V.
Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen.

§. 1.

Ich kann mit einigem Grunde zweifeln, ob gegenwärtige Abhandlung von denjenigen werde gelesen, oder auch verstanden werden, die den meisten Antheil daran nehmen sollten, ich meyne von denen, die Zeit und Mühe aufwenden, die Quadratur des Circuls zu suchen. Es wird sicher genug immer solche geben, und solte man die, so in den folgenden Zeiten sich damit beschäftigen, nach denen beurtheilen, die sich bisher damit beschäftigt haben, so werden es gröstentheils solche seyn, die von der Geometrie wenig verstehen, und ihre Kräfte zu schätzen nicht im Stande sind. Was aber den meisten an Erkenntniß und Verstand abgeht, und wo sie mit richtigen und zusammenhängenden Schlüssen nicht ausreichen, das ersetzt die Ruhm- und Geldbegierde durch Sophismata, die öfters auch weder sehr fein, noch sehr versteckt sind. Es hat auch Fälle gegeben, wo solche Leute feste geglaubt

glaubt haben, man versage ihren vermeynten Beweisen den Beyfall bloß aus Neid und Mißgunst. Es geht auch unter ihnen eine Sage herum, als wenn in England nnd Holland eben so grosse Preiße und Belohnungen wären auf die Quadratur des Circuls gesetzt worden, als auf die Erfindung der geographischen Länge zur See. Ich will zwar eben nicht gut dafür stehen, ob man nicht zu Anfange des vorigen Jahrhunderts, oder noch vorher, geglaubt hat, daß die Erfindung der Länge zur See mit der Quadratur des Circuls in einer solchen Verbindung stehe, daß, wer letztere gefunden, zugleich auch erstere gefunden habe. So viel ist gewiß, daß man damals Verhältnisse zwischen Wahrheiten suchte und glaubte, die noch vielweniger zusammen paßten. Solte aber in der That wegen der Länge zur See ein Preiß auf die Quadratur des Circuls gesetzt worden seyn, so glaube ich, daß das Parlement in England ein sehr gutes Werk thun würde, wenn es, zumal da nun die Preiße für die Länge zur See schon ausgetheilt worden, in allen Zeitungen kund machen liesse, daß man sich bey der Quadratur des Circuls auf keinen Preiß Rechnung zu machen habe. In der That hat man sich auch keine Rechnung darauf zu machen, weil man heutiges Tages viel zu wohl weiß, wie sehr die Länge zur See von der Quadratur des Circuls unabhängig ist.

§. 2.

Die Erfindung von Sachen, die lange vergebens gesucht worden, ist entweder an sich unmöglich, oder sie ist einem künftigen glücklichen Zufall vorbehalten. Ein Beyspiel mag dieses erläutern. Es ist nicht zu zweiffeln, daß die alten Phoeniciſcheu, und nach ihnen die Griechischen und Römischen Schiffer ein Mittel gewünscht haben, welches ihnen bey trübem Wetter eben so den Weg des Schiffes zeigte, als ihn bey hellem Wetter die Gestirne zeigten. Wie hätte ihnen in Sinn kommen sollen, daß sie dieses Mittel in dem Magnetsteine zu suchen hätten? Es ist unstreitig, daß diese Entdeckung auf einen schlechthin unvorgesehenen Zusammenlauf mehrerer Umstände ankäme, den man, ohne ihn vorher zu wissen, nicht veranstalten konnte, und der folglich sich von selbst darbieten muste. Auf eine ähnliche Art ist es zu vermuthen, daß, wenn je die Quadratur des Circuls möglich seyn solte, sie vielleicht einem Meßkünstler aufstößt, der an nichts weniger als an die Erfindung derselben gedenkt. Es ist aber auch möglich, daß man auf eine eben so zufällige Weise auf irrige Quadraturen verfalle. Hievon geben die Zahlen 1225 und 961 ein artiges Beyspiel. Sie haben eine gedoppelte Eigenschaft. Denn einmal sind es die Quadratzahlen von 35 und 31. Sodann verhalten sie sich beynahe wie das Quadrat des Diameters zum Inhalt des Circuls. Dadurch erhält man auch, daß der Diameter des Circuls zu der Seite eines mit dem Circul gleichräumigen Quadrates beynahe wie 35 zu 31 ist. Sodann, wenn man 961 vierfach nimt, so erhält man 3844 ebenfalls eine Quadratzahl, und der Diameter wird sich zum Umkreise beynahe wie 1225 zu 3844 verhalten. Nur muß man dieses beynahe nicht sehr strenge nehmen. Denn theilt man 3844 durch 1225, so kömmt 3,138... Und da sieht man leicht, daß diese Verhältniß schon in der 3ten Decimalstelle von 3,1415926... abweicht, und daher lange nicht so genau ist, als die Archimedischen 22:7, welche die Reihe 3,1428571...giebt, die nur um 0,0012645... zu groß, und damit fast dreymal genauer ist.

