbar durch das Gefühl von der Kraft haben, diese Theorie weit früher in Richtigkeit gebracht worden ist, als diejenige, wo die Kräfte mit der Bewegung verglichen werden. Indessen, wenn ich sage, sie sey in Richtigkeit gebracht worden, so verstehe ich dadurch eben nicht, daß es auf eben die Art geschehen sey, wie **Euclid** die Geometrie in Richtigkeit gebracht hat. Es kann zwar seyn, daß verschiedene Sätze der Meßkunst anfangs durch einzelne Erfahrungen gefunden worden, und daß man erst nachgehendes den Beweis, und besonders den Beweis von ihrer Allgemeinheit gesucht hat; so, daß die Erfahrung eigentlich nur als ein Anlaß diente, auf den Satz aufmerksam zu machen, und den Beweis dazu zu finden. In der Mechanic hingegen

gegen war die Erfahrung nicht nur durchaus der Weg, worauf man ihre Sätze fand, sondern es kommen noch dermalen selbst unter ihren ersten Sätzen solche vor, die man ihrer bisher angegebenen Beweise unerachtet, noch anstehen könnte, für wahr anzusehen, wenn man nicht wüßte, daß sie durch die Erfahrung bewährt erfunden werden. Man darf sich nur der Streitigkeiten erinnern, die in den neuern Zeiten über die Gesetze der Bewegung und das Maaß der Kräfte sind geführt worden, um sich zu versichern, daß man eben dergleichen in der Geometrie haben müßte, wenn diese nicht evidenter wäre, als es bisher die Mechanic gewesen.

§. 5.

Hiebey ist nun nicht die Frage, ob man statt eines an sich richtigen Beweises, nicht einen andern finden könne, der kürzer, netter, leichter oder auch noch klarer sey? Diese Frage kann um desto eher vorkommen, weil man nicht selten durch Umwege beweist, oder aus andern Umständen den Vortrag dunkler macht, als er seyn könnte und sollte. Die Frage ist, ob der Beweis in der That beweise, ob sich der Satz in der That durchaus gedenkbar und verständlich machen und eben so durchaus erweisen lasse rc. Denn was man hiebey erzwingen will, wird nicht erwiesen, sondern höchstens nur scheinbar gemacht. Die Scharfsinnigkeit

nigkeit artet in Spitzfündigkeit aus, welche das Irrige auf jede Sätze des Beweises unvermerkt vertheilt, und was nicht so vertheilt werden kann, in die Difinitionen schiebt, damit sich sodann, was man daraus herleiten will, daraus herleiten lasse. Und so ist die Begierde einen Satz erwiesen zu sehen, der feinste Sophist, den man sich gedenken kann. Man wird in den Streitschriften über das Leibnitzische Maaß der Kräfte, und so auch in denen über die Maupertuische actio minima ausnehmende Beyspiele hievon finden. Man sieht aber solche Sophismata nur alsdann ganz deutlich, wenn das, was in der Sache selbst gedenkbar ist, ein für allemal ist ins Reine gebracht worden. Denn nur alsdenn sieht man deutlich ein, wie man das, was vorhin über die Sache gedacht worden, oder was man geglaubt hatte, dabey zu denken, anders denken müsse, damit es durchaus gedenkbar sey. Uebrigens geschieht es selten, daß die, so in der Streitigkeit verwickelt sind, auf diese Spur kommen, zumal wenn sie nicht gesonnen sind, ihr Wort zurück zu nehmen.

§. 6.

Wenn aber auch alles, was man bisher in der Static oder Lehre vom Gleichgewichte, und in der Dynamic oder Lehre von den bey der Bewegung vorkommenden Kräften, durch die Erfahrung, als bewährt befunden, angesehen

werden

werden kann, so bleiben doch noch zwo Fragen zu erörtern. Die erste betrift die Allgemeinheit, weil diese sich, vermittelst der Erfahrung, nur durch Induction erweisen läßt. Und da unsere Erfahrungen niemals eine geometrische Schärfe haben, so bleibt bey denen Sätzen, so wir daraus finden, immer noch der Anstand, ob der Satz in Kleinigkeiten nicht Ausnahmen leide, so wie z. E. die Haarröhrgen bey dem waagrechten Stande flüßiger Materien kleine Ausnahmen machen, oder wie die Strahlenbrechung in der Luft den Weg des Lichtes ein wenig krümmet. Die andere Frage ist, ob die mechanischen Sätze, so wie wir sie durch die Erfahrung in der gegenwärtigen Welt finden, von der Einrichtung des Weltgebäudes abhängig, oder eben so wie die geometrischen, für sich nothwendig sind; so, daß sie, wo sie vorkommen, nicht anders vorkommen können? Man sieht leicht, daß wenn und wiefern letzteres statt findet, die Mechanic eben so wie die Geometrie nothwendig und a priori erweisbar ist. Man sieht auch, daß wenn diese letztere Frage entschieden ist, die erstere eben so weit erleichtert und entschieden werde. Denn was man a priori erweisen kann, geschieht mit der Bestimmung der Allgemeinheit und Schärfe. Soll nun diese zweyte Frage erörtert werden, so muß es immer so geschehen, als wenn die Hauptsätze der Static und Dynamic noch erst zu erfinden wären, und was die Erfahrung davon angiebt, mag höchstens als eine Veranlassung dienen, um zu sehen, ob und wie fern es sich a priori erweisen lasse. Man weiß überhaupt schon so viel, daß es hiebey auf einige wenige Sätze ankommt, daß man in der Static ganz ausreicht, wenn die Theorie des Hebels und der Zusammensetzung der Kräfte einmal erwiesen ist, und daß man in der Dynamic ebenfalls nur die Entstehung der Bewegung, vermittelst der Kräfte, ins Reine bringen darf, um sodann jedes übrige daraus zu folgern. Ich werde nun das, was ich bey dem Ueberdenken dieser Theorien gefunden, hier vortragen, und hin und wieder auch mit anmerken, was mir bey einigen bisher gebräuchlichen Beweisen minder einleuchtend, oder aus welchen Gründen es seyn mag, mangelhaft zu seyn vorgekommen.

Erste Grundlehren der Static.

I. Der Begrif der Kraft.

§. 7.

Vor etwann 100 Jahren, oder besser zu sagen, vor des Galilaei und Cartesii Zeiten, wäre es in einem Lehrbuche von der Static oder Hebekunst kaum nöthig gewesen, sich

sich bey dem Begriffe der **Kraft** lange aufzuhalten. Dermalen aber wird es dadurch nöthiger, weil man nach Durchlesung alles dessen, was darüber, und besonders bey Anlaß der **Leibnitzischen** und **Maupertuisischen** Streitigkeiten, ist geschrieben worden, diesen an sich ganz einfachen Begrif bald nicht mehr zu finden weiß. Man hat seitdem bald aus jeden Modificationen der Kraft besondere Kräfte gemacht, und daher **lebende** (vires vivas), **todte** (mortuas), **eingepflanzte** (insitas), **beschleunigende** (acceleratrices) ꝛc. Kräfte auf die Bahn gebracht. Und besonders hat **Bilfinger** denselben noch seine vires indifferentes, consentientes, coincidentes, dissentientes, repugnantes, disiunctas, parallelas, mixtas, puras &c. beygefügt. Zu diesen kamen sodann noch die actio, potentia, pressio, sollicitatio, der Impetus, Conatus, Impactus &c. lauter Begriffe, wozu die Sprache Wörter darbothe, die wegen des unbestimmten Umfanges der Bedeutung schwer zu bestimmen, und daher desto dienlicher waren, aus willkührlichen Definitionen derselben Sätze herzuleiten, die man, so verwirrt sie waren, beweisen haben wolte. Ich gestehe gerne, daß ich die meisten dieser Wörter, der davon gegebenen Definitionen unerachtet, niemal recht habe verstehen können. In der That konnte ich mir auch leicht gedencken, daß die ersten Grundsätze der Mechanic viel einfacher seyn müßten, als daß ein solcher Kram von Wörtern und Definitionen dazu nöthig wäre. So z. E. begrif ich wohl, daß wenn das Product aus der Masse eines Körpers in das Quadrat der Geschwindigkeit in der Mechanic gut gebraucht werden kann, dasselbe Kürze halber mit einem Namen benennt werden könne. Und da die Wörter willkührliche Zeichen der Begriffe sind, so verstunde ich in sofern auch, daß man dieses Product eine **Kraft**, und wenn man so will, eine **lebende Kraft** nennen könne. Ob aber dadurch das Wort **Kraft**, oder auch das Wort **lebende Kraft** nicht vieldeutig wurde, das war eine ganz andere Frage, wobey mir immer vorkam, daß sie bey genauerer Untersuchung würde bejaht werden müssen. Und sollte dieses seyn, so würde **Leibnitz** in allen Absichten besser gethan haben, wenn er bemeldtes Product mit jedem andern Worte, nur nicht mit dem Wort **Kraft**, benennt hätte. Wenigstens wäre dadurch alles, was bey dem darüber entstandenen Gezänke **Wortstreit** heißt, schlechthin unterblieben, und die Frage, ob dieses Product in allen Fällen beständig bleibe, und unter die Finalursachen der Welt gerechnet werden müsse, hätte eine ganz andere Gestalt bekommen. Ueber die **Maupertuisische** actio minima lassen sich ganz ähnliche Betrachtungen machen, und noch um desto mehr, weil das Wort actio in der Sprache längst schon vieldeu-

vieldeutig ist, und z. E. in den Ausdrücken: actio radiorum solarium, actio ignis &c. eben so verwickelte Begriffe andeutet, als wenn man menschliche Handlungen damit benennt, die aus sehr vielen einfachern zusammengesetzt sind.

§. 8.

Da übrigens diese Anmerkungen mehr die Dynamic als die Static betreffen, so sind auch in der That die statischen Begriffe weniger verwirrt worden. Man drückt darin das, was man Kraft und Last nennt, um es recht verständlich zu machen, durch Gewichte aus, und bestimmt für jede Fälle die Verhältnisse zwischen beyden. Indessen muß ich anmerken, daß man im Deutschen das Wort Kraft gebraucht, da man hingegen im Lateinischen anstatt *Vis* lieber *Potentia* sagt. Man hat sich aber an diesen Unterschied der Benennungen nicht zu kehren, theils weil diese Wörter in der Sprache ohnehin vieldeutig sind, und daher in der Static nicht nach der Unbestimmtheit des Sprachgebrauches definirt werden müssen, theils und fürnehmlich aber auch, weil in der Static die Sache selbst vorgezeigt wird. Ueberdies werden darin Kraft und Last, nur Beziehungsweise, so genennt, weil in der That beyde Gewichte eine Kraft äussern. Dafern sie aber ungleich sind, so stellt man sich vor, daß das Grössere vom Kleinern gehoben, oder wenigstens im Gleichgewicht gehalten werden müsse; und in sofern wird das Grössere die Last, das Kleinere aber die Kraft genennet, zumal da öfters statt desselben die Kräfte der Menschen oder der Thiere gebraucht werden.

§. 9.

Ungeachtet man aber den kleinern Gewichte deswegen den Namen der Kraft beylegt, weil dasselbe das grössere im Gleichgewichte halten kann, so haben wir dennoch den Begrif der Kraft nicht von daher, sondern viel unmittelbarer in uns selbsten. Wenn wir nemlich eine Last heben oder fortdrücken, so empfinden wir, daß wir etwas anwenden müssen, und das, was wir empfinden, daß wir es anwenden musten, nennen wir die Kraft. Wir empfinden eben dieses, wenn wir z. E. einen Stein werfen wollen, und wir empfinden es desto mehr, je schwerer derselbe ist, und je geschwinder er soll geworfen werden.

§. 10.

Diese Beschreibung, wie wir zu dem an sich ganz klaren und einfachen Begrif der Kraft gelangen, mag nun um desto eher statt der Worterklärung dienen, weil wir von der Kraft eben so wenig eine Worterklärung geben können noch sollen, als von dem Farben, dem Lichte rc. In der That besteht der Unterschied auch nur darin, daß das Auge sieht, was auf-

ser

ser ihm ist, da wir hingegen die Kraft in uns selbst empfinden. Wir können daher die Kraft nicht vorlegen, wie die Farben, um sie zu sehen; sie muß in uns empfunden werden. Und daher haben wir auch, um das Wort verständlich zu machen, nur anzuzeigen, wie man zu dieser Empfindung gelange. Der Begrif, den uns sodann diese Empfindung giebt, ist eben so klar als der Begrif den uns das Anschauen von den Farben giebt. Und so verschwindet jeder Wortstreit.

§. 11.

Ich erwähnte vorhin (§. 9.) mit gutem Vorbedachte, daß wir bey dem Werfen eines Steines empfinden, daß wir eben das anwenden müssen, was wir bey Hebung eines Gewichtes anwenden, auch wenn wir dasselbe schlechthin nur halten. Im letztern Fall währt die Kraft mit gleicher Stärke in einem fort, im erstern aber empfinden wir derselben allmählige Verstärkung, und die Geschwindigkeit, die daher erwächst. Wenn man demnach je wolte die Dynamic auf die Erfahrung gründen, so würde die hier angeführte die unmittelbarste seyn, weil wir dabey die Kraft, die wir anwenden, ihre allmählige Verstärkung und die daher entstehende Geschwindigkeit unmittelbar selbst empfinden. Und da diese Erfahrung uns offenbar angiebt, daß es einerley Kraft ist, die im ersten Fall nur hält, zieht, drückt 2c. im andern aber in Bewegung setzt; so sieht man leicht, daß die bloß drückenden Kräften von den bewegenden Kräften nur in der Art, wie sie angewandt werden, verschieden sind.

§. 12.

In der Static, wo nur das Gleichgewicht der Kräfte betrachtet wird, nimmt man die Kräfte schlechthin nur, sofern sie einen Druck äussern, und jede für sich weder stärker noch schwächer wird. Man nimmt dabey an, daß **Kräfte gleich sind, wenn sie gleichen Druck äussern, das will sagen, wenn eine statt der andern gesetzt werden kann, daß eine Kraft doppelt, drey, vier, n fach so stark ist, als eine andere, wenn statt jener zwo, drey, vier, n von diesen müssen gesetzt werden. Ferner setzt man, daß zwo, drey, oder mehrere Kräfte, die auf ein Object, oder um es einfacher zu machen, auf einen Punct wirken, einander das Gleichgewicht halten, wenn dieses Object oder dieser Punct unbewegt bleibt, oder keiner von diesen Kräften nachgiebt.** Da diese Sätze mit dem Begrif der Kräfte in unzertrennlicher Verbindung sind, so werden sie mit demselben eben so vorausgesetzt, wie man in der Geometrie den Begrif des Raums und die damit verknüpften Grundsätze voraus setzt. Und in sofern,

sofern, sage ich, daß sich die Static eben so nothwendig wie die Geometrie a priori erweisen lasse. Ich werde zu diesem Ende gegenwärtigen Abschnitt mit folgendem Lehrsatze beschliessen, weil er eigentlich noch hieher gehört.

§. 13.

Wenn zwo gleiche Kräfte in gerader Linie A B, C B gegen einander auf ein Object B wirken, so halten sie einander das Gleichgewicht. Man setze, nicht, so wird das Object der einen Kraft, z. E. der Kraft A nachgeben, und gegen D fortgedrückt werden. Da nun die Kraft C eben den Druck äussert, so wird B auch gegen E fortgedrückt. Demnach ist es in D und E zugleich. Da nun dieses ungereimt ist, so geht das Läugnen des Schlußsatzes nicht an, demnach halten die beyden Kräfte einander das Gleichgewicht. Fig. I.

II. Die unbiegsame Linie.

§. 14.

Wie man in der Geometrie gerade Linien gebraucht und dabey anfängt, so gebraucht man dieselben in der Static ebenfals, jedoch mit dem Zusatze, daß sie unbiegsam (linea inflexilis) sey. Und da wo man die Kräfte durch **Gewichte** vorstellt, fügt man noch bey, daß diese Linie ohne Schwere (expers grauitatis) sey. Wir könnten allgemeiner setzen, daß sie ohne Masse seyn müsse, wenn nicht dieses schon mit zu dem Begrif einer mathematischen Linie gehörte, als welche, da sie ohne Breite und ohne Dicke ist, mit keiner Masse ausgefüllt seyn kann. Der Grund, warum man so strenge verfährt, ist weil man vermittelst einer solchen Linie die Wirkung mehrerer Kräfte unter einander vergleichen will, und da muß die Linie nicht durch ihre eigene Masse oder Schwere ein Hinderniß abgeben. Daß sie unbiegsam seyn müsse, nimmt man in der Static ebenfalls aus guten Gründen an. Durchgeht man aber die meisten Staticken, so findet man nicht, daß der Einfluß, den diese Bedingung in die Beweise ihrer Lehrsätze hat, in denselben behörig ausgedrückt wäre. Ich werde demnach bemüht seyn, diesen Mangel zu ersetzen, um das, was diese Unbiegsamkeit auf sich hat, deutlich zu machen. Der erste von den dahin gehörigen Lehrsätzen ist folgender:

§. 15.

Fig. II. Es sey A B eine dergleichen unbiegsame Linie, deren Mitte C ein unbeweglicher Punct sey, oder welches hier einerley ist, auf einem unbeweglichen Punct liege. Man setze nun gegen die beyden Endpuncte A, B drücken zwo gleiche Kräfte nach der perpendiculairen Richtung D A, E B, EB, so sage ich, diese Kräfte halten ein ander das Gleichgewicht, das will sagen, die Linie bleibt in unveränderter Lage. (§. 12.) Wird dieses geläugnet, so setze man, die Linie verändere ihre Lage, so, daß z. E. der Punct A in G fortgedrückt werde. Da nun aus gleichem Grunde der Punct B in F gedrückt wird, der Mittelpunct C aber, vermög der Voraussetzung, unbeweglich ist, so wird die Lage der Linie AB nunmehr GCF, demnach die Linie gebogen seyn. Dieses ist aber der Voraussetzung zuwider. Demnach geht das Läugnen der Folge nicht an. Und so sind die Kräfte im Gleichgewichte.

§. 16.

Wolte man hiebey die Linie ungebogen seyn lassen, so wird eben so bewiesen, daß sie zugleich die Lage GH und die Lage FJ haben, folglich an zweyen Orten zugleich seyn müste. Welches nicht bloß etwann der Voraussetzung zuwider, sondern schlechthin ungereimt seyn würde.

§. 17.

Wolte man endlich um auch diesem auszuweichen, setzen, die Lage der Linie werde GKF seyn, so wird der Mittelpunct C in K kommen, und folglich, der Voraussetzung zuwider, bewegt werden.

§. 18.

Ich häufe übrigens diesen dreyfachen Beweis unter andern auch deswegen hier auf, weil der Lehrsatz, und besonders der Archimedische Beweis dem Herrn von **Leibnitz** Anlaß gegeben, seinen **zureichenden Grund** als ein Principium in der Weltweisheit anzubringen, und dem **Grunde des Widerspruches** theils entgegen, theils an die Seite zu setzen. Man sieht aus allen drey Beweisen, daß das Gegentheil des Satzes auf Widersprüche gebracht wird, und daher der Satz nicht unter die contingenten Wahrheiten gehört, die man allein aus dem zureichenden Grunde herleiten zu können glaubt.

§. 19.

Diese drey Beweise beruhen nun sämtlich auf der Unbiegsamkeit der Linie A C B. Es ist aber dieses nicht der einige Gebrauch, den man davon machen kann. Der andere Gebrauch, den wir noch anzugeben haben, ist ungleich erheblicher. Er gründet sich darauf, **daß, indem die beyden Kräfte in A und B drücken, es eben so viel ist, als wenn eine doppelt so grosse Kraft in C drückete.** Dieses würde nicht seyn, wenn die Linie biegsam wäre, weil sodann von beyden Kräften ein Theil darauf würde verwendet werden, um die Linie zu biegen, oder wenn diese, ohn alle Verwendung einiger Kraft, biegsam ist, so

würde

würde dieselbe gebogen, ohne daß der Punct C den geringsten Druck auszuhalten hätte. Läßt man aber die Linie schlechthin unbiegsam, so hat der Punct C weder mehr noch minder Druck auszuhalten, als er von einer Kraft auszuhalten hat, welche so groß als die Summe beyder Kräfte D, E ist. Denn setzt man mehr, so ist offenbar in der Wirkung etwas, das in der Ursache nicht ist. Setzt man weniger, so geht der Ursache etwas ab, daß auf nichts verwendet wird.

§. 20.

Man setze aber, es drücken gegen die unbiegsame Linie GH in A und D zwo gleiche Kräfte, die wir jede $= 1$ setzen wollen, so muß denselben in der Mitte C eine Kraft $= 2$ entgegen gesetzt werden, um das Gleichgewicht zu halten. Wo dieses nicht wäre, so müßte die Kraft in C entweder grösser oder kleiner seyn. Wir wollen sie z. E. kleiner und folglich $= 2 - \alpha$ setzen. Wird demnach in C eine Kraft $= 2 - \alpha$ angebracht, so ist, dieser Hypothese zufolge, die Linie in Ruhe, und jeder Punct derselben so gut als unbeweglich. Man nehme nun die Puncte E, F von C doppelt so weit entfernt als die Puncte A, D sind. Wolte man demnach jede der Kräfte A, D halbiren, und in jedem Punct E, F eine Hälfte, in B aber zwo Hälften anbringen, so würde, eben der Hypothese zufolge, das Gleichgewicht gehoben. Fig. III.

Denn

Denn diese so vertheilte Hälften wirken nun nicht mehr als wenn in A und D zwo Kräfte $= 1 - \frac{1}{2}\alpha$ wären. Man muß demnach diese Hälften um einen Theil, den wir $= \beta$ setzen wollen, verstärken, wenn anders das Gleichgewicht bleiben solle. Demnach wird in den Puncten E, F eine Kraft $= \frac{1}{2} + \beta$, und in B eine Kraft $= 1 + 2\beta$ angebracht. Man nehme nun wiederum die Puncte G, H doppelt, so weit von C entfernt, als E und F sind. Und da wird, wenn man die Kräfte in E und F wegnimmt, in den Puncten G, H mehr als ihre Hälfte, und in B mehr als zwo von ihren Hälften angebracht werden müssen, wenn anders das Gleichgewicht bleiben solle. Es seyn demnach in G und H die Kräften $= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\beta + \gamma$ und in B $= \frac{1}{2} + \beta + 2\gamma$, so werden nun in B die Kräfte $= (1 + 2\beta) + (\frac{1}{2} + \beta + 2\gamma)$ seyn. Da man nun auf diese Art immer fortfahren kann, doppelt entferntere Puncte zu nehmen; so ist klar, daß wenn dieses unendlich fortgesetzt wird, in B die Kräfte

$$\begin{aligned} &+ 1 + 2\beta \\ &+ \tfrac{1}{2} + \beta + 2\gamma \\ &+ \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\beta + \gamma + 2\delta \\ &+ \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4}\beta + \tfrac{1}{2}\gamma + \delta + 2\varepsilon \\ &+ \text{\&c.} \end{aligned}$$

seyn werden, deren Summe $= 2 + 4\beta + 4\gamma + 4\delta +$ &c. ist. Diese Summe ist nun, auch, ohne Rücksicht, auf die äussersten Puncte, an sich schon grösser als 2, und um

so

so viel mehr grösser als die in C angebrachte Kraft $= 2 - \alpha$. Demnach können beyde einander nicht gleich seyn, dafern man nicht $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon =$ &c. $= 0$ setzt. Da nun ersteres das Gleichgewicht erfordert, so muß auch letzteres seyn. Demnach ist es falsch, daß in C eine kleinere Kraft als $= 2$ erfordert werde. Daß aber auch keine grössere erfordert werde, leitet sich daher, weil man bey dieser Voraussetzung die Gleichung $2 + \alpha = 2 - 4\beta - 4\gamma - 4\delta -$ &c. erhalten würde, welche ebenfalls nicht angeht, dafern man nicht $\alpha = \beta = \gamma = \delta =$ &c. $= 0$ setzt. Auf diese Art erhält man nun den Vortheil, daß, wo an einer unbiegsamen Linie zwo gleiche Kräfte angebracht sind, wie z. E. in A und D, man statt derselben in der Mitte B eine doppelt so grosse anbringen kann; und hinwiederum, daß man jede Kraft B wegnehmen, und statt derselben in zween von B gleich entfernten Puncten z. E. in A und D halb so grosse Kräfte kann anbringen, ohne daß das Gleichgewicht verändert, oder die Linie GH verrückt oder bewegt werde.

III. Die Dimensionen der Kraft.

§. 21.

Man kann den Druck, den eine Kraft äussert, in verschiedenen Absichten betrachten, je nachdem dieselben auf einen Punct, oder

auf

auf eine Linie, oder auf eine Fläche, oder endlich auf einen ganzen körperlichen Raum wirkt. Die Wirkungen selbst sind aber unstreitig Heterogen, und es gebraucht daher einige Vorsichtigkeit, wenn man sie unter einander vergleichen will. Man setze z. E. eine Kraft wirke auf eine ganze Linie, so wirkt sie unstreitig auch auf jeden Punct derselben. Beyde Wirkungen aber sind der Dimension nach verschieden. Denn wenn man die ganze Wirkung auf die Linie, durch eine Linie ausdrückt, so wird die Wirkung auf einen Punct nicht durch eine Linie, sondern nur durch einen Punct ausgedrückt werden können. Und hinwiederum, wenn man die Wirkung auf einen Punct durch eine Linie vorstellt, so muß die Wirkung auf die ganze Linie durch einen Flächenraum, und aus gleichem Grunde die Wirkung auf eine Fläche durch einen körperlichen Raum, und so endlich auch die Wirkung auf einen körperlichen Raum durch die vierte Dignität vorgestellt werden. Das will nun sagen, daß die Dimensionen der Kraft, zugleich mit den Dimensionen des Objectes zunehmen, worauf dieselbe wirkt.

§. 22.

Man kann sich hiebey ferner gedenken, daß der Druck, den die Kraft auf jeden Punct äussert, entweder bey allen durchaus gleich sey, oder daß sie nicht durchaus gleich, oder gar auch

auch bey jedem Punct grösser oder kleiner sey. Man kann zum Unterschiede im ersten Fall die Kraft **gleich vertheilt**, im andern aber dieselbe **ungleich vertheilt** nennen. Es ist für sich klar, daß der erste Fall unendlich viel einfacher ist als der andere, und daß man dabey gewinnt, wenn man bey dem ersten anfängt, und sodann Mittel findet, den andern auf denselben zu reduciren.

§. 23.

Ehe wir aber dahin fortschreiten, müssen wir noch anmerken, daß wir diese verschiedene Dimensionen der Kräfte noch auf eine andere Art in Vergleichung bringen können. Es ist nemlich möglich, daß wir eben die Kraft, die zum Exempel auf eine ganze Linie vertheilt war, als auf einen einigen Punct gerichtet, ansehen können. Und da wird diejenige, so vorhin auf eine ganze Fläche vertheilt war, nunmehr auf eine Linie, und die, so auf einen körperlichen Raum vertheilt war, nun nur auf einen Flächenraum vertheilt. Dadurch geht aber offenbar an ihren Dimensionen nichts ab, ungeachtet die Dimensionen des Objectes, jede um eins, vermindert werden. Denn so lange z. E. die Kraft auf die ganze Linie vertheilt war, wirkte sie zwar auch auf jeden Punct, aber mit einer blos linearen Wirkung. Wird sie aber ganz auf einen Punct gerichtet, so ist die Wirkung auf denselben nun nicht mehr linear, sondern sie muß eben so, wie vorhin, durch einen Flächenraum vorgestellt werden, weil sie, vor wie nach, von zwoen Dimensionen ist. So sehr sie nun, als auf einen Punct gerichtet, angesehen wird, ist sie im Grunde betrachtet, dennoch als eine Kraft anzusehen, die auf eine ganze Linie wirkt, wenn sie nicht nach diesen relativen, sondern nach ihren absoluten Dimensionen betrachtet wird. Denn auch nur mit solchen Kräften läßt sie sich addiren und subtrahiren. Wohin aber eine solche bloß ideale Reduction dienen könne, wird sich aus folgenden Lehrsätzen sehen lassen.

§. 24.

Fig. IV. Es sey A B eine unbiegsame Linie, C deren Mitte. Auf die Linie drücke eine durchaus gleich vertheilte Kraft, und der Druck auf jeden Punct P werde durch die Linie Pp vorgestellt, so wird erstlich der Flächenraum des Rectangels AabB die ganze Kraft vorstellen. Sodann, sage ich, daß, wenn eine gleiche Kraft bey dem Punct C angebracht wird, welche aufwerts drücke, so werde die Linie unbewegt bleiben, oder es werde die vertheilte Kraft der auf den Punct C wirkenden das Gleichgewicht halten. Man nehme jede zween Puncten P, Q von C gleich entfernt an, so läßt sich vermög des §. 20. den beyden Kräften Pp, Qq in C eine Kraft

$= Pp$

$= Pp + Qq = 2Pp$ entgegen setzen, welche denselben das Gleichgewicht hält. Da nun dieses für jede Puncte P, Q statt hat, so wird die Linie ebenfalls im Gleichgewicht bleiben, wenn eine der ganzen Kraft A a b B gleiche Kraft in C angebracht wird. Es ist für sich klar, daß wenn man diese ganze Kraft ebenfalls durch eine Linie CD vorstellen will, diese Linie mit den Linien Aa, Pp, Qq, Bb nicht mehr einerley Einheit habe, sondern erstere von zwo Dimensionen, letztere aber von einer Dimension ist. Denn der Kraft A a b B läßt sich in C keine bloß lineare Kraft, dergleichen Aa, Pp &c. sind, entgegen setzen. Sie würden immer von ungleicher Dimension seyn.

§. 25.

Man kann auch, um sich dieses noch deutlicher zu machen, für jede Puncte P, C die Distanz $CM = CP = CQ$ machen, und dadurch jedem Punct M der Linie CD eine Kraft beylegen, welche $= Pp + Qq = 2Pp$ ist. Macht man daher durchaus $Mm = Mn = Pp$; so wird, wenn $CD = CA = CB$ gemacht worden, das Rectangel EFGH die ganze Kraft der Linie CD vorstellen, da die Kraft jedes Puncts $M = mn = Pp + Qq$ ist. Denn man sieht leicht, daß wenn die ganze Kraft AabB durch eine Linie CD vorgestellt wird, sodenn jedem Punct M eine lineare Kraft gegeben wird. Da nun Fig. V.

CD = CA = CB gemacht worden, so entspricht jeden Puncten P, Q ein Punct M, dessen Kraft = m M m denen beyden Kräften P p + Q q, sofern diese ihren gemeinsamen Druck in C äussern, (§. 20.) das Gleichgewicht hält. Daher hält auch die ganze Kraft EGHF der ganzen Kraft AabB, die ihren Druck in C vereinigt, das Gleichgewicht.

§. 26.

Fig. VI. **Man setze nun eine rectangulare Fläche ABDE, deren Mittelpunct C ist. Auf dieselbe drücke eine durchaus gleich vertheilte Kraft, so läßt sich derselben in dem Mittelpunct C eine gleichgrosse Kraft von gleicher Dimension entgegen setzen, und beyde werden einander das Gleichgewicht halten.** Man ziehe durch C jede beliebige gerade Linie FCG, so wird vermög der Natur der Rectangel FC = CG seyn. Demnach läßt sich die auf FG wirkende Kraft, als in C vereinigt, ansehen. (§. 24.) Da nun dieses für jede Linie FG statt hat, so wird auch die auf die ganze Fläche wirkende Kraft, als in C vereinigt, angesehen werden können. Demnach läßt sich derselben in C eine Kraft von gleicher Grösse und Dimension entgegen setzen, und so werden beyde im Gleichgewichte seyn. (§. 15.)

§. 27.

Es ist für sich klar, daß eben dieses bey jeden Flächen statt findet, die einen Mittelpunct, das will sagen, einen solchen Punct C haben, welcher jede durch dieselben bis an beyde Ende des Umkreises F, G gezogene Linie F C G in zween gleiche Theile theilt, dergleichen z. E. reguläre Vierecke, Sechsecke, Achtecke ꝛc. der Circul, die Ellipse ꝛc. sind.

§. 28.

Uebrigens versteht sich von selbst, daß solche Flächen, eben so wie vorhin die Linien als unbiegsam angesehen werden. Und eben so ist kaum nöthig zu erinnern, daß die Kraft als auf dieselben senkrecht drückend genommen worden, ungeachtet das bisher gesagte auch bey dem schiefen Drucke statt findet, so lange derselbe durchaus parallel, und folglich auf jede Puncte der Linien und Flächen gleich schief ist. Denn welcher Unterschied auch immer zwischen dem senkrechten und schiefen Drucke seyn mag, so kann man dessen unerachtet annehmen, daß jede gleiche und gleich schief drückende Kraft, gleichen Druck äussere, und folglich in den vorhin angeführten Fällen, das Gleichgewicht dennoch bleibe. Indessen müssen wir doch sagen, daß dieses als einen Grundsatz nur für den Fall zugegeben werden kann, wo die gleich schiefe Richtung der Kraft auf beyden Sei-

Fig. VII. ten A C, C B des Mittelpuncts C nicht parallel, sondern nach den Linien a A, c C und b B, d C einander entgegen gerichtet sind. Denn in der That ist auch nur in diesem Fall auf beyden Seiten des Puncts C alles einerley. Der einige Fall, der sich nächst diesem noch ohne fernere Umstände für sich betrachten läßt, ist derjenige, wo der Neigungswinkel cCA=o wird; das ist, wo die Kraft zwar auf jeden Punct der Linie A B, aber durchaus in der Direction der Linie selbst wirkt.

§. 29.

Hiebey ist erstlich für sich klar, daß die Kraft, vorwie nach, von zwoen Dimensionen bleibt. Sodann kann, um derselbe das Gleichgewicht zu halten, in jedem Punct der Linie eine Kraft von gleicher Grösse und Dimension, aber in entgegengesetzter Richtung angebracht werden, und das Gleichgewicht wird bleiben. Es versteht sich für sich, daß hier die Unbiegsamkeit der Linie zugleich den Begrif in sich schleußt, daß dieselbe, weder auseinander gedehnt, noch durch das Zusammendrücken verkürzt werden könne, daß sie folglich eine absolute Steifigkeit habe. Denn wird die das Gleichgewicht haltende Kraft in B angebracht, und die Linie liesse sich zusammendrücken, so würde ein Theil der Kraft darauf verwendet. Eben so, wenn die das Gleichgewicht haltende Kraft in jedem andern Punct P angebracht wird,

wird, so würde A P zusammengedrückt, P B aber ausgedehnt, und in beyden Absichten gienge das Gleichgewicht verlohren. Diese Steifigkeit aber vorausgesetzt, so kann der Punct P auch ausser dem Theil der Linie seyn, auf welchen die auf jede Puncte derselben vertheilte Kraft wirkt. Man setze z. E. diese Kraft wirke auf jede Puncte der Linie A C, so läßt sich in jedem Punct P eine Kraft von gleicher Dimension und Grösse, aber in entgegengesetzter Richtung anbringen, und diese wird der auf A C wirkenden Kraft das Gleichgewicht halten.

§. 30.

Man gedenke sich nun eine solide Sphäre, und auf jeden Punct derselben wirke eine gleich vertheilte Kraft, in durchaus paralleler Richtung; so lassen sich aus jedem Punct der der Kraft entgegen gekehrten halben Oberfläche der Sphäre, Linien gedenken, die mit der Richtung der Kraft parallel laufen. Und die Kraft, sofern sie auf jede Puncte einer solchen Linie wirkt, läßt sich als auf einen einzeln Punct derselben wirkend gedenken. Man nehme für diesen Punct denjenigen an, wo die Linie von der Fläche durchschnitten wird, welche durch den Mittelpunct der Sphäre und senkrecht durch die Richtungslinien der Kraft geht. Wo nun dieser Punct hintrift, da liegt denselben ein anderer in gleicher Entfernung vom Mittelpunct gegenüber, in welchem eine gleich grosse Kraft vereinigt ist. Da sich nun statt dieser beyden Kräfte eine doppelt so grosse im Mittelpunct anbringen läßt, und eben dieses für jedes Paar correspondirender Puncte gilt, so folgt daraus, daß die ganze Kraft, so auf jede Puncte der Kugel wirkt, sich als ein Mittelpunct derselben vereinigt gedenken lasse. Einen ähnlichen Beweis findet man für jede Körper die einen Mittelpunct haben, der nemlich jede durch denselben beyderseits bis an den Umkreiß, oder die Oberfläche gezogene Linie in zween gleiche Theile theilt. Ich begnüge mich aber dieses nur überhaupt anzuzeigen, um dadurch anzugeben, wie weit sich das Vertheilen und Vereinigen der Kräfte ausdehnen läßt, und wie man dabey der verschiedenen Dimensionen Rechnung zu tragen hat.

IV. Der Hebel.

§. 31.

Fig. VIII. Es sey nun wiederum eine unbiegsame Linie AB. Auf dieselbe drücken auf beyden Seiten und in entgegengesetzter Richtung, gleiche und durchaus gleich vertheilte Kräfte, die wir, weil sie auf jeden Punct $= A\alpha = Aa$ sind, durch den Flächenraum der Rectangel $AabB$, $A\alpha\mathfrak{b}B$ vorstellen können: so ist erstlich für sich klar, daß sie einander das Gleichgewicht

gewicht halten, und die Linie A B unbewegt bleiben werde. Da sich die auf jeden Punct wirkende Kraft als für sich wirkend gedenken läßt, so können wir z. E. die gesamte herunter drückende Kraft A a b B durch Ziehung einer jeden beliebigen Linie E e als in zwo Kräfte A a e E und E e b B getheilt, oder aus zwo solchen Kräften bestehend ansehen. Man nehme nun zwischen A E den Mittelpunct H, und zwischen E B den Mittelpunct F, so läßt sich nach Anleitung des vorhergehenden Abschnittes gedenken, daß anstatt dieser beyden auf A E, E B vertheilten Kräfte, zwo denselben der Grösse und Dimension nach gleiche Kräfte auf die Puncte H, F wirken, und das Gleichgewicht eben so wie vorhin erhalten. Auf eben die Art wird sich die ganze aufwerts drückende Kraft $A\alpha\,\text{б}B$ als in den Mittelpunct C vereinigt gedenken lassen.

§. 32.

Nun ist die Frage, die auf die drey ungleich entfernte Puncte E, C, F drückende und ebenfalls ungleiche Kräfte mit den Entfernungen E C, C F zu vergleichen. Dieses wird desto leichter geschehen können, weil die drey Rectangel A a e E, E e b B, $A\alpha\,\text{б}B$, deren Raum das Maaß dieser drey Kräfte ist, gleiche Höhe haben, und daher schlechthin in Verhältniß ihrer Länge sind. Nun ist

$$HF = HE + EF = \tfrac{1}{2}AE + \tfrac{1}{2}EB = \tfrac{1}{2}AB = AC$$

Demnach da HF und AC den Theil HC gemeinsam haben, so bleibt, wenn man diesen von beyden wegnimmt,

$$AH = CF$$

Eben so wenn man von HF und CB den beyden gemeinsamen Theil CF wegnimmt, bleibt

$$HC = FB.$$

Es sind aber HC und CF die Entfernungen der Puncte H, F von dem Mittelpunct C; hingegen sind FB und AH die Hälften der auf F und H concentrirten Kräften, die wir Kürze halber F und H nennen wollen. Da demnach

$$\tfrac{1}{2}F = HC$$
$$\tfrac{1}{2}H = CF$$

ist; so ist

$$HC : CF = \tfrac{1}{2}F : \tfrac{1}{2}H = F : H$$

das will sagen: **die auf die Puncte H und F drückende Kräfte AaeE, EebB sind in umgekehrter Verhältniß der Entfernung dieser Puncte H, F vom Mittelpunct C.**

§. 33.

Hinwiederum, da die aufwerts drückende Kraft A α ε B durch die ganze Länge BA vorgestellt wird, und die Distanz beyder Puncte $FH = AC = CB = \tfrac{1}{2} BA$ ist; so wird, wenn wir die in C vereinigte Kraft A α ε B = C nennen,

$$\tfrac{1}{2}C = FH$$

seyn. **Demnach werden jedesmal drey**

Kräfte

Kräfte J H, G F, D C, die auf eine unbiegsame Linie A B einander entgegen drücken, im Gleichgewichte seyn, wenn
$$C:HF = H:CF = F:CH$$
ist, das will sagen: wenn jede Kraft zu der Distanz der beyden andern Kräfte einerley Verhältniß hat.

§. 34.

Da nun, wo auf einer geraden Linie drey Puncte angenommen werden, die beyden äusserten nicht nur mehr von einander entfernt sind, als jeder derselben von dem Mittlern: sondern die gröste Entfernung die Summe der beyden kleinern ist; so ist klar, daß ebenfalls nicht nur die mittlere Kraft C jedesmal die gröste, sondern genau die Summe der beyden kleinern Kräfte H, F ist, die derselben entgegen wirken; und daß von diesen beyden kleinern Kräften jede in Verhältniß ihrer Grösse näher bey der grösten ist. Alles dieses folgt für sich aus der erst angeführten Proportionalität der Kräfte und ihrer Entfernungen. Denn da jede Kraft in Verhältniß der Distanz der beyden andern Kräfte ist; so müssen die beyden kleinern Kräfte am meisten voneinander entfernt, und daher die äussersten seyn, weil ihre Distanz in Verhältniß der grösten Kraft, und daher die gröste seyn solle. Demnach fällt die gröste Kraft immer zwischen die beyden kleinern,

nern, und wirket denselben entgegen, weil beyde erfordert werden, um ihr das Gleichgewicht zu halten. Eben so muß die kleinste Kraft am meisten entfernt seyn. Denn da sie in Verhältniß der Distanz der beyden andern Kräfte ist, so ist diese Distanz am kleinsten, demnach sind die beyden grössere Kräfte einander am nächsten. Endlich da die beyden kleinern Kräfte in umgekehrter Verhältniß ihrer Distanz von der grösten sind; so ist die Summe von beyden, in Verhältniß der Summe dieser beyden Distanzen, demnach in Verhältniß der Distanz der beyden kleinern oder äussersten Kräfte selbst. In eben dieser Verhältniß ist aber auch die gröste Kraft. Demnach ist diese der Summe der beyden kleinern gleich.

§. 35.

Wenn demnach zwo Kräfte auf zween Puncte einer unbiegsamen Linie drücken, und es solle ein Gleichgewicht erhalten werden, so muß man irgend noch eine dritte Kraft anbringen. Es ist demnach die Frage, sowol die Grösse dieser Kraft als den Punct, wo sie angebracht werden muß, zu bestimmen. Die Grösse der gesuchten Kraft bestimmt sich leicht. Denn sie ist die Summe der beyden fürgegebenen Kräfte, wenn diese auf gleicher Seite angebracht sind. Widrigenfalls ist sie die Differenz derselben. Im ersten Fall wirkt sie zwischen beyden und denselben entgegen. Im andern Fall fällt sie auf die Seite der kleineren Kraft, um mit derselben der grösseren, welche immer in der Mitte ist, entgegen zu wirken. Da die gröste Kraft allemal die Distanz der beyden kleinern so theilt, daß jede derselben der grösten desto näher ist, je grösser sie ist; so wird dadurch auch die Distanz der gesuchten Kraft leicht gefunden. Denn im ersten Fall, wo der Punct C gesucht wird, hat man immer

$$C:HF = H:CF = F:HC.$$

Und so wird CF, oder auch HC gefunden. Im andern Fall, wo der Ort einer der äussersten Kräfte z. E. H gesucht wird, hat man

$$H:CF = F:CH$$

und so wird CH gefunden. Und eben so findet man CF durch

$$F:HC = H:CF$$

das will nun sagen: **Wie sich die Kraft deren Distanz von einer der gegebenen Kräfte gesucht wird, zu der gegebenen Distanz dieser Kräfte verhält; so verhält sich die andere der gegebenen Kräfte zu der gesuchten Distanz.** Diese wird sodann immer entweder von der Mitte auswerts, oder von einem der äussern Puncte gegen die Mitte getragen, weil sie allemal entweder CF, oder CH ist.

§. 36.

Da es bey Bestimmung der Lage eines Puncts willkührlich ist, wo man zu zählen anfängt,

fängt, so kann man auch jeden beliebigen Punct z. E. B annehmen, um die Lage eines der drey Puncte F, C, H zu bestimmen. Denn wenn man deren Entfernung von B, f, c, h nennt; so wird man

$$C:h-f=H:c-f=F:h-c$$

haben. Und dadurch kann nach Belieben f, oder c, oder h gefunden werden.

§. 37.

Es giebt aber diese Analogie noch einen andern Umstand an, der für sich betrachtet zu werden verdient. Denn aus

$$C:(h-f)=H:(c-f)$$

erhält man

$$Cc-Cf=Hh-Hf$$

und hieraus

$$Cc=Hh+f(C-H)$$

Nun ist

$$C-H=F$$

demnach, wenn dieser Werth gesetzt wird

$$Cc=Hh+Ff.$$

Hier hat man nun jede Kraft mit ihrer Entfernung von dem willkührlich angenommenen Punct B multiplicirt, und die Producte dergestallt verglichen, daß die beyden kleinern dem grösten gleich sind. Dieser Umstand ist desto beträchtlicher, weil er in Absicht auf jeden Punct B statt hat, so oft die drey Kräfte C, H, F im Gleichgewicht sind.

§. 38.

§. 38.

Ferner wird vermittelst der Gleichung

$$Cc = Hh + Ff$$

die Distanz der grösten Kraft immer gefunden, wenn man

$$c = \frac{Hh + Ff}{C}$$

und daher

$$c = \frac{Hh + Ff}{H + F}$$

macht; das will sagen: **Wenn man jeden der beyden kleinern Kräfte mit ihrer Entfernung von dem willkührlich angenommenen Punct B multiplicirt, und die Summe der Producte durch die Summe der beyden kleinern Kräfte dividirt; so wird, was heraus kömmt, die Entfernung der grösten Kraft von eben dem Punct B seyn.**

§. 39.