§. 3.

Indessen behalten die Zahlen 1225 und 961, oder 1225 und 3844 dennoch dadurch einen gewissen Werth, daß es Quadratzahlen sind. In diesem Jahrhundert sind, so viel ich weiß, ihrer drey darauf verfallen. Dieser Umstand scheint mir der merkwürdigste. Denn da es noch mehrere solcher Quadratzahlen giebt, so solte man ehender denken, daß jeder von diesen drey Erfindern auf andere Zahlen würde verfallen seyn. Der erste war Herr von Leistner, Kayserl. Rittmeister. Er fand die Zahlen 1225 und 3844, und diese wurden von einer Kayserl. Hofcommission als unrichtig erkannt, wowider

aber

aber in einer Anno 1740 herausgekommenen Schrift, Nodus gordius &c. protestirt wurde. Der andere war Herr Merkel, Prediger zu Rakensburg in Schwaben. Seine Schrift kam erst Anno 1751 heraus. Er sagt aber, daß er lange vor dem Herrn v. Leistner seine Zahlen 1225 und 961 zufälliger Weise gefunden habe, er sey aber erst durch den Nodum gordium bewogen worden, sie auf alle Proben zu setzen; was ihn aber fürnemlich aufgebracht habe, sie durch den Druck bekannt zu machen, sey ein Articul in der Utrechter Zeitung gewesen, wo eine Quadratur angekündet, und der vermeyntlich darauf gesetzte Preiß angefordert wurde; diese Nachricht habe ihm um so geschwinder die Feder in die Hand gegeben, weil er den vorhergehenden Winter seine Zahlen einen Franzosen, der wirklich nachher in die Niederlande verreisete, vorgerechnet, und auf das Papier nicht weiter Achtung gegeben, und so habe er starke Gründe zu vermuthen, dieser Geometra möchte mit seinem Kalbe gepflügt haben &c. Was damit nun weiter vorgegangen, ist mir nicht bekannt. Es wurde aber die Merkelsche Schrift Anno 1765 von Herrn Prof. Bischoff zu Alten-Stettin mit Anmerkungen und noch mehrerern Prüfungen wiederum aufgelegt, und die Zahlen 1225 und 961 als richtig erklärt. Bald darauf kamen sie im Anfange des 1766sten Jahres in den Zeitungen wiederum zum Vorschein, mit der solennen Ankündigung, daß man fernerhin die Quadratur des Circuls nicht mehr zu suchen nöthig habe, weil sie bereits, und zwar zum drittenmale gefunden worden rc. Es wäre eben nicht übel gethan, wenn viele, die noch künftighin sich an die Sache machen werden, dieses ganz f ste glaubten, weil sie dadurch überhoben wären, Mühe, Zeit und Kräfte zu verliehren, die man als sehr vergebens angewandt ansehen kann, weil die meisten von denselben kaum eine leichte geometrische Aufgabe zu erfinden und aufzulösen im Stande sind. Es ist auch kaum zu zweifeln, daß nicht auch künftig noch die Merkelsche und Leistnersche Zahlen wieder aufgewärmt zum Vorsch in kommen solten. Die Hauptprobe von ihrer Unrichtigkeit ist, daß 3844 durch 1225 getheilt, die Ludolphische Zahlen geben solte. Herr Prof. Bischoff nimmt auch diese Ludolphische, und sogar die über doppelt weiter reichende Sherwinsche Zahlen vor, er sieht sie aber nicht als Probiersteine an, sondern sagt, daß sie zwar gar sehr nahe zutreffen, dabey aber den Inhalt des Circuls nicht völlig genau geben, demnach müste man auf andere Proben bedacht seyn. Von solchen Proben führt Herr Bischoff 8 an, und macht auf diese Art die Sache scheinbar. Es ist unstreitig, daß wenn 3844 durch 1225 getheilt, die bis auf 32 Decimalstellen reichende Ludolphische Zahlen genau geben würde, man damit eines Theils sehr wohl zufrieden seyn könnte, andern Theils aber sehen müste, ob man durch diese Division auch die bis auf 72 Decimalstellen reichende Sherwinsche Zahlen, und sodann die bis auf 100 Decimalstellen reichende Machinsche, oder endlich die bis auf 127 Decimalstellen reichende Lamysche Zahlen heraus bringen würde. Man könnte sodann um so mehr noch mit der Proportion 3844 : 1225 zufrieden seyn. Allein nimmt man bemeldte Division vor, so fängt der Quotient 3, 138.... schon in der zweyten Decimalstelle an, von den Ludolphischen Zahlen abzuweichen. Und überdies sind alle die 8 Proben von der Art, daß jede beliebige zwo Quadratzahlen dieselbe aushalten. Ich werde mich aber nicht verweilen, dieses hier zu zeigen, sondern vielmehr angeben, wie sich nach einer allgemeinen Regel solche Quadratzahlen finden lassen, welche die Verhältniß des Quadrats des Diameters zum Inhalte des Circuls desto genauer angeben, je grösser sie sind. Dieses mag unter andern auch dahin dienen, daß man künftig nicht nöthig habe, erst zufälliger Weise auf solche Quadratzahlen zu verfallen, und sie als ganz richtige Quadraturen des Circuls anzugeben.