Man sieht leicht, daß wenn der Punct B zwischen den beyden kleinern Kräften angenommen wird, sodann die eine der Entfernungen h, f negativ werde. Und eben so sieht man, daß eine der Kräfte F, H negativ wird, sobald sie nicht auf eben der Seite sind, sondern einander entgegen wirken. Denn so wird man z. E. wenn mit Beybehaltung des Puncts B die Distanz h zu suchen ist,

h =

$$R\gamma.(Aa+Bb+Cc)=R\varepsilon(Aa+Bb)+RC.Cc$$

$$R\delta.(Aa+Bb+Cc+Dd)=R\gamma=(Aa+Bb+Cc)+RD.Dd$$

&c.

ist; so sieht man ohne Mühe, daß jede dieser Gleichungen in der nächstfolgenden kann gesetzt werden; und daß man daher der Ordnung nach

$$R\varepsilon.(Aa+Bb)=Aa.AR+Bb.BR$$

$$R\gamma.(Aa+Bb+Cc)=Aa.AR+Bb.BR+Cc.CR$$

$$R\delta.(Aa+Bb+Cc+Dd)=Aa.AR+Bb.BR+Cc.CR+Dd.DR$$

&c.

erhält. Das will nun sagen: Um den Punct zu finden, wo die gesamten Kräfte ihre Wirkung vereinigen, und wo folglich denselben eine ihrer Summe gleiche Kraft entgegen gesetzt werden muß, um das Gleichgewicht zu erhalten, muß jede Kraft mit ihrer Entfernung von dem nach belieben angenommenen Punct R multiplicirt, und die Summe ihrer Producte durch die Summe der Kräfte dividiret werden. Was heraus kömmt, ist die Entfernung des gesuchten Puncts von eben dem Punct R.

§. 43.

Man kann hier ebenfalls die Anmerkung machen, daß wenn die fürgegebenen Kräfte nicht sämtlich auf gleicher Seite sind, und daher an sich schon einander entgegen wirken, die entgegen wirkenden negativ müssen genommen werden: Und daß eben dieses von den Entfernungen gelte, wenn der Punct R zwischen den Kräften angenommen wird. Dabey ist es nun möglich, daß wenn die Kräfte einander entgegen wirken, ihre Summe = o werde. In diesen Fällen wird erstlich die gesuchte Distanz unendlich, so oft die Summe der Producte nicht ebenfalls = o ist. Sodann da die Kraft, so man um das Gleichgewicht zu erhalten, anbringen wolte, der Summe der Kräfte gleich ist, so wird dieselbe in diesen Fällen = o. Demnach müßte man in einer unendlichen Entfernung von R eine Kraft = o anbringen, um das Gleichgewicht zu erhalten. Was dieses für einen Verstand habe, müssen wir auf eine andere Art erörtern. Die Summe der Kräfte ist nemlich = o, wenn die Summe der aufwerts drückenden Kräfte der Summe der unterwerts drückenden gleich ist. Nun ist aus dem Vorhergehenden klar, daß sowol die erstern als die letztern ihre Wirkung in irgend einem Punct vereinigen, und daß man statt derselben ihre Summe in diesem Punct anbringen kann. Sind nun die Kräfte so vertheilt, daß dieses in einem und eben dem Punct geschieht, so ist für sich klar, daß ein Gleichgewicht statt habe, (§. 13.) weil beyde Summen gleich sind. Geschieht es aber nicht in einem und eben dem Punct, so ist schlechthin kein Gleichgewicht möglich. Denn wo und auf welcher Seite man noch eine Kraft anbringen wolte, so würde die Summe von allen nicht mehr $= 0$ seyn, weil die Summe der gegebenen Kräfte an sich schon $= 0$ ist. Dafern aber eine Kraft $= 0$ als eine Kraft angesehen wird, die kleiner als jede gedenkbare Kraft ist, so muß sie in einer Entfernung angebracht werden, die grösser als jede gedenkbare Entfernung ist. Dieses giebt die Regel für den hier betrachteten Fall an, wenn sie die Kraft $= 0$, die Entfernung unendlich macht. Denn damit muß die Kraft $= 0$ als unendlich klein angesehen werden. Da aber eine solche Kraft nicht gegeben werden kann, so ist dieses eben so viel, als wenn man sagt, daß kein Gleichgewicht erhalten werden könne, dafern man nicht mehr als nur eine Kraft, und zwar in entgegengesetzter Richtung, anbringen will.

§. 44.

Wird aber in einem vorkommenden Fall nicht nur die Summe der Kräfte, sondern auch die Summe der Producte $= 0$, so wird die gesuchte Entfernung $= \frac{0}{0}$, das will sagen, jede beliebige. Und da die anzubringende Kraft ebenfalls $= 0$ ist, so will dieses sagen, es werde ohne irgend eine Kraft anzubringen unter den fürgegebenen Kräften an sich schon ein Gleichgewicht seyn. In diesem Fall läßt sich z. E. für vier Kräfte die Formel

$$R\delta = \frac{Aa.AR + Bb.BR + Cc.CR + Dd.DR}{Aa + Bb + Cc + Dd}$$

weil sowol der Nenner als der Zähler $= 0$ ist, allemale in zwo andere vertheilen, wo die negativen Werthe in der einen, die positiven in der andern sind. Man setze z. E. B und C negativ, so erhalten wir für die herunterdrückende Kräfte der Distanz

$$\frac{Aa.AR + Dd.DR}{Aa + Dd}$$

für die heraufdrückende aber die Distanz

$$\frac{Bb.BR + Cc.CR}{Bb + Cc}$$

und dadurch finden sich die Puncte, wo statt der Kräfte ihre Summen $Aa + Dd$ und $Bb + Cc$ angebracht werden können. Nun sind in diesen Brüchen die Zähler und so auch die Nenner, demnach die Distanzen selbst einander gleich. Daher treffen die beyden Puncte, wo die Summen der Kräfte angebracht werden müssen, in eins zusammen. Da nun diese Summen einander gleich sind, und einander entgegen wirken, so hat allerdings ein Gleichgewicht statt. Ist aber endlich nur die

Summe der Producte (§. 42.) $= 0$, so wird auch schlechthin nur die gesuchte Distanz $= 0$. Und dieses zeigt an, daß R selbst der Punct ist, wo die das Gleichgewicht haltende Kraft muß angebracht werden.

§. 45.

Man setze nun, eine Kraft sey auch eine
Fig. X. ganze Linie A B, aber ungleich vertheilt, so, daß z. E. wenn man den auf jeden Punct E wirkenden linearen Druck durch P M vorstellt, die Grösse dieses Druckes in jedem Punct P durch die Ordinate P M der krummen Linie D M E vorgestellt werde. Auf diese Art wird nun die ganze Kraft durch den Flächenraum A D E B, und der auf jede Abscisse A P wirkende Theil derselben durch den Raum A D M P vorgestellt seyn. Sollte nun der Punct der Linie A P gefunden werden, wo diese Kraft ihre Wirkung vereinigt, und wo folglich eine andere von gleicher Grösse und Dimension angebracht werden kann, die derselben entgegen wirke und das Gleichgewicht halte; so kann man eben so, wie vorhin, einen beliebigen Punct R annehmen, und indem man jeden linearen Druck M P mit der Entfernung P R multiplicirt, das Product durch eine Ordinate P N vorstellen, und so wird der Raum A F G B durch den Raum A D E B getheilt, die verlangte Entfernung des Puncts geben, wo die der Kraft

A D E B

A D E B gleiche Kraft, zur Erhaltung des Gleichgewichtes, angebracht werden muß.

§. 46.

Wenn man einen Punct der unbiegsamen Linie unbeweglich setzt, so wird dadurch die Möglichkeit, wie bey nicht vorhandenen Gleichgewichte die Linie bewegt wird, auf eine einige gebracht. Denn so kann sie sich schlechthin nur um diesen Punct drehen. Eine unbiegsame Linie, die sich um einen unbeweglichen Punct drehen läßt, nennt man, im engsten Verstande, einen Hebel, und wenn es eine mathematische Linie ist, einen mathematischen Hebel. Denn wird er auf der einen Seite des unbeweglichen Puncts herunter gedrückt, so dreht er sich auf der andern Seite aufwerts, so oft eine Ueberwucht da, oder das Gleichgewicht nicht da ist. Ich habe bisher sowol von dem unbeweglichen Punct, als auch von dem dabey möglichen Herumdrehen, ganz abstrahirt; theils weil die Bedingungen des Gleichgewichtes nicht solten aus der Art hergeleitet werden, wie der Hebel bey unterbleibenden Gleichgewichte seine Lage und Stelle ändert, theils auch weil ich statt des unbeweglichen Puncts viel allgemeiner eine Kraft anbrachte, und eben daher die Bedingungen des Gleichgewichts rein und ohne mit eingemengte fremde Umstände erhielte. An diesem letztern Endzwecke würde der unbewegliche Punct eine gedoppelte Hinderniß gewesen seyn. Denn einmal da derselbe unbeweglich ist, so hält er den Druck jeder möglichen Kraft aus; und weil es ein Punct ist, so läßt sich dabey auch nicht sehen, nach welcher Direction derselbe den Druck der unbiegsamen Linie aufhält. Dieses muß aus andern Gründen bestimmt werden, das will sagen, man thut besser, wenn man statt des Puncts eine Kraft anbringt. Sodann schränkt ein solcher Punct durch seine Unbeweglichkeit, die Möglichkeit von der Bewegung der Linie auf eine einige ein. Wenn man daher auch erweist, daß sich die Linie nicht drehen werde, so ist dadurch noch nicht erwiesen, daß sie nicht auf eine derjenige Arten werde bewegt werden, die der unbewegliche Punct, blos weil er unbeweglich ist, verhindert oder unmöglich macht. Das will nun wiederum sagen, daß man besser thut, wenn die Linie für sich schlechthin frey ist, und jede Möglichkeiten, bewegt zu werden, behält. Werden sodann die Kräfte unter den Bedingungen des Gleichgewichtes daran angebracht, so fordert die wesentlichste dieser Bedingungen, daß sie nach wie vor eben so unbewegt bleibe, als wenn sie durchaus und schlechthin unbeweglich wäre. Und so ist jeder Punct daran so gut, als wäre er unbeweglich. So unbewegt muß auch jeder bleiben, welche Aenderung man auch immer, mit Beybehaltung des Gleichgewichtes, mit den Kräften vornimmt. So z. E.

wenn

wenn man setzt, das anfangs auf die Linie A B Fig. VIII.
nur die beyderseits gleiche, gleichvertheilete und durchaus gleich entgegengesetzte Kräfte E e b B, E f ϐ B drücken, so bleibt sie nicht nur dadurch eben so unbewegt, als wenn sie für sich ganz allein in Ruhe wäre; sondern sie wird eben so verbleiben, wenn zu diesen Kräften Neue hinzu kommen, die unter eben den Bedingungen auf den Theil A E drücken. Ob nun hiebey, so lange nemlich die Linie unbewegt bleibt, ein Punct derselben, z. E. C, unbeweglich sey oder nicht, das ist in sofern gleichviel. In jeden andern Absichten aber ist es nicht mehr gleichviel, weil, sobald man einen Punct C unbeweglich setzt, sogleich jede Kräfte anfangen eine Beziehung auf denselben zu haben. Denn ein solcher Punct muß immer statt der den übrigen Kräften das Gleichgewicht haltenden Kraft genommen werden, so sehr er auch zuweilen schlechthin gar keinen Druck aushält. So wäre auch ein solcher Punct in dem §. 31. immer ein Hindernis oder etwas ganz Ueberflüßiges gewesen, da wir die auf AE, EB, AB vertheilte Kräfte A a e E, E e b B, A α ϐ B auf ihre Mittelpuncte H, F, C richteten. Denn man nehme C als den unbeweglichen Punct an, so würde die nunmehr auf C gerichtete Kraft A α ϐ B, just auf den Punct der Linie gerichtet seyn, der wegen seiner Unbeweglichkeit diese Kraft, so wie jede mögliche Kraft aufhält, und daher ihre Wirkung auf die

Linie = o macht. Und so würde man nicht sehen, ob das Gleichgewicht wegen der Kräfte, oder wegen des unbewegten Punets C bleibt. Ist aber die Linie ganz frey, so fällt diese Verwirrung weg, und da ist es genug, daß jede lineare Kraft für sich wirkt, um die Puncte H, F, C, als die Mittelpuncte anzusehen, in welchen die Kräfte AaeE, EebB, AαεB ihre Wirkung vereinigen; diese Kräfte mögen jede allein, oder beysammen angebracht seyn.

§. 47.

Es ist aber noch ein anderer Grund, warum man bey dem Hebel einen unbeweglichen Punct angenommen. Denn ausser dem daß man in der practischen Mechanic immer den eigentlich sogenannten Hebel auf eine unbewegliche Stütze legt, oder ihn irgend ansperrt, und dabey eigentlich auch nur die Verhältniß zwischen der sogenannten Kraft und Last bestimmen will; so hält man sich selbst in der Theorie dabey auf, die unbewegte Linie, wenn die angebrachten Kräfte im Gleichgewichte sind, um einen selbst unendlich kleinen Winkel zu drehen, um den Weg, den die durch die Kräfte gedrückte Puncten durchlaufen, mit den Kräften zu vergleichen. Und da findet sichs, daß, wo nur zwo Kräfte sind, jede in umgekehrter Verhältniß des Weges ist. Denn man setze den unbeweglichen Punct in C, die beyden Kräfte in H, F. Da die Linie gerade bleibt, so ist der unend-

unendlich kleine Bogen den H durchläuft, zu demjenigen den F durchläuft, wie HC zu CF. Nun sind die Kräfte umgekehrt wie HC zu CF: demnach sind sie auch in umgekehrter Verhältniß durchlaufenen Bögen. Wenn die Kraft in H bleibt, so wird die Kraft F desto kleiner, je grösser CF wird. In eben dieser Verhältniß hat sie bey dem Herumdrehen einen desto grösseren Weg zu durchlaufen, und desto geschwinder läuft sie auch. Daher, wenn F als die zu bewegende Last angesehen wird, so gewinnt man, bey einerley Kraft, an der Zeit und dem Wege, was man an der Last vermindert; und hinwiederum wird an der Zeit und dem Wege verlohren, was man an der Last vermehrt. Da die Rollen, Räderwerke, Flaschenzüge &c. ebenfalls auf die Theorie des Hebels reducirt werden, so dehnt sich dieser Satz sehr weit aus. Cartesius sahe denselben für so einleuchtend an, daß er ihn zum ersten Grundsatze seiner Statik machte. Denen aber, die an Kraft, Zeit und Weg zugleich gewinnen, und dadurch das perpetuum mobile erzwingen wollen, ist dieser Satz lange nicht so sehr einleuchtend; und vermuthlicher entweder gar nicht, oder wenigstens nicht in seinem ganzen Umfange und Nachdrucke, bekannt. Es sind aber noch ganz andere Gründe, warum ich diesen Satz, und gewissermassen in Form einer kleinen Ausschweifung, hier näher betrachten werde. §. 48.

§. 48.

Ich habe in dem Vortrage desselben gesagt: 1°. Daß die Kräfte H, F im Gleichgewichte seyn. Und in sofern ist die Linie A B in unbewegter Ruhe. 2°. Daß sodann die Linie gedreht werde, und zwar 3°. daß dieses nur um einen unendlich kleinen Winkel geschehen. Nun wird dieser Winkel deswegen unendlich klein genommen, damit die Direction der Kräfte so gut als unverändert bleibe. Diese ändert sich zwar, um es wie im Vorbeygehen zu sagen, genau so viel als der Winkel, aber die Wirkung, welche sich nach dem Sinu incidentiae richtet, ändert sich unendlich mal weniger, oder so zu reden, nur um einen unendlich kleinen Theil des unendlich kleinen Winkels. Daher kann der Winkel unter jeden unendlich kleinen noch ein merklich grösser seyn, ohne daß die Wirkung verändert werde. Jedoch, wenn man alles ganz strenge nehmen will, so darf man nur das ganze System, ich will sagen, die Kräfte zugleich mit der Linie um den Punct C drehen, so viel man will. Die durchlaufene Bögen werden genau in umgekehrter Verhältniß des Weges bleiben. So hat es bey Räderwerkern, Rollen und Flaschenzügen statt, wo man Weg, Zeit und Kraft vergleicht, ohne eben beyde erstern unendlich klein zu setzen.

§. 49.

Dieses ist nun aber eigentlich nicht das, woran man sich aufhält, und so werde ich auch nicht dabey verweilen. Die Frage ist vielmehr, ob man bey dem Gleichgewichte, wo alles in Ruhe ist, den Begrif einer Bewegung zum Grunde legen können; woher das Umdrehen komme, und was die dabey sich einfindende Zeit, Geschwindigkeit und durchlaufener Raum mit den vorhin im Gleichgewichte gewesenen Kräften für eine Verbindung haben? Dieses muß mit einem gewissen Grade von Deutlichkeit und Bewußtseyn untersucht werden. Denn es soll daraus, und selbst auch für die Theorie der Bewegung, folgen, daß die Geschwindigkeit der Last, und daher auch der von derselben in einer bestimmten gleichen Zeit durchlaufene Weg oder Raum allemal in Verhältniß der Kraft, und umgekehrt, in Verhältniß der Last selbst sey. Es ist nur zu sehen, ob, oder wie dieses daraus folge?

§. 50.

Einmal folgt nun, wenn wir noch von erst bemeldten Fragen abstrahiren, so viel ganz richtig: Erstlich, wenn die Kraft in H verstärkt wird, so muß man, um das Gleichgewicht beyzubehalten, die Last F in eben der Verhältniß von C weiter wegrücken. Da sie nun bey dem Herumdrehen in eben in eben der Verhältniß geschwinder bewegt wird, und daher auch einen eben so viel grössern Weg durchläuft; so ist unstreitig, daß sich Weg und Geschwindigkeit der Last in gleicher Verhältniß mit der Kraft vergrössern. Und dieses war das erstere.

§. 51.

Das andere hat eben so wenig Anstand. Die Kraft in H bleibe unverändert; man vergrössere aber die Last, so muß diese, um das Gleichgewicht zu erhalten, in eben der Verhältniß näher gegen C gerückt werden. Daher bewegt sie sich bey dem Herumdrehen in eben der Verhältniß langsamer, und in eben der Verhältniß durchläuft sie in gleicher Zeit einen kleinern Weg. Also sind Weg und Geschwindigkeit in umgekehrter Verhältniß der Last. Und dieses war das andere.

§. 52.

Alles dieses hat demnach keinen Anstand. Allein die Frage, woher das Umdrehen komme, und welche Verbindung es mit den einander das Gleichgewicht haltenden Kräften habe, bleibt hiebey noch ganz unerörtert. Bis dieses aber nicht erörtert ist, kann man immer sagen, daß, unerachtet allerdings die Geschwindigkeit der Last sich gerade wie die Kraft, und umgekehrt, wie die Last selbst verhalte, dieselbe dennoch

noch weder von der Kraft noch von der Last herrühre, weil diese sich schlechthin nur im Gleichgewicht halten, und daher sich selbst überlassen, in Ruhe bleiben, und folglich weder von einer wirklichen Geschwindigkeit, noch auch nicht einmal von einer Sollicitation, daraus eine erwachsen könnte, die Rede vorkomme.

§. 53.

Da dieses an sich ganz offenbar ist, so sieht man auch wohl, daß um ein Herumdrehen zu verursachen, eine Ueberwucht da seyn müsse, und so verstärkt man die Kraft um etwas, oder auch nur um einen unendlich kleinen Theil. Dadurch dreht sich nun die Linie, aber die Geschwindigkeiten bleiben in Verhältniß der nicht verstärkten Kraft, ungeachtet sie nicht von derselben, sondern schlechthin nur von dem hinzugekommenen Theile herrühren. Um aber hiebey das relative mit dem absoluten nicht zu vermengen, so müssen wir die Anmerkung nicht beyseite setzen, daß in vorhin angeführtem Satze von der absoluten Geschwindigkeit gar nicht die Rede sey; sondern daß, wenn diese nach belieben angenommen worden, schlechthin nur erwiesen wird, daß die Last sich geschwinder oder langsamer bewege, je nachdem sie von C mehr oder weniger entfernt ist. Denn man weiß, daß wenn eine Linie sich um einen Punct dreht, allemal alle Geschwindigkeit dabey vorkommen. Und daher wächst die

Geschwin

Geschwindigkeit der Last in gleicher Verhältniß mit der Entfernung, wie groß oder klein die absolute oder anguläre Geschwindigkeit auch immer seyn mag.

§. 54.

Indessen müssen wir doch sagen, daß, unerachtet die absolute Geschwindigkeit allein von der Ueberwucht, als ihrer wirkenden Ursache, herrührt, sie sich dennoch nach der Kraft und Last und deren Entfernung von C richte. Man setze z. E. H und F seyn Gewichte, welche folglich durch die Kraft der Schwere gedrückt und im Gleichgewichte erhalten werden; um dieses zu heben, werde die Kraft H um einen, wenn man so will, unendlich kleinen Theil x vermehrt; so hat man in aller Form ein pendulum compositum, welches unendlich langsame Schwürigkeit macht. Rechnet man nach, so findet sichs, daß die wiewol unendlich kleine Geschwindigkeit sich, umgekehrt, wie die Quadratwurzel von $(H.HC^2 + F.FC^2)$ und gerade wie die Quadratwurzel von $HC.x$ verhalte, und sich demnach sowol nach den Gewichten als auch nach ihrer Entfernung von C, und besonders auch nach der Quadratwurzel der Ueberwucht x richte. Ich entlehne diese, sonst hieher nicht gehörende Rechnung, aus der wenigstens auf Erfahrung gegründeten Theorie der Pendul, weil man sich öfters auf den mit Gewichten und einer kleinen Ueberwucht beschwer-

beschwerten Hebel berufen hat, um die Kraft nach den einfachen geraden Verhältniß der Geschwindigkeit zu schätzen, welche durch dieselbe verursacht wird. Denn hier ist die Kraft x, die Geschwindigkeit $\sqrt{x}$.

§. 55.

Es giebt andere Fälle, wo, wenn auch Kraft und Last im Gleichgewichte sind, dennoch eine beträchtliche Ueberwucht erfordert wird, um die Maschine auch nur mit einer langsamen und gemeiniglich gleichförmigen Geschwindigkeit in Bewegung zu setzen und zu erhalten. Es sind nehmlich alle die, wo eine merkliche Friction oder auch der Widerstand einer flüßigen Materie zu überwältigen ist. Allein diese Hindernisse sind in Absicht auf die einander das Gleichgewicht haltende Kraft und Last, ganz fremde, ungeachtet sie sich zugleich mit beyden vergrößern, und daher auch eine stärckere Ueberwucht fordern, wenn Kraft und Last vermehrt werden. Da man fast immer die Wirkung des Anreibens und des Widerstandes der flüßigen Materie für geringe geachtet, so hat man in der Static und Berechnung der Maschinen der Ueberwucht wenig Rechnung getragen. In der That ist auch die Ueberwucht allein nicht zureichend, die Last zu bewegen, die Kraft selbst, welche nemlich die Last im Gleichgewichte zu halten vermag, muß unstreitig das ihrige auch dazu beytragen. Allein die Geschwindigkeit der Last, verhältnißweise genommen, richtet sich nur nach der Kraft. Und so kann man auch nicht sagen, daß die absolute Geschwindigkeit der Last, entweder der Ueberwucht, oder der Summe der Ueberwucht und der Kraft nothwendig und in allen Fällen proportional sey. Es läßt sich aber einigermassen begreiflich machen, worin das Blendwerk besteht, wenn man an Zeit und Kraft zugleich gewinnen will. Denn es scheint, als wenn dabey die Kraft und Zeit jede besonders gerechnet, und beyde in eine Summe gebracht werde. Es sey die Kraft k, die Zeit t, die Last oder die Wirkung w, so ist

$$w = kt$$

Da aber dieses keine Summe, sondern ein Product ist, so will man

$$w = k + t$$

zu einem maximo machen. Wenigstens scheint man es sich dunkel vorzustellen. Dagegen ist aber verschiedenes zu erinnern: denn einmal sind Zeit und Kraft heterogene Grössen, und so lassen sie sich nicht so schlechthin addiren. Man müßte vorerst Mittel finden, sie auf einerley Maaßstab zu bringen. Setzt man aber vermög der ersten Gleichung

$$t = w : k$$

so ist die zweyte

$$w = k + w : k$$

oder

oder

$$w = \frac{kk}{k-1} = k + 1 + \frac{1}{k-1}$$

Diese Gleichung liesse sich nun differentiiren, und das Differential

$$dw = dk + \frac{dk}{(k-1)^2} = 0$$

setzen, und so würde

$$k = 2$$

seyn. Wenn man nun aber auch verstünde, was dieses sagen will, so würde dennoch bey diesem Werthe von k, die Wirkung w nicht ein maximum, sondern ein minimum seyn. Dieses ist nun noch das schlimmste in der ganzen Sache: denn man hatte eigentlich ein maximum in der Wirkung verlangt. Man sieht also, daß sich mit der Gleichung

$$w = k + t$$

wenn sie auch einen Beystand hätte, nichts ausrichten läßt. Man setze auch, es sey k die Anzahl der Arbeiter und t die Tage, w aber stelle die Bezahlung, oder die Tagelöhne vor, so wird wiederum die Formel

$$w = kt$$

ganz richtig seyn. Und die andere Formel

$$w = k + t$$

könnte nun hier ein minimum geben. Allein sie läßt, als wenn die Arbeiter besonders, und die Tage besonders bezahlt würden. So geht es aber in der Welt nicht zu.

§. 56.

Ich werde nun noch diesen Abschnitt mit einer kleinen Anmerkung über die in den deutschen Anweisungen zur Hebekunst gebräuchliche Benennungen von zwoen Arten des Hebels machen. Wenn nemlich der unbewegliche Punct in C zwischen der Kraft H und der Last F ist; so nennt man dieses einen **Hebel der ersten Art**. Ist aber der unbewegliche Punct am Ende, so, daß Kraft und Last auf einer und ebender Seite desselben sind, so wird es **ein Hebel der zweyten oder andern Art** genennt, wie z. E. wenn der unbewegliche Punct in F, die Last in C, die Kraft in H ist. Ich kann nicht sagen, wer diese so gar nichts bedeutende oder vorstellende Benennungen im Deutschen eingeführt hat. Die Griechen verfuhren mit ihrem homodromus und heterodromus viel vernünftiger. Denn diese Wörter geben an sich schon an, ob Kraft und Last auf einer oder auf beyden Seiten des Unbeweglichen oder Ruhepuncts ist. Es ist unstreitig, daß es im Deutschen die Wörter einseitig und doppelseitig, oder auch einärmigt und doppelärmigt eben so gut angeben würden, und daß es nur darauf ankömmt, sie in den Anfangsgründen zur Static statt der vorangeführten und den lernenden unbedeutenden und anstößigen Benennungen zu gebrauchen.

V. Der

V. Der Druck der Kräfte auf ebene Flächen.

§. 57.

Es seyn in drey Puncten einer ebenen Fläche A, B, C drey Kräfte a, b, c angebracht, welche senkrecht auf die Fläche drücken, und es solle denselben eine Kraft entgegen wirken, und das Gleichgewicht halten; so ist zu bestimmen, wo diese vierte Kraft angebracht werden, und wie groß sie seyn müsse? Man nehme erstlich von diesen Kräften zwo, z. E. a, b; so ist klar, daß sich auf der Linie AB ein Punct Q finden läßt, wo statt derselben ihre Summe angebracht werden kann (§. 40.) und man findet (§. 33.) Fig. IX.

$$(a+b):AB=a:BQ=b:AQ$$

Setzt man demnach die Kräfte $a+b$ in Q, so wird sich auf der Linie QC ebenfalls ein Punct P finden, wo die in Q und C angebrachten Kräfte $a+b+c$ ihre Wirkung vereinigen. (§. 40.) Und man findet ebenfalls (§. 33.)

$$(a+b+c):QC=(a+b):PC:c:QP$$

Da demnach die Fläche gleich gedrückt wird, wenn die drey Kräfte $a+b+c$ in P angebracht werden; so wird das Gleichgewicht erhalten, wenn man denselben in P eine ihrer Summe $a+b+c$ gleiche Kraft p entgegen setzt; (§. 13.) und so ist diese Kraft und der Punct, wo sie angebracht werden muß, bestimmt.

stimmt. Diese Aufgabe läßt sich folgendermassen umkehren:

§. 58.

Wenn auf einen Punct einer Fläche P eine Kraft p senkrecht drückt, und es sollen derselben in drey beliebigen Puncten A, B, C drey Kräfte entgegen wirken, und das Gleichgewicht halten; so ist zu bestimmen, wie groß jede der drey Kräfte seyn müsse? Man nenne die drey Kräfte a, b, c; so ist aus dem vorhergehenden §. klar, daß erstlich

$$a+b+c=p$$

seyn müsse. Sodann ziehe man aus einem der drey Puncte A, B, C, z. E. aus C eine gerade Linie durch P in Q, und so muß (§. 33.)

$$(a+b+c):QC=c:QP$$

seyn. Dadurch findet man, weil $a+b+c=p$ ist,

$$c=p.QP:QC$$

ferner muß (§. 33.)

$$(a+b):AB=a:BQ=b:AQ$$

seyn. Da nun $a+b=p-c$ ist, so findet man hiedurch

$$a=(p-c).BQ:AB.$$

$$b=(p-c).AQ:AB.$$

oder wenn man den Werth von c setzt

$$a=\frac{p.(QC-QP).BQ}{QC.AB}$$

$$p=\frac{p.(QC-QP).AQ}{QC.AB}$$

und

und so sind die drey Kräfte a, b, c gefunden. In der practischen Static sind A, B, C sehr häufig die drey Puncte, auf welchen ein dreyfüßiges Gestelle steht, welches eine Last trägt. Man findet demnach hiedurch, welchen Theil der Last jeder Fuß trägt. Ich habe übrigens beyde Auflösungen so angegeben, daß man daraus sehen kann, was zu thun ist, wenn auf mehrere Puncte einer Fläche Kräfte drücken. Man wird damit immer fortkommen, wenn die Fläche zwar unbiegsam aber weder in einem Punct, noch in einer Linie unbeweglich ist. Hingegen in practischen Fällen, wo man unbewegliche Grundflächen vor sich hat, da ist es z. E. möglich, daß bey einem vierfüßigen Gestelle, der eine Fuß wenig oder nichts trägt, ungeachtet derselbe der Rechnung nach würde zu tragen haben. Dieses geschieht, so wenig auch einer der Füsse zu lang oder zu kurz ist.

§. 59.

Da der Punct P nothwendig auf der Linie CQ liegen, und

$$(a+b+c) : QC = a : QP$$

seyn muß, (§. 57) so ist klar, daß es der einige ist, der der Bedingung der Aufgabe (§. cit.) Gnügen thut. Ich merke dieses, da es sonst an sich klar ist, und aus der Auflösung der Aufgabe erhellet, hier nur deswegen an, weil die Lage dieses Punct auf dreyerley Arten gefunden werden kann, weil man die völlige Wahl hat, die Linie

C Q aus C, oder aus A, oder aus B auf die gegenüberstehende Seite zu ziehen, wenn man eben die Bedingung beobachtet, unter welcher sie aus C in den Punct Q gezogen worden.

§. 60.

Fig. XII. Man setze nun in beliebigen Puncten A, B, C, D &c. einer ebenen unbiegsamen Fläche seyn Kräfte angebracht, die sämtlich senkrecht auf dieselbe drücken; so lassen sich nach Anleitung der Aufgabe (§. 57.) der Ordnung nach die Puncte P, Q, R &c. finden, wo die zwo, drey, vier 2c. ersten Kräfte ihren Druck vereinigen. Man ziehe durch A zwo beliebige Linien AK, AG, und aus den Puncten B, C, D &c. P, Q, R &c. parallele Linien Bb, Cc, Dd &c. Pp, Qq, Rr &c. ingleichem Bβ, Cγ, Dδ &c. Pl, Qm, Rn &c. welche die gezogenen Linien AG, AK durchschneiden. Nun sage ich: wenn die in A, B, C, D &c. angebrachten Kräfte, in A, b, c, d angebracht wären, so würden p, q, r &c. die Puncte seyn, wo die zwo, drey, vier 2c. ersten ihre Wirkung vereinigen; und daß eben so l, m, n &c. die Vereinigunspuncte seyn würden, wenn die Kräfte in A, β, γ, δ &c. angebracht wären. Denn wegen der parallelen Linien hat man

$$AB:AP = Ab:Ap = A\beta:Al$$
$$PC:PQ = pc:pq = l\gamma:lm$$
$$QD:QR = qd:qr = m\delta:mn$$
&c.

Da

Da nun (§. 57.) wenn a, b, c, d 2c. die Kräfte vorstellen

$$AB : AP = (a + b) : b$$
$$PC : PQ = (a + b + c) : c$$
$$QD : QR = (a + b + c + d) : d$$
&c.

ist; so ist klar, daß auch

$$Ab : Ap = A\beta : Al = (a + b) : b$$
$$pc : pq = l\gamma : lm = (a + b + c) : c$$
$$qd : qr = m\delta : mn = (a + b + c + d) : d$$
&c.

ist, und folglich die Puncte p, q, r &c. l, m, n &c. diejenigen sind, wo die in A, b, c, d &c. A, β, γ, δ &c. angebrachten Kräfte ihre Wirkung vereinigen, wenn der Ordnung nach davon die zwo, drey, vier 2c. ersten zusammen genommen werden.

§. 61.

Wenn man demnach anstatt die Puncte P, Q, R &c. unmittelbar durch die Puncte A, B, C, D &c. zu suchen, vorerst die Puncte p, q, r &c. l, m, n &c. sucht, so kann aus diesen, welcher von jenen man will, gefunden werden; weil man z. E. um R zu finden, nur die Ordinaten nR, rR ziehen darf. (§. 42.)

§. 62.

Man setze nun den Fall, wo die Kräfte nicht in den Puncten A, B, C, D &c. angebracht, sondern auf den Linien AB, BC, CD &c.

gleichförmig oder ungleichförmig vertheilet sind, und, der Continuität nach, auf jeden Punct dieser Linien drücken; so lassen sie sich auf eine ähnliche Art auf Ab, bc, cd &c. Aϐ, ϐγ, γδ &c. vertheilt gedenken. Da sie aber dabey nicht in gleichem Verhältniß dichter werden, so hat man allerdings dessen Rechnung zu tragen, in dem man, um die Dichtigkeit gleichförmig zu erhalten, die Kräfte in eben der Verhältniß stärker nimmt, in welcher man sie dichter nehmen müßte. Man setzt z. E. die auf CD vertheilten Kräfte müssen auf γδ gebracht werden, so wird jede lineare Kraft, die nemlich auf einen Punct der Linie CD drückt, mit CD multiplicirt, und durch γδ dividirt, oder, welches einerley ist, mit der Cosecante des Winkels CDδ multiplicirt. Eben so multiplicirt man sie mit der Cosecante des Winkels CDd, wenn die auf CD vertheilten Kräfte auf cd solten gebracht werden. Ist diese Reduction durchaus vorgenommen, so kömmt die Auflösung der Frage nunmehr auf die oben (§. 45.) vorgetragene Aufgabe an, weil, wenn man die Vereinigungspuncte der auf Aδ, Ad angebrachten Kräfte gefunden, sich der Vereinigungspunct für die auf ABCD angebrachten Kräfte ohne Mühe finden läßt. Aus allen diesem sieht man nun, was zu thun ist, wenn ABCD eine krumme Linie ist, und die Kräfte auf derselben, so viel man will, ungleich vertheilt sind. Denn da wird die auf jeden Punct drückende Kraft mit der Cosecante des Winkels multiplicirt, den die krumme Linie und deren Tangente daselbst mit der Ordinate macht. Man setze jede Abscisse $Ad = x$, ihre Ordinate $dD = y$ werde rechtwinklicht genommen. Die lineare auf den Punct D drückende Kraft sey $= K$; den Bogen AD nenne man $= v$, so wird die Kraft, welche auf den Punct d anzubringen ist $= K . dv : dx$, die so auf den Punct δ anzubringen ist $= K dv : dy$ seyn. Ist nun z. E. R der Vereinigungspunct aller auf den Bogen AD wirkenden Kräften, so findet sich nach Anleitung des §. 45 die Distanz

$$An = \int Ky\,dv : \int K\,dv$$

und

$$Ar = \int Kx\,dv : \int K\,dv$$

so, daß also die Bestimmung des Puncts R von drey Integrationen abhängt. Liesse sich $\int K\,dv$ nicht integriren, sondern nur die beyden andern Ausdrücke, so würde man auch nur die Lage der Linie AR bestimmen können, weil

$$\text{tang. } RAr = \frac{Rr}{Ar} = \frac{An}{Ar} = \int Ky\,dv : \int Kx\,dv$$

ist.

§. 63.

Wenn eine Kraft auf eine ganze Fläche ihren Druck senkrecht äussert, z. E. auf den Raum der krummen Linie CAB, und dabey durchaus ungleich vertheilt ist; so kann man nach einer beliebigen Richtung AE Parallellinien PM ziehen, und es werden sich die auf jede Fig. XIII.

dieser

dieser Linien drückenden Kräfte, als in einen Punct derselben N vereinigt gedenken lassen, welcher nach Anleitung des §. 45. gefunden wird. Dadurch wird der Druck, der auf die ganze Fläche wirkenden Kraft, auf den Druck einer Kraft reducirt, welche auf die krumme Linie AND vertheilt, und von gleicher Grösse und Dimension ist. Nur hat man zu merken, daß hier auch der ungleichen Dichtigkeit Rechnung getragen werden muß, weil z. E. die auf das kleine Trapezium pmMP drückende Kraft, wenn dasselbe gleiche Breite Nq behält, auf Nn desto weniger dichte vereinigt wird, je schiefer dieses Element des Bogens Nn gegen NP geneigt ist. Man muß daher, wenn man die auf AND vereinigte Kräfte auf einen Punct R bringen will, in der vorhin (§. 62.) angegebenen Rechnung nicht Nn, sondern nur Nq gebrauchen. Man setze AQ = x, QN = y, die in dem Punct N vereinigte drückende Kraft = K; so wird man dahero nun

$$SR = \int Kydy : \int Kdy$$

erhalten. Da nun diese Formel schlechthin nur von der Ordinate y, das will sagen, von der Distanz der Parallele MP von AE abhängt; so hat man auch nicht nöthig, den Ort des Puncts N wirklich zu suchen, weil es genug ist, die ganze auf jede Parallele MP drückende Kraft K, durch den Abstand dieser Parallele, ausgedrückt zu wissen, um die Distanz SR vermit-

vermittelst der Formel

$$SR = \int Kydy : \int Kdy$$

zu bestimmen. Will man nun mit Beybehaltung eben der Parallelen die Absciſſe A S finden, ſo wird man, weil die auf N n vereinigte Kraft nicht Kdv, ſondern nur Kdy iſt, nach Anleitung des §. 62.

$$AS = \int Kxdy : \int Kdy$$

erhalten. Und in dieſer Formel kömmt nun x und y vor, weil dabey ganz andere Umſtände ſind. Denn wenn man für AS eine der erſten ähnliche Formel haben will, ſo muß man Parallelen annehmen, welche auf A E ſenkrecht ſind, und die dieſen neuen Parallelen in Puncte auf derſelben vereinigen, und ſo wird man, wenn die auf die Paralle Q N wirkende Kraft = L iſt, für eben den Raum P A M

$$AS = \int Lxdx : \int Ldx$$

erhalten. Man ſieht leicht, daß dieſe Formel mühſamer gebraucht wird, weil ſie eine nochmalige und ganz verſchiedene Berechnung der Kräfte vorausſetzt.

§. 64.

Alles wird hiebey viel einfacher, wenn die Fläche ein geradlinichtes Vieleck, und die auf daſſelbe drückende Kraft durchaus gleich vertheilt iſt. Denn da läßt ſich die Fläche in geradelinichte Triangel vertheilen, und der Vereinigungspunct für jeden Triangel leicht gefunden.

Fig. XIV. den. Es sey A C B ein solcher Triangel, so vereinigt sich die auf A B drückende Kraft in der Mitte P (§. 24.). Und aus gleichem Grunde finden sich auf der Linie C P die Vereinigungspuncten der auf jede mit AB gleichlaufenden Linien wirkenden Kräfte, weil C P alle diese Linien halbirt. Demnach muß auch der Vereinigungspunct der ganzen auf ACB drückenden Kraft auf der Linie C P seyn. Da nun eben dieses von der Linie A Q gilt, welche aus A in der Mitte von CB gezogen wird, so ist nothwendig der Durchschnittspunct R derjenige, in welchem die ganze auf den Triangel ABC wirkende Kraft ihre Wirkung vereinigt, weil sonst kein Punct bey den Linien AQ, CP gemeinsam ist, und weil es der Vereinigungspuncte nicht mehrere giebt. (§. 59.)

VI. Der Druck der Kräfte auf körperliche Räume.

§. 65.

Wenn eine Kraft auf jede Puncte eines soliden Raumes vertheilt ist, und auf jede nach einer parallelen Richtung drückt; so läßt sich dabey, in gewisser Absicht betrachtet, nicht blos ein Punct, sondern eine ganze Linie finden, so, daß wenn eine Kraft, die der fürgegebenen an Grösse und Dimension gleich ist, in entgegengesetzter Richtung bey einem beliebigen

Punct

Punct dieser Linie angebracht wird, ein Gleichgewicht erhalten werde. Ich sage, in gewisser Absicht betrachtet. Denn es wird sich zeigen lassen, daß es auf dieser Linie einen Punct giebt, welcher vorzüglicher, als jeder andere, den Namen des Vereinigungspuncts verdient.

§. 66.

Wir wollen, um diese Betrachtungen deutlicher zu machen, die Richtung der Kraft vertical nennen, und uns anfangs nur eine durch den Körper gehende verticale Linie vorstellen, welche es auch immer sey. Da die Kraft auf jede Puncte des Körpers wirkt, so wirkt sie auch auf jede Puncte dieser Linie, und zwar, weil sie vertical ist, nach der Richtung der Linie selbst. Da wir dieser Linie, so wie dem Körper selbst eine absolute Steifigkeit (§. 29.) geben, so läßt sich der ganzen auf jede Puncte derselben wirkenden Kraft eine Kraft von gleicher Grösse und Dimension, und in welchem Punct der Linie man will, entgegen setzen, so, daß diese derselben das Gleichgewicht halten wird. (§. cit.) Wir wollen uns nun der freyen Wahl dieses Puncts dergestallt bedienen, daß wir uns unter dem Körper eine horizontale, und folglich auf die Direction der Kraft senkrechte Fläche gedenken, und bemeldten Punct da setzen, wo die Linie die Fläche durchschneidet. Und so werden wir für jede durch den Körper gehende Verticallinie auf dieser Fläche einen

Durch-

Durchschnittspunct haben, wo sich die entgegen wirkende und das Gleichgewicht haltende Kraft anbringen läßt. Diese entgegen wirkende Kräfte, werden demnach auf dem ganzen Raum der Fläche, so weit nemlich aus dem Körper verticale Linien darauf fallen, und zwar so ungleich man es auch setzen will, vertheilt. Es erhellet aber aus dem vorhergehenden (§. 63.) daß, so sehr sie auch ungleich vertheilt seyn mögen, sich mit Beybehaltung des Gleichgewichtes ihrer Summe in einem Punct vereinigt und in gleicher Direction anbringen lassen. Diesen Punct gedenke man sich in der durch denselben gezogenen ebenfalls absolute steifen Verticallinie, so ist wiederum klar, daß man diese Summe in jedem beliebigen Punct dieser Linie wird anbringen, und immer das Gleichgewicht erhalten können. Dieses ist demnach die Linie, von welcher im vorhergehenden §. die Rede war. Und man sieht zugleich, daß es bey jeder Stellung oder Lage jedes Körpers eine solche giebt, weil der Beweis beydes willkührlich seyn läßt. Da eine solche Linie die Directionslinie der vereinigten Kraft ist, so werden wir sie,/ Kürze halber, so nennen. Es ist dabey nun allerdings merkwürdig, daß unerachtet es deren bey jedem Körper unzählige giebt, sie sich dennoch sämtlich, jedoch unter gewissen Bedingungen, in einem Punct durchschneiden. Und dieses ist nun der Punct, von dem vorhin §. 65.

eben-

ebenfalls die Rede war. Das Vorzügliche davon besteht darin, daß er allen diesen Directionslinien gemeinsam ist, und daß folglich jede sehr leicht gezogen werden kann, wenn man einmal diesen Punct weiß. So ist auch klar, daß wenn dieser Punct unbeweglich gesetzt wird, so, daß sich der Körper daran auf alle Arten drehen läßt, derselbe, wie man ihn auch immer gedreht hat, durch die Wirkung der Kraft nicht gedreht wird, sondern schlechthin in Ruh, das will sagen, auf allen Seiten im Gleichgewichte bleibt. Wir haben aber theils zu zeigen, daß es bey jedem Körper einen solchen Punct giebt, und welches die Bedingungen sind, die wir annehmen müssen, um diese Aussage nicht allgemeiner anzugeben, als sie in der That statt finden können. Um demnach alles dieses auf die deutlichste Art vorzutragen, werden wir bey dem Einfachsten anfangen, und so fortfahren, daß wir nur wenige Schritte bis zum Ziele werden zu thun haben.

§. 67.

Es seyn zween Puncte A, B einer unbiegsamen Linie A B; so ist aus dem obigen klar, daß wenn auf dieselben zwo Kräften a, b senkrecht drücken, ein Punct C gefunden werden kann, wo statt der beyden Kräfte ihre Summe $a + b$ in einer gleichfalls auf die Linie senkrechten Richtung angebracht werden kann; und daß Fig. XV.

$$(a+b):AB=a:CB=b:AC$$

ist. (§. 33.) Man setze nun, die Kräfte a, b drücken auf eben die Puncte A, B in einer zwar parallelen aber gegen die Linie schiefen Richtung DA, EB; so nehmen wir hiebey die Bedingung an, daß jeder dieser Puncte, für sich betrachtet, eben so gedrückt werde, als wenn er für sich ganz allein wäre, oder, welches einerley ist, daß wenn keine Kraft entgegen wirkt, die Linie AB sich in einer immer parallelen Richtung herunter bewegen, und die Puncte A, B zu gleicher Zeit auf $A\alpha$, $B\epsilon$ eben so weit kommen, als wenn jeder für sich herunter gedrückt würde. Man gedencke sich in A, B zwo ebenfalls unbiegsame Linien in der Direction $DA\alpha$, $EB\epsilon$ befestigt, so, daß sie die Linie $\alpha\,\epsilon$ unter rechten Winkeln berühren, und gegen dieselbe den von beyden auf A, B wirkenden Kräften empfangenen Druck äussern. Da demnach dieser Druck a, b ist; so läßt sich derselbe in einem Punct γ als vereinigt gedenken, und es wird

$$(a+b):\alpha\epsilon=a:\gamma\epsilon=b:\alpha\gamma$$

demnach

$$\alpha\gamma:\gamma\epsilon=AC:CB$$

demnach die Linie $C\gamma$ mit $A\alpha$, $B\epsilon$ parallel seyn, oder, welches einerley ist, die durch γ senkrecht gezogene Linie, wird durch den Punct C gehen. Wird daher eine Kraft $=a+b$ in entgegengesetzter Richtung auf einen Punct der Linie γ C angebracht, so bleibt das System im Gleichgewichte.

§. 68.

Hiebey ist nun für sich klar, daß sich in einem Körper, auf dessen jede Puncte parallele Kräfte drücken, unzählige solcher schiefen Linien, dergleichen A B ist, gedenken lassen, und daß wir daher, der schiefen Lage ungeachtet, den Druck auf die Puncte A, B eben so absolut setzen konnten, wie derselbe in Absicht auf jede in dem Körper befindliche Puncte genommen wird. Da nun ferner in dem Beweise, daß die durch γ senkrecht gezogene Linie durch den Punct C geht, der Neigungswinkel D C A gar nicht vorkömmt, folglich dieser Satz bey jeder schiefen Lage der Linie A B statt hat; so hat der Punct C vor jeden Puncten der Linie C γ das voraus, daß wenn die Kraft $a + b$ in C angebracht wird, sie immer in der Linie Cγ ist, und daher der Punct C bey jeder schiefen Lage als der Vereinigungspunct der Kraft angesehen werden kann, jedoch immer auch mit der Voraussetzung, daß die Kraft $a + b$ den Punct C, ungeachtet derselbe in der Linie AB genommen wird, eben so absolute herauf drücke, als wenn derselbe ganz allein wäre.

§. 69.

Man setze nun drey unbiegsame Linien AB, BC, CA in Form eines Triangels an einander bevestigt. Auf die 3 Endpuncten drücken Fig. XI.

 die

die Kräfte a, b, c in beliebiger jedoch parallelen Richtung; so erhellet aus erstgesagtem, daß statt der Kräfte a, b ihre Summe a + b nach eben der Richtung, mit einerley Erfolg, in dem Vereinigunspunct Q könne angebracht werden, so, daß

$$(a+b):AB = a:QB = b:QA$$

ist. Diese Aenderung vorgenommen, so erhellet auf eben die Art, daß statt der in Q und C angebrachten Kräfte a + b, c in P ihre Summe a + b + c in eben der Richtung, mit eben dem Erfolge angebracht werden könne, so, daß

$$(a+b+c):QC = (a+b):PC = c:QP$$

ist. Demnach, welche Richtung die Kräfte, so jedoch parallel auf die Puncte A, B, C wirken, auch immer haben, so wird das System in Ruhe bleiben, wenn der Punct P unbeweglich, oder die Summe der Kräfte in entgegengesetzter Richtung auf denselben angebracht ist.

§. 70.

Man sieht nun hieraus ohne Mühe, daß was wir in vorhergehendem Abschnitte von dem Vereinigungspunct, der auf ebene unbiegsame Flächen senkrecht wirkenden Kräfte, erwiesen haben, auch von jeder schiefen jedoch parallelen Richtung gelte; immer aber mit der Voraussetzung, daß jeder Punct der Fläche eben so gedrückt werde, als wenn derselbe für sich allein wäre. (§. 67. 68.) Gedenkt man sich demnach

nach in einem Körper unzählige parallele ebene Flächen, so hat jede derselben ihren Vereinigungspunct, auf welchen die auf jede Puncte derselben wirkenden Kräfte concentrirt angebracht werden können. Diese Vereinigungspuncte liegen sämtlich in einer mehrentheils krummen Linie, und so lassen sich die auf dieser Linie von den Flächen concentrirte Kräfte in einen einigen Punct concentriren, welcher, wenn er unbeweglich ist, bey jeder jedoch parallelen Richtung der Kräfte, den Körper in Ruhe und auf jeden Seiten im Gleichgewicht erhält. Uebrigens ist klar, daß hiebey vorausgesetzt wird, daß wenn die auf jeden Punct des Körpers wirkende Kraft, ungleich vertheilt ist, die auf jeden Punct wirkende bey jeder geänderten Richtung eben die bleibe, oder, wenn sie grösser oder kleiner wird, bey jeden Puncten, auf eine proportionale Art, grösser oder kleiner werde. Und dieses ist die andere Bedingung, die wir hier, wo sie deutlicher konnte vorgetragen werden, noch haben beyfügen sollen.

§. 71.

Die Bestimmung des Vereinigungspuncts der Kräfte, so auf jede Puncten eines Körpers in paralleler Richtung, und überhaupt unter den bereits vorgetragenen Bedingungen wirken, kommt auf die Bestimmung zwoer Directionslinien der vereinigten Kraft (§. 66.) an, wozu wir die Methode im vorhergehenden

(§. cit.) angegeben haben. Die Berechnung kann in vielen Fällen ungemein weitläuftig werden; so wie sie sich hingegen sehr abkürzt, wenn der Körper mit lauter ebenen Flächen umgränzt und die Kraft durchaus gleich vertheilt ist. Denn da läßt er sich in trianguläre Pyramiden theilen, und für jede wird der Vereinigungspunct der auf jede Puncte derselben wirkenden Kraft leicht gefunden. Denn man sucht denselben für zwo ihrer Flächen oder Seiten, und zieht aus denselben in die gegenüberstehende Ecke gerade Linien; und so wird der Durchschnittspunct dieser Linien der gesuchte Vereinigungspunct der Pyramide, oder der auf dieselbe gleich vertheilten Kraft seyn. Der Beweis hievon ist demjenigen, den wir (§. 64.) für den geradelinichten Triangel gegeben haben, völlig ähnlich.

§. 72.

Da die auf den ganzen Körper vertheilte Kraft ihre Wirkung in einem Punct vereinigt, (§. 70.) so läßt sich der ganze Körper gleichsam als in diesen Punct concentrirt gedenken, auf welchen die ganze Summe der Kraft wirkt. Zu diesem Punct kann noch einer oder mehrere andere kommen, nemlich, wenn z. E. der Körper irgend einen unbeweglichen Punct hat, oder auch wenn derselbe in einem oder mehrern Puncten mit andern Körpern zusammen hängt, und ein System ausmacht, dessen Theile untereinader bewegt werden können. So z. E.

kann

kann im ersten Fall A einen Körper, B den Fig. XV.
unbeweglichen Punct vorstellen, und da wird
kein Ruhestand seyn, dafern nicht das System
A B in der Directionslinie der Kraft 6 / ist.
Denn die auf A wirkende Kraft entfernt den
Körper von sich, oder treibt ihn fort, so weit
es die Einrichtung des Systems zuläßt. Dieses giebt immer ein maximum. Im andern
Fall sind z. E. B, C Körper, A, D unbeweg- Fig. XI.
liche Puncte, A B, B C, C D Linien, die sich
um die Puncte A, B, C, D drehen lassen. Die
Körper B, C haben auf der Linie B C ihren
Vereinigungspunct. Und wirkt die Kraft
nach der Direction A K, so äussert sie ihre
Wirkung auf diesen Punct durch Forttreiben,
bis derselbe von der Linie A G so weit entfernt
ist, als es der Mechanismus des Systems zuläßt. Und dieses giebt wiederum ein maximum.

§. 73.

Wird die Figur eines Körpers mit dem Bedinge geändert, daß er von einerley Grösse bleibt, und die auf jeden Punct wirkende Kraft, nach wir vor, auf denselben gleichen Druck äussert, so bleibt die ganze auf den Vereinigungspunct gerichtete oder concentrirte Wirkung, vor wie nach, eben dieselbe, nemlich die Summe jeder einzeln Kräfte. Dieses macht demnach, daß ein Körper sich unter einer viel allgemeinern Bedingung, als in einen Punct concentrirt, gedenken läßt. Am allgemeinsten aber ist diese Bedingung, wenn die Summe der auf jede Puncte des Körpers parallel wirkenden Kräfte einerley bleibt, diese Kräfte mögen sich unter sich verändern, so viel man will.

VII. Einige statische Definitionen und Sätze.

§. 74.

Wir können nun, ehe wir weiter gehen, das bisher gesagte auf die in der Natur vorkommende Kraft der Schwere anwenden, welche überhaupt die auf der Erdfläche befindliche Körper unterwerts drückt. In dieser Absicht wird in jedem Körper oder System der Punct, wo die Kraft der Schwere ihre Wirkung vereinigt, der Mittelpunct der Schwere, centrum grauitatis, genennt. Wir müssen aber einige Erfahrungen zu Hülfe nehmen, um zu sehen, was es damit für eine Bewandniß habe?

§. 75.

Die erste ist, daß die Richtungslinie der vereinigten Kraft der Schwere allemal unterwerts geht. Man sieht dieses, es sey daß man einen Körper den Druck der Schwere überlasse, das will sagen, fallen lasse, oder daß man denselben an einen Faden, das will sagen, biegsame Linie, hänge. Die Schwere, oder das Gewicht des Körpers wird nach dem Drucke geschätzt, den die Kraft der Schwere auf denselben äussert. Da dieser Druck nach der Richtungslinie der vereinigten Kraft sich äussert, und diese Richtungslinie immer verticał, demnach parallel ist, so läßt sich, um die Gewichte zu vergleichen, der Hebel dazu gebrauchen. Und da giebt die Erfahrung folgendes an:

§. 76.

Der Hebel AB liege auf dem unbeweglichen Punct C, und sey entweder gar nicht, oder auf beyden Seiten gleich schwer, damit derselbe für sich im Gleichgewichte sey. In H, F hängen zween Körper an, welche folglich nach der verticalen Richtung JH, GF herunter gedrückt werden. Halten sie nun einander das Gleichgewicht, und die Entfernungen CH, CF sind ungleich, so ist auch das Gewicht beyder Körper in eben der Verhältniß ungleich, weil Fig. VIII

$$H:F = CF:CH$$

ist. (§. 35.) Dieses folgt aus der erstgegebenen Definition des Gewichtes.

§. 77.

Nun giebt die Erfahrung an, daß so viel man die Figur des Körpers ändert, nur daß von seiner Materie nichts verlohren gehe, auch wenn man denselben hohl macht, das Gleichgewicht immer bleibe; daß eben dieses statt habe, an welchem Punct seiner Oberfläche man denselben anhänge. Hingegen aber, daß, man mag inwendig oder auswendig von seiner Materie wegnehmen, das Gleichgewicht aufhöre, und der Körper leichter werde. Hieraus folgert man, die Kraft der Schwere drücke nicht auf den leeren Raum, und auch nicht blos auf die Oberfläche, sondern auf die sowohl in- als auswendige Materie des Körpers.

§. 78.

Theilt man den Körper in beliebige Stücke, so giebt die Erfahrung ebenfalls, daß die Summe der einzeln Gewichte eines jeden Stückes, dem Gewicht des ungetheilten Körpers gleich ist. Und daraus folgt, daß jeder Theil der Materie der Körper durch die Kraft der Schwere, für sich gedrückt, und dieser Druck durch die Verbindung dieses Theils mit andern weder vermehrt noch vermindert wird. So wird auch daraus begreiflich, daß sich bey gleichartigen Körpern, das Gewicht mit dem Raum, den sie einnehmen, in gleicher Verhältniß vergrössert. Denn man gedenke sich einen solchen Körper in gleich grosse Theile vertheilt oder zerlegt. Da nun die Summe des Gewichts dieser Theile, jedes einzeln gewogen, dem Gewichte des ganzen Körpers, zufolg ersterwähnter Erfahrung, gleich ist, die Theile selbst auch wegen der Gleichartigkeit, gleich viel Materie

haben,

haben, und wenn auch ihre Figur nicht gleich seyn sollte, diese am Gewichte nichts ändert (§. 77.) so folgt hieraus, auch wenn es nicht unmittelbar durch die Erfahrung erörtert werden könnte, daß jeder dieser Theile gleich viel wägen müsse, und sich folglich das Gewicht eines jeden umgekehrt, wie die Anzahl der Theile verhalte, in welche man den Körper zertheilt hat. Da nun die Grösse eines jeden Theils sich, ebenfalls umgekehrt, wie diese Anzahl verhält; so ist nothwendig, daß das Gewicht in Verhältniß der Grösse, und hinwiederum die Grösse in Verhältniß des Gewichts sey. Das will nun sagen, daß in einem gleichartigen Körper die Kraft der Schwere durchaus gleich vertheilt sey. Dieses nebst der parallelen Richtung der Kraft macht demnach, daß viele von den in den vorhergehenden Abschnitten vorgetragenen Sätzen, wenn sie auf gleichartige Körper und die darauf wirkende Kraft der Schwere angewandt werden, sehr in die Kürze gezogen werden können. Besonders wird die Bestimmung ihres Mittelpuncts der Schwere dadurch sehr abgekürzt. (§. 71.)

§. 79.

Die Gleichartigkeit, von welcher hier die Rede ist, erfordert fürnemlich die durchaus gleiche Vertheilung der Materie, aus welcher der Körper besteht. Ist diese ungleich vertheilt, so ist der Körper ungleich dichte, und daher auch

auch in seinen verschiedenen Theilen ungleich schwer. Dieses hat nun eben den Erfolg, als wenn die Kraft der Schwere ungleich vertheilt wäre. Da aber diese ungleiche Vertheilung auf einerley Theile oder Puncte fällt, wie man immer den Körper umwendet; so sieht man, zufolge des §. 71, daß auch ein solcher Körper einen, ich will sagen, einen einigen Mittelpunct der Schwere habe, in welchem nemlich die Kraft der Schwere bey jeder Lage des Körpers ihre dem Gewicht desselben gleiche Wirkung vereiniget. (§. 74. 75.) Da nun eben dieses von jedem System von Körpern gilt, die mit einander verbunden sind, so sieht man aus dem §. 72 ebenfalls, daß, wenn diese Theile unter sich bewegt werden können, das System nicht in Ruhe seyn werde, bis die Kraft der Schwere den Mittelpunct der Schwere des ganzen Systems, so weit es der Mechanismus desselben zuläßt, fortgetrieben hat, und folglich, weil die Schwere unterwerts drückt, dieser Mittelpunct am tiefsten Orte ist.

VIII. Die Zusammensetzung der Kräfte.

§. 80.

Die erst gemachte Anmerkung von dem tiefsten Orte des Mittelpuncts der Schwere, läßt sich bey Bestimmung des Gleichgewichtes eines

eines Systems sehr vortheilhaft gebrauchen. Es sey z. E. in einer horizontalen Linie A B zween unbewegliche Puncte. An A werde ein Faden ACBP befestigt, an welchem in C ein Gewicht Q herunter hange. Der Faden selbst lasse sich über den Punct P wie über einer Rolle ziehen, so, daß wenn das anhangende Gewicht P herunter gezogen, oder noch mehr beschwert wird, das Gewicht Q in die Höhe steige, oder hinwiederum sich noch mehr herabziehe, wenn das Gewicht P erleichtert wird. Läßt man nun das ganze System frey hangen, so werden sich die beyden Gewicht auf- und herunter bewegen, bis sie einander das Gleichgewicht halten, oder, welches einerley ist, bis der Mittelpunct der Schwere am tiefsten ist. Die Entfernung dieses Mittel-Puncts der Schwere von der horizontalen Linie AB, welche das Maaß seiner Vertiefung ist, findet sich nach §. 61, wenn man Q mit QF, und P mit PB multiplicirt, und die Summe beyder Producte durch die Summe der Gewichte $P+Q$ dividirt. Es sey demnach Fig. XVI.

$AB = a \qquad AF = y$

$AC = b \qquad CQ = e$

$CB + BP = c$

so ist

$$CF = \sqrt{(bb - yy)}$$

$$CB = \sqrt{(aa + bb - 2ay)}$$

dem-

demnach

$$FQ = e + \sqrt{(bb - yy)}$$

$$BP = c - \sqrt{(aa + bb - 2ay)}$$

und folglich, wenn die Vertiefung des Mittelpuncts der Schwere $= z$ gesetzt wird,

$$z = \frac{Qe + Q\sqrt{(bb-yy)} + Pc - P\sqrt{(aa+bb-2ay)}}{Q+P}$$

Da nun z ein maximum seyn muß, so wird $dz = o$. Und so findet man nach geschehener Differentiation

$$o = -\frac{Q.y}{\sqrt{(bb-yy)}} + \frac{P.a}{\sqrt{(aa+bb-2ay)}}$$

oder

$$o = -Qy : CF + Pa : CB$$

und hieraus

$$P : Q = \frac{y.CB}{a.CF} = \frac{AF.CB}{AB.CF}$$

Man ziehe BD mit AC parallel, so sind die Triangel AFC, FBD einander ähnlich, und es ist

$$AF : CF = AB : CD$$

demnach

$$CD = \frac{CF.AB}{AF}$$

Setzt man diesen Werth in der gefundenen Formel

$$\frac{P}{Q} = \frac{AF.CB}{AB.CF}$$

so

so erhält man

$$P:Q = CB:CD$$

Dieser Analogie werden wir uns nun folgendermassen bedienen können.

§. 81.

Der Punct C wird erstlich von dem Gewichte Q mit einer demselben gleichen Kraft (§.75.) herunter gezogen. Sodann, da das Gewicht P über die Rolle B hängt, so zieht dasselbe den Punct C nach der Richtung C B gegen B, wiederum mit einer Kraft $= P$. Nun läßt sich in A ebenfalls eine Rolle mit einem herunterhangenden Gewichte p gedenken, welches den Faden A C, so viel zieht, als es die Erhaltung des Gleichgewichtes erfordert. Zieht man demnach A E mit C B parallel, so wird man

$$p:Q = AC:CE$$

haben. Nun ist wegen der Aehnlichkeit der Triangel CAE, DBC,

$$AC:CE = DB:DC$$

demnach

$$p:Q = DB:DC$$

§. 82.

Wird nun diese Analogie mit der erstern (§.80.) verglichen, so findet sich

$$Q:DC = P:CB = p:DB$$

das will nun sagen, die Kräfte, womit der Punct C ge-

C gegen Q, B, A gezogen wird, sind in Verhältniß der Seiten DC, CB, DB des Triangels DCB, oder wenn das Parallelogramm CBDG vollends ausgezogen wird, in Verhältniß der Diagonale CD und der Seiten CB, CG, oder, welches ebenfalls einerley ist, in Verhältniß der Sinus der Winkel ACB, ACD, DCB; daher jede Kraft in Verhältniß des Sinus des Winkels, den die Directionslinien der beyden andern Kräfte mit einander machen.

§. 83.

Da hiebey jede Kraft den beyden andern das Gleichgewicht hält, und überhaupt jeder Kraft eine gleich grosse entgegen gesetzt werden kann, so ist klar, daß diese entgegengesetzte eben den Effect thut, den die beyden andern Kräfte thun. Demnach läßt sich für diese jene, und hinwiederum für jene diese, ohne Nachtheil des Gleichgewichtes, anbringen. Diese Verwechselung wird die **Zusammensetzung und Auflösung der Kräfte** genennt.

§. 84.

Man stellt aus diesen Gründen, die nach verschiedenen Richtungen auf einen Punct wirkende Kräfte durch Linien vor, welche den Kräften proportional und in deren Richtung Fig. XVII. sind. Und da ist jede der Linien AC, BC, DC der Diagonale des Parallelogramms gleich, welches

welches sich mittelst der beyden andern Linien ziehen läßt, z. E. $AC = Ca$, $BC = Cb$, $DC = CD$. Da nun den Kräften CB, CD eine Kraft CA substituirt werden kann, und diese, wenn die Kraft AC nicht da wäre, den Punct C entweder gegen sich ziehen, oder wenn sie drückt, gegen A drücken würde, so sieht man, daß eben dieses auch würde von den ziehenden oder drückenden Kräften BC, DC geschehen, wenn die Kraft A nicht das Gleichgewicht hielte.

§. 85.

Bey diesem letzten Satze wird in den meisten bisher herausgekommenen statischen Schriften, der Anfang zum Beweise der Zusammensetzung der Kräfte gemacht. Man setzt nemlich zwo Kräfte BC, DC, die in nicht gerader noch entgegengesetzter Richtung BC, DC auf den Punct C drücken. Wäre nun jede Kraft allein; so würde sie diesen Punct in eben der Richtung fortdrücken, in welcher sie auf denselben wirkt, demnach CB gegen b, CD gegen D. Aeussern aber beyde Kräfte ihren Druck zugleich; so kann der Punct C unmöglich nach beyden Richtungen zugleich bewegt werden, weil er sonst zweyen Orten zugleich seyn müßte. Alles dieses ist ganz Sonnenklar. Was aber erfolgen werde, ist eine ganz andere Frage. In der That könnte man aus erstbemeldter Unmöglichkeit, daß der Punct C nicht zugleich an zweyen Orten seyn könne, den Schluß machen, derselbe müsse nothwendig in C bleiben. Dieser Schluß geht aber nur an, wenn die Kräfte gleich und in entgegengesetzter Richtung angebracht sind. (§. 13.) Denn Kräfte, die zugleich auf einen Punct wirken, lassen sich nicht als jede für sich wirkend gedenken, wenn man auf das Product beyder Wirkungen sehen will. Man setze z. E. um den leichtesten Fall zu betrachten, zwo gleiche Kräfte seyn in gleicher Direction und zugleich auf einen Punct angebracht, so will dieses sagen, die Summe von beyden, oder eine ihrer Summe gleiche Kraft wirke auf denselben. Wolte man hier jede für sich betrachten, so könnte man den Schluß machen, daß beyde zusammen nicht mehr ausrichten, als eine allein. Denn indem die eine den Punct fortdrückt, läßt sie der andern nichts zu drücken übrig. Oder wenn die eine den Punct C bis in b fortdrückt, so drückt denselben die andere ebenfalls bis in b fort, und so würde folgen, der Punct C komme in gleicher Zeit in b, es mögen beyde Kräfte oder nur eine drücken. Es ist offenbar, daß die Kräfte, gleichsam ehe sie noch den Druck äussern, als schon zusammengesetzt angesehen werden müssen. Denn jeder Druck, für sich betrachtet, läßt sich eben so gut als nach dem andern angebracht gedenken. Ungeachtet demnach jede der Kräfte CB, DC, jede allein genommen, den Punct C in ihrer Richtung fort-

drücken

drücken würde, so kann man aus dieser Betrachtung keinen Vortheil ziehen, um zu erörtern, was erfolgen werde, wenn diese Kräfte zugleich angebracht sind. Der einige Fall, wo es angeht, ist wenn die Kräfte gleich sind, und einander entgegen wirken. Denn man sieht leicht, daß die Richtung der Kräfte mit in Betrachtung kömmt, sobald sie zusammengesetzt, das will sagen, zugleich angebracht werden. Denn da sieht man bey entgegengesetzten gleichen Kräften A C, C a ohne Mühe, daß der Punct C, auch wenn er bewegt würde, auf der Linie A C a bleiben muß, weil keine der Kräfte herauf oder herunter drückt. Daß er aber keiner derselben nachgebe, folgt sodann, weil er einer wie der andern nachgeben müßte, und so an zwey Orten zugleich seyn würde.

§. 86.

Man hat aber, um sich demnach einigermassen auszuhelfen, angenommen, daß die Bewegung des Puncts C nach beyden Directionen begreiflich gemacht werden könne, wenn man, indem sich der Punct C gegen b bewegt, demselben und der ganzen Linie C b eine Bewegung nach der Direction C d giebt. Sind die Geschwindigkeiten den Linien C b, C d proportional, so läßt sich allerdings begreifen, daß der Punct b in eben der Zeit in A treffen werde, in welcher C in b kommen würde, wenn derselbe sich schlechthin nur nach der Direction C b bewegte, und nicht zugleich auch mit der Linie

Cb nach der Direction C d bewegt würde. Geschieht aber beydes, so durchläuft der Punct C unstreitig die Linie A C. Diese ganze Betrachtung ist aber schlechthin nur phoronomisch und ideal (§. 2.) dafern man nicht zeigen kann, daß man aus der Zusammensetzung der Kräfte berechtigt sey, die Bewegung der Linie C b und des darauf sich bewegenden Puncts C, nach der Richtung C d anzunehmen. Es ist klar, daß man, um hiezu berechtigt zu seyn, nicht nur der Linie C b, sondern selbst auch der Kraft C D eine Bewegung nach der Directon C b geben müsse, denn widrigenfalls würde sich der Druck nicht nach der Direction C d äussern. So z. E. wenn sich ein Schiff nach der Linie Cb bewegt, und eine Flinte wird nach der Linie Cd gerichtet. Drückt man dieselbe loß, so hat die Kugel, so lange sie in dem Laufe ist, allerdings eine gedoppelte Bewegung. Denn einmal bewegt sie sich nach der Länge des Laufes der Flinte in der Direction Cd; sodann zugleich mit der Flinte in der Direction C b. Diese beyde Bewegungen aber sind nur relativ. Man folgert aber richtig daraus, daß wenn die relativen Geschwindigkeiten Cd, Cb sind, die absolute Geschwindigkeit und zugleich die Direction derselben C A seyn werde. Dieses würde nicht seyn, wenn die Flinte, durch deren Loßbrennen der Kugel die Bewegung nach der Direction C d gegeben wird, sich nicht selbst nach C b bewegte.

§. 87

§. 87.

Wollte man aber statt der wirklichen Bewegung nur die Sollicitation zu derselben nehmen, wie denn eine solche Sollicitation selbst bey dem Gleichgewichte, wo alles in Ruhe ist, allerdings vorkömmt; so ist es dennoch auch hier nicht genug, zu sagen, der Punct C werde gegen b und d zur Bewegung sollicitirt. Denn einmal ist er es, sobald die Kräfte wirklich zusammengesetzt sind, in der That nicht, weil sie sich nicht mehr so, als wenn jede allein wäre, betrachten lassen. Wenn man aber auch dieses zugiebt, wie es denn in verschiedenen Absichten und unter gehörigen Bedingungen zugegeben werden kann, so läßt sich aus dieser Sollicitation noch nichts, auf eine der vorigen ähnliche Art schliessen, dafern man nicht mit annimmt, daß selbst auch die Kraft CD nach der Direction Cb, und so auch die Kraft CB nach der Direction Cd sollicitirt werde. Dieses schiene nun noch zwo neue Kräfte zu erfordern. Sie sind aber nicht nothwendig. Denn eben darin besteht nun das, was die eigentliche **Zusammensetzung der Kräfte** ausmacht, und was zugleich der Grund ist, warum zusammengesetzte Kräfte nicht eben so, wie wenn jede allein wäre, angesehen werden können. Denn man kann sie so ansehen, als wenn jede die andere nach ihrer eigenen Richtung sollicitirte, eben so wie sie bey einerley Richtung sich ganz in eine Summe vereinigen, bey entgegengesetzter Richtung aber ganz oder zum Theil unwirksam machen. Dieses hat nun bey schiefen Richtungen, dergleichen BC, DC sind, den Erfolg, daß was jede Kraft auf die Sollicitation der andern verwendet derselben abgeht. Daß man aber die Sollicitation der einen ganz auf Rechnung der andern setzen, und daher z. E. CD ganz auf den Punct C wirkend, BC aber als auf den Punct C und die Kraft CD zugleich wirkend ansehen könne, folgt aus dem bisherigesagten noch nicht. Nimmt man es indessen an, und läßt die Bewegung erfolgen, so bewegt sich die Kraft D mit dem Punct C nach Cb, während dem sie diesen Punct nach der Direction Dc bewegt, und so würde mehr oder minder eine Bewegung des Puncts C nach einer Diagonallinie CA erfolgen.

§. 88.

Dieses sind aber noch nicht alle Schwürigkeiten, die bey dem gewöhnlichen Beweise von der Zusammensetzung der Kräfte vorkommen. Denn es ist nicht genug, daß man aus den relativen Geschwindigkeiten CB, CD, die absolute AC finde. Man muß ferner dabey annehmen, daß diese Geschwindigkeiten in Verhältniß der Kräfte sind, wenn man sodann den Schluß machen will, daß AC nicht nur die Direction und Geschwindigkeit des Puncts C, sondern zugleich auch das Maaß der zusammengesetzten Kraft sey, daß aber der angenommene Satz von

von dem Verhältniß der Geschwindigkeit und Kraft wahr sey, hat man deswegen fürgegeben, weil es derjenige Satz ist, den wir bey Betrachtung des Hebels oben (§. 49.) vorgebracht und untersucht haben. Man setze aber, daß derselbe in gleichem Verstande (denn mehr ist noch nicht erwiesen) auch bey dem Gleichgewichte dreyer Kräfte vorkommen; so muß der einen Kraft eine Uebermucht gegeben werden, und da haben wir oben (§. 49. seqq.) gesehen, daß die daherrührende Geschwindigkeit weder in gerader Verhältniß der Uebermucht, noch der Kraft, noch der Last, das will hier sagen, der beyden andern Kräfte, sey.

§. 89.

Wir können aus allen diesem die Folge ziehen, daß wenn man je die Zusammensetzung der Kräfte aus der bey Hebung des Gleichgewichtes erfolgenden Bewegung herleiten will, diese Bewegung selbst vorerst auf ihre ächte Gründe gebracht werden müsse. Und wenn auch dieses geschieht, so wird sich bey der Theorie der aus zusammengesetzten Kräften erfolgenden Bewegung immer zeigen, daß man vorerst die Zusammensetzung der bloßen Sollicitationen, oder des bloßen Druckes der Kräfte wissen müsse, weil man sonst immer auf die Schwürigkeiten der bewegten Linie C b und der zugleich mit bewegten Kraft C D verfällt.

§. 90.

Es haben demnach diejenigen, welche von solchen erfolgenden Bewegungen ganz abstrahirt haben, immer ungleich besser und richtiger verfahren. Die Bedingung des Gleichgewichtes fordert schlechthin nur, daß der Punct C nicht bewegt werde. Und dabey will man nicht wissen, welche Bewegung bey Hebung des Gleichgewichts erfolgen würde, denn es soll schlechthin gar keine erfolgen. Man betrachtet das System als in völliger Ruhe, und sucht nur die Verhältnisse der Kräfte und ihrer Richtung, die dabey vorkommen, und ohne welche der Ruhestand oder das Gleichgewicht nicht statt findet. Und so läßt sich die Zusammensetzung der Kräfte aus der Theorie des gebogenen oder Winkelhebels, so wie aus der Theorie mehrerer anderer statischen Systemen von Körpern allerdings herleiten. Wir können dahin auch noch folgende Betrachtung rechnen.

§. 91.

Fig. XVIII. Es seyn in P, Q, R drey Kräfte, welche den Punct C sämtlich an den Linien oder Faden PC, QC, RC gegen sich zu ziehen streben, so wird es irgend eine Lage des Puncts C geben, in welcher derselbe im Gleichgewichte gehalten wird. Dabey muß nun ebenfalls ein maximum oder ein minimum statt haben, und man kann sich letzteres leicht vorstellen. Denn

es ist

es ist klar, daß in dem Stande des Gleichgewichtes jede Kraft den Punct C, so viel es die beyden übrigen zuliessen, gegen sich gezogen hat. Wären demnach die Kräfte sämtlich gleich, so ist klar, daß die Summe der Distanzen $PC + QC + RC$ ein minimum seyn müßte. Da wir aber die Kräfte P, Q, R ungleich setzen, so läßt sich diese Summe der Distanzen nicht so schlechthin nehmen. Es ist aber erweisbar, daß man $P.PC + Q.QC + R.RC$ als ein minimum ansehen könne. Man könnte vielleicht diesen Satz daher leiten, daß, da jede Kraft den Punct C desto näher gegen sich zieht, je grösser dieselbe ist, in den Producten $P.PC$, $Q.QC$, $R.RC$, jede Distanz desto kleiner heraus komme, je grösser die Kraft ist, mit welcher dieselbe multiplicirt wird. Ich sehe aber dieses nicht klar ein, und so werde ich lieber den Satz aus dem tieffsten Orte des Mittelpuncts der Schwere herleiten, und in dieser Absicht, um die Figur nicht mit Linien und fremden Umständen zu überladen, zu der 16ten Figur zurücke kehren. Denn da sieht Fig. XVI. man leicht, daß wenn das Gewicht P herunter zieht der Punct C um eben so viel näher zu B komme, folglich der Theil des Fadens CB um eben so viel verkürzt werde, als der Theil BP verlängert wird. Da es nun bey der Bestimmung des tieffsten Orts des Mittelpuncts der Schwere eigentlich nicht um die absolute Länge des Fadens, sondern nur um die

Verlängerung des Theils P B, oder, welches hier einerley ist, um die Verkürzung des Theils C B zu thun ist; so kann man eben so gut — P. B C nehmen, als wir oben (§. 80.) + P. BP genommen haben. Demnach hat, Fig. XVIII. um nun wiederum auf die 18te Figur zu kommen, der Ausdruck

$$P.PC + Q.QC + R.RC$$

positiv genommen, als ein minimum betrachtet, allerdings statt, ungeachtet hieraus noch nicht aufgeklärt wird, was derselbe, so erheblich er an sich ist, in der Figur noch anders als die blosse Summe dreyer Producte bedeute. Da derselbe indessen richtig ist, so werden wir ihn folgendermassen gebrauchen.

§. 92.

Man ziehe durch Q eine beliebige Linie QJ, und fälle aus P, R, C auf dieselbe Perpendicularen PM, CN, RJ. Sodann setze man

$$QM = a \qquad QN = x$$
$$MP = b \qquad NC = y$$
$$QJ = c$$
$$JR = e$$

so findet man

$$QC = \sqrt{(xx + yy)}$$
$$CP = \sqrt{[(b-y)^2 + (x-a)^2]}$$
$$CR = \sqrt{[(y-e)^2 + (c-x)^2]}$$

demnach den Ausdruck

$$Q.\sqrt{(xx + yy)} + P.\sqrt{((b-y)^2 + (x-a)^2)}$$
$$+ R.\sqrt{((y-e)^2 + (c-x)^2)}$$

welcher

welcher ein minimum seyn muß, es mag sich x oder y allein, oder beyde zugleich, verändern. Demnach wird derselbe, sowol wenn man nach x als nach y differentiirt = o. Nimmt man demnach diese beyde Differentiationen vor, so erhält man die zwo Gleichungen

$$0=\frac{Q.x}{\sqrt{(xx+yy)}}+\frac{(x-a).P}{\sqrt{((b-y)^2+(x-a)^2)}}+\frac{(x-c).R}{\sqrt{((y-e)^2+(c-x)^2)}}$$

$$0=\frac{Q.y}{\sqrt{(xx+yy)}}+\frac{(y-b).P}{\sqrt{((b-y)^2+(x-a)^2)}}+\frac{(y-e).R}{\sqrt{((y-e)^2+(c-x)^2)}}$$

Werden diese mit der Figur verglichen, so sieht man leicht, daß die Coefficienten von P, Q, R Sinus und Cosinus von Winkeln vorstellen.

§. 93.

Man ziehe nemlich durch C eine mit QJ gleichlauffende Linie kCh; so lassen sich diese zwo Gleichungen folgendermassen ausdrücken:

$$0=Q.\cos kCQ+P.\cos kCP-R.\cos hCR$$
$$0=Q.\sin kCQ-P.\sin kCP+R.\sin hCR$$

§. 94.

Macht man demnach

$$Cp=P$$
$$Cq=Q$$
$$Cr=R$$

und

und fällt aus p, q, r auf k C h die Perpendiculären p n, q m, r h, so werden die zwo letztere Gleichungen nochmals so ins Kurze gezogen:

$$o = Cm + Cn - Ch$$
$$o = qm - pn + rh.$$

§. 95.

Man ziehe endlich das Parallelogramm q C p g vollends aus; und fälle aus g auf k C h die Perpendiculär g k; so ist vermög der Natur des Parallelogrammes

$$kn = mC$$
$$gk = pn - qm$$

Setzt man diese beyden Werthe in den zwo letztern Gleichungen, so erhält man folgende:

$$o = kn + Cn - Ch = kC - Ch$$
$$o = -gk + rh$$

demnach

$$Ck = Ch$$
$$gk = hr$$

das will nun sagen, die Diagonale C g sey $=$ Cr, und beyde liegen in gerader Linie. Und auch dieses will nun sagen, man finde zu zwoen Kräften C p, C q die Lage und Grösse der dritten C r, welche denselben das Gleichgewicht hält, wenn man das Parallelogramm q C p g vollendet, und die Diagonale C g gegen r verlängert bis C r $=$ C g wird. Und dieses ist nun wiederum der Hauptsatz von der Zusammensetzung der Kräfte.

§. 96.

§. 96.

Beweise von dieser Art lassen sich leicht noch mehrere finden. Sie zeigen aber alle mehr, daß die Sache sey, als aber wie sie sey? Man müßte die Kräfte, und die Art, wie sie wirken, genauer kennen, um daraus zu zeigen, wie sie bey der Zusammensetzung einander theils verstärken, theils hindern. Ueberdies sieht man leicht, daß in einem Beweise, der nicht etwann das ganze Product mit einem male angibt, sondern stückweise zeigt, wie es entstehe, immer zwo Sachen, und jede besonders, muß erörtert werden. Man muß nemlich nicht nur zeigen, daß jede der Kräfte in der Direction der Diagonale der beyden andern wirke, sondern auch daß diese Diagonale das Maaß derselben sey. Fig.XVII.

§. 97.

Diese beyden Sätze sind nun in einer gegenseitigen Abhängigkeit von einander. Denn erstlich, man setze, daß die Kräfte in der Richtung der Diagonalen wirken, so läßt sich daraus erweisen, die Diagonalen seyen das Maaß derselben. Denn man setze, die Kräfte seyen A C, B C, D C, und ziehe die Parallelogramme A d B C, C B a D, C D b A, nebst deren Diagonalen C d, C b, C a. Wäre nun z. E. A C nicht $=$ a C, so würde d C nicht in gerader Linie mit C D seyn. Da nun nach der Voraussetzung c d die Richtungslinie der Kraft

ist,

ist, welche man für die Kräfte A C, B C setzen kann, so wird diese, weil sie mit C D einen Winkel macht, derselben das Gleichgewicht nicht halten. Da nun dieses der Voraussetzung zuwider ist; so kann A C der Diagonale nicht ungleich seyn. Demnach ist A C = Ca, und so auch C B = C b, und C D = C d. Folglich, wenn die Kräfte in der Richtung der Diagonalen sind, so sind die Diagonalen das Maaß der Kräfte.

§. 98.

Der andere Satz ist, daß wenn die Diagonalen das Maaß der Kräfte sind, die Kräfte in der Richtung der Diagonalen wirken. Es sey wiederum die Kräfte A C, B C, D C; man vollende die Parallelogrammen A C B d, B C D a, D C A b, und ziehe die Diagonalen C a, C b, C d. Setzt man nun z. E. A C a sey in gerader Linie, so folgt nach geometrischen Sätzen, daß auch D C d, B C b in gerader Linie sind, und zwar schlechthin nur, weil A C = C a ist. Demnach, was von A C a gilt, gilt auch von D C d, B C b. Man läugne nun aber, daß A C a in gerader Linie sey, und setze z. E. A C neige sich herunterwerts. Da nun B d mit C A parallel und = C A ist, so neigt sich auch B d herunterwerts. Dadurch aber wird C d verkürzt, oder wenn man C d = C D lassen will, so ist entweder A C B d nicht mehr ein Parallelogrammum, oder C d nicht mehr dessen

Diago-

Diagonale. Alles dieses aber läuft der Voraussetzung zuwider. Eben so verstößt man dawider, wenn man setzt, A C sey aufwerts von der Direction a C weggekehrt. Demnach muß AC a in gerader Linie seyn, und damit ist es auch B C b und D C d. Folglich, wenn die Diagonalen das Maaß der Kräfte sind, so sind die Kräfte in der Richtung der Diagonalen.

§. 99.

Ich bin auf diese zween Sätze geleitet worden, als ich von der Zusammensetzung der Kräfte einen Beweis suchte, der sich nicht erst auf die Theorie des Hebels, oder den Mittelpunct der Schwere, sondern schlechthin auf die Natur der Sache selbst gründete, und den ich auch, so wie ich ihn gefunden, werde hersetzen. Vielleicht hätte ich keinen gesucht, wenn ich nicht erst nachher gesehen hätte, daß Herr D. Bernoulli auf eben dieser Spur gewesen wäre. Die in allen Absichten vortrefliche Abhandlung, die er sowol darüber, als auch über die übrigen Grundgesetze der Mechanic der gelehrten Welt mitgetheilt hat, findet sich in dem ersten Bande der Comment. Acad. Petropol. Ich hätte sie ebenfalls schon vorhin (§. 85 seq.) bey der Untersuchung des gewöhnlichen Beweises der Zusammensetzung der Kräfte anführen können, da der scharfsinnige Herr Verfasser ähnliche Schwürigkeiten aufdeckt; und so werde

ich

ich ebenfalls in folgenden Anlässe dazu haben, wo ich werde zeigen können, daß das Leibnitzische Kräftenmaaß, so weit es einen Verstand hat, darin bündig erwiesen worden. Ich zweifle nicht daran, daß der Herr Verfasser nicht sollte gewünscht haben, den von der Zusammensetzung der Kräfte gegebenen Beweis, in die Kürze zu ziehen. Da aber seine Absicht eigentlich nur dahin gienge, zu zeigen, daß diese Theorie eine geometrische Nothwendigkeit habe, so hat unstreitig die Länge oder Kürze des Beweises dabey nichts zu sagen. Es giebt Wahrheiten, deren Beweis man, ohne über die Länge zu klagen, mit Danke annehmen würde, wenn derselbe mit solcher Schärfe geführet würde, wie es Herr **Bernoulli** gethan. Uebrigens haben nachgehends Herr d'Alembert in seinen Opuscules, und Herr **Foncenex** in dem zwoten Bande der Mem. de l'Acad. R. de Turin Abkürzungen gesucht.

§. 100.

Ich fange bey dem einfachsten Fall an, um daraus nur überhaupt zu zeigen, daß es eine Zusammensetzung der Kräfte giebt. Man weiß aus der Meßkunst, daß wenn man einen Circul in drey gleiche Theile theilt, und aus dem Mittelpuncte Linien in die Theilungspuncten zieht, jede dieser Linien mit der andern einen Winkel von 120 Grad macht, und so auch

jede

jede gegen die beyden andern gleich inclinirt ist. Solche drey Linien seyen AC, BC, DC, und zugleich die Directionslinien dreyer gleichen Kräfte, welche auf den Punct C wirken, es sey daß sie denselben ziehen, oder drücken. Hier ist offenbar, daß, da der Punct C einer dieser Kräfte, wie einer jeden der andern beyden, nachgeben müßte, er keiner nachgeben kann, und daher im Gleichgewichte bleibt. Aber eben dieses Gleichgewicht bleibt, wenn man z. E. anstatt der Kräfte DC, BC eine einige gleiche Kraft aC der Kraft AC gerade entgegensetzt. Demnach ist offenbar, daß beyde Kräfte DC, BC in der schiefen Richtung DCB weder mehr noch minder auswirken als die Kraft aC allein. Nun sind die Winkel $DCa = BCa = 60$ Gr. Da nun $DC = CB = Ca$ ist; so ist auch $Da = aB = DC = CB$, demnach CDaB ein Rhombus, und Ca dessen Diagonale. Für diesem Fall ist demnach das Gesetz der Zusammensetzung der Kräfte ohne Mühe erwiesen. Fig. XIX.

§. 101.

Man kann sich auf eine ähnliche Art eine beliebige Anzahl gleicher Kräfte gedenken, die auf einen Punct in solchen Directionen angebracht sind, die einen Circul in eben so viele gleiche Theile theilen als Kräfte sind. Daß sie einander das Gleichgewicht halten, erhellet ohne Schwürigkeit, weil der Punct, auf den sie angebracht sind, einer jeden nachgeben

 müßte.

müßte. Von solchen Kräften wirkt jede soviel als die übrigen zusammen. Eben so lassen sich, welche man will, zusammennehmen, und ihre vereinigte Wirkung wird der vereinigten Wirkung der übrigen gleich seyn. Denn in allen diesen Absichten betrachtet, bleibt das Gleichgewicht. So z. E. wenn auf den Punct C fünf gleiche und im Circul herum gleich ver-
Fig. XX. theilte Kräfte A C, B C, D C, E C, F C wirken, so zieht A C den Punct eben so viel gegen sich, als die übrigen vier Kräfte B C, D C, E C, F C denselben gegen G ziehen. Die Wirkung dieser vier Kräfte ist demnach diejenige, die eine Kraft G C allein haben würde. Auf eine ähnliche Art wirken die drey Kräfte A C, B C, F C nicht mehr als die zwo Kräfte D C, E C, wei sonst der Punct C gegen A würde gezogen werden. Man sieht hieraus, wie man auch die von mehreren Kräften herrührende Wirkung zu betrachten hat. Zugleich sieht man hier, wie bey dem vorhin (§. 100.) betrachteten Fall, den an sich klaren Satz bekräftigt, daß die gemeinsame Wirkung zwoer gleichen Kräfte sich in derjenigen Richtung äussert, welche mitten zwischen sie fällt. Denn so ziehen die beyden Kräfte B C, F C den Punct C gegen A, so wie ihn die beyden Kräfte D C, E C gegen G ziehen. Letztere beyde unstreitig viel stärker als die erstern, weil sie nicht nur dem Zug der Kräfte B C, F C, sondern noch überdies dem Zug der Kraft A C das Gleichgewicht

gewicht halten. Daß aber gleiche Kräfte, z. E. D C, E C den Punct C gegen G ziehen, folgt schlechthin aus deren Gleichheit. Denn welche von beyden denselben näher gegen sich zöge, so würde es auch von der andern geschehen. Und beydes zugleich kann nicht seyn. Wären hingegen die Kräfte ungleich, so läßt sich, überhaupt betrachtet, gedenken oder vermuthen, daß die stärkere den Punct C näher gegen sich ziehen werde. Ich sage, vermuthen, denn wir werden bald sehen, daß die wahre Direction der zusammengesetzten Kräften nicht so leicht zu bestimmen ist, und daß man die Grösse derselben findet, ehe man von ihrer Direction noch nichts schliessen kann.

§. 102.

Ich fange bey dem Satze an, daß wenn drey Kräfte, so auf einen Punct wirken, im Gleichgewichte sind, das Gleichgewicht bleibe, wenn jede Kraft in einerley Verhältniß grösser oder kleiner genommen, die Direction aber nicht verändert wird. Denn eine doppelte, drey, vier rc. n fache Kraft gilt was zwo, drey, vier rc. n einfache, und so bleibt der Punct zwey, drey, vier rc. n fach unbewegt; das will sagen, er bleibt unbewegt, man mag jede Kraft doppelt, drey, vier rc. n fach nehmen. Demnach auch wenn man jede m fach nimmt. Demnach auch wenn jede $\frac{m}{n}$ fach genommen wird.

§. 103.

Es seyn nun zwo Kräfte AC, BC, welche
Fig. XXI. in senkrechter Direction auf den Punct C wirken, so giebt es irgend eine Kraft EC, welche denselben das Gleichgewicht halten kann, so, daß demnach die vereinigte Wirkung der Kräfte AC, BC sich in der entgegengesetzten Richtung CD äussert, und = CD = CE ist. Die Frage ist nun, deren Grösse und Richtung zu bestimmen. Man setze CD stelle beydes vor, und ziehe δCd auf CD senkrecht, so ist wegen der beyden rechten Winkel ACB, DCd, der Winkel δCB = DCA, und so auch dCA = DCB. Da demnach BC gegen DC, Cδ und AC gegen dC, DC eben die Lage hat, wie DC gegen BC, AC; so läßt sich die Kraft BC auf die Richtungen DC, δC, und die Kraft AC auf die Richtungen dC, DC eben so vertheilen, wie die Kraft DC auf die Richtungen BC, AC vertheilt ist. Man mache demnach (§. 102.)

$$DC : BC = BC : \varepsilon C$$
$$DC : AC = BC : \delta C$$
$$DC : BC = AC : dC$$
$$DC : AC = AC : \alpha C$$

so werden die Kräfte δC, εC anstatt BC, und die Kräfte dC, αC anstatt AC gesetzt werden können, ohne daß das Gleichgewicht mit CE gehoben werde. Nun geben diese vier Analogien folgende vier Werthe

εC

$$\varepsilon C = BC^2 : DC$$
$$\delta C = AC.BC : DC$$
$$d C = AC.BC : DC$$
$$\alpha C = AC^2 : DC$$

Demnach haben wir erstlich $\delta C = d C$. Da nun diese beyde Kräfte in entgegengesetzter Richtung sind, so halten sie an sich schon einander das Gleichgewicht. (§. 13.) Und dieses ist eben so viel, als wenn sie nicht da wären, weil sie den Punct C eben so unbewegt lassen (§. 46). Da demnach die Kräfte $C\alpha$, $C\varepsilon$ allein der Kraft $CE = CD$ das Gleichgewicht halten, und in eben der Richtung sind, so haben wir

$$C\alpha + C\varepsilon = CD$$

demnach

$$\frac{AC^2 + BC^2}{DC} = DC$$

oder

$$AC^2 + BC^2 = DC^2$$

Da nun dieses der Pythagorische Lehrsatz, und ACB ein rechter Winkel ist, so haben wir

$$CD = AB$$

und dadurch ist die Grösse der Kraft CE gefunden, so wenig wir noch von ihrer Direction wissen.

§. 104.

Es giebt auch hiebey ein einiger Fall, wo sich diese Direction für sich finden läßt, nemlich derjenige, wo $BC = AC$ ist. Denn da theilt

D C den Winkel B C A in zween gleiche Theile, (§. 102) und so ist sie nicht nur der Diagonale des Quadrats gleich, sondern sie wirkt auch in derselben Richtung.

§. 105.

Hingegen wo die Kräfte B C, A C ungleich sind, wissen wir nur noch die Grösse der Kraft E C $=$ D C, von ihrer Lage oder Richtung aber noch nichts. Wir können dabey nur so viel annehmen, daß wenn eine Kraft D C in zwo rechtwinklichte Kräfte A C, B C solle aufgelöst werden, diese so angenommen werden müssen, daß A B $=$ C D werde. Wenn wir demnach den Winkel C B A $= \varphi$ setzen, so folgt überhaupt, daß

$$BC = CD \cos\varphi.$$
$$AC = CD \sin\varphi$$

seyn müsse. Da nun aber noch der Winkel B C D eigentlich zu suchen ist, weil dieser die Richtung der Kräfte bestimmt, so wollen wir denselben $= \omega$ setzen, und so werden wir

$$BCD = \omega$$
$$ACD = 180^\circ - \omega$$

haben. Nun ist zu sehen, ob zwischen φ und ω ein Verhältniß gefunden werden kann. Und dahin dient folgender Lehrsatz:

§. 106.

Fig. XXV. Es seyen zwo gleiche Kräfte CD, Cd auf den Punct C gerichtet, und jede nach den Rich-

Richtungen BC, AC in rechtwinklichte Kräfte aufgelöst, nemlich

$$CD \text{ in } CA \text{ und } CB$$
$$Cd \text{ in } Ca \text{ und } Cb$$

Die Winkel seyen

$$DCA = \omega$$
$$dCA = \omega'$$

so lassen sich die Kräfte

$$CD = 1 \quad CA = \cos.\varphi \quad Ca = \cos.\varphi'$$
$$Cd = 1 \quad CB = \sin.\varphi \quad Cb = \sin.\varphi'$$

setzen. Endlich mache man den Winkel

$$\delta CD = dCA$$

und $C\delta = 1$

so wird

$$\delta CA = \omega + \omega'$$

seyn. Und wenn die Kraft $C\delta$ in die rechtwinklichten $C\alpha$, und $C\beta$ aufgelöst wird, so sage ich, es werde

$$C\alpha = \cos.(\varphi + \varphi')$$
$$C\beta = \sin.(\varphi + \varphi')$$

seyn. Um dieses zu beweisen, so ziehe man Ce auf CD senkrecht. Ferners mache man

$$C\varepsilon = Ca = \cos.\varphi'$$
$$Ce = Cb = \sin.\varphi'$$

und setze die Kraft $C\varepsilon$ in die zwo rechtwinklichten Ck, $C\varkappa$, und die Kraft Ce in die zwo rechtwinklichten Cg, $C\gamma$ aufgelöst. Da nun der Winkel

$$eCB = DCA = \omega$$

und $\delta C\varepsilon = dCA = \omega'$

 so ist

so ist

$Ck = C\varepsilon . \cos\varphi = Ca . \cos\varphi = \cos\varphi . \cos\varphi'$
$C\gamma = Ce \sin\varphi = Cb \sin\varphi = \sin\varphi . \sin\varphi'$

demnach

$C\alpha = Ck - C\gamma = \cos\varphi . \cos\varphi - \sin\varphi , \sin\varphi$
$= \cos(\varphi . + \varphi')$

Eben so ist

$C\varkappa = C\varepsilon \sin\varphi = Ca \sin\varphi = \sin\varphi . \cos\varphi'$
$Cg = Ce . \cos\varphi = Cb . \cos\varphi = \cos\varphi . \sin\varphi'$.

Demnach

$C\delta = C\varkappa + Cg = \text{ſ}\,\varphi . \cos\varphi' + \cos\varphi . \text{ſ}\,\varphi'$
$= \sin(\varphi + \varphi')$

§. 107.

Hieraus folgt nun, daß wenn gleiche Kräfte unter dem Winkel

ω in zwo rechtwinklichte $\sin\varphi$, $\cos\varphi$
ω' - - - - - - - $\sin\varphi'$, $\cos\varphi'$

aufgelößt werden, eine gleiche Kraft unter dem Winkel $(\omega + \omega')$ in zwo rechtwinklichte sin. $(\varphi + \varphi')$, cos. $(\varphi + \varphi')$ aufgelößt werde.

§. 108.

Dieses zeigt demnach überhaupt an, daß in der That die Winkel φ, φ' eine Function der Winkel ω, ω' sind, und jene mit diesen grösser werden. Daß sie aber in gleicher Verhältniß grösser werden, läßt sich nun folgender massen erweisen. Man stelle die Winkel ω,
Fig. XXIII. ω', $(\omega + \omega')$ durch die Abscissen AP, AQ, AR vor, so, daß

AP

$$AP = \omega$$
$$AQ = \omega'$$
$$AR = \omega + \omega'$$

sey, so ist auch

$$AQ = PR, \text{ und } AP = QR$$

Ferners sey

$$PM = \varphi$$
$$QN = \varphi'$$
$$RL = \varphi + \varphi'$$

so ist auch wenn LK mit AR parallel gezogen wird,

$$PM = TN, \text{ und } SM = QN.$$

Hieraus folgt aber, daß AMLN keine krumme Linie seyn könne, sondern gerade seyn müsse. Denn zieht man durch A, L eine gerade Linie AmnL, so ist wegen AP = TL, auch

$$Pm = Tn \text{ und } Sm = Qn.$$

Und so muß M in m, N in n treffen, wie man auch immer die Abscissen AR, AQ, AP dergestallt annimmt, daß

$$AP + AQ = AR$$

sey. Demnach ist auch

$$AP : PM = AQ : QN = AR : RL$$

oder

$$\omega : \varphi = \omega' : \varphi' = (\omega + \omega') : (\varphi + \varphi')$$

§. 109.

Wenn wir demnach

$$\varphi = n\omega$$

setzen, so ist auch

$$\varphi' = n\omega'$$
$$\varphi'' = n\omega''$$
&c.

und

$$\varphi + \varphi' = n(\omega + \omega')$$
$$\varphi + \varphi' + \varphi'' = n(\omega + \omega' + \omega'')$$
&c.

§. 110.

Nun lassen sich drey Winkel ω, ω', ω'' immer so annehmen, daß ihre Summe $= 90°$ wird. In diesem Fall aber wirkt die Kraft unter dem Winkel $\omega + \omega' + \omega''$ rechtwinklicht, und so wird

$$\sin.(\varphi + \varphi' + \varphi'') = 1.$$
$$\cos.(\varphi + \varphi' + \varphi'') = \omega$$

das will sagen

$$\varphi + \varphi' + \varphi'' = 90°. = \omega + \omega' + \omega''$$

demnach

$$n = 1.$$

Es sind also nicht nur die Winkel φ in Verhältniß der Winkel ω, sondern sie sind einander durchaus gleich. Demnach ist BCD $=$ CBA, und folglich CD die Diagonale des auf BCA zu beschreibenden Rectangels. Fig. XXI.

§. 111.

Fig. XXIV. Hieraus ergiebt sich nun der Fall für die Kräfte CA, CB die unter jedem schiefen Winkel auf einen Punct C wirken. Denn man vollende das Rectangel CbBβ, so wird die Kraft

Kraft CB in Cb und Cε aufgelöst. Ferners trage man Cε aus A in δ, so sind die Kräfte CB, CA in Cb, Cδ aufgelöst. Vollendet man nun das Rectangel CbDδ, so wird die Diagonale C D die Kraft seyn, welche aus Cb, Cδ demnach aus CB, CA zusammengesetzt ist. Es ist aber CD ebenfalls die Diagonal des Parallelogramms CBD A, und damit ist die Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte auf das allgemeinste erwiesen. Ich werde indeß noch folgenden Satz beyfügen.

§. 112.

Es seyen 3 Kräfte CA, CD, CB auf den Fig. Punct C gerichtet, im Gleichgewichte. Man verlängere A C in Cα = A C, und B C in CE = BC. Sodann ziehe man dCb durch C auf AC senkrecht, und setze die Kraft CD in die zwo rechtwinklichten Cd, Cδ, ingleichem die Kraft C B in die zwo rechtwinklichten Cb, Cε aufgelöst; so ist

$$Cb = Cd$$
$$CA = C\varepsilon + C\delta$$

Nun setzt man die Winkel

$$BC\alpha = \omega$$
$$DC\alpha = \omega'$$
$$ECD = \omega''$$

so ist

$$\omega + \omega' + \omega'' = 180^\circ$$

Ferner

Ferners wird

$$C\varepsilon = CB \cos\varphi \quad Cb = CB \sin\varphi$$

$$C\delta = CD \cos\varphi' \quad Cd = CD \sin\varphi'$$

und demnach

$$CB.\sin\varphi = CD.\sin\varphi'$$

$$CA = CB.\cos\varphi + CD.\cos\varphi'$$

seyn. Aus diesen beyden Gleichungen findet sich

$$\cos\varphi = \frac{CA^2 + CB^2 - CD^2}{2.CA.CB}$$

$$\cos\varphi' = \frac{CA^2 + CD^2 - CB^2}{2.CA.CB}$$

und auf eben die Art erhält man

$$\cos\varphi'' = \frac{CB^2 + CD^2 - CA^2}{2.CB.CD}$$

Es sind demnach φ, φ', φ'' die Winkel eines aus den drey Kräften A C, BC, DC formirten Triangels, und folglich

$$\varphi + \varphi' + \varphi'' = 180^\circ.$$

Wenn man demnach auch (§. 109.)

$$\varphi + \varphi' + \varphi'' = n(\omega + \omega' + \omega'')$$

setzen wollte, so sieht man leicht, daß

$$180^\circ = n.180^\circ$$

folglich

$$n = 1$$

und damit

$$\varphi = \omega,\ \varphi' = \omega',\ \varphi'' = \omega''$$

herauskömmt. Damit aber sind auch ω, ω', ω'' die Winkel eines aus AC, BC, DC gebil-

deten

deren Triangels. Und das will nun sagen, diese Kräfte sind Diagonalen und liegen in deren Direction.

Erste Gründe der Dynamic.

XI. Das Entstehen der Bewegung.

§. 113.

Die erstgegebenen Beweise von der Zusammensetzung der Kräfte sind so unmittelbar aus der Natur der Sache selbst hergeleitet, daß sie von allem, was wir in den vorhergehenden Hauptstücken von dem Hebel und den daraus folgenden Bedingungen und Umständen des Gleichgewichtes erwiesen haben, schlechterdings unabhängig sind, ungeachtet die Sache selbst, nemlich die Zusammensetzung der Kräfte, allerdings auch daraus hergeleitet werden kann. Da sich hinwiederum auch die Theorie des Hebels aus der Zusammensetzung der Kräfte erweisen läßt, so hätten wir die ganze Abhandlung bey den erstbemeldten Beweisen anfangen und sodann die Theorie des Hebels darauf gründen können. Und dieses wäre in verschiedenen Absichten ganz natürlich gewesen, weil man die bey dem Hebel, und besonders bey dem gebogenen oder Winkelhebel angebrachte Kräfte, ungeachtet sie nicht auf einen und eben den Punct unmittelbar wirken, dennoch als zusammengesetzt ansehen kann. Ja, man kann sagen, die Zusammensetzung dabey sey noch weniger einfach als da, wo die Kräfte auf einen Punct angebracht sind.

§. 114.

Ich werde mich aber hiebey nicht länger aufhalten, sondern zu denjenigen Wirkungen der Kräfte fortschreiten, wo die Frage: ob, oder wieferne sie sich a priori und auf eine geometrisch nothwendige Art erweisen lassen, ungleich schwerer wird. Denn, wie wir bisher gesehen haben, geht die Static oder Lehre des Gleichgewichtes mit der Geometrie zu gleichen Schritten; und wo immer Kräfte vorkommen, können sie keine andere Bedingungen des Gleichgewichtes haben. Was aber hingegen erfolge, wo eine Ueberwucht vorkömmt, oder kein Gleichgewicht statt hat, oder wo Kräfte wirken, ohne von andern Kräften im Gleichgewichte gehalten zu werden, das scheinen Fragen von ganz anderer Art zu seyn. Wollten wir uns hier nur an das halten, was die Erfahrung lehrt, und was folglich in der gegenwärtigen Welt statt findet, so wären diese Fragen bald erörtert, und dieses würde auch zum Gebrauche der Mechanic hinreichend seyn, wo man ein Pfund Bley als ein Pfund annimmt, ohne zu untersuchen, ob es nicht hätte schwerer oder leichter seyn können?

§. 115.

§. 115.

Die bereits oben (§. 3. 9.) gemachte Anmerkung, daß die Kräfte nicht sichtbar, sondern nur empfindbar sind, kann uns begreiflich machen, warum wir sie, wenn wir sie aufsuchen wollen, leicht mit ihren Wirkungen confundiren, und sie bald in der Materie, bald in ihrer Bewegung suchen. Die Bewegung setzt Kräfte voraus, dadurch sie verursacht wird; und hinwiederum scheint es, als ob sich ohne Bewegung keine Kraft gedenken lasse. Und so kann man richtig den Schluß machen, daß entweder Bewegung oder Kraft von Ewigkeit her seyn müsse. Solle eines von beyden seyn, so wird es die Kraft, und zwar in einem weit allgemeinern Sinn genommen, seyn, weil noch zu mehreren andern Kräfte erfordert werden, als nur zur Bewegung.

§. 116.

Ohne uns aber in solche Untersuchungen ferner einzulassen, so können wir bey den Begrif der Kraft bleiben, der uns in dem vorhergehenden zur Bestimmung der Gesetze des Gleichgewichtes gedient hat, und wozu derselbe klar genug, und man kann sagen, eben so klar war, als in der Geometrie der Begrif des Raumes (§. 12); der Begrif der Bewegung ist es nicht minder (§. 1. 2). Und so müßte man auch den Kräften den bey dem Gleichgewichte betrachteten Druck absprechen, wenn

man

man ansehen wollte, ob bey Aufhebung des Gleichgewichtes eine Bewegung erfolgen werde? Darüber kann man nicht anstehen. Und eben so ist es für sich einleuchtend, daß die Bewegung nach eben der Direction erfolgen werde, nach welcher die Kraft, sie mag nun einfach oder zusammengesetzt seyn, ihren Druck äussert. Wie es aber um die Dauer und Geschwindigkeit stehe, das muß etwas umständlicher untersucht werden, weil Zeit, Raum, Kraft, und das, was bewegt wird, oder die Materie, heterogene Grössen sind, wobey das Absolute von dem Relativen, und das, was in der gegenwärtigen Welt wirklich vorkömmt, von dem, was ebenfalls darin hätte vorkommen können, genau zu unterscheiden ist.

§. 117.

Sollen wir hiebey a priori gehen, so haben wir nur absolute Möglichkeiten und Unmöglichkeiten zu betrachten, und einander entgegen zu setzen, und bey dem Zusammensetzen der Möglichkeiten zu sehen, welche einander ausschliessen, oder nicht beysammen seyn können? So z. E. können wir, in Ansehung der Geschwindigkeit, ohne Bedenken, feste setzen, daß sie linear ist, und daher nur eine Dimension habe; das will sagen, daß das Quadrat, der Cubus, das Biquadrat rc. der Geschwindigkeit, keine Geschwindigkeit sey, sondern wenn dadurch je etwas vorgestellt werden kann, etwas ganz anders vorgestellt werde. Hiedurch lassen

lassen sich diejenigen Fälle ausschliessen, wo die Geschwindigkeit mehr als eine Dimension haben würde.

§. 118.

Wir haben ferners das, was in Bewegung gesetzt werden solle, Materie genennt (§. 116), theils um es durch eine Benennung von der bewegenden Kraft zu unterscheiden, und in so fern wäre jeder andere Name dazu dienlich gewesen; theils auch weil in der wirklichen Welt in der That das, so in Bewegung gesetzt wird, den Namen Materie hat. Ein Körper bewegt sich, so viel wir wissen, nur sofern er Materie ist. Denn der Raum, den er einnimmt, bewegt sich nicht mit demselben, weil eben dadurch Bewegung Bewegung ist, daß der Körper aus einem Raum oder Orte in einen andern kömmt. Ob in dem Körper noch immaterielle Substanzen sind, können wir hier dahin gestellet seyn lassen, ungeachtet man Gründe hat die Kräfte, und besonders die elastische, als solche anzusehen.

§. 119.

Man hat ferners demjenigen, so durch Kräfte in Bewegung gesetzt wird, oder der Materie, eine Art von Trägheit, (inertia) oder **Kraft der Trägheit**, (vis inertiae) zugeeignet, wodurch die Materie der Bewegung widersteht, so, daß sie ohne wirkliche Anwendung der Kraft nicht bewegt wird. In diesem

Begriffe liegt etwas verwirrtes, wir mögen denselben nach Anleitung der Erfahrung a posteriori, oder nach der Abzählung der Möglichkeiten a priori betrachten. A posteriori betrachtet, kann man nemlich diese Trägheit der Materie der Wirkung der Kraft nicht so entgegen setzen, daß sie für sich zureichend wäre, dem Drucke einer Kraft das Gleichgewicht zu halten. Darüber ist man, nach Anleitung der Erfahrung ganz einig, daß die kleinste Kraft die gröste Masse in Bewegung setzen kann. Die Erfahrung giebt, daß der Unterschied nur auf die Geschwindigkeit ankömmt, als welche bey grösserer Kraft grösser, bey grösserer Masse kleiner ausfällt.

§. 120.

Hiebey kann man nun, a priori betrachtet, so viel einräumen, daß bey einer grössern **Kraft eine grössere Geschwindigkeit gewirkt werde**, als bey einer kleinern, **wenn nemlich einerley Materie fortzudrücken ist.** Denn sonst würde aus ungleichen Ursachen gleiche Wirkung erfolgen, und daher in der Wirkung bald mehr, bald minder seyn, als in der Ursache. So kann auch eine gleiche **Kraft eine und eben dieselbe Materie nicht mit jeder Geschwindigkeit fortdrücken**, denn so müßten alle Geschwindigkeiten zugleich vorkommen, und dieses gäbe demnach eine zweyte Dimension der Geschwindigkeit,

welches

welches nicht angeht (§. 117). Demnach ist die Geschwindigkeit bestimmt, sobald Materie und Kraft bestimmt ist. Drückt nun eine Kraft k eine Materie m mit der Geschwindigkeit g fort, so thut eine andere Kraft k bey einer andern Materie m, und daher eine Kraft 2 k bey einer Materie 2 m eben dieses. Hingegen wird eine Kraft k diese Materie 2 m mit geringerer Geschwindigkeit fortdrücken, als die Kraft 2 k. Daher kann man allerdings annehmen, daß sich die Geschwindigkeit vermindert, wenn bey gleicher Kraft die Materie vermehrt wird.

§. 121.

Dadurch wird nun noch nicht erörtert, was es mit dieser Geschwindigkeit für eine Bewandniß habe. Es lassen sich aber dabey, ohne Mühe, drey Fälle gedenken. Denn einmal könnte die Materie so sehr träge seyn, daß sie, sobald die Kraft aufhört fortzudrücken, liegen bleibe. Ich werde mich hiebey nicht auf die Erfahrung berufen, welche uns täglich Beyspiele von einem solchen Fortschleppen aufweist. Denn diese Beyspiele gehören nicht hieher, weil man längst weiß, daß theils das Antreiben, theils das Fallen der Körper der Grund davon ist, weil solche Körper sich in parabolischen Bögen bewegen, die sich kaum über die Erde erheben. Ich werde demnach, und zwar als etwas Widersinniges sagen, daß, so viel ich mir die Sache vorstellen kann, eine solche absolute Trägheit der Materie in dem völlig leeren Raume statt habe. Ich sage nicht, in dem von aller Materie leeren, sondern in dem völlig, das will sagen, von jeden, auch immateriellen Substanzen, leeren Raume. In dem von jeder Materie leeren Raume gebe ich zu, daß ein einmal bewegter Körper mit gleicher Geschwindigkeit und in gleicher Direction fortfahren könne bewegt zu werden. In dem völlig leeren Raume kann ich mir diese Möglichkeit nicht vorstellen, so wie ich mir in demselben auch nicht vorstellen kann, daß nicht eine gleiche Kraft, jede Materie mit gleicher Geschwindigkeit sollte fortdrücken können. Denn solle überhaupt die Materie eine Trägheit, und demnach mehr Materie mehr Trägheit haben (§. 119. 120), so muß jede Materie an dem Orte, wo sie ist, dergestalt haften, daß eine Kraft erfordert wird, um sie wegzubringen. Dieses ist für sich klar. Nun stelle ich mir wenigstens eben so klar vor, daß dieses haften in einem völlig leeren Raume keine Bedeutung oder keinen Verstand hat. Nemlich die Materie mag darin in Ruhe seyn, aber diese Ruhe an sich, oder schlechthin als Ruhe betrachtet, hat keine Dimension oder Grösse, so, daß ein gewisser Grad der Kraft erfordert würde, um sie wegzunehmen. Ich will damit sagen: die Trägheit der Materie, wenn sie etwas mehr als nicht in Bewegung seyn,

seyn, vorstellen solle, rührt nicht von der Materie allein, sondern zugleich auch von etwas ausser derselben her. Und dieses Etwas muß machen, daß die Materie nicht anderst als mit Anwendung, und, so zu reden, mit Aufopferung der Kraft in Bewegung gesetzt wird. Und eben dieses Etwas stelle ich mir als das Vehiculum zur Fortsetzung der Bewegung vor, sollte diese auch auf keine andere Art, als durch eine fortgepflanzte Undulation möglich seyn, vermittelst welcher die bewegte Materie fortgeführt wird. Ohne ein solches Vehiculum sehe ich auch nicht, wie die Materie sich weiter fortbewegen würde, als so weit sie von der Kraft getrieben wird; und ebenfalls ohne ein solches Vehiculum sehe ich auch nicht, wie in einem gänz leeren Raume ein motus progressivus entstehen könnte, weil selbst die Kraft, um fortdrücken zu können, sich irgend muß können ansperren.

§. 122.

Indessen da diese Betrachtung mehr in die Metaphysic als in die Mechanic gehört, so werde ich mich hier begnügen, die vorhin bemeldte absolute Trägheit der Materie, als eine bloße Möglichkeit anzusehen. Und in sofern macht sie den ersten von denen drey Fällen aus, die wir hier vorzuzählen haben. Der andere Fall ist, wenn die Kraft ihren Druck auf die Materie, sobald sie angebracht, oder das Gleichgewicht gehoben ist, ohne allen Verfluß einiger Zeit, dergestalt äussert, daß die Materie sogleich mit der völligen, aus der Aeusserung des Druckes entstehenden, Geschwindigkeit wegfährt. In diesem Fall hat der Druck, der Dauer nach, keine Dimension, weil man sonst auf eine zweyte Dimension der Geschwindigkeit verfallen würde, welches nicht angeht (§. 117). Es läßt sich daher zwar gedenken, daß nach dem ersten Drucke p, welcher die Geschwindigkeit c herfürbringt, ein zweyter, dritter ꝛc. angebracht, und dadurch die Geschwindigkeit 2c, 3c, n c &c. erhalten werden. Dieses sind aber numeri discreti und nicht quantitates continuae, dergleichen das Integrale ∫cdt angeben würde, wenn in jeder unendlich kleinen Zeit dt ein neuer Grad der Geschwindigkeit c hinzukäme.

§. 123.

Dieses klärt uns nun den dritten Fall auf, wo wir setzen, daß die Geschwindigkeit nicht mit einem male, oder ohne allen Zeitverlust erwachse. Denn da muß in jeder unendlich kleinen Zeit dt ein unendlich kleiner Theil dc der ganzen Geschwindigkeit c entstehen, weil wir sonst entweder den zweyten Fall, oder eine zweyte Dimension der Geschwindigkeit haben würden.

§. 124.

Die zween letztere Fälle (§. 122. 123.) grenzen gewissermassen an einander, weil man sich

sich die Zeit t, in welcher die ganze Geschwindigkeit c erwächst, so klein gedenken kann, als man will. Bey dem zweyten Fall gedenkt man t=o. Und soll dieses absolute seyn, so verstößt man wieder das Gesetz der Continuität, daferne man nicht auch die Intensität der Kraft unendlich annimmt. Ist hingegen t von einer Dauer oder endlichen Grösse, so muß man sich allerdings vorstellen, daß die Kraft ihren Druck nicht mit einem male auf das Herfürbringen der Geschwindigkeit verwende, weil in der Zeit dt nur dc herfürgebracht wird. Dieses ist nun aus einem gedoppelten Grunde gedenkbar. Denn einmal muß die Geschwindigkeit jeden Theilchen der Materie mitgetheilt, und daher auf alle vertheilt werden. Wenn sie dennach auch bey dem ersten Theilchen = c seyn würde, so würde sie, eben wegen dieser Vertheilung, auf dc reducirt. Man sieht hieraus zugleich, daß die Menge der Theilchen, oder die Menge und Grösse der Materie, die Geschwindigkeit dc vermindert, je grösser sie ist. Und eben so ist auch begreiflich, daß dieses Vertheilen der Geschwindigkeit eine Zeit dt fordert. Sodann kann man auch annehmen, daß selbst die Kraft ihren Druck auf eine so vertheilte Art äussert, und derselbe daher auch nur nach und nach aufgewandt wird. Ueberdies lassen sich bey der Kraft zwo Dimensionen, nemlich die Grösse und die Stärke, unterscheiden, weil eine Kraft sowol mehrern

Theilchen der Materie eine gleiche Geschwindigkeit, als jedem Theilchen eine grössere Geschwindigkeit geben kann; so, daß demnach beyde Dimensionen, oder die ganze Kraft k sich nach mdc schätzen läßt, und demnach dcvk : m, oder, wenn wir die Zeit noch mitnehmen, dc=kdt : m ist.

§. 125.

Die Nothwendigkeit dieser Formel gründet sich demnach darauf, 1°. daß jedes Theilchen der Materie eine Trägheit hat, und sich gleichsam an etwas ansperrt, um nicht anders als durch die wirkliche Anwendung der bewegenden Kraft bewegt werden zu können. 2°. Daß diese Trägheit der Menge der Materie proportional ist, oder daß sich jedes Theilchen der Materie gleich ansperrt, und dadurch zur Bewegung gleich träge ist. Hiebey läßt sich anmerken, daß wir die Materie und ihre Menge nicht anders als aus dieser Trägheit kennen, und daß wir uns demnach darüber sehr irren würden, wenn das vorhin (§. 121) erwähnte Vehiculum eine an verschiedenen Orten verschiedene Intensität hätte. Auf die Formel selbst hätte aber dieses dennoch keinen Einfluß, weil wir das, was von dieser Intensität herrührt, theils auf die Materie, theils auch auf die Kraft selbst schieben. 3°. Daß der Druck der Kraft sich auf die Materie vertheilt, und in Ansehung der Kraft selbst, wegen einer ähnlichen Vertheilung, nur nach und nach aufgewandt wird.

§. 126.

Wie nun immer hiebey die Dimensionen, die sich sowol bey der Kraft als bey der Materie gedenken lassen, müssen genommen werden, so liegt allemal dabey zum Grunde, daß die Fälle an sich unmöglich sind, wo eine mehr als lineare Geschwindigkeit herauskommen würde (§. 117). Um diese Bedingung deutlich zu machen, werde ich sie durch Beyspiele aufklären, die wirklich vorkommen. So z. E. haben wir oben (§. 77. 78.) gesehen, daß die Kraft der Schwere auf jede Theilchen der Materie, und zwar auf jedes directe und besonders drücke. Sie theilt demnach ihren Druck nicht erst den äussern Theilchen, noch vermittelst dieser den innern mit, so, daß sie erst communicationsweise vertheilt würde. Drückt man hingegen eine gespannte Feder gegen einen Körper loß, so verhält sich die Sache ganz anders; weil die Feder ihren Druck nur denjenigen Theilchen des Körpers unmittelbar mittheilt, welche sie berührt, und erst von diesen geht der Druck sodann in die innern Theile des Körpers, und breitet sich in demselben ganz aus. Hiebey ist nun offenbar, daß man die Kraft der Feder ganz anders nehmen müsse, als die Kraft der Schwere. Letztere hat für jedes Theilchen ein absolutes Maaß, und der Druck der Schwere wird mit der Anzahl der Theilchen weder stärker noch schwächer, sondern nur grösser. Hingegen hat der Druck der Feder, an sich betrachtet, eine absolute Stärke, welche aber, wenn sich derselbe auf den ganzen Körper vertheilt, in umgekehrter Verhältniß der Masse, in jedem Theilchen schwächer wird. Da die Geschwindigkeit, die in beyden Fällen erwächst, bloß linear oder von einer Dimension seyn muß (§. 117), so läßt sich allerdings gedenken, daß, so verschieden auch die Dimensionen dieser beyden Arten von Kräften sind, sie sich dennoch, wenigstens mittelst behöriger Coefficienten, welche die Heterogeneität der Dimensionen aufheben müssen, können vergleichen lassen.

§. 127.

Man sieht zugleich hieraus, daß die Bedingung der bloß linearen Geschwindigkeit sehr weit reicht, wenn man a priori die Möglichkeiten bey den bewegenden Kräften und der daraus entstehenden Bewegung bestimmen, und das, was dabey willkührlich und contingent scheinen möchte, behörig einschränken will. So erhellet auch zugleich, daß, wenn eine Masse mit einer bestimmten Geschwindigkeit bewegt werden solle, jedes Theilchen derselben einen Druck von bestimmter Stärke erhalten müste, wie auch immer die drückende Kraft dabey angebracht seyn mag. Das Zufällige oder Willkührliche führliche mag darin gesucht werden, daß da Zeit, Raum, Geschwindigkeit, Masse, Kraft rc. keine absolute Einheit haben, sondern von 0 bis ins Unendliche gehen können, sie dennoch, wo sie existiren, eine bestimmte Grösse haben müssen. Da ist nun allerdings die Frage, ob nicht alles in gleicher, oder wenigstens in behöriger Verhältniß hätte grösser oder kleiner seyn können, schwerer zu entscheiden.

§. 128.

Da sichs demnach gedenken läßt, daß der Druck, den eine Kraft äussert, entweder unmittelbar auf jedes Theilchen der Materie wirkt, oder sich nur bey einigen unmittelbar äussert, oder endlich sich bey jedem Theilchen ungleich äussert, so wird derselbe, wegen der Solidität und der Bebindung dieser Theilchen, auf alle gleich vertheilt, oder, welches hier einerley ist, die ganze Masse erhält einen mittlern Grad der Geschwindigkeit, welcher sich nach den auf jedes Theilchen der Materie vertheilten Drucke proportionirt. Wird hingegen dieser Druck von einem gleich grossen und gleich vertheilten Drucke in entgegengesetzter Richtung aufgehalten, so findet ein Gleichgewicht statt. Hieraus wird begreiflich, wie sich ganz verschiedene Kräfte, wie z. E. der Druck der Schwere, der stählernen Federn, der zusammengepreßten Luft rc. vermittelst des Gleichgewichtes auf ein gemeines Maaß bringen, und selbst auch in Absicht auf die erfolgende Bewegung vergleichen

lassen.

lassen. Ersteres geht schlechthin an, letzteres fordert, daß man die Art der Kraft, oder die Art, wie sie ihren Druck äussert und mittheilt, genauer kenne. Denn da die Theorie a priori mehrere solche Arten als möglich angiebt, so muß, in besondern Fällen, a posteriori gefunden werden, welche davon vorkömmt. Das vorhin (§. 126) gegebene Beyspiel von der Schwere und elastischen Federn, mag auch hier zur Erläuterung dienen. Es ist für sich klar, daß solche mehrere Möglichkeiten der Nothwendigkeit der dynamischen Lehrsätze eben so wenig Abbruch thun, als die Möglichkeit mehrerer Figuren der Nothwendigkeit der geometrischen Lehrsätze. In beyden ist fürnemlich die Frage zu sehen, was aus gesetzten Möglichkeiten folge, und wiefern sie beysammen seyn können. Und dieses ist auch der Leitfaden, dem wir in dem Vortrage der dynamischen Grund- und Lehrsätzen zu folgen haben.

§. 129.

So z. E. können wir nun ferners feste setzen, daß, wenn eine Kraft ihren Druck gleichförmig, parallel und unmittelbar bey jedem Theilchen der Materie äussert, dadurch weder die Figur der ganzen Masse, noch die relative Lage der Theilchen unter sich geändert werde, es sey denn, daß ungleich entgegenwirkende Kräfte, oder ungleich angebrachte Hindernisse machen, daß einige Theile mehr als die andere, oder auch einige gar nicht nachgeben. Denn so lange die Materie dem Drucke der durchaus gleich angebrachten Kraft allein überlassen ist, da erhält, wegen des gleichen und parallelen Druckes, jedes Theilchen in einerley Direction einerley Geschwindigkeit. Da sich demnach die ganze Masse, oder das ganze System nach dieser Richtung und mit dieser Geschwindigkeit bewegt, so bleibt die relative Lage jeder Theilchen unter sich unverändert, und daher auch die ganze Figur ebenfalls. Daß dieses hingegen bey den angeführten Hindernissen anders seye, ist für sich klar.

§. 130.

Ist hingegen die Kraft entweder ungleich, oder nach verschiedenen Richtungen, oder auch nur bey einigen Theilchen angebracht, so sieht man ebenfalls, daß die ganze Masse eine absolute Festigkeit haben müste, wenn an der Figur und der relativen Lage der Theilchen nichts sollte verändert werden. Die Festigkeit, und überhaupt die Verbindung der Theilchen, wodurch sie nicht bloß wie ein Haufen Staubes an- und aufeinander liegen, sondern zusammen hängen, so, daß sie, ohne Kraft anzuwenden, nicht getrennt werden können, rührt offenbar von Kräften her, die nicht die Materie selbst, sondern von derselben verschieden sind. Oder, um dieses a priori vorzutragen, so können wir erstlich sagen: der Begriff der Materie, für

sich

sich betrachtet, enthalte keine solche Verbindung, hingegen bringe es der Begrif der Kraft mit sich, daß die Theilchen der Materie dadurch in Verbindung gebracht werden können, und zugleich auch, daß dieses immer in gewissen Grad geschehe, so, daß jede von einer gegebenen Kraft herrührende Verbindung, durch eine grössere Kraft gehoben, durch eine kleinere wenigstens vermindert werden könne, und zwar auch so, daß erstere wiederum ganz wirkt, wenn letztere weggenommen, oder anders angewandt wird. In der Natur geben die elastische und nicht elastische Körper eben so viele Beyspiele. Man kann auch leicht zeigen, daß die Elasticität nirgends ganz absolut, sondern nur relativ ist. So ist es zum Sprichwort geworden, daß ein stets gespannter Bogen seine Elasticität, wo nicht verleurt, doch merklich schwächt; und eine bleyerne Kugel wird bey geringer Geschwindigkeit eine Elasticität zeigen, die sie bey grössern Geschwindigkeiten ganz verleurt.

§. 131.

Wenn eine Kraft nur auf einige Theilchen, oder auch nur auf einen Punct eines festen oder harten Körpers ihren Druck äussert, und dieser Druck sodann sich auf jede Theilchen verbreitet; so wird der Körper, ohne sich zu drehen, bewegt werden, so oft die Direction des Druckes durch den Vereinigungspunct der einzeln Kräfte, oder den sogenannten Mittelpunct

der

der Schwere geht (§. 74) Denn man setze in entgegengesetzter Richtung sey eine gleich vertheilte und gleich grosse Kraft angebracht; so wird eine Linie, welche in gleicher Richtung durch den Mittelpunct der Schwere, oder den Vereinigungspunct der Kraft geht, diejenige seyn, von welcher §. 65 die Rede war. Demnach wird ein Gleichgewicht statt haben. Und welche von beyden Kräften man wiederum wegnimmt, so wird sich der Körper nach dieser Linie bewegen. Wäre die angebrachte Kraft der Druck einer Feder, so kann die Bedingung des Satzes nur alsdann erfüllt werden, wenn dieser Druck da angebracht wird, wo die aus dem Mittelpunct der Schwere gezogene gerade Linie die Oberfläche des Körpers senkrecht durchschneidet. Denn der Druck der Feder ist immer auf die Fläche senkrecht, und folglich kann dessen Richtung nur nach den Mittelpunct der Schwere gehen, wo erstbemeldte Linie die Oberfläche des Körpers senkrecht durchschneidet.

§. 132.

Wir haben den Beweis des erstangeführten Satzes dadurch abgekürzt, daß wir denselben auf den in den vorhergehenden Abschnitten gegebenen reducirten. Der Grund dieser Reduction liegt darin, daß man ähnliche Schlüsse zu machen hat, es sey, daß man für eine vertheilte Kraft den Vereinigungspunct sucht, oder aus diesem auf die vertheilte Kraft schließt.

Fig. IV. Man setze z. E. eine unbiegsame Linie, und eine Kraft drücke nach der senkrechten Richtung CD auf den Punct C, so kann diese Kraft als auf jeden Punct A, B, P, M &c. vertheilt angesehen werden, weil man in jeden diesen Puncten entgegengerichtete Kräfte anbringen kann, so, daß C deren Vereinigungspunct, und die Summe dieser Kräfte der in C angebrachten gleich sey (§. 20). In einem Körper lassen sich unzählige solcher Linien gedenken, und, in Absicht auf die Vertheilung der Kraft, eben so betrachten, wie wir sie in den vorhergehenden Abschnitten, in Absicht auf die Vereinigung derselben betrachtet haben. Bey wirklich materiellen Körpern setzt jedes Theilchen dem Druck der Kraft seine Trägheiten entgegen, und da wir diese bey jedem gleich setzen (§. 125. No. 2); so wird dadurch die Kraft auf alle gleich vertheilt, sobald die Richtung der Kraft durch den Mittelpunct der Schwere, oder den Vereinigungspunct gleich vertheilter paralleler Kräfte geht. Denn die Trägheit eines jeden Theilchen läßt sich als eine solche Kraft gedenken, welche sich in paralleler Richtung der angebrachten Kraft entgegensetzt. Und dieses ist auch der Grund warum erstbemeldter Vereinigungspunct, der Mittelpunct der Trägheit, centrum inertiae, genennt werden kann.

§. 133.

Man setze nun hingegen die Richtung der auf einen Punct des Körpers angebrachten Kraft, gehe

gehe nicht durch diesen Mittelpunct der Trägheit, so ist für sich klar, daß sich der Körper drehen muß, weil der Widerstand, den der Körper der Kraft entgegen setzt, nicht auf beyden Seiten der Richtungslinie gleich ist.

§. 134.

Setzt man endlich der Körper sey nicht absolute hart, so lassen die vorhin bemeldten unbiegsamen Linien (§. 132.) in demselben nicht gedenken; und aus gleichem Grunde fällt auch die Vertheilung der Kraft ganz anders aus, weil die Theilchen, wo die Kraft unmittelbar angebracht ist, wo nicht ganz allein, wenigstens mehr nachgeben, als die entferntern. Hiebey kommt nun alles auf die Beschaffenheit der Kräfte an, womit die Theilchen des Körpers zusammenhängen (§. 130). Und in so fern läßt sich nichts allgemeines darüber sagen, weil man vorerst die verschiedenen Möglichkeiten dabey in Classen bringen, und sodann jede für sich betrachten muß. So viel sieht man leicht, daß, so lange die Theilchen ihre relative Lage ändern, keine gemeinsame Bewegung des ganzen Körpers statt hat, daß der Mittelpunct der Trägheit selbst seinen relativen und auch seinen wahren Ort ändert, und daß nur alsdann die gemeinsame Bewegung erfolgt, wenn die Figur nicht ferner mehr geändert werden kann. Denn alsdann kommen die unbiegsamen Linien wieder vor.

X. Die Bestimmung der Geschwindigkeit.

§. 135.

Da wir nun in der Dynamic a priori zu gehen, eigentlich nur Möglichkeiten zum Grunde zu legen, und die Folgen derselben zu erörtern haben (§. 128), so ist es zum Behuf ihrer Anwendung auf die in der Natur vorkommenden Kräfte, immer gut, daß diese Folgen so weit getrieben werden, bis man auf solche kömmt, die sich allgemein umkehren lassen, und wo sie vorkommen, leicht kenntlich sind. Denn auf diese Art läßt sich sodann auf die in der Welt wirklich angebrachte Möglichkeit in jedem Fall, und mit Ausschliessung der übrigen, der Schluß machen, weil solche Folgen, im eigentlichsten Verstande, zu Kennzeichen werden. So ist die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers sichtbar, so unsichtbar auch die Kraft und die Art ihrer Wirkung ist (§. 115. 128). Läßt sich demnach aus dem Gesetze, wie die Geschwindigkeit anwächst, auf die Art schliessen, wie die Kraft wirke, so hat man dabey immer ein vieles gewonnen, weil in vorkommenden Fällen die Erfahrung ersteres leichter als letztere angiebt. Diese Betrachtung wird uns demnach hier zum Leitfaden dienen. Sie ist der ächte und eigentliche Weg, das so man a priori findet, auf das anzuwenden, was a posteriori gefunden wird.

§. 136.

Wir fangen zu dem Ende bey dem einfachsten Fall an, welcher bey dem allmähligen Entstehen der Geschwindigkeit und der Bewegung (§. 123. 124) vorkommen kann. Wir setzen nemlich erstlich, der Körper sey hart, und dieses macht, daß wir denselben eben so wie die Wirkung der Kraft, als in den Mittelpunct der Trägheit concentrirt ansehen können (§. 72. 132). Sodann setzen wir, die Richtung der Kraft auf diesen Punct bleibe, so lange die Wirkung dauert, eben dieselbe; und dieses macht, daß die entstehende Bewegung geradelinicht bleibt, und demnach auch in Absicht auf die Richtung einfach ist. Endlich setzen wir, daß ungeachtet dieser Punct sich nach und nach geschwinder bewegt, diese Geschwindigkeit auf die fernere Wirkung der Kraft keinen Einfluß habe, so, daß sie auf den bewegten Körper eben so drücke, als wenn derselbe noch in Ruhe wäre. Man kann aus dem §. 129 seqq. sehen, wo die erste dieser Voraussetzungen, nemlich die absolute Härtigkeit des Körpers nicht unumgänglich nöthig ist, und wo sie hingegen, wenn man einerley Erfolg haben will, nicht wegbleiben kann. In Ansehung der beyden andern Bedingungen begnügen wir uns hier damit, daß sie gedenkbar sind, ohne auf die verschiedenen

schiedenen Arten des mechanismi zu sehen, wodurch sie in der That erhalten werden können. Da auch jede dieser Bedingungen, für sich betrachtet, die beyden andern ganz unbestimmt läßt, so ist die Möglichkeit, daß sie in einem System beysammen seyn können, ebenfalls gedenkbar. Wir haben daher nur zu sehen, was in dem System daraus ferner folge.

§. 137.

Einmal da die Geschwindigkeit nur nach und nach anwächst, so seye sie zu jeder Zeit t, $= c$. Und so wird ihre Zunahme in der Zeit dt, $= dc$ seyn (§. 123). Nun ist in dem ersten Zeittheilchen dt, da der Körper noch in Ruhe ist, die Wirkung der Kraft diese, daß sie demselben die Geschwindigkeit dc durch ihren Druck mittheilt. Da nun vermög der dritten Voraussetzung die Kraft auf den bewegten Körper eben so, wie auf den noch ruhenden wirkt, so theilt sie demselben in jedem gleich grossen Zeittheilchen dt, eine gleiche Zunahme der Geschwindigkeit dc mit. Demnach verhalten sich nach jeder Zeit t die Summe aller dc, wie die Summe aller dt. Da nun die Summe aller $dt = t$, die Summe aller $dc = c$ ist, so ist c in beständiger Verhältniß von t, und daher

$$c = mt$$

Es sey nun der in der Zeit t durchlauffene Raum $= x$, so ist der in der Zeit dt mit der Geschwinschwindigkeit c durchlaufene Raum $= c\,dt = dx = mt\,dt$. Diese Formel integrit, giebt

$$x = \tfrac{1}{2} mt^2 = \tfrac{1}{2} c^2 : m$$

und auf diese Art haben wir nun Zeit, Raum und Geschwindigkeit mit einander verglichen. Der Raum wächst wie das Quadrat der Zeit, und so auch wie das Quadrat der Geschwindigkeit, und Zeit und Geschwindigkeit nehmen in gleicher Verhältniß zu.

§. 138.

Die gefundenen drey Formeln

$$c = mt$$
$$x = \tfrac{1}{2} mtt$$
$$x = \tfrac{1}{2} cc : m$$

sind nun in solcher Verbindung unter sich, daß wo eine derselben statt findet, auch die übrigen statt finden. Da wir die beyden letztern aus der ersten hergeleitet haben, so ist dieser Fall bereits erwiesen. Es sey demnach

$$x = \tfrac{1}{2} mtt$$

so ist $\quad dx = mt\,dt$

demnach $\quad mt = dx : dt = c$

Und so folgt die erste, und damit auch die dritte Formel aus der zweyten. Wiederum sey

$$x = cc : 2m$$

so ist $\quad dx = c\,dc : m$

demnach $\quad dc = m\,dx : c$

Es ist aber

$$dx : c = dt$$

folglich $dc = m\,dt$

welches integrirt

$$c = mt$$

die erste Formel giebt. Da nun diese die zweyte giebt, so folgen auch beyde ersten Formeln aus der dritten. Demnach, wo eine derselben statt findet, da finden die beyden andern auch statt.

§. 139.

Diese Abhänglichkeit der drey Formeln von einander macht, daß wir uns in folgender Betrachtung an die erste, als die einfachste, halten können, wo wir sie mit den drey Bedingungen vergleichen werden, aus welcher sie hergeleitet sind (§. 136). Ich sage demnach, daß, wo in einem fürgegebenen Fall die zwo ersten dieser Bedingungen statt finden, und die bemeldten Formeln finden statt; sodann auch die dritte Bedingung statt finden werde. Man setze, sie haben nicht statt, so wirkt die Kraft auf den bewegten Körper stärker oder schwächer, als auf den ruhenden (§. 136. No. 3). Demnach ist dc für jedes gleiche Zeittheilchen dt nicht mehr von einerley Grösse, sondern muß als eine Function der bereits erlangten Geschwindigkeit c angesehen werden, so, daß wenn diese Function $= g$ ist,

$$dt = g\,dc$$

und daher

$$t = \int g\,dc$$

sey.

sey. Nun aber ist, vermög der Voraussetzung $t = mc$

demnach $mc = fgdc$

$mdc = gdc$.

demnach $m = g$, das will sagen, g ist beständig. Da nun g eine Function von c ist, so müßte auch c beständig seyn, demnach die Geschwindigkeit nicht anwachsen. Da nun dieses der Bedingung zuwider ist, so hat die Aussage des Satzes nothwendig ihre Richtigkeit.

§. 140.

Da in dem hier betrachteten Fall (§. 136 seq.) die Geschwindigkeit wie die Zeit anwächst, das Anwachsen der Zeit aber gleichförmig ist, so ist auch das Anwachsen der Geschwindigkeit gleichförmig. Und dieses ist der Grund, warum man den hier betrachteten Fall, den Fall der gleichförmig beschleunigten Bewegung motus uniformiter acceleratus, nennet. Demnach, wo eine solche Bewegung in geradlinichter Richtung vorkömmt, und der Körper als in seinen Mittelpunct der Trägheit concentrirt angesehen werden kann, da folgt der Schluß nothwendig, daß die beschleunigende Kraft, vis acceleratrix, dem Körper in jeden gleichen Zeittheilchen dt eine gleiche Zunahme der Geschwindigkeit mittheile, und auf den bewegten Körper eben so wirke, als wenn derselbe noch in Ruhe wäre. Wir werden im folgenden sehen, daß dieser Umstand bey dem durch die Kraft der Schwere verursachten Körper vorkommt.

§. 141.

Ungeachtet wir nun bey dem erstbetrachteten Fall Zeit, Raum und Geschwindigkeit in Vergleichung gebracht haben, so bleibt doch deren Verhältniß zu der Kraft selbst noch unerörtert. Wir haben demnach zu erweisen, daß sich die Geschwindigkeit nach der Grösse der Kraft richtet, oder in gleicher Verhältniß mit derselben grösser oder kleiner ist, immer unter der Voraussetzung, daß die einmal erlangte Geschwindigkeit des Körpers in die fernere Wirkung der Kraft keinen Einfluß habe, oder daß die Kraft auf den bewegten Körper eben die Wirkung äussere, als auf den noch ruhenden. Dieser Umstand macht nun, daß wenn der Körper, anstatt von einer Kraft gedrückt zu werden, zugleich von zwo, drey &c. n gleichen Kräften gedrückt wird, jede von diesen Kräften ihre Würkung eben so äussert, als wenn sie allein wäre, weil die Bewegung des Körpers, die aus der Wirkung der übrigen erfolgt, vermöge der Voraussetzung, daran nichts ändert; und weil hier eben so wie oben (§. 102) eine Kraft n deswegen $= n$ ist, weil sie für n einfache Kräfte gesetzt werden kann. Wenn demnach die Kraft 1 in der Zeit 1 die Geschwindigkeit 1 herfürbringt, so bringen n Kräfte in

eben

eben der Zeit 1 die Summe der Geschwindigkeiten, oder die Geschwindigkeit n herfür, und zwar deswegen in der Zeit 1, weil sie zugleich wirken, und jede ihre Wirkung, das will sagen, eine Geschwindigkeit $= 1$, herfürbringt. Da nun jede Geschwindigkeit von einer Kraft herrührt, und der Druck von n Kräften eben der ist, wie der Druck von einer Kraft n, so bringt eine Kraft n die Geschwindigkeit n herfür, wenn in gleicher Zeit die Kraft 1 die Geschwindigkeit 1 herfür bringt. Demnach wird die Geschwindigkeit in gleicher Verhältniß mit der Kraft grösser oder kleiner.

§. 142.

Hieraus folgt nun ferner, daß, da vermög des vorhin erwiesenen, eben die Geschwindigkeit n von der Kraft 1 in der Zeit n herfürgebracht wird, man an der Zeit gewinnt, was man an der Kraft vermehrt, und daß einerley Geschwindigkeit erhalten werde, wenn die Kraft in umgekehrter Verhältniß der Zeit ist. Demnach haben wir wenn die Zeit $= t$, die Kraft $= k$, die Geschwindigkeit $= g$ gesetzt wird, die Formel

$$g = ntk$$

wo n eine Grösse bedeutet, die bey gleicher Masse des Körpers, und da wo die Kraft unmittelbar auf jedes Theilchen wirkt, für sich beständig ist. Wirkt aber die Kraft nicht unmittelbar auf jedes Theilchen, so, daß sie erst communicationsweise vertheilt wird, so haben wir oben schon gesehen, daß dieselbe in umgekehrter Verhältniß der Masse schwächer wird (§. 132). Setzt man demnach für diese Fälle k sey die absolute Kraft, so wird n in umgekehrter Verhältniß der Masse kleiner, wenn die Masse des Körpers grösser genommen wird. Setzt man demnach für diese Fälle die Masse $= m$, so wird man

$$g = \frac{tk}{m}$$

haben.

§. 143.

Nach der bisher angestellten Untersuchung des einfachsten Falls (§. 136 seq.) werden sich nun diejenigen beurtheilen lassen, die zusammengesetzter sind. Hieher gehören nun erstlich diejenigen, wo die Kraft sich während der Wirkung verändert. Für diese Fälle müssen wir statt der Formel

$$g = \frac{tk}{m}$$

die Differentialformel

$$dg = \frac{kdt}{m}$$

nehmen, weil sich nicht g nach k, sondern in jedem Zeittheilchen dt, die Zunahme der Geschwindigkeit nach k. dt proportionirt. Denn obgleich sich während diesem Zeittheilchen k in $k + dk$ verändert, so sieht man leicht, daß, weil

weil k nur dg herfürbringt, dk nur ddg herfürbringen könne, und demnach durch die ganze Summe von allen dk nur dg herfür gebracht werde, welche Grösse neben g, so durch $\int\frac{kdt}{m}$ herfür gebracht wird, verschwindet.

§. 144.

Es kömmt aber bey der Formel

$$dg = \frac{kdt}{m}$$

wo nunmehr auch k als veränderlich angesehen wird, darauf an, daß man wisse, nach welchem Gesetze sich k verändere. Mir ist kein Fall bekannt, wo k schlechthin nur, der Zeit nach, oder bloß deßwegen, weil die Wirkung dauert, grösser oder kleiner werde. Ich sage, *schlechthin nur der Zeit nach*. Denn da k nicht zugleich verschiedene Grösse haben kann, so ist für sich klar, daß, aus welchen Ursachen auch immer k grösser oder kleiner wird, dieses nach und nach geschehe, und sich folglich allemal auch ein Verhältniß zwischen k und t gedenken läßt. Hingegen kann k viel unmittelbarer von dem Raume abhängen, und dies geschieht, so ofte die Kraft nicht aller Orten gleich wirkt. Man setze demnach den durchlaufenen Raum $= x$, so ist $gdt = dx$, demnach $dt = dx : g$. Wird dieser Werth gesetzt, so verwandelt sich die Formel in

$$dg = \frac{kdx}{mg}$$

oder

oder $gdg = kdx : m$.
Da nun k eine Function von x ist, so darf man nur x durch k, oder k durch x bestimmt haben, und es wird
$$\tfrac{1}{2} mgg = \int kdx$$
seyn. Da man sich leicht gedenken kann, daß zwischen k und x unzählige Verhältnisse möglich sind, so muß in jedem Fall aus Betrachtung der Sache, ihrer Umstände und Folgen erörtert werden, welche davon wirklich vorkömmt.

§. 145.

Endlich kann man sich auch gedenken, daß k sich nach der Geschwindigkeit g richte, und dieses hat nothwendig statt, so oft die Kraft in einen bewegten Körper stärker oder schwächer wirkt, als in einen ruhenden. In diesen Fällen ist k eine Function von g, und demnach
$$t : m = \int dg : k$$
$$x : m = \int gdg : k$$
Man sieht leicht, daß auch hier die Verhältniß zwischen g und k aus den Umständen, Natur und Folgen der Sache bestimmt werden muß. Eigentlich betrift die Aenderung, die k von der Geschwindigkeit des Körpers leiden kan, mehr die Wirkung der Kraft, als die Kraft selbst. Da aber in diesen Formeln k wegen der Wirkung vorkömmt, so kann der Werth davon allerdings, in dieser Absicht, als veränderlich angesehen werden, weil es in sofern einerley

nerley ist, ob sich die Kraft, oder nur ihre Wirkung ändert. Der Erfolg ist einerley, und der Unterschied ist nur, daß sodann k die relative Wirkung vorstellt, weil eigentlich die Wirkung der Kraft auf einen ruhenden Körper absolut ist.

XI. Anwendung der Dynamic auf die Schwere.

§. 146.

Die Versuche, die von Galilaeo und seit demselben über den Fall der Körper theils in freyer Luft, theils in luftleeren Raume sind angestellt worden, geben überhaupt an, daß ein Körper desto tiefer fällt, je grösser das Quadrat der Zeit ist. Demnach zeigen diese Versuche, daß $x = \frac{1}{2} m t t$ ist. Und hieraus folgt, daß die (§. 138) angegebenen drey Formeln bey dem Fall der Körper statt habe, und daher derselbe eine gleichförmig beschleunigte Bewegung sey (§. 140). Nun haben wir oben (§. 77. 78) gesehen, daß die Kraft der Schwere, in verticaler Richtung, unmittelbar auf jedes Theilchen der Materie ihren Druck äussere, und folglich allemale als in dem Mittelpunct der Schwere vereinigt angesehen werden kann (§. 79). Dieser Punct kann nun um destomehr statt des ganzen Körpers genommen werden, da dessen relative Lage in dem

Körper,

Körper, auch wenn er fällt, unverändert bleibe (§. 129).

§. 147.

Hieraus folgt nun aber, daß die Geschwindigkeit, die der Körper im Fallen erreicht, der fernern Wirkung der Schwere keinen Abbruch thut, oder, daß die Kraft der Schwere auf fallende Körper eben so, und weder mehr noch minder als auf ruhende wirkt. Wir haben, um dieses zu beweisen, nunmehr weiter nichts zu thun, als den vorhergehenden §. 146 mit dem §. 139 zu vergleichen, um ohne Mühe zu finden, daß die im §. 139 geforderten Bedingungen bey dem Falle der Körper statt finden. Diese Bedingungen sind

1°. Die drey Formeln des §. 138. oder, wegen ihrer eben daselbst erwiesenen Abhänglichkeit, auch nur eine.

2°. Daß der Körper als in dem Mittelpunct der Trägheit concentrirt angesehen werden könne.

3°. Daß die Richtung der Kraft auf diesen Punct eben dieselbe bleibe, so lange die Wirkung dauert.

Nun ist (§. 146) bey dem Fall der Körper

1°. Die Formel $x = \frac{1}{2} mtt$, demnach auch die beyden anderen (§. 138).

2°. Vereinigt sich die Wirkung der Schwere in dessen Mittelpunct der Schwere, oder der Trägheit (§. 79. 132).

3°. Ist

3°. Ist die Richtung sowohl der Kraft als des fallenden Körpers eine verticale Linie (§. 77. 78).

Da demnach diese drey Bedingungen erfüllt werden, so folgt auch der Schlußsatz, den wir in angeführtem §. 139 daraus gezogen, so nothwendig, daß das Gegentheil desselben mit diesem Bedingungen nicht bestehen kan (§. 139). Demnach wirkt die Schwere auf fallende Körper eben so wie auf ruhende.

§. 148.

Da wir ferner (§. 78) gesehen haben, daß die Kraft der Schwere ihren Druck unmittelbar bey jedem Theilchen äussert, so wird dieselbe nicht erst von einigen derselben auf alle vertheilt, noch durch eine solche Vertheilung bey jedem Theilchen schwächer. Und hieraus wird begreiflich, daß die Grösse des Körpers oder seine Masse, oder die Menge der Theilchen die Geschwindigkeit des Fallens nicht ändert, wie dieses geschieht, wo die Kraft erst in den Körper vertheilt wird (§. 142). Man hat auch wirklich gefunden, daß in luftleerem Raume jede Körper mit gleicher Geschwindigkeit fallen.

§. 149.

Die leichteste Art, wodurch die Richtung des Falls eines Körpers geändert wird, ist, wenn derselbe auf einer schiefliegenden Fläche

sich

F. XXVI. sich herunter bewegt. Es sey AB eine solche Fläche, die unter dem Winkel BAD gegen den Horizont AD geneigt ist. Der Körper befinde sich in C, und die Kraft der Schwere, wodurch er würde nach H herunter gedrückt werden, wenn die Fläche AB nicht wäre, werde durch die verticale Linie CE vorgestellt. Man ziehe EF mit AB parallel, EG, CF aber auf AB senkrecht, so ist CE die Diagonale des Rectangels CFEG. Da es nun vermög des §. 107 gleichviel ist, wenn man statt der Kraft CE, die zwo senkrechten Kräfte CF, CG auf C drücken läßt, so wollen wir dieses setzen. Und da ergiebt sich von selbst, daß, da die Kraft FC den Körper senkrecht gegen die Fläche AB drückt, diese Kraft den Körper schlechthin nur in Ruhe erhalten würde, wenn sie allein wäre. Demnach kömmt alle Bewegung, die der Körper erhält, von der Kraft GC her. Und da diese Kraft in gleicher Richtung mit CA wirkt, so drückt sie den Körper schlechthin und ohne andere Hinderniß nach dieser Richtung herunter. Da nun CE, ohne Rücksicht auf die Bewegung des Körpers, immer einerley bleibt, und der Winkel CEG, CGE ebenfalls ihre Grösse behalten, so bleibt auch CG beständig, und theilt daher den Körper C in iedem Zeittheilen dt eine gleiche Zunahme der Geschwindigkeit dc mit. Da aber CG kleiner ist als CE, so ist auch dc in gleicher Verhältniß kleiner als dg, oder die

Zunah-

Zunahme der Geschwindigkeit, welche die absolute Kraft der Schwere CE dem Körper in eben der Zeit mittheilen würde (§. 141). Demnach haben wir

$$CE : CG = dg : dc$$

oder

$$1 : \cos ACH = dg : dc$$

und hieraus

$$dc = dg . \cos ACH.$$

$$c = g . \cos ACH$$

oder wenn man HJ auf AB senkrecht zieht

$$c : g = CJ : CH$$

Da nun die Geschindigkeit g wie die Zeit zunimmt (§. 147), c aber derselben proportional ist, so nimmt auch die Geschwindigkeit c wie die Zeit zu. Daher sind auch die in gleicher Zeit durchlaufenen Räume den Geschwindigkeiten proportional, weil

$$\int g dt : \int c dt = CH : CJ$$

wird. Demnach wird CJ und CH in gleicher Zeit durchlaufen. Endlich folgt daraus, daß c in gleicher Verhältniß wie t zunimmt, daß der Körper auch auf der schiefliegenden Fläche mit gleichförmig beschleunigter Geschwindigkeit herunterläuft (§. 140) und der durchlaufene Raum, sowohl in Verhältniß des Quadrats der Zeit, als auch in Verhältniß des Quadrats der erlangten Geschwindigkeit sey (§. 137). Wenn man demnach die Zeit, in welcher der Körper vertical durch CH fallen würde $= 1$, und die in H erlangte Geschwindigkeit ebenfalls = 1 setzt, so ist die Zeit, in welcher CJ durchlaufen wird ebenfalls = 1, hingegen die in J erlangte Geschwindigkeit nur = cos JCH. Man setze nun die Zeit um CA zu durchlaufen seye = τ, die Geschwindigkeit in A seye = γ, so haben wir

$$CJ : CA = 1 : \tau^2 = \cos ACH^2 : \gamma^2$$

demnach

$$1 : \tau = \cos ACH : \gamma = \sqrt{CJ} : \sqrt{CA}$$

Es ist aber

$$\sqrt{CJ} : \sqrt{CA} = CH : CA = \cos ACH : 1$$

demnach

$$1 : \tau = \cos ACH : \gamma = \cos ACH : 1$$

und hieraus

$$\tau = \sec ACH$$

$$\gamma = 1.$$

Das will nun sagen, wenn der Körper aus C bis auf die Horizontallinie AD kömmt, es sey daß er durch CH gerade, oder nach jeder schiefen Fläche CA herunter falle, so erhält er in H oder in A einerley Geschwindigkeit, hingegen gebraucht er destolängere Zeit, je länger der Raum CA als CH ist. Da die Erfahrung dieses ebenfalls bekräftigt, so könnte man hieraus, wiewohl a posteriori, den Schluß ziehen, daß

$$dc : dg = CG : CE$$

seye. Da aber dieser Schluß unter eben der Bedingung, daß die Schwere auf bewegte, wie auf ruhende Körper einerley Druck äussere, gezo-

gezogen wird, aus welcher wir denselben im vorhergehenden (§. 141) a priori gezogen haben, so halten wir uns hier damit nicht länger auf.

§. 150.

Wäre AB nicht eine ebene, sondern gebogene Fläche, so würde der Winkel ACH von veränderlicher Grösse seyn, und damit hätten wir nicht

$$c = g. \cos ACH$$

sondern nur

$$c = \int dg. \cos ACH$$

oder

$$c = \int \frac{CG}{CE}. dg$$

Da nun (§. 143)

$$dg = \frac{kdt}{m}$$

ist, so ist

$$c = \int \frac{CG.\,k}{CE.\,m}. dt = \int \frac{k.\,dt}{m}. \cos ACH$$

Hier kann man nun k = CE setzen, weil CE die absolute Kraft der Schwere vorstellt, und so wird

$$c = \int \frac{CG.\,dt}{m}$$

seyn. Wir werden uns aber hier nicht aufhalten, diese Formel auf einige krumme Linien oder gebogene Flächen anzuwenden, theils weil dieses schon zur Genüge geschehen ist, fürnemlich aber weil unsere Absicht mehr auf die deutlichere Entwickelung der dynamischen Grundsätze als auf die Betrachtung dessen geht, was daraus folgt, wenn sie einmal in Richtigkeit sind. Der Anstand und die Streitigkeiten, so man darüber geführt hatte, betreffen auch fürnemlich nur diesen letztern Punct.

XII. Anwendung der Dynamic auf die Federkraft.

§. 151.

Ich werde hier, ohne zu untersuchen, durch welchen Mechanismus eine gespannte Feder eine Kraft hat zu drücken, schlechthin nur annehmen, daß sie eine solche Kraft habe, und um nicht Nebenumstände einzumengen, werde ich diese Kraft vollkommen setzen; das will sagen, die Feder solle, wenn sie loßgeschnellt wird, oder auch nachdem sie ihren Druck auf einen Körper geäussert hat, vollkommen wiederum ihre vorige Figur erhalten. Denn bliebe sie mehr gebogen, als sie vor dem Spannen ware, so würde von ihrer Kraft etwas abgegangen seyn; und eben dieses ist es, warum man sie in solchem Fall unvollkommen nennt.

§. 152.

So viel nun immer die Feder gespannt ist, ist sie mit derjenigen Kraft, wodurch sie gespannt erhalten wird, im Gleichgewichte, und

daher

daher ist die Kraft der Feder der spannenden Kraft gleich. Da nun eine Feder durch Gewichte gespannt werden kann, so läßt sich dadurch ihre Kraft, bey jedem Grade der Spannung mit der Kraft der Schwere vergleichen, weil sie das angehängte Gewicht eben soviel in die Höhe drückt, als dasselbe von der Schwere herunter gedrückt wird. Da sich nun die Kraft der Feder auf jedes Theilchen der Materie des Gewichtes eben so vertheilt, als die Kraft der Schwere wirklich vertheilt ist (§. 126) so wird auch jedes Theilchen von beyden Kräften gleich viel gedrückt, und demnach erhält es, welche von beyden Kräften weggenommen wird, in dem ersten Zeittheilchen dt, einerley Geschwindigkeit dg. Denn das Gewicht ist, sowol in Absicht auf die Kraft der Schwere, als in Absicht auf die Kraft der Feder, schlechthin nur Materie, und setzt daher beyden nur die sogenannte Trägheit entgegen (§. 119 seqq.)

§. 153.

Solle nun die Vergleichung weiter können fortgesetzt werden, so kömmt es darauf an, wiefern man setzen kann, die Feder äussere auf einen bewegten Körper eben den Druck, den sie bey gleicher Spannung auf eben denselben äussert, wenn er in Ruhe ist? Solle diese Frage a priori und nach aller Schärfe erörtert werden, so müssen wir die Feder immateriel setzen, und zwar aus einem ähnlichen

Grunde, aus welchem wir oben (§. 14 seqq.) eine immaterielle unbiegsame Linie angenommen haben. Denn eine materielle Feder hat, wegen eigener Trägheit, eine Kraft nöthig, sich selbst fortzudrücken. Man könnte zwar auch die der Feder eigene Materie mit zum Gewichte nehmen, dadurch würde aber die Erörterung der Frage nur weitläuftiger. Setzen wir demnach die Feder immateriel, oder wir betrachten sie als eine elastische Linie, so ist für sich klar, daß sie ihren Druck nicht deswegen äussert, weil sie durch das Loßschnellen eine Geschwindigkeit erhält. Denn dieser Druck ist da, auch wenn sie im Gleichgewichte erhalten wird. Demnach ändert die Bewegung an diesem Drucke nichts. Da nun dieser Druck sich deswegen äussern kann, weil der Körper währendem Fortdrücken immer an der Feder anliegt, so muß auch nothwendig die Geschwindigkeit d g eben dieselbe seyn, es sey daß die Bewegung erst anfange, oder schon erfolgt seye.

§. 154.

Man kann sich dieses auch so vorstellen: Der Körper hat, in Absicht auf die Feder, keine relative Bewegung, weil beyde einander immer berühren, und folglich mit gemeinsamer Geschwindigkeit fortbewegt werden. Da nun die Feder, weil sie immateriel ist, keine Kraft braucht, sich selbst fortzudrücken, so kann sie immer ihre ganze Kraft auf den Körper wenden.

§. 155.

§. 155.

Es sey nun ein elastischer Ring AB in dem Punct A befestigt. Der gegenüberstehende Punct B werde gegen A gedrückt, und dadurch der Diameter AB verkürzt. Die krumme Linie BE seye von der Art, daß bey jeder Verkürzung AP, die Ordinate PM die Kraft vorstelle, welche den Ring bis in P zusammen drücken kann. Nun sey der Ring bis in D zusammengedrückt, und nachdem in D ein Körper, z. E. eine harte Kugel an denselben gelegt worden, schnelle der Ring loß, und treibe die Kugel gegen B fort; so ist die Frage, nach welchen Gesetzen dieses geschehen werde? Um dieses zu finden, setze man die Kugel sey nach einer Zeit t, aus D bis in P gekommen, und BP $=$ x, PM $=$ k die Masse der Kugel $=$ m, die Geschwindigkeit $=$ g, so haben wir vermög des §. 143 Fig. XXVII.

$$dg = kdt : m$$

und eben so vermög des §. 144, weil hier x rückwerts genommen wird,

$$-gdg = kdx : m = PMmp : m$$

demnach

$$\tfrac{1}{2}gg = -\int \frac{kdx}{m} = \frac{DEMP}{m}$$

Wird nun die gröste Geschwindigkeit in B, $=$ G gesetzt, so sieht man leicht, daß

$$GG = \frac{2DEB}{m}$$

ist.

§. 156.

Nun stellt der Raum, wiewohl nach einer zweyten Dimension, die Summe aller einzelnen Kräfte vor, mit welchen der Ring auf die Kugel gedrückt hat. Wird demnach dieser Raum durch die Linie D C dividirt: so ist DEB : DD die mittlere Kraft, womit die Kugel ist gedrückt worden. Und diese mittlere Kraft ist von der Art, daß, wenn der Ring die Kugel durch die ganze Linie D B beständig mit dieser Kraft fortgedrückt hätte, sie in B eben die Geschwindigkeit G würde erreicht haben, welche sie durch die nach und nach verminderte Kraft R erreicht hat.

§. 157.

Setzen wir demnach diese mittlere Kraft

$$DEB : DB = P$$

so ist

$$DEB = P . DB$$

und demnach (§. 155)

$$GG = 2 . P . DB : m$$

Also ist das Quadrat der zuletzt erhaltenen Geschwindigkeit G im Verhältniß der mittleren Kraft P, wenn diese vorerst mit dem von der Kugel durchlaufenen Raum D B multiplicirt, und durch die Masse der Kugel dividirt wird. Demnach ist dieses Quadrat nicht absolute in Verhältniß der mittlern Kraft P; und noch weni-

weniger ist es in Verhältniß der größten angewandten Kraft DE. Denn wäre dieses, so würde

$$DE \backsim \frac{DEB}{m}$$

seyn. Demnach würde sich, bey verschiedenen Kugeln und einerley Ring, DE nach der Masse der Kugel richten, welches ungereimt ist, weil DE das absolute Maaß der Kraft des Ringes vorstellt, die derselbe bey der Zusammendrückung AD hat. Und wenn auch m immer beständig von gleicher Grösse wäre, so würde

$$DE \backsim DEB$$

seyn, welches nicht angeht, dafern nicht EB eine logarithmische Linie ist. Sollte aber dieses seyn, so wäre die Ordinate in B nicht $= 0$, und überhaupt nirgends $= 0$, das will sagen, der Ring wäre kein Ring, weil er seinen Diameter AB immer verlängern würde. Man sieht leicht, daß diese letztere Ungereimtheit auch vorkommt, wenn man gleich

$$m.GG \backsim DE$$

oder das Product aus dem Quadrat der Geschwindigkeit in die Masse der Kugel der größten angewandten Kraft DE proportional setzen wollte. Diese Anmerkung trägt sehr viel dazu bey, wenn man das Leibnitzische Kräftenmaaß, welches eben $= m\,GG$ ist, beleuchten will. Denn man sieht aus der Formel

$$mGG = P.DP$$

daß m G G theils keine Kraft vorstellt, und der Kraft P nur unter sehr veränderlichen Bedingungen proportional ist, weil DP bey jedem Ringe nach Willkühr angenommen werden kann, je nachdem man denselben, mehr oder minder, zusammendrucken will.

§. 158.

Um nun die Formeln (§. 155)

$$dg = kdt : m$$

$$gdg = kdx : m$$

auf bekannte Maasse zu bringen, so kann man erstlich sowohl k als m durch Gewichte ausdrücken, weil das Gewicht, in Absicht auf k, eine der Federkraft gleiche Kraft der Schwere, in Absicht auf die Masse m aber derselben Trägheit vorstellt, als welche sich der Schwere eben so wie der Kraft der Feder widersetzt (§. 152). Sodann wendet man diese Formeln auf den Fall der Körper an, um die Geschwindigkeit durch die Höhe auszudrücken, durch welche ein Körper fallen muß, um diese Geschwindigkeit zu erreichen. Bey dieser Anwendung stellt nun k die Kraft der Schwere vor, und wird dem Gewichte m gleich gesetzt, weil dieses Gewicht von der Schwere herrührt. Auf diese Art erhält man

$$g = t$$

$$\tfrac{1}{2}gg = x = \tfrac{1}{2}tt$$

Will man nun die Zeit in Secunden, die Höhe x in rheinländischen Fussen, und die Geschwindigkeit

digkeit durch den Raum vorstellen, den der Körper, vermittelst der Geschwindigkeit g, in einer Secunde Zeit durchlaufen kann; so giebt die Erfahrung, daß

$$x = \tfrac{1000}{64}.tt$$

demnach

$$dx = \tfrac{1000}{32}.tdt$$

und

$$g = dx:dt = \tfrac{1000}{32}t$$

$$\tfrac{1}{2}gg = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1000}{32})^2.tt = \tfrac{1000}{16}x$$

ist. Da demnach hier, wegen der angenommenen Einheiten, Coefficienten vorkommen, so werden wir

$$\tfrac{32}{1000}.g = \int\frac{kdt}{m}$$

$$\tfrac{16}{1000}.gg = \int\frac{kdx}{m} = v$$

erhalten, und da ist v diejenige Höhe, von welcher ein Körper fallen muß, um die Geschwindigkeit g zu erhalten.

XIII. Der Stoß elastischer Körper.

§. 159.

Es seyn zween elastische Ringe A C, C B in dem gemeinsamen Berührungspunct C befestigt, von ungleicher Grösse, aber von gleicher Schnellkraft. Das Maaß der Fig. XXVIII.

Schnell-

Schnellkraft werde, wie vorhin (§. 155) durch die Ordinaten PN, pn der krummen Linien AE, Be vorgestellt, so ist PN = pn, wenn AP und Bp in Verhältniß der Diameter AC, BC sind. Denn dieses verstehen wir durch die angenommene Gleichheit der Schnellkraft. Man setze nun der Ring AC sey in DC, und der Ring BC in dC zusammengedrückt, so, daß AC : DC = BC : dC sey, und indem man in D und d Kugeln legt, deren Massen m, M sich umgekehrt wie die Diameter AC, BC verhalten, so lasse man beyde Ringe loß-schnellen. Die Geschwindigkeit der Kugel m in A sey = C, die Geschwindigkeit der Kugel M in B sey = c, so ist (§. 155)

$$CC = 2\,AED : m$$

$$cc = 2\,Bed : M$$

demnach

$$CC : cc = \frac{AED}{m} : \frac{Bed}{M}$$

Nun ist aber das Verhältniß der Räume

$$AED : Bed = AD : Bd = AC : BC$$

das Verhältniß der Massen aber

$$m : M = BC : AC$$

demnach

$$\frac{AED}{m} \cdot \frac{Bed}{M} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} = AC^2 : BC^2$$

Und folglich

$$CC : cc = AC^2 : BC^2$$

oder

oder $C:c = AC:BC = M:m$
Das will sagen, die Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Massen, oder directe wie die durchlaufenen Räume, weil

$$AC:BC = AD:BD$$

ist. Demnach werden die Räume AD, Bd, und so auch jede Räume PD, pd in gleicher Zeit durchlaufen, weil, was wir von den ganzen Räumen AED, Bed gesagt haben, von jeden zwischen gleiche Ordinaten fallenden Räumen PNED, pned gilt.

§. 160.

Um nun aus diesem Satze den daraus entspringenden Vortheil zu ziehen, so folgt erstlich daraus, daß die beyden Kugeln m, M nicht nur anfangs da sie in D und d gleich gedrückt werden, sondern da sie in gleicher Zeit in P und p kommen, wo $PN = pn$ ist, sie in jedem Augenblicke mit gleicher Kraft fortgedrückt werden. Nun wird der Punct C in jedem Augenblicke von jedem Ringe so viel als die Kugel gedrückt, die der Ring forttreibt. Da nun jede Kugel gleich gedrückt wird, so wird auch der Punct C von jedem Ringe gleich gedrückt. Da ferner die Richtungen einander entgegengesetzt sind, so sieht man leicht, daß ein Gleichgewicht da ist, und folglich der Berührungspunct beyder Ringe, auch wenn er nicht bevestigt wäre, dennoch in Ruhe bleiben würde. Da nun allemale

$$CP : Cp = M : m$$

ist, so läßt sich der Punct C als der Mittelpunct der Schwere beyder Massen m, M ansehen (§. 32. 74).

§. 161.

Man lasse nun die beyden Kugeln jede mit der erlangten Geschwindigkeit gegen die Ringe laufen, m mit der Geschwindigkeit C gegen A, und M mit der Geschwindigkeit c gegen B, so, daß sie zu gleicher Zeit in A und B an die Ringe stossen; so werden sie ihre Geschwindigkeit eben so verlieren, wie sie sie vorhin erhalten haben; ferners werden sie in jeden gleichnahmigten Puncten P, p in gleicher Zeit eintreffen; und endlich werden sie die Ringe bis wiederum in D und d zusammendrücken. Denn da der Druck eines jeden Ringes sich, ohne Rücksicht, auf die Bewegung der Kugel gleich äussert (§. 153. 154), so theilt der Ring AB der Kugel m in jedem Punct P eben die Geschwindigkeit dg mit, die Kugel mag sich von P gegen A oder gegen C bewegen. Der Unterschied besteht demnach nur darin, daß, weil die Geschwindigkeit dg die Kugel in beyden Fällen von C gegen A entfernt, sie im erstern Fall die Geschindigkeit der Kugel vermehrt oder dazu addirt wird, im andern Fall aber dieselbe vermindert oder davon subtrahirt wird. Da demnach für jeden Punct P in beyden Fällen

$$-gg = \frac{2}{m} \int kdx + \text{const.}$$

ist; so haben wir für den ersten Falle, wie §. 155

$$gg = \frac{2.DENP}{m}$$

im andern aber

$$C^2 - g^2 = \frac{2ANP}{m}$$

Nun ist vermög der Voraussetzung

$$C^2 = \frac{2AED}{m}$$

demnach im andern Fall

$$\frac{2AED}{m} - gg = \frac{2ANP}{m}$$

oder

$$gg = \frac{2(AED - ANP)}{m} = \frac{2DENP}{m}$$

das will nun sagen, daß die Kugel in jedem Punct P, in beyden Fällen, einerley Geschwindigkeit habe. Der Unterschied ist demnach nur, daß g im ersten Fall die erlangte, im andern aber die noch übrigbleibende Geschwindigkeit ist. Demnach ist im andern Fall die Geschwindigkeit eben so wie im ersten Fall $= o$, wenn die Kugel in D ist. Endlich aus eben dem, daß in jedem Punct P in beyden Fällen einerley Geschwindigkeit g ist, folgt, daß auch in beyden Fällen gleichnahmigte Räume P D, P A in einerley Zeit durchlaufen werden. Da nun alles dieses auch für die Kugel M gilt, so wird auch deren Geschwindigkeit $c = o$, wenn sie

sie bis in d kömmt; und in beyden Fällen gebraucht sie nun einerley Räume p d, p B zu durchlaufen einerley Zeit, weil sie ebenfalls in jedem Punct p in beyden Fällen einerley Geschwindigkeit hat. Nun sind in dem ersten Fall für beyde Kugeln die Zeiten gleich (§. 159), demnach sind sie es für beyde Kugeln auch in dem andern Fall.

§. 162.

Man setze nun, anstatt daß die Kugeln m, M mit den Geschwindigkeiten C, c gegen die Ringe laufen, die Ringe seyen selbst an die Kugeln befestigt, und laufen mit den Kugeln gegen einander, so wird, wenn die Ringe in C aneinander stossen, der Punct C in Ruhe bleiben, und die Zusammendrückung eben so wie vorhin erfolgen. Denn sobald in vorhergehendem Fall die Kugeln in A, B anfangen die Ringe zu berühren und zusammen zu drücken, so haften sie an diesen Punct eben so, wie wenn sie daran befestigt wären, und der Punct C bleibt in Ruhe. Da nun die gemeinsame Bewegung der Kugeln und Ringe, so lange sie nicht zusammenstossen, an ihrer Figur nichts ändert; so sieht man leicht, daß es gleichviel ist, ob die Ringe durch die Bewegung in die Lage A C B kommen, oder ob sie bereits darin gewesen sind, weil der Druck erst anfängt, wenn die Ringe in C einander berühren.

§. 163.

§. 163.

Endlich sieht man auch, daß es gleichviel ist, ob man die Kugeln, vermittelst elastischer Ringe, an einander stossen läßt, oder ob man setzt, die Kugeln selbst seyn elastisch und stossen unmittelbar an einander. Die Folgen werden immer noch gelten, wenn der Diameter der Kugeln = AC, CB, ihre Massen = m, M, die Elasticität gleich, und die Geschwindigkeiten umgekehrt, wie die Massen sind. Die Kugeln werden nemlich in Verhältniß ihrer Diameter zusammengedrückt, der Punct C bleibt in Ruhe, und nach dem Zusammendrücken treiben sich die Kugeln wieder von einander und erlangen ihre Geschwindigkeiten eben so wieder, wie sie dieselben bey dem Zusammendrücken verlohren haben.

§. 164.

Wollte man hingegen beyde Ringe an eine Kugel befestigen, und die Kugeln mit eben den Geschwindigkeiten gegeneinander laufen lassen, so würde das Zusammendrücken eben so erfolgen. Denn da die Bewegung an der Kraft der Ringe nichts ändert, so ist der Erfolg immer dieser, daß in jedem Zeittheilchen jeder Kugel ein Theilchen der Geschwindigkeit benommen wird, welches in gerader Verhältniß der Kraft, und in umgekehrter Verhältniß der Masse ist. Nun ist die Kraft der Ringe gegen sich selbst und gegen jede Kugel immer gleich.

Demnach verleurt jede Kugel von ihrer Geschwindigkeit ein Theilchen, welches umgekehrt wie ihre Masse ist. Da nun die anfängliche Geschwindigkeiten ebenfalls umgekehrt wie die Massen sind, so geht die Geschwindigkeit von jeder Kugel auf eine proportionale Art verlohren. Demnach kommen die Kugeln in gleicher Zeit aus A in P, und aus B in p. Da nun alsdann die Zusammendrückungen CP, Cp sind, so bleibt der Punct C während dem Zusammendrücken in Ruhe.

§. 165.

Man sieht nun überhaupt, daß so viel auch immer zween elastische Körper sich während dem Stosse zusammendrücken, und nach dem Stosse wieder voneinander treiben, die relative Geschwindigkeit eben so wieder hergestellet wird, wie sie während dem Stosse verlohren gienge. Ferner, daß weil die elastische Kraft von der Bewegung nicht geändert wird, und sich gegen den einen Körper wie gegen den andern äussert, die relative Geschwindigkeit auf beyde Körper in umgekehrter Verhältniß ihrer Masse vertheilt wird, und sich demnach immer ein Punct C gedenken läßt, von welchem sie sich in eben dieser Verhältniß der Geschwindigkeit entfernen. Sind nun die absoluten Geschwindigkeiten diesen relativen vor dem Stosse gleich, so sind sie es auch nach dem Stosse, und der Punct C bleibt in Ruhe.

§. 166.

§. 166.

Aus diesem Fall läßt sich nun leicht herleiten, welche Aenderung in der absoluten Geschwindigkeit eines jeden Körpers vorgeht, wenn dieselbe nicht in umgekehrter Verhältniß der Masse ist. Denn da die beyden Körpern gemeinsame Geschwindigkeit in dem Erfolge des Stosses nichts ändert; so sey die Geschwindigkeit des Körpers $M = V$, die Geschwindigkeit des Körpers m, $= v$, und zwar beyde in gleicher Richtung, so, daß weil $V > v$ ist, der Körper M den Körper m erreicht, indem er sich demselben mit dem Ueberschusse oder der relativen Geschindigkeit $V - v$ nähert, und mit eben derselben sich nach dem Stosse wieder entfernt. Vertheilt man nun die relative Geschwindigkeit in umgekehrter Verhältniß der Massen, so nähert und entfernt sich M mit der Geschwindigkeit $m.(V-v):(M+m)$, hingegen m mit der Geschwindigkeit $M.(V-v):(M+m)$. Da nun vor und nach dem Stosse die gemeinsame Geschwindigkeit $= v + \frac{M.(V-v)}{M+m}$ ist, weil der Punct, dem sie sich nähern und von dem sie sich entfernen, als ruhend betrachtet wird; so ist nach dem Stosse die Geschwindigkeit des Körpers M

$$C = v + \frac{M.(V-v)}{M+m} - \frac{m.(V-v)}{M+m} = \frac{2mv + V(M-m)}{M+m}$$

und die Geschwindigkeit des Körpers m

$$c = v + \frac{M.(V-v)}{M+m} + \frac{M.(V-v)}{M+m} = \frac{2VM - v(M-m)}{M+m}$$

§. 167.

Wenn man nun hiebey nachrechnet, so findet sichs, daß

$$M.V^2 + m.v^2 = M.C^2 + mc^2$$

demnach die Summe der Producte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeit, vor und nach dem Stosse, eben dieselbe ist. Es kann dieses auch nicht fehlen, weil die eine Summe wie die andere den Raum $2\int kdx$ gleich ist (§. 155).

§. 168.

Sind nun die Körper nicht vollkommen elastisch, so ist die relative Geschwindigkeit $V-v$ nach dem Stosse geringer. Man setze sie demnach $= n(V-v)$. Da nun dieselbe ebenfalls in umgekehrter Verhältniß der Massen vertheilt wird, und die gemeinsame Geschwindigkeit eben dieselbe bleibt; so finden sich die absoluten Geschwindigkeiten nach dem Stosse

$$C = v + \frac{M.(V-v)}{M+m} - \frac{n.m(V-v)}{M+m} = \frac{MV + mv - n.m(V-v)}{M+m}$$

$$c = v + \frac{M(V-v)}{M+m} + \frac{n.M(V-v)}{M+m} = \frac{MV + mv - n.M(V-v)}{M+m}$$

§. 169.

§. 169.

In diesen Formeln wird nun $n = 1$, wenn die Elasticität beyder Körper vollkommen ist, und hingegen $n = 0$, wenn sie gar keine Elasticität haben. Für solche Körper ist demnach

$$C = \frac{MV + mv}{M + m}$$

$$c = \frac{MV + mv}{M + m}$$

demnach $C = c$

§. 170.

Für jede andere Fälle, wo die Elasticität weder vollkommen noch $= 0$ ist, wird n durch einen Bruch ausgedrückt, der < 1 und > 0 ist. Der Werth dieses Bruches hängt nicht nur von der Elasticität der Körper, sondern mit dieser zugleich auch von der relativen Geschwindigkeit $V - v$ ab (§. 130).

§. 171.

Ueber den schiefen Stoß elastischer Körper, werde ich nur so viel anführen, als nöthig seyn wird, um zu zeigen, daß eine deutlich auseinandergesetzte Theorie desselben ungleich schwerer und weitläuftiger ist, als man sie gewöhnlich vorträgt. Der einfachste Fall ist, wenn eine elastische Kugel schief gegen eine unbewegliche und ebenfalls elastische Fläche läuft. Der Erfolg wird folgendermassen gezeigt. Gegen

F.XXIX. die Fläche GH laufe die Kugel C nach der schiefen Richtung AC. Es stelle AC die Kraft vor, womit die Kugel mit eben der Geschwindigkeit senkrecht auf die Fläche drücken würde; so läßt sich diese Kraft, vermittelst des Rectangels ADCF, in die zwo senkrechte Kräfte DC, FC auflösen. Dieses ist vermög des §. 107. ganz richtig. Nun ist DC mit der Fläche GH parallel, demnach drückt die Kraft DC nicht gegen die Fläche, sondern nur die Kraft FC, welche gegen dieselbe senkrecht gerichtet ist. Diese Kraft wird nun ganz aufgewandt, um die Kugel bis auf einen gewissen Grad zusammen zu drücken. Wenn dies aber geschehen ist, so wird die Kugel, wegen ihrer Schnellkraft, wieder gegen F von der Fläche weggedrückt, und die Kraft, so die Kugel dadurch erhält, ist eben so wie die Geschwindigkeit eben dieselbe, die sie vor dem Anstoßen hatte. Da nun die Kraft DC die Kugel schlechthin nur gegen E drückt, so macht man CE = CD, und setzt die Kräfte CF, CE vermittelst des Rectangels CFBE zusammen. Demnach ist die Diagonale CB nach dem Stoße die Richtung und Grösse der Kraft der Kugel. Da nun CB = CA ist, so ist auch die Geschwindigkeit der Kugel nach dem Stoß eben dieselbe, wie vor dem Stoße, und der Reflexionswinkel BCE dem Einfallswinkel DCA gleich.

§. 172.

§. 172.

In diesem Vortrage habe ich davon abstrahirt, daß AC, DC, CF, CE, CB, nicht nur Kräfte, sondern zugleich auch die Geschwindigkeiten vorstellen sollen. Letzteres ist bloß phoronomisch (§. 2), weil es nicht die Zusammensetzung der Kräfte, sondern schlechthin nur der Bewegung betrift. Man gedenkt sich nemlich, die Kugel bewege sich auf der Linie AF mit der Geschwindigkeit AF, während dem sich diese Linie selbst mit der Geschwindigkeit AD der Fläche GH nähert. Denn so wird, wenn die Kugel in den Punct der Linie F kömmt, dieser Punct zugleich mit der Kugel in C seyn, und sich folglich in der That durch AC bewegen. Sie hat demnach wirklich weder die Bewegung AD noch die Bewegung AF; und man kann sie sich auch nicht als zwo Kugeln vorstellen. Sodann wird in dem Vortrage auch nicht angegeben, was man durch die Kräfte AC, DC, FC, EC, BC eigentlich versteht. Denn was man hiebey Kraft nennen kann, fängt erst an sich zu äusfern, wenn die Kugel an der Fläche C anstößt. Denn alsdann ist der Berührungspunct entweder in gar keiner, oder wenigstens in langsamerer Bewegung als der Mittelpunct der Kugel; und eben dieses macht, daß die Kugel zusammengedrückt wird. Durch dieses Zusammendrücken fängt ihre elastische Kraft, welches hier die einige gedenkbare Kraft ist, an, sich zu äussern, und zwar immer stärker, bis die Zusammendrückung am grösten ist. Will man demnach diese Schnellkraft durch eine Linie AC vorstellen, so wird AC von veränderlicher Grösse, oder wenn man die Grösse beybehalten will, von veränderlicher Bedeutung, weil sie eine immer grösser werdende Kraft vorstellt. Löst man diese Kraft in DC, CF auf, so ist die Bedeutung von DC, CF eben so veränderlich wie die von AC. Daß aber die Verhältniß zwischen denselben, oder der Winkel DCA bleibe, muß erst erwiesen werden. Der Berührungspunct fängt unstreitig an, nach der Richtung FC die elastische Fläche GH einwärts zu drücken, alldieweil die Bewegung des Mittelpuncts noch sehr merklich nach der Richtung AC geht. Da er sich indessen, wegen des Zusammendrückens der Kugel, dieser Fläche nähert, so bleibt er nicht auf der Linie DE, sondern durchläuft inner derselben eine kleine krumme Linie, wobey AC, CB die äusserſten Tangenten sind. Sodann kann man nur sagen, daß die Kugel auf das Zusammendrücken ihre Geschwindigkeit, nicht aber ihre Kraft verwende. Denn die Kraft derselben, welche eigentlich die Schnellkraft ist, äussert sich bis zur grösten Zusammendrückung immer stärker, und nachgehends immer schwächer. Daß die Kugel nach der Richtung CB und mit der anfänglichen Geschwindigkeit wieder wegfahre, läßt sich, überhaupt betrachtet,

begrei-

begreifen. Man sieht aber aus erstgesagtem, daß der deutliche und richtig auseinandergesetzte Beweiß davon ganz anders vorgetragen werden muß, und weder leicht noch einfach ist. So viel sieht man wohl, daß wenn A C die Geschwindigkeit vorstellt, und $= g$ gesetzt wird, in jedem Zeittheilchen dt sodann

$$gdg = kdx : m$$
$$dg = kdt : m$$

und folglich

$$dt . dg = kdt^2 : m = ddx$$

seyn werde (§. 155). Da nun hier die Masse der Kugel m beständig bleibt, und dt ebenfalls beständig angenommen wird, so ist dg und so auch ddx in Verhältniß von der Schnellkraft k. Alles dieses aber dient nur, wenn die Kugel mit der Geschwindigkeit g senkrecht gegen die Fläche GH läuft. Will man demnach setzen, die Geschwindigkeit AC könne in zwo andere DC, FC aufgelöst werden, und man nennt die Geschwindigkeit $CF = \gamma$, so wird man ebenfalls

$$\gamma d\gamma = \varkappa d\xi : m$$

haben. Demnach wird

$$gg : \gamma\gamma = \int kdx : \int \varkappa d\xi$$

seyn. Sollen nun hiebey A C, F C zugleich auch die Kräfte k, $\varkappa$ vorstellen, so wird dieses nicht durchaus angehen, daferne man nicht

$$k : \varkappa = x : \xi$$

demnach in der 27. Figur BE eine gerade Linie ist (§. 155). Ich habe vermittelst eines stählernen Ringes die Krümmung dieser Linie untersucht, und gefunden, daß sie von B bis in M, und noch weiter, von einer geraden Linie sehr unmerklich verschieden ist. Dieses hiesse aber die Sache a posteriori erörtern, wozu es mehrere Mittel giebt. Ich werde mich demnach dabey nicht aufhalten, sondern noch folgende Betrachtungen hersetzen.

§. 173.

Durch das Anstossen der Kugel an die Fläche wird sie in eine ovale Figur zusammengedrückt, deren kürzere Axe immer gegen die Fläche senkrecht ist. Denn wenn man den Druck auch schief setzen wolte, so würde sichs durch die Auflösung desselben in DC, CF zeigen, daß nur der senkrechte CF wirksam ist. Nun kömmt durch das Zusammendrücken der Mittelpunct C der Fläche näher, und wenn man den Abstand $= x$ setzt, so ist die elastische, oder eigentlich drückende Kraft k desto grösser, je kleiner x ist, so, daß man k als eine Function von x ansehen kann, die schlechthin nur von x abhängt, weil die Bewegung der Kugel an derselben nichts ändert, und die Masse der Kugel einerley bleibt. Die Richtung dieser Kraft k ist nun immer auf der Fläche senkrecht, und der Erfolg davon ist, daß sie in jedem Zeittheilchen dt der Kugel eine Geschwindigkeit dg mittheilt, wodurch die Kugel von der Fläche weg getrieben wird. Es ist daher eben soviel, als wenn die Fläche eine zurücktreibende Kraft k hätte, welche als eine Function von der Distanz x ist. Da nun diese Kraft in beyden Fällen ihre Wirkung in dem Mittel-Punct der Kugel vereinigt, so läßt sich die ganze Masse der Kugel, als in ihren Mittelpunct concentrirt ansehen. Dadurch wird nun die Aufgabe von der Bewegung dieses Mittelpuncts auf folgende reducirt.

§. 174.

Es sey A B eine ebene, KL eine mit derselben parallellaufende Fläche, die Fläche AB habe eine zurücktreibende Kraft k deren Wirkung innert der Fläche K L sich äussere, und aller Orten eine Function der Distanz QN = x sey. Nun bewege sich ein materieller Punct D nach der Richtung D E, so wird derselbe, sobald er in E kömmt, durch die Kraft k von der geradlinichten Richtung D E abgelenkt, und daher eine krumme Linie E F G durchlaufen, bis derselbe in G von der Wirkung der Kraft k weiter nicht mehr abgelenkt, sondern in gerader Linie GH fortbewegt wird. Dieses ist nun, überhaupt betrachtet, der Erfolg. Um denselben näher zu bestimmen, setze man der Punct sey in N gekommen, und würde, ohne die fernere Einwirkung der Kraft k nach der tangentialen Richtung N v fortbewegt werden. Da nun die Kraft k denselben immer ablenkt, Fig. XXX.

so

so durchläuft er nicht N v, sondern das Element des Bogens N r. Demnach ist die Wirkung der Kraft diese, daß der Punct anstatt in v zu seyn in r ist. Die Zeit, in welcher diese Wirkung vorgeht, und in welches ebenfalls N r durchlaufen wird, sey $= dt$. Da nun die Bewegung des Puncts an der Wirkung der Kraft nichts ändert, so sieht man leicht, daß v r eben die Grösse haben würde, wenn der Punct sich nicht durch N v, sondern durch n v, ohne die Einwirkung der Kraft k, in eben der Zeit d t bewegt hätte. Denn n v stellt vor, wie viel sich der Punct der Fläche genähert hätte; und eben so stellt v r vor, um wie viel weniger sich derselbe genähert hat. Es sey demnach

$$EN = w \quad Nr = dw$$
$$QN = x \quad nr = -dx \quad vr = ddx$$

die Masse des Puncts $= m$, seine Geschwindigkeit nach der Richtung N v sey $= \gamma$, die nach der Richtung n v, oder die Geschwindigkeit der Näherung $= g$, so haben wir (§. 172)

$$ddx = kdt^2 : m$$

Ich fange bey dieser Formel an, weil sie von der Geschwindigkeit nicht abhängt, sondern die absolute Wirkung der Kraft vorstellt. Da aber diese Kraft schlechthin nur die Geschwindigkeit des Annäherens vermindert, so haben wir allerdings auch

$$dg = kdt : m$$

weil

weil $ddx : dt = dg$ ist. Und demnach auch

$$gdg = kgdt : m = kdx : m$$

folglich

$$gg = \frac{2}{m} \int kdx + \text{const.}$$

Hieraus läßt sich nun eben so wie §. 161 herleiten, daß der Punct sich von der Fläche in gleichen Zeiten und gleichen Geschwindigkeiten wieder entfernt, wie er sich derselben genähert hat. Nun sieht man leicht, daß, indem sich der Punct, ohne die Wirkung der Kraft, durch Nv, oder mit dieser Wirkung durch Nr bewegt, er in beyden Fällen von der Linie QN auf die Linie qn, und demnach der Linie CJ, in beyden Fällen, um gleich viel näher kommt. Demnach läßt sich Nn als das Maaß der Zeit dt ansehen. Man setze, F sey der Punct der größten Näherung, so stellt demnach NR die Zeit vor, in welcher der materielle Punct aus N in F kömmt, und sich folglich der Fläche um RF nähert. Nun entfernt er sich in einer gleichen Zeit RM wiederum eben so viel, demnach muß er, nach Verfluß dieser Zeit, irgend auf der Linie RM seyn. Es ist aber die Näherung desselben gegen die Linie CJ, und eben so auch seine Entfernung den Zeiten proportional. Da nun die Zeit $MR = RN$ ist, so muß der materielle Punct sich durch M bewegen. Das will nun sagen, FJ ist eine Axe der krummen Linie EFL, und diese Linie wird dadurch in zween ganz ähnliche Theile getheilt. Demnach ist auch

JG =

JG=EJ, und der Winkel HGL=DEH. Da endlich den Punct in E sich den zwo Linien AC, CJ eben so geschwinde nähert, als er sich in G von denselben entfernt, so fährt er auch in G fort sich mit gleicher Geschwindigkeit durch GH zu entfernen, als er sich durch DE dem Punct E näherte.

§. 175.

Dieses sehe ich nun als die eigentliche und einige Art an, die Bewegung des Mittelpuncts einer elastischen Kugel zu bestimmen, wenn sie in schiefer Richtung gegen eine unbiegsame Fläche bewegt wird. Wäre die Fläche in Form einer gespannten Saite elastisch, so wird diese Betrachtung, so viel ich einsehe, nur alsdenn angehen, wenn die Kugel mitten an die Fläche anfährt. Denn in jedem andern Punct würde sich die Fläche nicht auf beyden Seiten gleich biegen. Und dieser Umstand scheint mir zureichend zu seyn, um in der Richtung und Geschwindigkeit des Zurückeprallens eine Aenderung zu verursachen.

§. 176.

Bey dem Fall, wo zwo Kugeln, in verschiedenen Richtungen, zugleich auf eine dritte stossen, und daher die Bewegung aus der Zusammensetzung der Kräfte entsteht, glaube ich zwar auch, daß die Regeln, die man dafür angiebt, gröstentheils ihre Richtigkeit haben.

Der eigentliche und deutlich auseinandergesetzte Beweis aber ist noch ungleich verwickelter. Die Richtung des Druckes ändert sich mit der Lage der Mittelpuncte in einem fort. Der Weg, den jeder Mittelpunct während dem Stosse macht, hängt von den beyden andern ab, und die Kugel, so von den beyden andern gestossen wird, wird auf eine doppelte Art zusammengedrückt, und das gesetzte davon, wenn man die größte Allgemeinheit beybehalten will, wird so verwickelt, daß ich hier ganz davon abstrahire. Die Aufgabe hat mit dem sogenannten Probleme des trois corps viel Aehnliches. Wenn man sich aber so harte Körper gedenkt, daß sie bey dem Zusammenstossen ihre Figur ganz unmerklich ändern, so wird die Auflösung leichter. Und dieses ist auch eigentlich die Bedingung, die bey den in mehrern mechanischen und physischen Schriften gegebenen Auflösungen vorausgesetzt wird.

Zusatz
von dem
Principe de la moindre Action.

Leibnitz hatte lange nach seinem Tode noch das Schicksal, in einem Streit verwickelt zu werden, der zwar nicht so lange dauerte, und auch nicht so allgemein war als der ersterwähnte von den lebenden Kräften. Es wurde aber beydes durch eine desto grössere Heftigkeit ersetzt,

ersetzt, und die Actions waren dabey nichts wenigers als ein minimum, sondern man trieb sie bis zu gerichtlichen Untersuchungen und Schmähschriften. Da die Hauptpartheyen sich bereits seit mehrern Jahren im Reiche der Todten darüber besprechen und einig werden können, und unter den Lebenden weiter niemand mehr Antheil an der Sache nimmt, so läßt sie sich nun mit ganz ruhigem Gemüthe untersuchen, und sehen, was dabey gedenkbar ist. Der mechanische Grundsatz ist, mit den Worten der Urschrift vorgetragen, folgender:

Principe general.

Lorsqu'il arrive quelque changement dans la nature, la quantité d'action necessaire pour ce changement, est la plus petite, qu'il soit possible.

La *Quantité d'action* est le produit de la masse des corps, par leur vitesse et par l'espace qu'ils parcourent.

Dieses ist demnach das berühmt gemachte Gesetz der Sparsamkeit der Natur, die immer den kürzesten Weg geht, den die Umstände und Bedingungen zulassen, die immer, so viel es sich thun läßt, mit dem Wenigsten das meiste Mögliche zu erhalten und zu bewirken bemüht ist. So wahr diese Absichten der Natur sind, so muste doch bewiesen werden, ob erstangeführter Grundsatz dabey statt habe. Zu diesem Ende wurde gezeigt, daß sich die Regeln vom Stosse der Körper und vom Gleichgewichte des Hebels daraus herleiten lassen. Aus dieser Herleitung wird sich auch müssen herleiten lassen, was im erstangeführten Worten unbestimmt oder dunkel seyn möchte.

Diese Worte scheinen eine Wirkung von gegebener Grösse voraus zu setzen, und diese soll durch die geringste mögliche Action erhalten werden. Dieses setzt ferners voraus, daß die geringste mögliche Action nicht die einige mögliche sey: denn es ist klar, daß sonst keine Auswahl bliebe. Ich behalte das Wort Action bey, um es mit deutschen Wörtern, die etwa einen andern Umfang der Bedeutung haben möchten, nicht zu verwechseln. Man sieht überhaupt, daß es alles vorstellt, was eine wirkende Ursache anwenden muß, um die Wirkung ganz zu erhalten. Man würde demnach sagen, es stelle die Summe aller einzeln Einwirkungen, die Grösse und Stärke der darauf verwendeten Kräfte und Mittel, die darauf verwendete Zeit rc. vor. In dem angeführten Grundsatze wird aber dieses Wort anders bestimmt. Die darin erwähnte *Action* wächst nach der **Masse**, der **Geschwindigkeit** und dem **Raume**. Das Product aus diesen drey Stücken soll ein minimum seyn. Ob nun daraus folge, daß die Wirkung auch in dem kleinsten Raume vorgehen soll, habe ich nicht finden können; wohl aber läßt sich der Raum als ein Product der Geschwindigkeit in die Zeit ansehen, und dieses Product kann immer dafür gesetzt werden. Thut man dieses, so ist die *Action* ein Product aus der Masse, der Zeit und dem Quadrate der Geschwindigkeit. Leibnitz würde gesagt haben, aus der Zeit und der lebenden Kraft, und so müßte die Wirkung in der kürzesten möglichen Zeit und mit der geringsten lebenden Kraft erhalten werden. Es liesse sich ziemlich hören, wenn nicht der Begrif der lebenden Kraft seine besondere Schwierigkeiten hätte. Indessen wird immer noch dabey vorausgesetzt, daß das minimum nicht das einzige Mögliche seyn müsse. Denn könnte die Natur an sich nicht anders wirken, als sie wirkt, so wäre die Frage, ob sie am kürzesten und kräftigsten wirke von eben der Art, als wenn man fragte, ob die Zeit in ihrem Verweilen ein minimum beobachte?

Jedoch, wir wollen noch alles so hingehen lassen, und ferners anmerken, daß die Action eigentlich von Seiten der wirkenden Ursache betrachtet wird: denn diese soll eigentlich die geringste Mühe, Kraft, Zeit 2c. anwenden. Dieses kömmt nun darauf an, daß sie nicht auf jede mögliche Arten, sondern gerade auf die Art wirke, wie die Wirkung am leichtesten, geschwindesten 2c. erhalten werden kann. Dazu wird eine besondere Zusammenrichtung der Umstände, eine besondere Structur 2c. erfordert.

Auch

Auch giebt es viele Fälle, wo etwas ähnliches bereits in der Natur bemerkt worden. So z. E. jeder Druck, auch wenn er schief ist, wirkt dennoch senkrecht, und in sofern am kräftigsten. Eben so giebt bey zusammengesetzten Kräften die Diagonale das oben (§. 91) erwiesene minimum. Und beym Gleichgewichte, wo die gegebene Kräfte ihre Wirkung ganz äussern, treiben sie den Mittelpunct der Schwere, so weit er immer gehen kann, nemlich am tiefsten Ort, den die Zusammenrichtung des Systems zuläßt ꝛc.

Es scheint demnach die Action müsse an und für sich berechnet, und sodann in der Natur als ein minimum erfunden werden. Die Reaction kömmt dabey nur in sofern in Betrachtung, als man nachzusehen hat, wie die Action, sie mag nun groß oder klein seyn, dabey aufgewandt wird, ohne daß weder etwas mangele, noch zu viel sey. Kann dieses auf mehrerley Arten geschehen, so ist allerdings zu vermuthen, daß in der Natur die kürzeste und leichteste, man kann noch beyfügen die sicherste, gewählt sey.

Allein, alles dieses ist nur die Umschreibung des Grundsatzes, so, wie ich mir ihn vorstelle. Es soll demnach keine Erklärung der vorhin angeführten Worte seyn. In diesen hat noch der Ausdruck action *necessaire* pour ce changement einige Dunkelheit. Die Worte scheinen zwar an sich ganz klar zu seyn, aber in der Anwendung, die davon gemacht worden, fangen sie an, einer Erläuterung zu bedürfen. Ich werde demnach die Anwendung hersetzen; und dieses mag nun auf Deutsch geschehen.

Zween Körper, deren Masse A, B sey, bewegen sich in gerader Linie, B mit der Geschwindigkeit b und A, mit der grössern Geschwindigkeit a, so, daß A den Körper B verfolgt, einholt, auf denselben stößt. Nach dem Stosse fahren beyde fort, B mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{b}$, A mit der geringern Geschwindigkeit α. Dabey soll nun eine actio minima seyn. Um sie zu bestimmen, wird die Rechnung von dem Urheber des Grundsatzes folgendermassen gemacht. Die durchlaufenen Räume werden für einerley Zeit berechnet, und Kürze halber für die Zeit $= 1$. Demnach sind sie a, b, α, $\mathfrak{b}$. Nun ist für den Körper A die durch den Stoß erlittene **Veränderung** (changement arrivé dans l'univers) der Geschwindigkeit $= a - \alpha$, des Raumes ebenfalls $= a - \alpha$; demnach die quantité d'action necessaire pour ce changement $= A (a - \alpha)^2$. Auf eben die Art für den Körper B ist sie $= B (\mathfrak{b} - b)^2$. Die Summe von diesen Actions soll nun ein minimum seyn. Demnach

$$A(a-\alpha)^2 + B(\mathfrak{b}-b)^2 = \text{minimum}.$$

Hier

Hier fängt es an dunkel zu werden. A ist der eigentlich wirkende Körper. Ich hätte demnach erwartet, daß nicht die Differenz seiner eigenen Geschwindigkeiten $a-\alpha$, sondern entweder seine Geschwindigkeit vor dem Stosse a, oder wenigstens seine relative Geschwindigkeit $a-b$, mit welcher er auf den Körper B anfährt, zur Berechnung der Action müßte gebraucht werden; allein so wird nur die Veränderung $a-\alpha$ gebraucht, die er dabey erlitten. Und eben so wird für den Körper B auch nur die Veränderung $\beta - b$ gebraucht. Es stellen demnach $(a-\alpha)^2$, $(\beta-b)^2$ das **Product aus den Veränderungen vor**, so **bey jedem Körper der Geschwindigkeit und dem Raume nach vorgegangen.** Dieses hätte nun aber müssen in dem Grundsatze ausgedrückt werden. Dabey wäre aber freylich nachgehends zu beweisen gewesen, warum anstatt $(a-\alpha)^2$, $(\beta-b)^2$ nicht viel ehender $a^2-\alpha^2$, β^2-b^2 hat genommen werden müssen. Denn so wäre $A\,a^2$ die quantité d'action vor dem Stosse, $A\alpha^2$ die quantité d'action nach dem Stosse; und eben so wären $B\beta^2$, Bb^2 die quantités d'action, oder de reaction für den Körper B, und

$$A(a^2-\alpha^2)+B(\beta^2-b^2)$$

würde die quantité d'action *necessaire* pour ce changement vorstellen, die ein minimum seyn müßte. Denn diese quantité d'action wäre eigentlich verwendet worden. Allein wenn man auch dieselbe = minimum setzt, so lassen sich die Gesetze des Stosses und des Hebels nicht daraus herleiten. Dazu dient die Formel

$$A(a-\alpha)^2 + B(\beta-b)^2 = \text{minimum}$$

ungleich besser; und so wurde sie auch vorgezogen, wenn sie gleich von dem Grundsatze ein wenig abzuweichen, oder einen andern Verstand zu haben schien.

Indessen verdient sie immer genauer betrachtet zu werden. Ich bemerke demnach, daß, wenn es nur darum zu thun ist, diese Formel auf den Stoß der Körper und den Hebel anzuwenden, man die Zeit immer = 1 setzen, und statt des **Productes** aus dem **Raum** und der **Geschwindigkeit**, das **Quadrat** der **Geschwindigkeit** nehmen kann. Und allem Ansehen nach, wird auch dieses müssen genommen werden.

Sodann bemerke ich, daß die Differenz $a-\alpha$, $\beta-b$, bey dem Stosse der Körper eine ganz besondere Eigenschaft haben. Denn man setze, die Geschwindigkeiten vor dem Stosse seyn $a-c$, $b-c$, so sind die nach dem Stosse ebenfalls $\alpha-c$, $\beta-c$. Nun ist

$$(a-c)-(\alpha-c) = a-\alpha$$
$$(\beta-c)-(b-c) = \beta-b$$

folglich sind diese Differenzen einerley, was auch immer c für eine Grösse habe. Man bestimme nun c dergestallt, daß

$(a-c)$

$$(a-c):(c-b)=B:A$$

werde, welches

$$c=\frac{Aa+Bb}{A+B}$$

giebt. Dieses macht die Geschwindigkeit $b-c$ des Körpers B vor dem Stosse negativ, und beyde Körper nähern sich ihrem Mittelpunct der Schwere mit Geschwindigkeiten, die in umgekehrter Verhältniß ihrer Massen sind. Nach dem Stosse sind ihre Geschwindigkeiten $\alpha-c$, $\epsilon-c$. Und diese sind nun

1°. entweder $=0$, wenn die Körper keine Schnellkraft haben.

2°. Oder sie sind, wiewohl mit verwechselten Richtungen, den Geschwindigkeiten $a-c$, $c-b$ vor dem Stosse gleich, wenn die Körper elastisch sind.

Demnach ist für den Körper A die Differenz seiner Geschwindigkeiten, wenn er nicht elastisch ist, schlechthin nur $a-c$, wenn er elastisch ist $2a-2c$. Und eben so hat man für den Körper B im ersten Fall $b-c$, im andern $2b-2c$. Dieses giebt nun für nicht elastische Körper

$$A(a-c)^2+B(b-c)^2=\text{minimum}$$

für elastische

$$4A(a-c)^2+4B(b-c)^2=\text{minimum.}$$

Man sieht leicht, daß **Leibnitz** wiederum sagen würde, in beyden Fällen sey die Summe der lebenden Kräfte ein minimum. Dieses hat auch s'Gravesande in seinen Institutionibus philosophiae Newtonianae §. 268 und 281 wirklich gesagt, und auch die Erinnerung beygefügt, daß die Differenzen der Geschwindigkeiten $a-\alpha$, $\beta-b$ von den absoluten Grössen der Geschwindigkeiten selbst unabhängig sind, und daher

$$A(a-\alpha)^2+B(\beta-b)^2$$

in allen Fällen die Summe der aufgewandten Kräfte vorstelle, und ein minimum sey. Denn die beyden Körpern gemeinsame Geschwindigkeit ändert an der Wirkung des Stosses nichts. Dieser geschiehet immer in dem Mittelpunct der Schwere beyder Körper, es mag nun derselbe in Ruhe seyn, oder sich bewegen. Man siehet demnach, woher es komme, daß in allen Fällen

$$A(a-\alpha)^2+B(\beta-b)^2 = \text{minimum}$$

ist. Und wer die sogenannten lebende Kräften wirklich als Kräfte ansieht, wird allerdings diese Formel als ein Gesetz der Sparsamkeit ansehen können, ohne daß er die beyden Quadrate $(a-\alpha)^2$, $(\beta-b)^2$ als Producte aus der Geschwindigkeit in dem Raum anzusehen habe.

Es sind demnach $a-\alpha$, $\beta-b$

1°. bey nicht elastischen Körpern die Geschwindigkeiten, mit welchen sich jeder dem gemeinsamen Mittelpunct der Schwere, als dem Puncte, nähert, in welchem der

Stoß

Stoß geschieht. Der Stoß ist einerley, dieser Punct mag sich bewegen oder in Ruhe seyn, die Körper wirken immer mit den Geschwindigkeiten $a-\alpha$, $\beta-b$, dergestalt, daß beyde $=0$ werden, oder darauf gehen.

2°. Bey elastischen Körpern sind $a-\alpha$, $\beta-b$ eben die Geschwindigkeiten aber doppelt genommen; nemlich mit $\frac{1}{2}(a-\alpha)$, und $\frac{1}{2}(\beta-b)$ nähern sie sich einander vor dem Stosse, und diese Geschwindigkeiten werden rein aufgewandt. Da aber die Körper elastisch sind, so werden diese Geschwindigkeiten, aber mit entgegengesetzten Richtungen, rein wieder hergestellt. Man mag nun aber in diesem Fall $a-\alpha$, $\beta-b$ ganz oder halb nehmen, so ist

$$A(a-\alpha)^2 + B(\beta-b)^2 = \text{minimum}.$$

Ganz oder halb genommen. Das thut zur Sache nichts.

Ob aber wirklich diese Summe ein minimum sey oder nicht, das ist eine andere Frage. s'Gravesande nimmt sie dafür an, weil er sie als eine Summe von **lebenden Kräften**, und zwar als eine Summa virium destructarum ansieht. Der Erfinder anfangs erwähnten Grundsatzes nimmt sie an, weil er sie als die quantité d'action necessaire pour ce changement ansieht. Mir ist keines von beyden an sich einleuchtend. Ich sehe dabey nur so viel, daß, wenn man diese Formel als ein minimum oder auch als ein maximum behandelt, indem man α, β als veränderlich ansieht, und das Differential $= 0$ setzt, man

$$-A(a-\alpha)\,d\alpha + B(\beta - b)\,d\beta = 0$$

erhält, und daß man, um hieraus die Verhältniß zwischen A, B, a, α, b, β zu finden, noch eine Gleichung haben müsse; demnach obbemeldte Formel allein die Sache nicht ausmache. Nun ist für elastische Körper

$$a - b = \beta - \alpha$$
$$d\beta = d\alpha$$

dieses giebt

$$-A(a-\alpha) + B(a+\alpha-2b) = 0$$

und demnach

$$\alpha = \frac{Aa - Ba + 2Bb}{A+B}$$

$$\beta = \frac{2Aa - Ab + Bb}{A+B}$$

welches dann wirklich die Gesetze für elastische Körper sind. Für nicht elastische Körper ist $\alpha = \beta$, $d\alpha = d\beta$; und dieses giebt

$$-A(a-\alpha) + B(\alpha - b) = 0$$

demnach

$$\alpha = \beta = \frac{Aa + Bb}{A+B}$$

welches ebenfalls das Gesetz für nicht elastische Körper ist. Endlich findet sichs auch, daß

A

$$A(\dot{a}-\alpha)^2 + B(\beta-b)^2 = \text{minimum}$$

in der That ein minimum, und nicht etwan ein maximum ist. Und so weit gehet es mit dieser Formel ganz richtig. Allein ob sie deswegen ein minimum ist, weil sie nicht bloß in der Rechnung, sondern in der **Natur** selbst allenfalls auch einen **grössern** Werth hätten haben können, das ist wiederum eine andere Frage. Man lasse zween Körper mit Geschwindigkeiten, die umgekehrt wie ihre Massen sind, gegeneinander laufen, so werden diese Geschwindigkeiten immer ganz aufgewandt. Mehr kann an sich nicht aufgewandt werden, weil nicht mehr da ist. Weniger kann auch nicht aufgewandt werden, weil sonst das fernere Andrücken fortfahren würde. Sollte aber ein Körper den andern mit sich fortreissen, so würden die Geschwindigkeiten nicht umgekehrt wie die Massen seyn, weil in diesem Fall allein die Geschwindigkeiten ganz aufgewandt werden. Dieses erhellet aus dem XIIIten Abschnitte auf eine nothwendige Art. Demnach ist das minimum, wovon hier die Rede ist, ein bloß **symbolisches** minimum, weil es in der **Natur** selbst an sich nicht anders seyn kann. Und so läßt sich dabey nicht von Sparsamkeit reden, weil diese eine Auswahl voraus setzt.

XIV.

XIV. Das Cartesische und Leibnitzische Kräftenmaaß.

§. 177.

Leibnitz hat vor allen andern Philosophen aus das besonders, daß er ungefehr ein Dutzend Grundsätze in der menschlichen Erkenntniß auf die Bahn gebracht hat, welche sämtlich zu fast hundertjährigen Streitigkeiten Anlaß gegeben, und worüber, alles zusammengerechnet, viele Zeit verlohren worden. Anstatt daß Newton solche Dinge vornahm, die er selbst zur Richtigkeit brachte, und wovon, was er zurück liesse, andere zur Richtigkeit bringen konten, anstatt dessen, sage ich, suchte Leibnitz sich in solchen Dingen herfürzuthun, wo man, so zu reden, etwas wagen muste, und was weder von ihm noch von andern sogleich berichtiget werden konnte. Dahin wird ausser seinen metaphysischen Grundsätzen auch sein Kräftenmaaß gerechnet, und die hierüber geführten Streitigkeiten sind bekannt. Die grösten Mathematikverständigen nahmen daran in so weit Antheil, daß jeder sich für die eine oder andere Meynung erklärte, oder wenigstens seine eigene Meynung dazu sagte. Dermalen ist darüber alles ziemlich stille, da theils einige, so Antheil daran genommen, gestorben, andere vielleicht deswegen nachgelassen, weil sie alles, was sie sagen konnten, gesagt hatten. Noch andere

des

des Streitens überdrüßig geworden; und endlich noch andere die Sache als beygelegt, oder als einen blossen und theils wenig erheblichen Wortstreit ansahen. So viel kann man immer sagen, daß in der ganzen Sache etwas verwirrtes war, welches sich auf keine Art recht wollte entwickeln, noch zu einer wahren geometrischen Evidenz bringen lassen. Und eben diese Verwirrung macht einen ordentlichen und netten Vortrag der Sache ziemlich schwer. Indessen werde ich wenigstens einen Versuch davon machen.

§. 178.

Es ist dem gemeinen Gebrauche zu reden gemäß, wenn man einem bewegten Körper, bloß deswegen weil er in Bewegung ist, eine **Kraft** zueignet. Denn er dringt in weichen Thon, drückt einen elastischen Ring zusammen, setzt andere Körper in Bewegung 2c. und alles dieses geschieht nicht bloß weil er ein Körper, sondern weil er in Bewegung ist. Es war daher anfangs **Mersenne**, nach ihm **Cartesius** und endlich **Leibnitz** darauf verfallen, das Maaß dieser Kraft zu bestimmen. Man kam darin überein, daß man eigentlich die Kraft verstunde, welche ein bewegter Körper anwendet, die **Wirkung ganz** herfürzubringen. Denn was die Wirkung für jedes Theilchen der Zeit oder des Raums betrift, so hatte es wegen der beyden Formeln (§. 155)

dg=

$$dg = kdt : m$$
$$gdg = kdx : m$$

oder auch, wenn man integrirt

$$mg = \int kdt$$
$$mgg = 2\int kdx$$

keine Schwürigkeit. Diese kam dabey vor, daß **Mersenne** und so auch **Cartesius** das Product m g, **Leibnitz** aber das Product m g g eine Kraft nennete, und jeder sein Product als das **Maaß** der Kraft ansahe, und dem bewegten Körper wirklich eine solche Kraft zueignete. Ferners schlosse **Cartesius**, vermuthlich daraus, daß die Welt im Beharrungsstande seyn sollte, es müsse von der ganzen Summe der Bewegung weder etwas verlohren gehen, noch Neu entstehen. Eben dieses schloß auch **Leibnitz** in Absicht auf das, was er Kraft nennte; und so machte **Cartesius** die Summe aller in der Welt vorkommenden m g, **Leibnitz** die Summe aller m g g beständig. Jede Parthey ließ sich nun angelegen seyn, ihr Vorgeben durch Versuche und Erfahrungen zu bewähren, zugleich auch das Vorgeben der andern Parthey zu entkräften, und besonders da, wo sie etwan zurücke bliebe, zu zeigen, daß die Gegenparthey auch zurück bleibe.

§. 179.

Endlich kömmt, im Grunde betrachtet, noch ein Umstand dazu, welcher, je nachdem er ent-

entschieden wird, den ganzen Streit entweder wichtig, oder zu einem ganz leeren Wortstreit macht. Dieser Umstand ist die Frage, ob man, wenn die Dynamic im strengsten Verstande a priori zu beweisen ist, den Stoß von Kräften, oder die Kräfte vom Stoße herleiten solle? Denn leitet man den Stoß und die Bewegung von Kräften her, wie ich es in dem vorhergehenden gethan habe, so gehen die Formeln

$$mg = \int kdt$$
$$mgg = 2\int kdx$$

voran, und die Regeln des Stoßes sind schlechthin nur Folgen davon. Da über diese Formeln nie gestritten worden, so ist auch diese Ordnung des Vortrags die vernünftigste und zugleich die zuverläßigste und brauchbarste, weil sie sich auf jede mögliche Fälle unmittelbar erstreckt.

§. 180.

Will man hingegen die Kräfte von dem Stoße und der Bewegung herleiten, so muß man, ehe man die Formeln

$$mg = \int kd\tau$$
$$mgg = \int kdx$$

vortragen kann, vorerst die Regeln des Stoßes aufs allgemeinste feste setzen, und sodann aus diesen jene herleiten; dabey aber verfällt man auf die Cartesische und Leibnitzische Streitigkeiten. So sieht demnach die Sache, überhaupt

haupt betrachtet, aus. Ich merke vorläufig dabey an, daß allerdings die Kräfte der Bewegung voreristirend müssen gedacht werden. So gedenkt man sich in der Statik die Kräfte, ohne Rücksicht, auf die Bewegung. Und selbst in Absicht auf den ganzen Weltbau gedenkt man sich einen primus motor, eine erste Ursach aller Bewegung; und diese erste Ursache stellt man sich allerdings als eine Kraft vor, die die Bewegung erst herfürbringt. Endlich ist auch so viel klar, daß, da eben angeführte zwo Formeln ausser Streit sind, jede andere Theorie von Kräften denselben nicht zuwider seyn müßte. In diesen beyden Formeln kömmt die Kraft k vor, über deren Bedeutung ebenfalls nie gestritten worden; und dieses ist, wegen der Vieldeutigkeiten des Worts Kraft, allerdings zu merken. Denn sagt man, z. E. ein elastischer Ring wende seine Kraft auf, einen Körper fortzudrücken, diese Kraft gehe in den Körper über, bewege sich mit demselben fort, verlasse ihn nicht, bis er irgend anstößt 2c. So hat das Wort Kraft in diesen Redensarten eine ganz andere Bedeutung, als wenn man sagt, daß der Ring, wenn er vollkommen elastisch ist, seine Kraft ganz behalte, so, daß er den Körper, so vielmal man will, wieder aufs neue fortdrücken könne; sey aber der Ring nicht vollkommen elastisch, so gehe jedesmal etwas von seiner Kraft

verloh-

verlohren ꝛc. Es ist offenbar, daß in diesen letztern Aussagen, das Wort **Kraft**, das **Vermögen zu drücken**, in den erstern aber den **würklichen Druck** vorstelle. Zu diesen zwoen Bedeutungen kömmt noch, daß man, besonders in metaphysischen Schriften, selbst die Substanz, welcher das Vermögen zu bewegen wesentlich ist, eine Kraft nennt. Und endlich, wenn man sagt, daß **Körper von gleicher Masse, gleiche Kräfte haben**, so versteht man darunter nur gleiche Trägheit.

§. 181.

Es ist aber von allen diesen Bedeutungen keine diejenige, welche Cartesius und Leibnitz im Sinn hatten, es sey denn, daß man diejenige darunter verstehe, die ich einen blossen Druck genennt habe, der nemlich bey dem Fortdrücken eines Körpers in denselben übergeht, und wenn der Körper irgend anstößt, sich wiederum äussert. Indessen ist soviel richtig, daß der Streit größtentheils würde unterblieben seyn, wenn Mersenne oder Cartesius gesagt hätte, er **verstehe sein Product** mg **durch die Zeit** $= 1$ **dividirt**, und wenn Leibnitz gesagt hätte, er **verstehe sein Product** mgg **durch den Raum** $= 1$ **dividirt**. Denn da für den ersten Fall

$$mg = \int kd\tau$$

ist, so ist klar, daß, wenn man diese Gleichung durch die Zeit $= 1$ dividirt, der Quotient mit k

homogen wird, und folglich eben so wie k eine Kraft genennt werden könne. Für den andern Fall ist nicht minder klar, daß wenn man die Gleichung

$$mgg = fkdx$$

durch den Raum = 1 dividirt, der Quotient ebenfalls mit k homogen wird, und daher, in eben dem Verstande, eine Kraft vorstellt. Denn daß k in der Statik und in der Dynamic eine an sich verständliche Kraft vorstelle, darüber ist nie gestritten worden.

§. 182.

Es scheint aber nicht, daß weder Cartesius noch Leibnitz Kräfte verstanden haben, die mit k homogen sind, ungeachtet k in diesen Formeln nicht als eine beym Gleichgewicht bloß drückende, sondern als eine wegen des nicht vorhandenen Gleichgewichtes wirklich fortdrückende Kraft vorkömmt. Nun aber findet sich in diesen beyden Formeln keine andere Kraft angedeutet: denn m stellt die Masse, g die Geschwindigkeit, t die Zeit, x den Raum, k die elastische oder fortdrückende Kraft vor. Sollen demnach die Producte m g, m g g Kräfte vorstellen, so muß man dabey verstehen, daß m g durch die Masse = 1, und die Geschwindigkeit = 1 dividirt sey; und daß eben so m g g durch die Masse = 1, und das Quadrat der Geschwindigkeit = 1 dividirt sey. Da aber die Quotienten auf diese Art nur

Zah-

Zahlen, oder blosse Verhältnisse wären, so müssen sie, um eine Kraft vorzustellen, mit der Kraft = 1 multiplicirt werden. Alles dieses ist aus den Gesetzen der Homogeneität für sich klar. Es wird aber dadurch die Natur und die Art dieser Kraft, dafern sie nicht mit k homogen seyn solle, noch nicht aufgeklärt.

§. 183.

Nun scheinen zwar die Ausdrücke $\int kdt$, $\int kdx$ nicht nur Kräfte, sondern gleichsam ganze Summen von Kräften vorzustellen. Und so wäre $\int kdt$ eine Kraft, welche sich der Zeit nach, $\int kdx$ eine Kraft, welche sich, dem Raume nach, aufhäuft. Und da hiebey

$$\int kdt = mg$$
$$\int kdx = mgg$$

so könnte man dadurch sowohl die Cartesische als die Leibnitzische Kraft verstehen. Allein es müste vorerst bewiesen werden, daß in der That $\int kdt$ und so auch $\int kdx$ aufgehäufte Kräfte, oder allenfalls auch Kräfte von einer zweyten Dimension sind. Dieser Beweiß ist aber nicht so leicht: denn daraus, daß in diesen Ausdrücken die Kraft k vorkömmt, folgt noch nichts. Man könnte sonst eben so schliessen, daß der Ausdruk $\int gdt = x$ eine der Zeit nach aufgehäufte Geschwindigkeit, oder eine Geschwindigkeit von der 2ten Dimension vorstelle. Man weiß aber, daß dadurch schlechthin nur der durchlaufene Raum vorgestellt wird. Denn $\int gdt$ muß durch die Zeit $= 1$, und durch die Geschwindigkeit $= 1$ dividirt, und sodann durch den Raum $= 1$ multiplicirt verstanden werden. Wir bleiben demnach auch hier noch zurücke.

§. 184.

Inzwischen werde ich noch anmerken, daß sowohl **Cartesius** als **Leibnitz** ihr Kräftenmaaß unter andern auch deswegen suchten feste zu setzen, damit man mit einemmale von der ganzen Kraft des bewegten Körpers auf die ganze Wirkung einen Schluß machen könnte, und nicht immer aufs neue wiederum zu den Differentialformeln

$$mdg = kdt$$

$$mgdg = kdx$$

zurücke kehren müßte. Dieses wäre nun allerdinges sehr bequem, weil man nicht selten solche Fälle findet, wo man mit dem Integriren nicht fortkommen kann. Auch hätte man von daher eine allgemeine Quadratur aller krummen Linien $\int kdx$, $\int kdt$ zu hoffen. Es ist aber diese Hofnung viel zu schön und viel zu allgemein, als daß sie so schlechthin statt finden könnte. Indessen werde ich noch anzeigen, was man dabey gethan hat.

§. 185.

Einmal kann in der Formel $\int kdx$ die Kraft k eine Function des Raums x seyn, dergestalt, daß

daß wenn die Wirkung nach den Raum geschätzt wird, $\int kdx$ bey gleichem Raume x gleich bleibt. Für solche Fälle ist demnach

$$mgg = 2\int kdx = \text{const.}$$

das will sagen, es wird einerley Wirkung erhalten, so oft die Masse umgekehrt wie das Quadrat der Geschwindigkeit ist. Dieses macht, daß Leibnitz sagte, es gebrauche einerley Kraft. Die Kraft k konnte er nicht verstehen, weil diese bey einerley Wirkung sehr verschieden seyn kann. Was er aber für eine Kraft verstunde, das hat er, so viel ich weiß, weder zureichend angezeigt, noch kenntlich gemacht, so wie es Cartesius auch nicht gethan. Da beyde Partheyen darüber nicht einig gewesen, so müssen sie auch wohl einander, vielleicht auch jeder sich selbst, nicht genug verstanden haben.

§. 186.

Ferners kann es Fälle geben, wo bey

$$\int kdx, \int Kdx$$

für jeden Raum x, immer K in gleicher Verhältniß grösser ist, als k. In diesen Fällen sey demnach

$$mgg = \int kdx$$
$$MGG = \int Kdx$$

Da nun

$$K = nk$$

so ist

$$MGG = n\int kdx$$

demnach

$$nmgg = MGG,$$

Wenn man in beyden Fällen den ganzen Raum, in welchem die Wirkung geschehen, gleich setzt. In diesem Falle sagt Herr D. **Bernoulli** in den Comment. Petropol. in der oben (§. 99) gerühmten Abhandlung: **er schätze die Leibnitzische, oder sogenannte lebende Kraft, nach der Anzahl einander ähnlicher, gleich elastischer und in gleicher Lage, bis auf eben den Grad zugleich zusammengedruckter Ringe oder gespannter Federn.** In der That ist auch in diesem Fall

$$mgg : MGG = 1 : m = k : K.$$

und daher die sogenannte lebende Kraft der elastischen Kraft proportional. Sodann werden hier die Ringe wiederum gleichviel zusammengedrückt, **und auf eine durchaus ähnliche Art.** Dadurch aber wird das Leibnitzische Kräftenmaaß nicht so allgemein beybehalten, als es **Leibnitz** haben wollte. Man setze nun aber, die Ringe seyn **unähnlich, ungleich elastisch, ungleich zusammengedrückt,** so kann die lebende Kraft und so auch die Würkung nicht mehr so schlechthin nach ihrer Anzahl geschätzt werden.

§. 187.

Man setze, um die hier vorkommende Schwürigkeit zu erläutern, zween Körper oder Kugeln von

von gleicher Masse aber ungleicher Geschwin- Fig.
digkeit. Jede laufe gegen den Ring BA, wel- XXVII.
cher in A befestigt und elastisch ist. Die erste Kugel drücke denselben bis in P, die andere aber bis in D zusammen. Die Masse jeder Kugel sey $= m$, die Geschwindigkeit der erstern $= g$, der andern $= G$: so sind die Kräfte nach Cartesens Rechnung $= mg$, mG; nach Leibnitzens $= mgg$, MGG, und daher ganz leicht berechnet. Die Wirkungen sind die Zusammendrückung des Ringes in P und D. Die Hauptfrage aber ist nun, was sich in diesen Wirkungen finde, welches ausgemessen den Kräften mgg, mGG, oder den Kräften mg, MG, gleich sey? Diese Frage ist schlechterdings nicht zu beantworten. Indessen sollte sie beantwortet werden. Denn einmal ist es nicht genug, das Maaß von Kräften anzugeben, dafern man nicht auch in ihrer Wirkung dasjenige anzeigt, was den Kräften gleich zu schätzen ist, und welches eben dadurch, daß die Kräfte bestimmt und ausgerechnet sind, zugleich mit ausgerechnet, und in der Wirkung sogleich auch kenntlich seyn solle. So z. E. wenn es die Eindrücke oder die Verkürzungen des Diameters BP, BD wären, so könnten diese leicht ausgemessen, und mit den voraus berechneten Kräften verglichen werden.

§. 188.

Es kann aber, wenn auch m, g, G einerley bleibt, die Verhältniß zwischen BP, BD auf unendlich vielerley Arten verändert werden, weil dazu weiter nichts als eine Veränderung der Elasticität des Ringes in seinen verschiedenen Theilen erfordert wird; und dieses erhält man, wenn man denselben ungleich dicke macht, oder seine Figur ändert &c. auf unzählige Arten; so, daß in den Formeln

$$mg = \int kdt$$

$$mgg = 2 \int kdx$$

die Ausdrücke $\int kdt$, $\int kdx$ alle mögliche Quadraturen von krummen Linien vorstellen können. Diese würden demnach sämtlich gefunden seyn, wenn die Cartesischen oder die Leibnitzischen Kräfte in ihrer Wirkung kenntlich und unmittelbar ausgemessen werden könnten. Da aber beydes ein süßer Traum ist, so folgt auch, *daß die beyden Kräftenmaasse gerade in denen Fällen ohne allen Gebrauch bleiben, wo sie am aller vortheilhaftesten zu gebrauchen wären.* Auch ist man währender Streitigkeiten gerade hierin zurücke geblieben. Es ist aber ganz natürlich, daß man für solche Fälle, *wo man nicht wußte, was man in der Wirkung zu suchen hatte, das den Kräften gleich wäre,* keine Versuche vorbrachte, um das Kräftenmaaß bewährt zu finden. Hingegen brachte man für solche Fälle, wo die Wirkung gleich oder proportional war, häufig Versuche vor. Es ist aber offenbar, daß man damit nicht ausreichen konnte, da immer noch der Fall zurücke bliebe, der

der die Sache durchaus und in ihrer absoluten Allgemeinheit hätte entscheiden können.

§. 189.

Wenn demnach die Cartesische oder Leibnitzische Kräfte, wirklich Kräfte wären, die sich durch mg, oder mgg bestimmen liessen, so würde ihre Berechnung in den häufigsten und wichtigsten Fällen ohne Gebrauch seyn, weil die Wirkung, so denselben gleich ist, nicht kenntlich ist, noch unmittelbar ausgemessen werden kann. Wir wollen aber wiederum den Ring vornehmen, und dabey bemerken, **daß die Bewegung des Körpers in die Wirkung der Kraft des Ringes keinen Einfluß hat.** Denn die Kraft des Ringes theilt dem Körper eben die Geschwindigkeit dg in dem Zeittheilchen dt mit, der Körper mag sich gegen den Ring oder von demselben weg bewegen. Dieses würde nicht seyn können, wenn der Körper eine von seiner Bewegung herrührende Kraft hätte, und sie gegen den Ring äusserte, indem er sich gegen denselben bewegt: denn anders läßt sich, ohne mit Worten zu spielen, keine Kraft gedenken. Diese Kraft des bewegten Körpers müste demnach mit k homogen seyn, weil sie den Ring zusammendrückt, eben so wie der Ring den Körper rückwerts treibt. Auf diese Art aber müste nach dem **Descartes**

$$m\,dg = (k - gm)\,dt$$

nach Leibnitzen aber

$$mgdg = (k - ggm)\,dx$$

seyn; beydes aber ist den obigen Formeln zuwider. Man setze ebenfalls, der Ring werde bis in D zusammengedruckt, so ist der Körper in D ohne Bewegung, und hält dennoch den größten Druck des Ringes DE eine kleine Zeit dt auf. Er setzt demnach der Kraft des Ringes nur seine **Trägheit** m entgegen. Und diese kömmt eben daher auch in obigen beyden Formeln vor. Will man dessen unerachtet diese Trägheit, die an sich schon eine Kraft genennt wird, mit der Geschwindigkeit oder deren Quadrate multiplicirt, eine **Kraft** nennen, so vermehrt man dadurch ein an sich schon vieldeutiges Wort, mit noch einer Bedeutung, und zwar mit einer solchen, die nichts vorstellt, das sich anders als ein blosses Product m g, oder m g g gedenken lasse. Das cui bono davon haben wir bereits beleuchtet.

§. 190.

Es waren aber Cartesius und Leibnitz nicht nur auf die **Benennung** und **Schätzung** ihrer Kräfte, sondern zugleich auch auf die **Erhaltung** derselben bedacht. Und hievon läßt sich allenfalls, ohne Rücksicht auf die **Benennung** und den dabey vorkommenden **Wortstreit**, reden. In der Welt gehen Bewegungen, und durch die Bewegungen Veränderungen vor. Wäre nun dabey kein Behar-

Beharrungsstand, oder kein beständig gleiche Summe, oder wenigstens keine solche Summe, die immer in bestimmten Schranken bleibt, so würde allerdings die ganze Körperwelt, nach und nach, entweder aller Bewegung beraubt und eine todte unthätige Masse, oder sie würde durch immer anwachsende Bewegung endlich in Trümmern zerstreut. Keines von beyden scheint statt zu haben; und so muß allerdings die ganze Summe aller Bewegungen entweder beständig, oder wenigstens zwischen gewissen Schranken veränderlich seyn. Nun war es die Frage, ob die Summe aller m g, oder die Summe aller m g g beständig bleibe? Diese Frage wurde eigentlich physisch betrachtet, das will sagen, ohne Rücksicht auf solche Substanzen, die eben daher, daß sie zur Geisterwelt gehören, eine innere Quelle von Thätigkeiten haben. Denn in der Physic hat man sich längst schon angewöhnt, von solchen Substanzen zu abstrahiren, und die Körperwelt für sich zu betrachten. In dieser fand man elastische und theils auch minder oder auch gar nicht elastische Körper. In Ansehung der erstern fand sichs leicht, daß bey jedem Stosse

$$MV^2 + mv^2 = M.C^2 + mc^2$$

ist (§. 167). Und so sprach Leibnitz von der **Erhaltung lebender Kräfte.**

§. 191.

§. 191.

Wir können aber von dieser Benennung abstrahiren. Genug, daß die Summe aller mgg beständig bleibt. Die Welt wird weder zerstäuben, noch zur todten Masse werden. Aber auch für den Descartes findet sich

$$MV + mv = MC + mc$$

und in sofern hat Leibnitz, wenn auch seine Kraft eine Kraft wäre, noch nichts voraus. Das einige bey dieser letzten Formel ist, daß anstatt der Summen zuweilen Differenzen heraus kommen, wenn nemlich die Geschwindigkeiten negativ werden. Das mislichste aber bey beyden Formeln ist, daß wenn auch V, v, C, c, die absoluten Geschwindigkeiten sind, demnach auch

$$M(V+\gamma)^2 + m(v+\gamma)^2 = M(C+\gamma)^2 + m(c+\gamma)^2$$

und

$$M(V+\gamma) + m(v+\gamma) = M(C+\gamma) + m(c+\gamma)$$

statt findet, und demnach Kräfte erhalten werden, die gar nicht da sind, weil beyde Formeln auch bey bloß relativen Geschwindigkeiten statt finden. Indessen ist es besser, daß die Formeln zu viel, als zu wenig wahr sind. Wenn demnach wenigstens jede kleinsten Theilchen der nicht elastischen Körper elastisch wären, so würde allerdings der Satz von der beständigen Summe bey den Bewegungen in der

Körperwelt erwiesen seyn; und daran wird, aus verschiedenen Erfahrungen und aus allgemeinen Betrachtungen zu schliessen, eben nicht viel fehlen. Ich werde im Folgenden Anlaß haben, solche Betrachtungen vorzutragen, und in Absicht auf die Erfahrungen mich auf das beziehen, was ich in den **Anmerkungen über die Gewalt des Schießpulvers** angeführt habe.

§. 192.

Indessen haben **Leibnitzens** Vertheidiger nicht ermangelt zu zeigen, daß die **Cartesischen** Kräfte nicht in allen Fällen beständig gleich bleiben, so wie es die **Leibnitzischen** blieben, weil diese wegen der quadrirten Geschwindigkeiten immer positiv sind. Und dieser Umstand trug allerdings mit dazu bey, den Satz von der **Erhaltung lebender Kräfte**, als einen für die Physic wesentlichern Grundsatz anzusehen. Indessen blieb er immer noch in derjenigen Allgemeinheit unerwiesen, in welcher ihn anfangs **Joh.** und **Dan. Bernoulli**, und sodann auch andere, mit gutem Erfolge, gebraucht haben. Es hat nemlich der Umstand, daß Körper, die auf schiefen Flächen herunter laufen, in gleicher Tiefe einerley Geschwindigkeit haben (§. 149) Anlaß gegeben, den Satz ungleich weiter auszudehnen, indem man ein und eben dasselbe System, unter verschiedenen Umständen mit sich selbst zu vergleichen angefangen. Dazu kam noch, daß,

wo

wo die auf ein System wirkende Kräfte ihre Wirkung in einem Punct desselben vereinigen, die Masse desselben als in diesem Punct concentrirt angesehen werden kann. Und dieses gab ebenfalls Anlaß, bey einem System die Bewegung jeder Theile zusammen genommen, mit der Bewegung der in diesem Punct concentrirten ganzen Masse zu vergleichen. Endlich fande sichs auch, daß, da die Bewegung so die Theile des Systems unter sich einander verursachen, in die Bewegung des ganzen Systems, oder des vorbemeldten Puncts, keinen Einfluß hat, auch dieser Umstand eine neue Quelle angabe ein System, unter verschiedenen Bedingungen, mit sich selbst zu vergleichen. Indessen muste, in verschiedenen Fällen, vorerst ausgemacht werden, worin man eigentlich das Beständige bey der Erhaltung der Kräfte zu suchen habe, wie z. E. bey schiefliegenden Flächen, daß es bey der gleichen Tiefe vorkomme 2c. Dieses macht aber, daß man nicht so eigentlich weiß, wie weit sich das Principium erstreckt. Inzwischen aber kann es als ein Leitfaden gebraucht werden, weil man nicht selten dadurch sehr leichte findet, was man sonst aus sehr vielen Differentialformeln hätte durch das Integriren heraus bringen müssen. Sind aber die Integralien vermittelst des Principii der Erhaltung der Kräfte gefunden, so können sie durch die Vergleichung mit den Differentialien geprüft werden.

Erste

Erste Grundlehren der Hydrostatik.

XV. Beschaffenheit flüßiger Materien.

§. 193.

Will man bey der Betrachtung der bey flüßigen Materien vorkommenden Kräfte a priori gehen, so kann man dabey nicht wohl mehr als einige Möglichkeiten vornehmen, und die dabey vorkommenden Symptomata bestimmen. Das Wort flüßig bringt es an sich mit, daß hier von unbiegsamen und absolute harten Linien, Flächen und Körpern die Rede nicht vorkömmt; und damit fällt auch der Vortheil weg, der sich, in Absicht auf die Gründe der Statik, daraus ziehen liesse. Es können höchstens nur die Theilchen der flüßigen Materien als hart angesehen werden, und in sofern läßt sich jedes als in seinem Mittelpunct der Trägheit concentrirt gedenken. Thut man dieses, so kömmt sogleich die Bedingung hinzu, daß diese Mittelpuncte einander nicht näher kommen können, als bis wo die Theilchen sich berühren. Sie können hingegen weiter von einander wegbleiben, wenn man setzt, daß die Theilchen durch Kräfte in gewisser Entfernung von einander gehalten werden: denn zu allem an sich gedenkbaren, sind auch die dazu erfor-

erforderliche Kräfte gedenkbar. Ausser dem haben wir an der Luft ein Beyspiel, als welche sich ausdehnt, je nachdem sie minder zusammengedrückt ist. Und so kann man sich vorstellen, daß ihre Theilchen durch die elastische Kraft, in gewissen Entfernungen von einander gehalten werden.

§. 194.

Ich werde, um bey dem einfachsten Fall anzufangen, die Theilchen von gleicher Masse und Grösse und von sphärischer Figur setzen, und da giebt die Geometrie folgende Lehrsätze an, welche auch, ohne Rücksicht auf flüßige Materien, brauchbar sind.

§. 195.

Es können um eine Kugel nicht eine gewisse Anzahl gleich grosser Kugeln gelegt werden, so, daß sie sich sämtlich auf eine durchaus ähnliche Art berühren. Um dieses zu beweisen, werden wir anfangs nur drey Kugeln P, Q, R um die Kugel A legen, so, daß sie sich je zwo und zwo berühren. Da die Kugeln gleich groß sind, so liegen ihre Mittelpuncte in den vier Spitzen eines regulären Tetraedri, und aus dem Mittelpunct der Kugel A läßt sich durch die Mittelpuncte der Kugeln P, Q, R eine Sphäre beschreiben, auf deren Fläche diese drey Mittelpuncte einen gleichseitigen sphärischen Triangel bilden, dessen jede Seite von 60 Grad ist. Da dieses für jede drey

drey einander berührende Kugeln gilt, so entstehen eben so viele solcher Triangel. Sollte demnach der Satz angehen, so muß die ganze Fläche der Sphäre in eine bestimmte ganze Zahl solcher Triangel vertheilt werden können, so, daß die Triangel durchaus an einander passen. Da nun bey jedem Triangel jede Seite 60 Grad ist, so findet sich nach den trigonometrischen Regeln für jeden Winkel ω

$$\cos 60° = (\cos 60)^2 + (\sin 60)^2 . \cos \omega$$

nun ist $\cos 60° = \frac{1}{2}$ und $\sin 60° = \sqrt{(3:4)}$ demnach

$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} \cos \omega$$

welches

$$\cos \omega = \tfrac{1}{3}$$

und

$$\omega = 71°.\ 33'.\ 54'' \ldots\ldots$$

giebt. Wollte man nun fünf solcher Triangel um einen Punct der Sphäre herum legen, so würden die fünf zusammenstossende Winkel nur fünfmal $71°.\ 33'.\ 54'' \ldots\ldots$ machen, anstatt daß sie fünfmal $72° = 360$ machen sollten. Demnach würde sie nicht schliessen. Wollte man aber sechs solcher Triangel um einen Punct herum legen, so würde 6 mal $71°.\ 33'.\ 54'' \ldots\ldots$ weit über 6 mal $60 = 360$ reichen, und daher der sechste Triangel den ersten fast ganz bedecken. Da demnach 5 Triangel nicht ausreichen, 6 Triangel aber zu weit gehen, und zwischen 5 und 6 keine ganze Zahl mehr fällt, so geht es nicht an, daß man eine bestimmte

Zahl von Kugeln um eine gleich grosse sollte herumlegen können, so, daß sie einander sämtlich und auf eine ähnliche Art berühren.

§. 196.

Man kann demnach kein Gefäß mit gleich grossen Kugeln dergestallt ausfüllen, daß sie einander sämtlich und auf eine ähnliche Art berühren. Die Folge, die wir hieraus ziehen können, ist, daß wenn jede Kugel eine gleiche anziehende Kraft hat, unter denselben kein absolutes und durchaus ähnliches Gleichgewicht statt finden kann. Denn dieses würde nur alsdenn statt finden, wenn jede Kugel, gegen die sie berührende, eine durchaus ähnliche Lage haben könnte. Da dieses aber an sich unmöglich ist, so geht auch ersteres nicht an.

§. 197.

Betrachtet man aber nicht einen ganzen Raum voll Kugeln, so lassen sich einzelne Fälle eines solchen Gleichgewichtes gedenken.

I°. Lassen sich 2, 3, 4, 5, 6 Kugeln nach einerley Richtung um eine Kugel herum legen, und in dem größten Circul vertheilen. Und da wird jede von den übrigen gleich angezogen.

II°. Lassen sich 4, 6, 8, 12 Kugeln in Form eines Tetraedron, Octaedron, Cubus und Dodecaedron oder Icosaedron um eine gleich

gleich grosse Kugel herum legen, und jede wird von den andern gleich und nach ähnlichen Richtungen gezogen.

III°. Bey 20 Kugeln geht es nur an, wenn man sie kleiner nimmt, weil schon 12 gleich grosse einander beynahe berühren.

§. 198.

Da man demnach einen Raum nicht dergestalt mit gleich grossen Kugeln anfüllen kann, daß jede gegen die übrigen eine durchaus ähnliche Lage habe, so bleibt zu sehen, wie sie gelegt werden können, damit die Lage wenigstens, so viel möglich, ähnlich sey. Dabey giebt es nun zween Fälle, und diese findet man in allen Zeughäusern bey den in Pyramiden aufgethürmten Kanonkugeln von gleicher Caliber. Denn

I°. Liegt eine Kugel auf einer Ebene, so lassen sich auf gleicher Ebene noch 6 gleiche Kugeln um dieselbe herum legen. Die mittlere Kugel kann sodann noch von drey oberhalb, und von drey unterhalb berührt werden, so, daß jede von diesen zugleich noch zwo von den erstern sechs, die in der Ebene liegen, berührt. Dies giebt in allem 12 Kugeln, so um die mittlere herum gelegt werden.

II°. Läßt man aber die mittlere weg, so lassen sich vier Kugeln in einer Ebene dergestalt legen, daß sie unter rechten Winkeln einander berühren. Der Zwischenraum, den sie lassen, kann oben und unten mit einer Kugel beschlossen werden. Fährt man so fort, so wird jede Kugel von 12 anliegenden dergestalt berührt, daß vier davon in gleicher Ebene, vier in der nächst aufliegenden Schichte, und vier in der nächst untenliegenden Schichte sind.

Da sich nur mit Quadraten, gleichseitigen Triangeln und denen daraus entstehenden regulären Sechsecken eine Ebene bedecken läßt, so sind die hier betrachteten zween Fälle die einige, wo man gleich grosse Kugeln, auf eine reguläre Art, auf einander legen kann. Wir werden nun noch zeigen, daß, **auf welche von beyden Arten man die Kugeln legt, bey gleicher Anzahl derselben gleich viel Raum erfordert werde, oder, daß die leere Zwischenräume, sowohl zu dem ganzen als zu dem mit den Kugeln ausgefüllten Raume, einerley Verhältniß haben, oder, daß der Raum, in beyden Fällen, gleich dichte angefüllt sey.**

§. 199.

Um dieses zu zeigen, setze man für den ersten Fall drey Kugeln in einer Ebene aneinander, und lege auf den Zwischenraum, so sie in der Mitte lassen, die vierte; so ist klar, daß die Mittelpuncte dieser vier Kugeln, in den vier

Ecken

Ecken eines regulären Tetraedron liegen, dessen Basis mit der Ebene parallel ist, und dessen perpendiculäre Höhe bestimmt, wieviel die vierte Kugel tiefer liegt, als wenn sie vertical auf einer der drey ersten wäre gelegt worden. Denn diese letztere Höhe ist der Distanz der Mittelpuncte, folglich der Distanz zweyer Ecken des Tetraedron, oder, welches einerley ist, dem Diameter der Kugeln gleich. Man gedenke sich nun eine dreyeckigte Pyramide von solchen Kugeln, so ist diese ebenfalls ein Tetraedron. Werden die Kugeln nach den horizontalen Schichten gezählt, so machen sie die Reyhe von Trigonalzahlen

$$1+3+6+10+15+\ldots\ldots\ldots+\frac{n.\overline{n+1}}{2}$$

$$=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$$

Diese Pyramide werde durch vier ebene Flächen, welche die äussersten Kugeln berühren, und demnach ebenfalls in Form eines Tetraedron eingeschlossen, und der Diameter jeder Kugel $=1$ gesetzt; so findet sich, wenn man nachrechnet, die Länge jeder Seite dieses Tetraedron $= n-1+1:\sqrt{8}$, demnach der Innhalt

$$z=\left(n-1+\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^3.\tfrac{1}{6}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Ferner ist der Inhalt jeder Kugel, wenn $\pi = 3,1415926\ldots.$ gesetzt wird, $=\frac{1}{6}\pi$, demnach der Inhalt der gesamten Kugeln

 k =

$$k = \tfrac{1}{6}\pi . (n^3 + 3n^2 + 2n) : 6$$

folglich

$$z : k = \frac{\left(n - 1 + \frac{1}{\sqrt{8}}\right)^3 . \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \tfrac{1}{6}\pi}{(n^8 + 3n^2 + 2n)}$$

Man setze nun, um die Irregularität der Zwischenräume am Rande zu vermeiden, die Anzahl der Kugeln unendlich groß, so findet sich die absolute Verhältniß

$$z ; k = \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \tfrac{1}{6}\pi = \sqrt{18} : \pi.$$

§. 200.

Für den zweyten Fall haben wir eine viereckigte Pyramide; werden in dieser die Kugeln nach den horizontalen Schichten gerechnet, so machen sie die Reyhe von Quadratzahlen

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \ldots + n^2$$
$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Man schliesse diese Pyramiden ebenfalls durch vier ebene Flächen ein, welche die äusserſten Kugeln berühren, so ist bey der dadurch entstehenden Pyramide die Länge jeder Seite $= n - 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, demnach der Inhalt

$$z = (n - 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}})^3 . \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Nun ist der Inhalt der gesamten Kugeln

$$k = \tfrac{1}{6}\pi . (2n^3 + 3n^2 + n) : 6$$

folglich

$$z : k = \frac{(n - 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}})^3 . \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \tfrac{1}{12}\pi}{(2n^3 + 3n^2 + n)}$$

Wird

Wird hier ebenfalls, wie vorhin, n unendlich gesetzt, so findet sich die absolute Verhältniß

$$z : k = \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \tfrac{1}{6}\pi = \sqrt{18} : \pi$$

und folglich eben die, so für den ersten Fall heraus kam. Demnach verhält sich, in beyden Fällen, der ganze Raum zu dem Raum den die Kugeln ausfüllen, wie $\sqrt{18}$ zu π, folglich bey nahe wie 4 zu 3, genauer wie 23 zu 17, noch genauer wie 27 zu 20, oder noch genauer wie 131 zu 97 ꝛc. oder wie 100000 zu 74048.

§. 201.

Wenn wir unter diesen Verhältnissen die von 27 zu 20, als welche unter den kleinern noch merklich genau ist, annehmen, so können wir sagen, daß in beyden Fällen der ganze Raum sich zu dem von den Kugeln wirklich ausgefüllten wie 27 zu 20, zu den leeren Zwischenräumen wie 27 zu 7, und demnach der Raum der Kugeln zu den Zwischenräumen wie 20 zu 7 verhalte; so, daß wenn der ganze Raum = 27 ist, die Kugeln davon einen Raum = 20 ausfüllen, die leeren Zwischenräume aber 7 betragen. Es ist demnach die specifische Schwere des mit den Kugeln angefüllten Raumes nur $\frac{20}{27}$ derjenigen, die eben der Raum dichte vollgegossen haben würde.

§. 202.

Bey dieser Gleichheit der Dichtigkeit, die in beyden Fällen statt hat, fällt es schwer, zu entscheiden, nach welchem sich solche Kugeln, die vollkommen glatt sind, richten würden, wenn sie sich entweder durch ihre Schwere, oder durch anziehende Kräfte ins Gleichgewicht setzen müßten, indem sie in einen eingeschlossenen Raum gegossen werden; so, daß sie weder unter- noch seitwerts ausweichen oder ausfliessen können. Denn da sie, auf beyderley Arten, den Raum gleich ausfüllen, so kömmt auch, wenn sie durch ihr Gewicht zusammen gedrückt werden, der Mittelpunct der Schwere gleich tief, und die Kugeln liegen auf beyde Arten in einer Regularität, die zwar nicht absolut ist, weil sie es schlechthin nicht seyn kann, die aber dennoch unter den Möglichen die Größte ist. Und eben deswegen ist auch der Raum, den sie auf beyde Arten einnehmen, der kleinste mögliche. Man sieht aber überhaupt leicht, daß alles darauf ankömmt, wie die Kugeln liegen, die am Boden des Gefässes sind: denn liegen diese entweder ins Gevierte oder im Triangel, so ist, in Absicht auf die darüberliegende, keine Wahl mehr. Es ist aber an sich leichter, daß die untersten im Triangel zu liegen kommen, weil dazu weiter nichts erfordert wird, als daß sie sich an einander legen. Hingegen müssen sie ins gevierte geleget werden, wenn sie genau so liegen sollen. Dessen ungeachtet, haben die ins gevierte gelegte Kugeln nicht nur eine reguläre Lage, sondern sie können auch nur auf eine Art schichtenweis auf einander gelegt

werden;

werden; dahingegen, wenn man sie nach Triangeln legt, zweyerley Lagen möglich sind, weil man entweder die dritte Schichte wie die erste, oder auf eine von den beyden ersten Schichten verschiedene Art legen kann. Letzteres geschieht, wenn man sie in eine trianguläre Pyramide aufthürmen will, ersteres aber wenn man ein triangulares Prisma dergestalt mit ausfüllen will, daß man am Rande am wenigsten leeren Raum lasse. Und in diesem Fall wird man solche Zwischenräume finden, die in gerader Linie durch das ganze Prisma zwischen den Kugeln herunter gehen: denn legt man die erste Schichte, so sind um jede Kugel sechs Zwischenräume. Von dieser lassen sich, vermittelst der zweyten Schichte, nur drey bedecken, und bey der dritten Schichte hat man die Wahl, ob man die drey andern bedecken, oder sie unbedeckt lassen will, indem man jede Kugel vertical über die von der ersten Schichte legt. Hingegen bey der gevierten Lage der Kugeln bedeckt jede Schichte die Zwischenräume der vorhergehenden; und so wird jeder Zwischenraum durch sechs Kugeln eingeschlossen, die in drey sich senkrecht durchschneidenden Ebenen liegen. Eine Regularität die bey der triangulären Lage der Kugeln nicht vorkömmt, und welche zureichend ist, zu machen, daß, wo die Kugeln sich untereinander mit gleichen Kräften anziehen, sie sich von selbst ins gevierte legen, weil ohne die gröste mögliche Regularität und Aehnlichkeit der Lage, kein Gleichgewicht statt findet; und, allem Ansehen nach, findet bey vollkommen glatten Kugeln gar keines statt.

§. 203.

Verschiedene über die auf der Erdfläche befindlichen flüßige Materien angestellten Versuche, lassen uns kaum zweifeln, daß ihre Theilchen sich nicht entweder anziehen, oder eben so gegeneinander andrücken sollten, als wenn sie eine anziehende Kraft hätten. Man zweifelt eben so auch nicht, daß diese Theilchen nicht sollten sphärisch, und in einer vollkommen homogenen Materie von gleicher Grösse und anziehenden Kraft seyn. Man sollte daher schliessen können, daß sie sich vermittelst dieser anziehenden Kraft, auf die erst beschriebene Art, von selbst ins gevierte legen. Ich werde aber daraus weiter keine Folge ziehen, weil man genug versichert seyn kann, daß so absolute homogene Materien in der Welt nicht vorkommen. Und eben dieses macht auch, daß man bey der Betrachtung ihres Gleichgewichtes und ihrer Bewegung, nicht auf jede einzelne Theile, sondern auf die ganze Summen sehen muß.

XVI. Das Gleichgewicht flüßiger Materien.

§. 204.

Bey der Betrachtung des Gleichgewichts flüßiger Materien, kömmt alles theils auf die Kräfte an, die in sie wirken, theils auch auf die Gefäße, in welchen sie eingeschlossen sind und eine Figur annehmen müssen. Die Kräfte sind theils in der Materie selbst, wie z. E. wenn die Theilchen sich anziehen, oder voneinander treiben, theils sind es äussere Kräfte, die entweder auf jedes Theilchen oder nur auf die Oberfläche wirken. Alle diese können, nach unzählig vielerley Modificationen, theils einzeln, theils beysammen vorkommen, die Materie selbst auch auf unzählige Arten heterogen und ungleich dichte seyn.

§. 205.

Man fängt aber gemeiniglich bey den einfachern an, und sucht sodann die dabey gefundenen Lehrsätze allgemeiner zu machen. Dieses Verfahren deucht mich auch desto vernünftiger, weil die gröste Allgemeinheit unendlich verwickelt, und gewissermassen, unerschöpflich ist. Da ich mir in gegenwärtiger Abhandlung nur vorgesetzt habe, diejenigen Gründe, die die ersten genennt werden, zu untersuchen, so werde ich auch bey der Betrachtung der einfachern

fachern Fälle stehen bleiben. In dieser Absicht setze ich anfangs die flüßige Materie homogen, und ohne eigene anziehende oder elastische Kräfte, und setze, jede Theilchen derselben werden von einer äussern Kraft, nach paralleler Richtung, gleich gedrückt. Wir haben oben gesehen, daß die Schwere eine solche Kraft ist. (§. 75 seqq.) Sollte nun die ganze Masse der flüßigen Materie nicht schlechthin nur bewegt werden oder fallen (§. 129), so muß sie entweder durch entgegenwirkende Kräfte aufgehalten, oder durch eine unbiegsame und unbewegliche Fläche eingeschlossen werden, daß sie weder unterwerts noch seitwerts ausweichen kann, wie man z. E. Wasser in einem Gefässe aufhält. Ich werde, mehrerer Kürze und Klarheit halber, die drey Namen Schwere, Wasser, Gefäß beybehalten, so, daß man durch die Schwere jede auf jedes Theilchen gleich und parallel drückende Kraft, durch Wasser jede flüßige Materie, wobey nicht innere Kräfte vorkommen, durch das Gefäß aber eine unbiegsame und unbewegliche Fläche von gleicher Figur verstehen kann.

§. 206.

Diese Voraussetzungen sind nun an sich die einfachsten. Ich sehe aber nicht, daß man damit ausreiche, dafern man nicht die Theilchen elastisch annimmt, so hart man sie auch setzen will. Verschiedene Gründe machen dieses nothwendig. Denn da kein Theilchen der Materie so absolute hart gedacht werden kann, daß es nicht wenigstens durch eine unendliche Kraft sollte getrennet werden können, so sehe ich die Materie als unendlich theilbar an, und da eben dadurch die Härtigkeit durch Kräfte erhalten werden muß, so sehe ich nicht, daß ein Theilchen der Materie hart seyn könnte, ohne zugleich elastisch zu seyn. In sofern aber läßt sich, auch wenn man die Sache a priori als eine blosse Möglichkeit betrachtet, ohne in der Betrachtung eine Lücke zu lassen, davon nicht abstrahiren. Wenn es aber auch angienge, so ist es immer das natürlichste, wenn man unter jeden Möglichkeiten solche auswählt, derer Theorie sodann in der Welt anwendbar ist. Nun fordert die Erfahrung zu der Auswahl solcher Möglichkeiten folgendes: Einmal beweist das bekannte Florentinische Experiment, wodurch man die absolute Härtigkeit des Wassers hat erweisen wollen, theils an sich nichts, theils besonders, auch nichts wider die Elasticität der Wassertheilchen. Denn ausser dem, daß das Wasser sich durch die Erkältung condensirt, und daher allerdings einen kleinern Raum einnehmen kann, so ist kein Zweifel, daß das Florentinische Experiment eben so würde ausgefallen seyn, wenn man anstatt eine Kugel voll Wassers zusammen zu pressen, eine Kugel voll stählernen Schrot hätte zusammen pressen wollen. Sodann kann man zwar aus der Zusammensetzung und Auflösung der Kräfte leicht beweisen, daß in einem Gefässe voller Kügelchen, die oberen in schiefer Richtung auf die untern drücken, und daß ein Theil dieses Druckes endlich wieder aufwärts gekehrt wird. Man kann es aber auch nur von einem Theil des Druckes beweisen, dafern man nicht die Kügelchen elastisch annimmt. Denn nur dadurch erhält man, daß jedes Kügelchen wiederum eben so viel rückwerts drückt, als es selbst gedrückt wird, und daß es diesen Druck wirklich äussert, sobald entweder die aufliegende Last vermindert, oder der Gegendruck weggenommen wird. Nun geben die über den Druck der flüßigen Materien angestellte Versuche diesen letztern Umstand an, demnach muß auch nothwendig die Bedingung, ohne welche derselbe nicht statt hat, nemlich die Elasticität der Theilchen, dabey vorkommen. Demnach muß auch diese mit in die Rechnung gezogen werden, wenn man a priori solche Möglichkeiten betrachten will, deren Erfolg nachgehends in der wirklichen Welt anwendbar ist.

§. 207.

Um diese Aussagen, deren allgemeinster Beweis ungemein weitläuftig seyn würde, durch die Betrachtung des einfachsten Falls so aufzuklären, daß ihre Nothwendigkeit zugleich mit erhelle, so gedenke man eine Anzahl gleich grosser und gleich elastischer Kugeln in einer cylin-

cylindrischen aufrecht stehenden Röhre übereinander liegend. Die Röhre sey unten geschlossen, und stehe unbeweglich. Da ist nun für sich klar, daß jede Kugel auf die untern drückt, und die unterste, so auf dem Boden der Röhre liegt, von dem ganzen Gewichte der übrigen nicht nur gedrückt, sondern bis auf einen gewissen Grad zusammengedrückt wird. Wären nun die Kugeln nicht elastisch, so würde die untere schlechthin nur gedrückt werden, und wenn man die obern wiederum wegnimmt, eben so liegen bleiben, als wenn diese nie da gewesen wären. Der Erfolg ist ganz anders, wenn die Kugeln elastisch sind. Um diesen Erfolg augenscheinlicher zu machen, so setze man, die auf der untersten liegende Kugeln werden mit einem male vernichtet, so wird die unterste nicht etwann liegen bleiben, sondern sich mit einem gewissen Grade von Geschwindigkeit in die Höhe bewegen, und zwar mit demjenigen Grade der Geschwindigkeit mit welchem sie hätte müssen auf den Boden des Gefässes fallen, um eben so viel zusammengedrückt zu werden, als sie es durch die Last der aufliegenden Kugeln war. Man sieht zugleich, daß diese Höhe sowohl von der Anzahl und Masse der aufliegenden Kugeln, als auch von der Elasticität der untersten Kugel abhänget.

§. 208.

Daß bey dem Drucke des Wassers eben dieses erfolge, läßt sich, weil wir das auflie-

gende Wasser weder in einem Augenblick wegnehmen noch vernichten können, nicht unmittelbar aus der Erfahrung beweisen. Es wird sich aber dennoch beweisen lassen, wenn wir nur einen Schritt noch weiter gehen. Man
Fig. XXXI. setze demnach die cylindrische Röhre unten dergestalt gebogen, daß neben der untersten Kugel A noch eine andere M von gleicher Elasticität und Grösse Raum habe. Der Cylinder sey in e geschlossen, und durchaus unbiegsam und unbeweglich. Die Linie g c werden wir anfangs nur horizontal annehmen, um dadurch begreiflich zu machen, daß, wenn die Kugeln nicht elastisch, sondern schlechthin nur hart wären, die Kugel A den Druck der übrigen allein aushalten, und M gar nicht würde gedrückt werden. Wenn man demnach auch den Cylinder in e öfnete, so würde gar keine Bewegung erfolgen, weil A mit dem Gewichte der aufliegenden Kugeln B, C &c. beladen, nur vertical auf den Punct c und M nur auf den Punct g drückt. Sind hingegen die Kugeln elastisch, so ist alles dieses ganz anders, weil die Kugeln nun nicht mehr bloß gedrückt, sondern zusammengedrückt werden. Bey der Kugel A wird der verticale Diameter a c kürzer, der horizontale b d länger. Dieser aber kann nicht länger, und daher auch jener nicht kürzer werden, es sey denn daß bey der Kugel M der horizontale Diameter d e kürzer, und dadurch der verticale f g länger werde. Alle diese Ver-

änderungen

änderungen richten sich dergestalt ins Gleichgewichte, daß M eben so viel zusammengepreßt wird als A, und daß der Druck, den der Cylinder in den Puncten b; c, g, e, f aushält, durchaus gleich ist. Denn da der Cylinder genau so weit im Lichten ist als eine nicht zusammengepreßte Kugel, so wird der Diameter f g nicht verändert, sondern die Kugel dehnt sich gegen die Ecke aus; und so ist der Druck in e, f, g, d, c, b, a genau dem Gewichte der Kugeln gleich.

§. 209.

Wir werden nun leicht sehen können, was erfolgt, wenn der Cylinder in einem dieser Puncte so geöfnet wird, daß die Oefnung der Grösse der Kugel gleich wird. I°. Er werde in c geöfnet, so bleibt der Druck den die Kugel A in den Puncten b, d aushält, ohne Wirkung, weil jeder dem andern gleich und die Richtung entgegen gesetzt ist. Hingegen da der Druck, den die Kugel in c äusserte, nunmehr wegfällt, so wirkt der Druck in a ganz allein, und die Kugel wird davon mit einem gewissen Grade der Geschwindigkeit herunter getrieben, und zwar mit eben dem Grade, den sie haben müßte, um durch das blosse Anstossen eben so viel zusammengedrückt zu werden. Man sieht ohne Mühe, daß diese Geschwindigkeit = o seyn würde, wenn die Kugel weder elastisch noch zusammengedrückt gewesen wäre.

Denn so würden alle Kugeln A, B, C &c. zugleich aus der blossen Ruhe und mit einer anfänglichen Geschwindigkeit = o herunter gesunken seyn (§. 129. 148). Dieses letztere widerspricht nun bey flüßigen Materien der Erfahrung, als welche im Ausfliessen aus einem Gefässe eine desto grössere anfängliche Geschwindigkeit haben, je grösser ihre Höhe in dem Gefässe ist; und man findet auch, daß die Weite des Gefässes nur in sofern etwas dabey zu sagen hat, als theils diese Höhe länger gleich erhalten wird, theils auch die Cohaesionskräfte einen Einfluß bey engen Röhrgen äussern. II°. Oefnet man hingegen die Röhre in e, so sieht man ebenfalls, daß sich der Druck in d ganz äussert, und daß folglich weil dieser Druck dem Drucke a gleich ist, die Kugel M nach der Richtung d e eben so geschwinde heraus fahren werde, als vorhin die Kugel A durch c herunter fuhr; ingleichem daß der Cylinder selbst, wenn er beweglich ist, rückwerts getrieben werde. III°. Aus gleichem Grunde wird sie, wenn die Röhre in f geöfnet wird, mit eben der Geschwindigkeit nach der Richtung g f aufwerts fahren, weil der Druck in g so groß ist als der in d und a war. IV. Endlich sieht man ohne Mühe, daß alles dieses auch statt findet, wenn gleich die Röhre nicht horizontal gebogen ist. Der Unterschied ist nur, daß wenn die Röhre sich abwerts neigt, sodann die Kugel A mit einem Theil ihres Gewichtes

auf

auf M drückt, und folglich die Geschwindigkeit um eben so viel vermehret; und daß hingegen, wenn die Röhre aufwerts gebogen wird, die Kugel M mit einem Theil ihres Gewichtes auf A drückt, und dadurch dem Druck der Kugeln B, C &c. entgegen wirkt, folglich die Wirkung desselben um eben so viel vermindert.

§. 210.

Nun läßt sich leichtlich der Schluß so machen: Erstlich, aller dieser Erfolg wäre anders, wenn die Kugeln nicht elastisch wären: denn so würde die Kugel M weder in e, noch in d, noch in f, sondern schlechthin nur nach ihrem eigenen Gewichte in g drücken. Es zeigt aber die Erfahrung bey flüßigen Materien nicht den Erfolg der nicht elastischen, sondern durchaus den Erfolg der elastischen Kugeln, weil, wenn die Röhre damit angefüllt ist, sie mit gleicher Geschwindigkeit, durch welche der Oefnungen b, c, g, e, f man will, heraus fahren und jedesmal auch auf den Cylinder zurücke wirken. Demnach ist offenbar, daß man ihre Theilchen nothwendig elastisch setzen muß. Nun ist dieses zwar, sofern sich ohne Elasticität keine Härtigkeit der Materie gedenken läßt, an sich nothwendig (§. 205. 130); und so läßt sich aus beyden Gründen von der Elasticität der Theilchen nicht abstrahiren, wenn man die Wirkungen und den Erfolg a priori betrachten, und die mögliche Fälle dergestalt auslesen und in eine Theorie bringen will, daß diese sodann in der Welt anwendbar sey.

§. 211.

Will man den Cylinder in e verlängern, um noch mehrere Kugeln von gleicher Grösse und Elasticität hineinlegen, so wird man auf eben die Art heraus bringen, daß sie sämtlich eben solchen Druck gegen den Cylinder und untereinander in den Berührungspuncten äussern, als im erst betrachtetem Fall die Kugeln M, A, weil es gleichviel ist, ob die Kugel M ihren Druck in e unmittelbar gegen den Cylinder, oder vermittelst anderer Kugeln gegen denselben äussert. Nun kann letzteres nicht geschehen, bevor diese andere Kugeln nicht eben so zusammengedrückt sind, als es M ist. Da nun die Schwere, von welcher dieser Druck herrührt, in einem fort wirkt, so bleibt das System nur alsdann im Ruhestande, wenn das Zusammendrücken ganz erfolgt ist. Demnach, wo man immer an dem in e verlängerten Cylinder eine Oefnung macht, daß eine der Kugeln heraus kann, so wird diese eben so, wie vorhin die Kugel M und mit eben der anfänglichen Geschwindigkeit heraus fahren, so lange nemlich die Röhre g c horizontal ist. Neigt sie sich aber herunterwerts, so, daß jede Kugel tiefer liegt, als die so näher gegen A sind, so wird auch ein Theil des Gewichts von diesen auf die Zusammendrückung der entferntern verwendet,

wendet, und die Geschwindigkeit, mit welcher jede bey gemachter Oefnung heraus fährt, wird dadurch grösser. Das Gegentheil erfolgt, wenn die Röhre g c aufwerts gebogen wird, weil sodann die darin liegenden Kugeln, mit einem Theil ihres Gewichtes herunterwerts drücken, und in sofern einem Theil des Druckes der Kugeln A, B, C &c. das Gleichgewicht halten.

§. 212.

Die Röhre in f wird von der Kugel M eben so viel aufwerts gedrückt, als die Kugel B von der Kugel A in a, demnach so viel als das Gewicht der sämtlichen Kugeln B, C &c. die auf A liegen. Man könnte demnach anstatt die Röhre in f geschlossen zu halten, noch einen verticalen Cylinder ansetzen, und eben so viele Kugeln als in B C sind darein legen, und so würde in f eben die Zusammendrückung erfolgen und daher ein Gleichgewicht statt haben. Ich muß noch erinnern, daß wenn die auf A liegende Anzahl der Kugeln nicht sehr groß ist, sich sodann zwischen dem Druck in f, a, und zwischen dem Druck in g, c ein bemerkbarer Unterschied äussert, weil die Kugeln A, M selbst auch mit ihrem eigenen Gewichte auf c, g drücken. Dieser Unterschied verschwindet aber bey der Betrachtung flüßiger Materien, weil deren Theilchen fast als unendlich klein anzusehen sind.

§. 213.

Man sieht aus dem bisshergesagten, daß eine einige verticale Columne von Kugeln B, C &c. zureichend ist, denen Kugeln A, M und so viel noch in der horizontalen Röhre g c liegen, eben den Druck mitzutheilen, den eben so viele andere Columnen mittheilen würden, und daß es folglich auf die Anzahl dieser Columnen nicht ankommt, um auf eine ganze horizontale Schichte von Kugeln einerley Druck auszubreiten.

§. 214.

Setzt man nun, die Röhre g c bleibe horizontal, hingegen liege die Röhre b h schief, so kann man sich leicht gedenken, daß jede der Kugeln B, C &c. nicht mehr mit ihrem ganzen Gewichte auf die untere drücke, sondern mit einem Theil desselben gleichsam auf der Röhre ruht, wo sie anliegt. Die Verhältniß läßt sich nach Anleitung des §. 149 leicht finden, und es ergiebt sich, daß der schiefe Druck in Verhältniß des Sinus des Winkels abnimmt, denn die Röhre b h mit der Horizontallinie g c macht, und folglich der Druck aller darin befindlichen Kugeln auf A einerley ist, oder A gleich viel zusammen gedrückt wird, wenn die Kugeln in b h bis auf einerley senkrechte Höhe aufgehäuft werden. Setzt man demnach in f eine schiefe Röhre und füllt sie bis auf gleiche Höhe mit b h mit Kugeln an, so wird ein Gleichgewicht statt haben, widrigenfalls nicht.

§. 215.

§. 215.

Ich werde nun diesen Vortrag, dessen vollständige Ausführung sehr weitläuftig werden würde, nicht weiter verfolgen. Man sieht leicht, daß sich nach Anleitung desselben eine in einem Gefässe eingeschlossene flüßige Materie in horizontale Schichten vertheilen läßt, daß jede Schichte einen durchaus gleichen Druck, oder vielmehr Zusammendrückung von dem Gewichte der aufliegenden Schichten erhält, daß diese Zusammendrückung von der horizontalen Länge und Breite der aufliegenden Schichten nicht abhängt, sondern schlechthin nur von ihrer Höhe herrührt. Man kann eben so daraus schliessen, daß die Oberfläche oder oberste Schichte, wenn sie eine Länge und Breite hat, horizontal seyn müsse, weil die verticalen Columnen sonst nicht gleich seyn würden, wie es zu Erhaltung des Gleichgewichtes in der Zusammendrückung jeder Theilchen einer der untern Schichten erfordert wird. Endlich sieht man, daß, wenn auch das Gefäß oben enger ist als unten, das Gefäß aller Orten so gedrückt wird, als es eine verticale Columne von gleicher Höhe und Basis thun würde. Alles dieses folgt aus dem Unterschiede, den man zwischen den blossen Druck und dem Zusammendrücken der elastischen Theilchen der flüßigen Materie nothwendig machen muß, und wovon man schlechthin nicht abstrahiren kann. (§. 210. 211). Der Druck läßt sich, so ungleich die Grösse und Lage der Theilchen auch seyn mögen, aus der blossen Theorie der Zusammensetzung und Auflösung der Kräfte herleiten, weil jedes Kügelchen oder Theilchen auf drey oder vier andern wie auf einem Fußgestelle ruht, und hinwiederum drey oder vier andere Theilchen der nächst höhern Schichte tragen hilft (§. 59. 108). Daraus findet sich, daß jede Schichte das Gewicht aller auf liegenden trägt, und ohne die Elasticität der Theilchen würde dieses auch alles seyn. Man kann daraus auch zeigen, daß bey einem Gefässe von irregulärer Figur, der Druck der aufliegenden Schichte nicht auf jedes Theilchen einer Schichte gleich vertheilt sey, sondern jedes Theilchen nur so viel tragen, und die nächst unten anliegende Schichte nur so viel drücken würde, als es die Höhe der Columne, zu welcher es gehört, mit sich bringt. Dieses hat zwar in Absicht auf das blosse Gewicht auch statt, wenn die Theilchen elastisch sind. Es kömmt aber alsdann noch das Zusammendrücken derselben hinzu, und dieses hängt nun, weil die Kügelchen sich unter sich und an dem Gefässe ansperren, nicht bloß von der Höhe jeder Columne, sondern von der absoluten Höhe der Schichten ab, weil eine einige Columne zureichend ist, die in jeder horizontalen Schichte befindliche Theilchen, durchaus gleich zusammen zu drücken, es mögen in dieser Schichte viele oder wenige Theilchen seyn (§. 211).

§. 216.

§. 216.

Da sich das ganze System ins Gleichgewichte setzt, so kömmt der Mittelpunct der Schwere an den tiefsten Ort, und so läßt sich auch daraus der waagrechte Stand der Oberfläche herleiten. Es sey DEABHC ein Gefäß mit Wasser angefüllt, dessen Fläche in den beyden Theilen AB, CD sey; GF sey horizontal, und M der Mittelpunct der Schwere. Man drücke das Wasser in a b herunter, so steigt auf der andern Seite eben so viel in c d herauf, und die Räumigen ABba, CDdc sind einander gleich. Ihre Mittelpuncte der Schwere seyn f, g, und aus diesen fälle man auf GF senkrechte Linien. Die in DCcd herauf getriebene Menge Wassers sey $= m$, und zwar unendlich klein. Die Oberfläche AB werde $= \alpha$, die in DC $= \beta$ gesetzt. DG sey $= z$, fF $= y$, und die Vertiefung des Wassers in A sey $= dx$, so ist desselben Erhöhung in D $= \alpha dx : \beta$. Demnach die Aenderung dv, so in der Höhe des Mittelpuncts der Schwere vorgegangen, wenn die ganze Masse $= M$ gesetzt wird, Fig. XXXII.

$$M dv = -(y - \tfrac{1}{2} dx) m + \left(z + \frac{\alpha dx}{2\beta}\right) m$$

diese aber muß $= 0$ seyn, weil die Höhe des Mittelpuncts M ein minimum ist. Daher ist

$$0 = -(y - \tfrac{1}{2} dx) m + \left(z + \frac{\alpha dx}{2\beta}\right) m$$

und hieraus

$$y - z = \frac{\alpha + 6}{2\,6} \cdot dx$$

das will sagen

$$y - z = o$$
$$y = z$$

Demnach müssen die Höhen der Oberflächen AB, DC gleich seyn, wenn das System im Gleichgewichte seyn solle. Es wird auf eben diese Art auch erwiesen, daß diese Flächen horizontal und eben seyn müssen.

§. 217.

Man sieht übrigens aus diesem Beweise, daß die Differentialtheilchen dx, $\frac{\alpha\,dx}{6}$ zuletzt wegfallen, und nur y mit z verglichen wird. Ich merke dieses deswegen an, weil man gewöhnlich den Stand des Gleichgewichtes darauf gründet, daß, wenn der Schenkel DC z. E. viermal enger ist als der Schenkel AB, das Wasser im erstern viermal geschwinder und höher steigen muß als im letztern. Und dieses leitet man aus den Differentialhöhen dx und ($\alpha dx : 6$) her. Da aber diese Verhältniß ganz unbestimmt läßt, ob die Höhen y, z gleich oder ungleich sind; so nimmt man ferners an, der Druck des Wassers in dem Schenkel EA sey wegen der grössern Menge Wassers, in umge-

umgekehrter Verhältniß der Geschwindigkeit, grösser als der Druck des Wassers in dem Schenkel E D, wenn die Höhen y, z gleich sind. Ob dieses allgemein und für jede Figur des Gefässes könne erwiesen werden, sehe ich nicht ein. Wenn es aber auch erwiesen werden könnte, so kommen hier alle die Anmerkungen zu machen vor, die wir oben (§. 47 seq.) bey Anlaß eines ähnlichen Beweises für den Hebel gemacht haben. Denn hier sieht man ebenfalls das Wasser in beyden Schenkeln als **Kraft** und **Last** an, und setzt, sie seyn im Gleichgewicht, wenn sich im Fall der Veränderung oder Aufhebung desselben der Weg, den die Kraft macht, zu dem Weg der Last, umgekehrt, wie die Last zu der Kraft verhält; und hinwiederum habe ersteres statt, wenn letzteres statt habe. Man sieht aber leicht, daß wenn die beyden Schenkel nicht cylindrisch oder Parallepipeda sind, dieses hier nicht so unbedingt angewandt werden kann. Wenn es aber auch angienge, so kommen noch alle die erstbemeldten Anmerkungen vor, die wir, weil sie oben (§. 47) schon ausführlich vorgetragen worden, hier nicht wiederholen.

§. 218.

Noch bleibt nun der Satz, daß ein schwerer Körper unter dem Wasser eben so viel von seinem Gewichte verleurt, als das Wasser wiegt, dessen Stelle er einnimmt. Von diesem

Satze läßt sich folgender Beweis geben, welcher den eigentlichen Grund davon deutlich auseinander setzt, weil er auf der Resolution der drückenden Kräfte beruht. Ich bemerke demnach aus dem vorhergehenden, daß, weil ein jedes Wassertheilchen, so den Körper berührt, in seiner Zusammendrückung sich an denselben ansperrt, es den Druck senkrecht auf die Oberfläche des Körpers äussert, und daß dieser Druck allemal der verticalen Tiefe desselben unter der Oberfläche des Wassers dergestalt proportional ist, daß wenn man diese Tiefe mit dem Theilchen der Fläche des Körpers, worauf es drückt, multiplicirt, man dadurch den soliden Raum einer Columnne Wassers erhält, deren Gewicht dem Drucke gleich ist. Da demnach dieser Druck sich nach der Tiefe verändert, und sich, in Absicht auf die Direction, nach der Fläche des Körpers richtet; so werden wir den Körper in unendlich kleine Prismata vertheilen, die alle parallel, und entweder vertical oder horizontal liegen. Unter den horizontalen sey A B H F eines, wo die Fläche ABCD dem Drucke des Wassers ausgesetzt, und welche gegen die Verticallinie L M unter dem Winkel KLM, und gegen die Länge des Prisma DF unter dem Winkel MKN geneigt ist, und daher, in beyden Absichten, eine schiefe Lage habe. Nun ist der Druck des Wassers auf die Fläche ABCD senkrecht, und daher geht derselbe nach einer doppelt schiefen Rich-

Fig. XXXIII.

tung

tung herunterwerts. Er läßt sich aber leicht in zween andere auflösen, welche auf die Grundfläche A Q P D und die verticale Fläche B Q P C senkrecht sind. Und da giebt die Theorie von der Zusammensetzung und Auflösung der Kräfte, daß, wenn der Druck auf die Fläche A B C D, durch diese Fläche vorgestellt wird, sodann der verticale Druck durch die Fläche A Q P D, und der horizontale durch die Fläche B C P Q vorgestellt werde. Demnach könnte man das trianguläre Prisma, so diese drey Flächen bilden, wegnehmen, und so würde das Wasser, mit eben der linearen Kraft, seinen Druck senkrecht auf die horizontale Fläche A Q P D herunterwerts, und senkrecht auf die verticale Fläche B C P Q nach der horizontalen Richtung KM mit eben dem Erfolge äussern, mit dem es vorhin auf die Fläche A B C D drückte. Da aber die Richtung des horizontalen Druckes KM mit der Länge des Prisma D F nicht parallel ist, so muß der Druck auf die verticale Fläche B C P Q in zween andere aufgelöst werden, welche anf die gleichfalls verticalen Flächen B Q T S und S C P T senkrecht seyn, und folglich letzterer nach der Länge des Prisma D F, ersterer aber nach der Breite des Prisma D R oder P T gehe. Nun folgt eben so, wie vorhin, aus der Theorie der Zusammsetzung der Kräfte, daß jede dieser Flächen das Maaß des Druckes ist, der auf sie wirkt. Demnach liesse sich auch das Prisma, so diese drey Flächen einschliefeinschliessen, wegnehmen, und das Wasser würde auf die Fläche BQTS, SCPT, DAQP mit eben dem Erfolge seinen Druck äussern, den es auf die Fläche ABCD äussert. Nun stellt die Fläche PCST die Dicke des Prisma vor, hingegen zeigt AQPD an, wie viel es unten länger ist als oben; und eben so zeigt BQTS = ABSR, wie viel es hinten länger ist als vornen. Demnach richtet sich der Druck der Länge, Höhe und Breite nach genommen, schlechthin nach diesen drey Umständen.

§. 219.

Es ist nun leicht zu begreifen, daß dem Druck auf die Fläche SCPT ein anderer gleich grosser auf die Fläche HGEF entgegen wirkt, und demnach das Prisma, in dieser Absicht betrachtet, im Gleichgewichte bleibt. Denn ist der Schnitt des Prisma HGFE wirklich auf dessen Länge senkrecht, so ist es für sich klar, daß das Wasser, weil das Prisma horizontal liegt, auf HGFE eben den Druck äussert, den es auf die Fläche PCST äussert. Wäre aber der Schnitt des Prisma schief, so läßt sich der Druck Wassers eben so in drey auf einander rechtwinklichte auflösen, wie es in Absicht auf den schiefen Schnitt ABCD geschehen; und so wird der Druck, nach der Länge FD gerechnet, der auf dieselbe senkrechten Fläche FEHG = PCST gleich seyn.

seyn. Da nun dieses von allen Prisma gilt, in die sich der Körper eintheilen läßt, so folgt, daß jedem horizontalen Druck des Wassers, ein gleich grosser entgegen wirkt, und demnach der Körper in dieser Absicht im Gleichgewichte erhalten wird.

§. 220.

Mit dem verticalen Druck hätte es eine gleiche Bewandtniß, wenn der Druck des Wassers in jeder Höhe gleich wäre. So aber ist zwar der verticale Druck, der auf die Fläche AQPD herunterwerts geht, demjenigen, der auf die Fläche aqpd heraufwerts geht, entgegengerichtet. Da aber jeder einem Product aus dieser Fläche AQPD = aqpd in die Tiefe derselben unter der Oberfläche des Wassers dergestalt proportional ist, daß er dem Gewichte eines Parallelepipedi Wassers von eben der Grösse gleich ist, so ist der Ueberschuß des untern Druckes über den obern dem Gewichte des Wassers gleich, welches in dem Raume AQPpdA seyn könnte. Da nun dieser Ueberschuß des untern Druckes aufwerts geht; so benimmt er dem Prisma Ap eben so viel von seinem Gewichte, als das Wasser wiegt, dessen Raum es einnimmt. Nun gilt eben dieses von jedem unendlich kleinen verticalen Prisma, so sich durch den Körper gezogen, gedenken läßt, demnach von dem ganzen Körper. Demnach verleurt der Körper von seinem

Gewichte so viel, als das Wasser wiegt, dessen Raum er einnimmt.

§. 221.

Man sieht aus diesem Beweise zugleich, daß der Satz nur alsdann statt findet, wenn das Wasser den Körper um und um berührt. Ich merke dieses deswegen an, weil, wenn der Körper dergestalt auf dem Boden des Gefässes liegt, daß kein Wasser dazwischen kommen kann, der Körper sodann minder von seinem Gewichte verleurt. Und so ist es möglich zu machen, daß selbst ein Körper, der leichter als das Wasser ist, unter dem Wasser auf dem Boden des Gefässes liegen bleibt.

XVII. Die Bewegung flüßiger Materien.

§. 222.

Bey der Bewegung flüßiger Materien kann man sich unendlich viele und zugleich auch unendlich verwickelte Fälle gedenken, wo man genöthigt ist, die Bewegung eines jeden Theilchen besonders zu betrachten, und vermittelst mehrerer Integrationen aus den Differentialgrössen auf das Ganze zu schliessen. Es sind daher überhaupt diejenige Fälle die einfachsten, wobey sich solche Integrationen auf eine einige bringen lassen. Und die Frage ist demnach, nur zu sehen, welche Bedingungen dazu erfordert werden.

§. 223.

Der einfachste Fall ist, wo eine flüßige Masse in luftleerem Raume schlechthin nur herunter fällt, so, daß alle Theilchen zugleich anfangen zu fallen. Denn da behält die Masse ihre Figur, und die Theilchen ihre Lage, und so erfolgt alles, wie wenn ein fester oder harter Körper fiele. Setzt man hiebey, die Masse sey cylindrisch und falle nach der Richtung der Axe des Cylinders vertical herunter, so durchläuft dieselbe einen cylindrischen Raum von gleichem Diameter. Diesen Raum kann man sich in Form einer Röhre eingeschlossen gedenken; und abstrahirt man von allem Anreiben und von allen Cohaesionskräften, so läßt sichs gedenken, daß das Wasser in einem verticalen Cylinder, wenn es zugleich anfängt in demselben zu fallen, eben so herunter fällt, als wenn es in leerem Raume fiele. Unter gleicher Bedingung wird es in einem schiefliegenden Cylinder mit verminderter Geschwindigkeit eben herunterfliessen, wie eine Kugel auf einer gleich schiefliegenden Fläche herunter läuft (§. 149), das Wasser muß aber zugleich anfangen zu fallen, der Cylinder gleich weit, und nicht gebogen seyn.

§. 224.

Nach diesem an sich einfachsten Fall betrachtet man denjenigen, wo das Wasser, ebenfalls nur durch die Kraft der Schwere getrieben, aus einem Gefässe ausfleußt. Hiebey zeigen sich, gleich bey dem Anfange des Ausfliessens, einige besonders zu betrachtende Umstände. Der erste hängt von der Elasticität der Theilchen und ihrer Zusammendrückung
Fig. XXXI. ab. Denn da haben wir bereits (§. 208 seq.) gesehen, daß wenn in c die Röhre b h geöffnet wird, die elastische und zusammengedrückte Kugel A, mit einer Geschwindigkeit heraus fährt, die nicht bloß von dem Drucke der Schwere, sondern zugleich auch von ihrer Elasticität herrührt. Eben dieses wiederfährt den folgenden Kugeln B, C &c. jedoch immer weniger, weil diese minder zusammengedrückt sind. Jede erhält nach den Maaß ihrer Höhe über c einen Grad von Geschwindigkeit, sich herunterwerts zu bewegen, welche grösser ist und sich viel schneller äussert als diejenige, die sie durch den blossen Druck der Schwere erhalten würden, wenn sie entweder nicht elastisch oder wenigstens nicht zusammengedrückt wären. Die Wirkung hievon dauert aber bey flüßigen Materien nicht lange, weil die Theilchen derselben sehr hart sind, und einander berühren. Denn dadurch setzt sich das System bald in einen Beharrungsstand, und es werden nur die ersten Tropfen mit einer grössern Geschwindigkeit

digkeit heraus geworfen. Man sieht dieses auch bey den Springbrunnen, wenn die Röhre mit einem male schnell geöfnet wird. Der Beharrungsstand selbst aber ist dieser, daß, wenn die Oefnung kleiner ist als die innere Weite des Gefässes, die Theilchen einen gewissen Grad von Zusammendrückung behalten, und eben dadurch verursachen, daß das Wasser durch eine kleinere Oefnung geschwinder heraus getrieben wird, als wenn diese grösser ist. Denn man sieht leicht, daß nur diejenige Theilchen sich wieder ausdehnen können, die zunächst bey der Oefnung sind, und daß die entferntern sich nur in sofern ausdehnen können, als sie einen Theil ihres Druckes verwenden, um die Theilchen bey der Oefnung desto geschwinder heraus zu treiben, um sich dadurch gleichsam Raum zu machen.

§. 225.

Der andere Umstand kömmt vor, wenn, ehe die Röhre geöfnet wird, zwischen der Oefnung und der Röhre etwas Luft ist, so, daß bey gemachter Oefnung, das Wasser anfängt zu fallen, ehe es dieselbe berührt, und daher mit einer gewissen Geschwindigkeit anfährt. Ist nun die Oefnung sehr klein, so werden die übrigen Theilchen sehr zusammengepreßt, und eben dadurch erfolgt, daß sie diejenigen, so vor der Oefnung sind, mit einer merklichen Geschwindigkeit heraus treiben. Es sind aber auch wiederum nur einige Tropfen, die mit so grosser Geschwindigkeit heraus fahren, und das System setzt sich eben so, wie vorhin, in Beharrungsstand, welchen wir nun betrachten werden.

§. 226.

Da die Theilchen elastisch sind, so hat, überhaupt betrachtet, die Lehre vom Stoß elastischer Körper dabey statt, und man kann sie allein dabey anwenden, wenn man von der Cohaesion, der Zähigkeit und dem Anreiben abstrahirt. Von der Zähigkeit läßt sich abstrahiren, wenn man eigentlich oder vollkommen flüßige Körper nimmt. Die Cohaesionskräfte heben sich inner der flüßigen Materie unter einander auf, und äussern sich daher eben so wie das Anreiben, nur an den Seiten des Gefässes oder der Röhre, in welcher sich die flüßige Materie bewegt. Ist demnach das Gefäß oder die Röhre sehr weit, so wird die daherrührende Hinderniß, überhaupt betrachtet, unmerklicher.

§. 227.

Sofern sich demnach die Gesetze des Stosses elastischer Körper bey der Bewegung flüßiger Materien anbringen lassen, wird allerdings auch der Satz gelten, daß die Summe aus den Producten der Masse jedes Theilchens in das Quadrat seiner Geschwindigkeit beständig bleibe, so lange nicht eine äussere Kraft,

wie

wie z. E. die Kraft der Schwere, die Bewegung der Theilchen vermehrt oder vermindert: denn im letztern Fall muß dieser Aenderung Rechnung getragen werden. Da aber die Rechnung ins unendlich weitläuftige fällt, wenn man die Bewegung eines jeden Theilchens für sich betrachten will; so sucht man auch hier diejenigen Fälle aus, wo sich diese Weitläuftigkeit abkürzen läßt. Und hiezu thut die Betrachtung, daß die Theilchen einander immer berühren, nicht geringe Dienste: denn dadurch geht der Druck, den ein jedes Theilchen äussert, sogleich in die anliegenden über; und in sofern würde jedes liegen bleiben, wenn nicht zum Ausfliessen, oder auch zum Fortfliessen eine Oefnung wäre. Dieses macht, daß jeder Druck, der gegen die Oefnung gerichtet ist, nicht wieder zurücke kehrt, sondern die bey der Oefnung liegenden Theilchen zum Ausfliessen nöthigt.

§. 228.

Man setze z. E. aus dem Gefässe D H A fliesse, durch eine in E gemachte Oefnung, Wasser heraus, so läßt sich die Oberfläche desselben D A, nach und nach, herunter. Sie mag in f ein wenig tiefer seyn als in B und A, sofern das Wasser in der Mitte sich leichter senkt, als an dem Rande des Gefässes. Man nimmt aber aus dieser verschiedenen Geschwindigkeit ein Mittel, und indem man setzt, die Fläche senke Fig. XXXII.

sich mit dieser mittlern Geschwindigkeit gleichförmig, so ist es, überhaupt betrachtet, eben so viel als wenn sie eben bliebe. Da nun eben dieses von jeder horizontalen Schichte gilt; so erhält man dadurch die Abkürzung der Rechnung, daß man anstatt das Senken eines jeden Theilchens zu betrachten, das Senken einer ganzen Schichte von Theilchen betrachten kann. Dieses Umstandes nun hat sich längst schon Herr D. Bernoulli theils in dem 2ten Bande der Comment. acad. Petrop. fürnemlich aber in seiner Hydrodynamic, mit gutem Erfolge bedient. Es ist die einige mögliche Art, die Bewegung flüßiger Materien im Ganzen zu betrachten, ohne sich weder in viele Integrationen, noch in eine Menge einzelner und zum Theil unerweislicher Hypothesen über die Bewegung, Cohaesion und Zähigkeit jeder Theilchen der flüßigen Materien einzulassen.

§. 229.

Es wird indessen nicht überflüßig seyn, hier noch einige besondere Anmerkungen über die Bewegung flüßiger Materien beyzufügen. Die erste betrift die Höhe des springenden Wassers; diese wird gewöhnlich der Höhe des Falles gleich gesetzt. Da sie aber immer kleiner ist, so sucht man auch verschiedene Gründe dafür, und diese werden bloß als kleine Ausnahmen von der Regel angegeben. Indessen muß ich sagen, daß mir die Beweise, der dem Fall

gleiche

gleiche Höhe des springenden Wassers, niemals sehr einleuchtend geschienen; und die hydraulischen Sätze waren meistentheils bisher mehr aus Erfahrungen als aus Gründen richtig. Was man bey Springbrunnen die Höhe des Falls nennt, muß ebender die Höhe des Druckes genennt werden: denn die Röhre, worinn das Wasser herunter fällt, wird, aus guten Gründen, im Lichten viel weiter gemacht als die Oefnung, durch welche es heraus springt. Da sich aber eben daher das Wasser sehr langsam senkt; so kann es nicht sowohl als fallend, sondern vielmehr als bloß drückend angesehen werden. Man hat demnach auch hier die Bewegung mit dem Drucke zu vergleichen; und dieses hat, in Absicht auf die einzelnen Theilchen, einen besondern Erfolg. Denn da diese als elastisch betrachtet werden müssen, so muß man sich auch gedenken, daß sie, so wenig es auch seyn mag, zusammengedrückt werden, bis ihre Schnellkraft dem Drucke der aufliegenden Last gleich wird. Dieses geschieht nun vollkommen, so lange die Oefnung, wo das Wasser herausspringen sollte, geschlossen ist. Man setze nun, diese werde geöfnet; so muß man sich gedenken, daß jedes Theilchen, dafern man von den Cohaesionskräften und andern Umständen abstrahirt, wegen seiner eigenen Elasticität in die Höhe springt. Ob es aber genau die Höhe des Druckes erreiche, das ist eine ganz andere Frage, weil deren Beantwortung sowohl von der Masse als der besondern Elasticität des Theilchens abhängt. Denn man sieht leicht, daß hiebey die letzte Formel des §. 158

$$v = \int \frac{k\,dx}{m}$$

vorkömmt, wo v die Höhe ist, welche das Kügelchen erreicht. Diese Höhe hängt aber von der Verkürzung des Diameters x, von dem Gewicht der aufliegenden Last k, und dem Gewicht des Kügelchen m ab. Und da ist noch nicht bewiesen, daß bey allen elastischen Kügelchen (Fig. XXVII.) die krumme Linie BME von einerley Art seyn müsse. Und noch weniger ist erwiesen, daß, wenn die Last k einem Cylinder voll flüßiger Materie gleich ist, dessen Grundfläche so groß als das Kügelchen, und die Höhe = h ist, sodann immer

$$k = n\,h$$

und

$$h = v$$

seyn müsse. Man sieht leicht, daß dieses eine besondere Art von Elasticität voraus setzt, weil dabey obige Formel in folgende

$$\frac{k}{n} = \int \frac{k\,dx}{m}$$

verwandelt wird, welche differentirt

$$\frac{m\,dk}{nk} = dx$$

und daher

$$\frac{m}{n} \log. k = x + \text{const.}$$

giebt.

giebt. Man kann aber nicht so schlechthin sagen, daß diese in allen Fällen die Gleichung für die krumme Linie B M E sey. Indessen wäre so viel wohl richtig, daß, wenn ein Wasserkügelchen, in leerem Raume, von der Höhe v = h herunter fiele, es wiederum eben so viel aufspringen könnte. So aber lassen sich die Fälle von springendem Wasser nicht betrachten. Und in sofern bleibt es, der Theorie nach, unausgemacht, ob das Wasser höher oder minder hoch springe als die Höhe des Druckes ist.

§. 230.

Ein anderer Umstand bey solchen Springbrunnen, wo das Wasser durch den Druck einer Columne oder Röhre voll Wassers zum Springen gebracht wird, betrift die äussere Luft. Eine solche Röhre läßt sich, gewisser massen, als ein Barometer ansehen, wo die Luft auf die untere Oefnung stärker druckt als auf die obere. Dieses macht zwar, wo die Höhe der Röhre nicht von 100 und mehr Fussen ist, keine grosse Veränderung. Indessen kann der Luft so viel zugeschrieben werden, daß sie das Wasser in der Röhre zusammen hält. Bey Quecksilber hat dieses noch mehr zu sagen. Ich habe z. E. Thermometer von Quecksilber gemacht, so, daß die Luft aus der Röhre ganz ausgetrieben war. Wenn ich es sodann umwendete, daß die Röhre herabhienge, so sonderte sich eine Columne von Quecksilber ab, weil ihr Gewicht stärker als Cohaesionskräfte war, und in dem luftleeren Theil der Röhre sich nichts widersetzte. Ein gleiches liesse sich auch durch Erschütterung erhalten, wodurch die Quecksilbertheilchen ihre Elasticität stärker äusserten.

§. 231.

Ein dritter Umstand findet sich bey der abnehmenden Geschwindigkeit des aufspringenden Wassers. Die Höhe, die es in gleichen Zeittheilchen zu erreichen hat, nimmt ab, wie die ungerade Zahlen, z. E. wie 7, 5, 3, 1. Dieses macht nun, daß sich in den abgetheilten Columnen, deren Höhen wie 7, 5, 3, 1 sind, gleich viel Wasser befinden muß. Daraus aber folgt offenbar, daß der auffspringende Wasserstrahl in gleicher Verhältniß dicker werden muß. Da nun dieses nicht geschehen kann, es sey denn daß die Wassertheilchen gezwungen werden, sich seitwerts zu bewegen; so sieht man auch, daß es ohne Aufwand einiger Kraft nicht angeht, und daß besonders bey sehr engen Oefnungen, das aufspringende Wasser deswegen nicht die völlige Höhe erreicht, weil es, ehe es dahin kommt, in Tropfen zersprützt. Und auch daraus erhellet, daß die Theilchen elastisch sind.

§. 232.

Da übrigens die hier betrachteten Abweichungen von allgemeinen Regeln theils öfters

geringe

geringe sind, und theils nur den Anfang des aufspringenden Wassers betreffen, so hält man sich gewöhnlich nicht dabey auf, und zwar aus gleichen Gründen, wie auch bey Untersuchung der Maschinen des Antreibens selten viel Rechnung getragen wird. Die vollständige Berechnung ist ohnehin unendlich weitläuftig, und auch da, wo z. E. Herr D. Bernoulli nur das Allgemeine betrachtet, wird schon eine ziemliche Bekanntschaft mit den mechanischen Gründen voraus gesetzt, so, daß einige leicht verleitet worden, über Dunkelheit zu klagen. Ob die Sache verständlicher wird, wenn man den Vortrag ändert, das werden die Leser entscheiden müssen. Ich möchte dabey, wie Herr Bernoulli gethan, gern von der Benennung der lebenden Kräfte abstrahiren, und dennoch lassen sich auch die Wörter ascensus potentialis und descensus actualis, ohne eine ziemliche weitläuftige Umschreibung, nicht gebrauchen, so sehr sie auch, wenn man sie einmal versteht, die Sache abkürzen. Ich werde demnach sehen, wie sich das Ausfliessen des Wassers aus einem aufrechtstehenden cylindrischen Gefässe, mit den bisher vorgetragenen Sätzen, zusammenhängen läßt. Es wird wohl einige Aufmerksamkeit gebrauchen; indessen werde ich bemüht seyn, Schritt für Schritt zu gehen.

§. 233.

§. 233.

Fig. XXXIV. Ein solches Gefäß sey CABD die Oefnung im Boden E, die Höhe des Wassers, nachdem bereits ein Theil ausgeflossen sey AP. Nun ist bekannt, daß sich beym Ausfliessen die Oberfläche des Wassers PQ, nach und nach, herunter senkt, so, daß wenn sie zu einer Zeit τ in PQ war, sie zu der Zeit $\tau + d\tau$ in pq kömmt. Die Höhe AP, welche wir $= x$ setzen wollen, wird demnach immer vermindert, so, daß sie $Ap = x - dx$ wird. Da das Gefäß cylindrisch ist, so vermindert sich auch die ganze Masse des Wassers in gleicher Verhältniß mit der Höhe. Man setze, die Grundfläche des Cylinders sey $= b$, so ist die Masse $APQB = bx$, die Masse $ApqB = b(x-dx)$ und die Masse $PQqp = bdx$. Diese fleußt nun in der kleinen Zeit $d\tau$ durch die Oefnung E aus. Es ist für sich klar, daß sie mit viel grösserer Geschwindigkeit ausfliessen muß als sie sich in Pp herunter senkt, und daß die Geschwindigkeit des Ausfliessens sich zu der Geschwindigkeit des Heruntersenkens verhält, wie die Grundfläche des Cylinders zu der Grundfläche der Oefnung, das ist, wenn wir diese $= a$ setzen, wie b zu a, daß das Ausfliessen durch die Höhe des Druckes verursacht werde, versteht sich von selbst. Es sey nun die Geschwindigkeit des heruntersenkens $= g$, des Ausfliessens $= c$, so ist $g:c = a:b$.

§. 234.

§. 234.

Ich habe bereits vorhin (§. 228) erwähnt, daß man durch g eine mittlere Geschwindigkeit verstehe, weil die ganze Masse des Wassers sich nicht durchaus gleichförmig senkt. Indessen wird dieses angenommen, wo man die Sache nur im Ganzen betrachtet, und so stellt g die mittlere Geschwindigkeit der ganzen Masse vor.

§. 235.

Nun werde ich, mehrerer Deutlichkeit halben, von der Wirkung der Schwere abstrahiren, und setzen, die ganze Masse bewege sich mit der Geschwindigkeit g gegen den Boden AB. So bald sie mit dieser Geschwindigkeit an Boden anfährt, so geht eine doppelte Veränderung vor. Denn erstlich wird ein Theil Wassers durch die Oefnung E heraus getrieben, und dadurch die übrige Masse vermindert. Andern Theils vermindert sich auch die Geschwindigkeit der übrigen Masse, weil von der Kraft, so sie zum Austreiben verwendet, ein Theil abgeht; oder auch, weil der Boden und besonders die ausfliessenden Wassertheilchen rückwerts wirken (§. 207 seqq.). Da nun die Wassertheilchen elastisch sind (§. 210), so hat dabey das Gesetz statt, daß die Summe der Producte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeit, vor und nach der Veränderung, beständig ist (§. 167). Nun ist vor

der

der Veränderung die Masse $= bx$, die Geschwindigkeit g, demnach das bemeldte Product $= ggbx$. Hingegen nach der Veränderung sind zweyerley Massen: einmal die zurückgebliebene $b(x-dx)$, ihre Geschwindigkeit $g-dg$; sodann die heraus getriebene bdx ihre Geschwindigkeit c. Dies giebt die Producte $b(x-dx)(g-dg)^2$ und $bdx.cc$. Da nun die Summen sollen gleich seyn, so ist $ggbx = (g-dg)^2(x-dx)b + ccbdx$. Demnach

$$o = -bggdx - 2bgdg.x + bccdx.$$

§. 236.

Wirket nun aber die Schwere mit auf das Wasser, so ist dieser Ausdruck nicht $= o$, weil die Schwere dem Wasser immer neuen Druck mittheilt, und so wird die Geschwindigkeit ganz anders verändert. Da wir nun oben (§. 158) den Druck elastischer Körper mit dem Druck der Schwere verglichen, und die Formel

$$\tfrac{16}{1000}gg = \int\frac{kdx}{m} = v$$

gefunden haben, so werden wir uns dieser Formel bedienen müssen. In derselben ist k der Druck der elastischen Kraft, welcher hier dem Gewicht des Wassers gleich gesetzt wird, so wie auch m das Gewicht des Wassers, als Masse betrachtet, vorstellt. Wir haben demnach, um die Homogeneität zu erhalten, den Coefficienten $\tfrac{16}{1000}$ in der Rechnung des vorhergehenhergehenden §. anzubringen, und bemerken, daß, wenn die Formel differentiirt wird, sie sich in

$$\frac{16.m}{1000}.2gdg = kdx = mdv$$

verwandelt, und anstatt der ganz einfachen Veränderung der Geschwindigkeit

$$\frac{16.m}{1000}.2gdg \text{ oder } mdv$$

der Ausdruck

$\frac{16}{1000}(-bggdx - 2xbgdg + bccdx)$ genommen werden muß, um ihn mit kdx zu vergleichen. Denn in gegenwärtigem Fall kommen zwo Massen $b(x-dx)$ und bdx mit verschiedenen Geschwindigkeiten g, c in Betrachtung, und die damit vorgehende Veränderung

$\frac{16}{1000}(-bggdx - 2xbgdg + bccdx)$ muß mit kdx verglichen werden, wie in dem einfachern Fall $\frac{16}{1000}m.2gdg$ damit verglichen wird. Wir haben demnach

$$\frac{16}{1000}(-bggdx - 2xbgdg + bccdx) = kdx.$$

Nun ist

$$k = bx$$

$$c = \frac{gb}{a}$$

und (§. 158)

$$\frac{16}{1000}gg = v$$

demnach

$$-bvdx - bxdv + \frac{b^3}{a^2}vdx = bxdx$$

oder

oder

$$\left(1-\frac{bb}{aa}\right)v\,dx+x\,dv=-x\,dx$$

Hieraus wird

$$v.x^{1-bb:aa}=+\frac{aa}{bb-2aa}x^{2-bb:aa}+\text{const.}$$

Da nun, wenn die anfängliche Höhe des Wassers $CA=f$ ist, die Geschwindigkeit und demnach $v=0$ genommen wird, so erhalten wir

$$vx^{1-bb:aa}=\frac{aa}{bb-2aa}\left(x^{2-bb:aa}-f^{2-bb:aa}\right)$$

oder

$$v=\frac{16}{1000}gg=\frac{aaf}{bb-2aa}\left(\frac{x}{f}-\left(\frac{f}{x}\right)^{1-bb:aa}\right)$$

oder

$$v=\frac{16}{1000}gg=\frac{aaf}{bb-2aa}\left(\frac{x}{f}-\left(\frac{x}{f}\right)^{bb:aa-1}\right)$$

Nun ist (§. 158) v die Höhe, aus welcher ein Körper fallen müßte, um die Geschwindigkeit g zu erhalten, mit welcher sich die Oberfläche PQ herunter senkt. Will man aber die Geschwindigkeit des heraus fliessenden Wassers c haben, so ist (§. 233)

$$c=\frac{gb}{a}$$

demnach

$$\frac{bb}{aa}.v=\frac{16}{1000}cc=\frac{bbf}{bb-2aa}\left(\frac{x}{f}-\left(\frac{x}{f}\right)^{bb:aa-1}\right)$$

§. 237.

Dieses ist nun eben die Formel, die Herr D. Bernoulli heraus bringt, nur mit dem Unterschiede, daß er statt der Differentialformel $\frac{16}{1000}(-bggdx-2xbgdg+bccdx)=kdx$. gleich anfangs die andere

$$-bvdx-xbdv+\frac{b^3}{a^2}vdx=bxdx$$

gebraucht, und folglich alles durch Höhen ausdrückt. Das zweyte Glied dieser Gleichung nennt er den descensus actualis, weil während dem sich die Fläche des Wassers aus P in p senkt, der Mittelpunct der Schwere um dx herunter sinkt. Dieses Sinken mit der Masse bx multiplicirt, giebt $bxdx$ seinen sogenannten Descensus. Das erste Glied der Gleichung erwächst, wie wir gesehen haben, aus den Geschwindigkeiten; und da es hier durch Höhen dv, dx ausgedruckt wird, so zeigt es, wie viel die Masse sich mit solchen Geschwindigkeiten aufwerts bewegen könnte. Und so nennt Herr B. das erste Glied den ascensus potentialis, und setzt ihn in Form eines **Grundsatzes** dem descensus actualis gleich.

§. 238.

Die Bernoullische Formel (§. 236) kömmt in dem Fall, wo $a=b$ ist, mit der Erfahrung nothwendig überein: denn sie verwandelt sich in

$$\frac{16}{1000}cc=f-x=CP$$

das will sagen, die Höhe des Falls wächst wie das Quadrat der Geschwindigkeit. Wir haben auch bereits (§. 223) angemerkt, daß wenn der Cylinder in AB ganz offen ist, auch die ganze Masse des Wassers gleichsam frey herunter falle, wie ein Körper im freyem Raume fällt. In der That ist auch nur das Anreiben an den Wänden des Cylinders das einige Hinderniß, und dieses ist sehr geringe.

§. 239.

Wird hingegen die Oefnung E in Vergleichung mit der Weite des Gefässes sehr geringe angenommen, so wird das Glied

$$(x:f)^{bb:aa-1}$$

bald ein so kleiner Bruch, den man weglassen kann, und so richtet sich das Ausfliessen gar bald nach

$$\frac{16}{100}cc = \frac{bbx}{bb-2aa}.$$

Und diese Formel, nebst dem, was daraus folgt, hat man in den meisten hydraulischen Schriften zum Grunde gelegt, in sofern die Oefnungen geringe sind. Man hat statt derselben auch nur $\frac{16}{100}cc = x$ gesetzt, wobey a als unendlich klein angenommen wird. Und dieses ist nun eben die Regel, daß das gerade aufspringende Wasser die Höhe des Falls erreiche, wovon aber immer mehr oder minder abgeht. Behält man aber die Bernoullische Formel ganz bey, so findet sichs, daß die Geschwindigkeit anfangs von o an zunimmt,

nimmt, bis sie ihr maximum erreicht. Denn man setze darin $x = f - z$, so, daß z sehr klein sey, so verwandelt sich die Formel in

$$\frac{16}{1000} cc = \frac{bbf}{bb - 2aa} \left(1 - \frac{z}{f} - \left(1 - \frac{z}{f} \right)^{bb:aa-1} \right)$$

welches nach der Newtonschen Binnomialformel, mit Weglassung von z^2, z^3 &c.

$$\frac{16}{1000} cc = \frac{bbf}{bb - 2aa} \left(\frac{bb}{aa} - 2 \right) \frac{z}{f} = \frac{bbz}{aa}$$

giebt, welches mit dem Fall der Körper, wenn die Schwere in der Verhältniß von 1 zu $bb:aa$ grösser genommen wird, als sie auf der Erdfläche ist, übereinkömmt. Da aber bey gleicher Oefnung $E = a$, die Weite des Cylinders $AB = b$ so groß genommen werden kann als man will, so kann immer $\frac{bbz}{aa}$ und damit auch cc eine jede beliebige Grösse vorstellen. Es ist aber für sich klar, daß dabey die Wassertheilchen eine unendliche Flüßigkeit haben müsten, welche sie aber allerdings nur in einem endlichen Grade haben. Abstrahirt man indessen von solchen anfänglichen Abweichungen, so wie auch von andern bereits vorhin angemerkten, so thut die Bernoullische Formel der Sache noch immer am meisten Genügen. Und da sie für den Fall, wo $a = b$ ist, ganz richtig ist, für den Fall aber, wo $b:a = \infty$ ist, von der Erfahrung nicht immer viel abweicht, so hat sie den Vortheil, daß sie bey grössern Oefnungen E der Wahrheit immer näher komme;

und für eben diese Fälle hatte man noch wenig zuverläßiges anders, als aus Erfahrung gefunden.

§. 240.

In der Art, wie die Bernoullische Formel gefunden worden, ist noch verschiedenes anzumerken: Einmal wird dabey des bereits heraus geflossenen Wassers, dessen Masse $= b(f-x)$ ist, keine Rechnung getragen, weil f erst nach der Integration, wo es um die beständige Grösse zu bestimmen zu thun ist, in die Rechnung kömmt. Das heraus geflossene Wasser wird demnach als gar nicht mehr zurückewirkend betrachtet, sondern man sieht nur auf den Tropfen, der durch E gedrängt wird. Dieser wird nemlich allein noch seitwerts von den Wänden der Oefnung, und herunterwerts von dem Drucke des aufliegenden Wassers gedrückt, und daher mit in die Rechnung gezogen. Sobald er aber aus der Oefnung heraus ist, hört seine Zusammenpressung seitwerts auf, und er fleußt mit seiner daher erlangten Geschwindigkeit, welche sodann noch von der Schwere vermehrt wird, gleichsam frey herunter. Auch kann es besonders bey einem hohen Drucke und kleinen Oefnung geschehen, daß sich, wegen der sich äussernden Schnellkraft, die Tropfen, gleich bey dem Ausfliessen, versprützen.

XII.

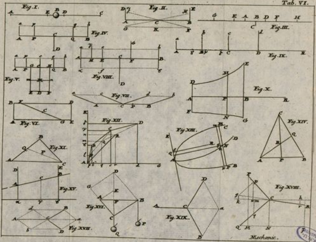
Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. X.
Fig. XI.
Fig. XII.
Fig. XIII.
Fig. XIV.
Fig. XV.
Fig. XVI.
Fig. XVII.
Fig. XVIII.
Fig. XIX.
Mechanic.

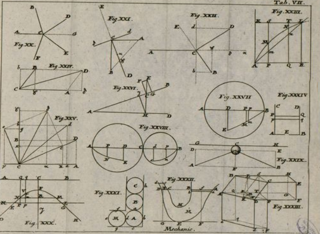
Fig. XX.
Fig. XXI.
Fig. XXII.
Fig. XXIII.
Fig. XXIV.
Fig. XXV.
Fig. XXVI.
Fig. XXVII
Fig. XXXIV
Fig. XXVIII.
Fig. XXIX.
Fig. XXX.
Fig. XXXI.
Fig. XXXII.
Fig. XXXIII.
Mechanic.