§. 4.

Man nehme zwo Quadratzahlen aa, bb, so, daß wenn a der Diameter des Circuls, dem-

demnach aa dessen Quadrat ist, sodann bb den Inhalt eines mit dem Circul gleichräumigten Quadrates, und daher b die Seite desselben vorstelle. Auf diese Art wird sich aa zu 4bb wie der Diameter zum Umkreise, oder wie 1 zu 3, 141592, 653589, 793238, 462643, 383279, 502884, 197169, 399375, 105820, 974944, 592307, 816406, 286208, 998628, 034825, 342117, 067982, 148086, 513272, 306647, 093844, 6 + ... = 1 : π verhalten.

Demnach ist $aa : 4bb = 1 : \pi$

und hieraus folgt

$$a : b = 2 : \sqrt{\pi}.$$

Es ist aber $\sqrt{\pi} = 1,77245385075 \ldots.$

Und hieraus findet sich

$$a:b = \frac{2,00000000000}{1,77245385075} = 1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{26 + \text{etc.}}}}}}}}$$

Dieses giebt der Ordnung nach

$$\begin{array}{llll}
b:a = & 7:8 + \ldots & \text{und } bb:aa = & 49:64 + \\
= & 8:9 - \ldots & = & 64:81 - \\
= & 31:35 + \ldots & = & 961:1225 + \\
= & 39:44 - \ldots & = & 1521:1936 - \\
= & 109:123 + \ldots & = & 11881\ 15129 + \\
= & 148:167 - \ldots & = & 21904:27889 - \\
= & 3848:4342 + \ldots \text{etc.} & = & 14807104:18852964 + \text{etc.}
\end{array}$$

Diese Brüche sind nun der Ordnung nach genauer. Man sieht auch hieraus, daß die Herren von **Leistner**, **Merkel**, **Bischoff** ꝛc. nur zufälliger Weise auf ihre Zahlen 961, 1225 verfallen sind. Denn die Rechnung mit 49:64 oder 64:81 wäre immer viel leichter und kürzer gewesen, und mit 1521:1936, oder 11881:15129 ꝛc. würde sie zwar weitläuftiger, dabey aber genauer gewesen seyn.

§. 5.

Es ist aber überhaupt mehr anzurathen, schlechthin nur die ersten von diesen Verhältnissen nemlich b:a zu gebrauchen. Denn für bb:aa hat man andere Brüche, die, ohne eben Quadratzahlen zu seyn, viel kleiner und viel genauer sind, indem man nach eben dieser Art zu verfahren

$$\begin{aligned} bb:aa = \pi:4 &= 11:14 \\ &= 172:219 \\ &= 355:452 \text{ ꝛc.} \end{aligned}$$

findet. Es drücken aber die Brüche $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{31}{35}$, $\frac{39}{44}$, $\frac{109}{123}$, $\frac{148}{167}$, $\frac{3848}{4342}$ ꝛc. die Seite eines Quadrates aus, welches so groß als die Fläche eines Circuls ist, dessen Diameter $= 1$ angenommen wird. Und hinwiederum stellen eben diese Brüche umgekehrt, oder $\frac{8}{7}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{35}{31}$,

$\frac{44}{39}, \frac{123}{109}, \frac{167}{148}, \frac{4342}{3848}$ 2c. den Diameter eines Circuls vor, dessen Inhalt $= 1$ ist. Und in dieser Absicht lassen sie sich bey Ausmessung von Cylindern, und bey Verfertigung der cylindrischen Visirstäbe gebrauchen. Besonders ist hiezu der Bruch $\frac{167}{148}$ dienlich, weil derselbe unter den kleinern der genaueste ist, und erst in der siebenden Decimalstelle anfängt von dem wahren abzuweichen. Denn rechnet man nach, so findet sich der Diameter des Circuls, dessen Inhalt $= 1$ ist, vermittelst der Ludolphischen Zahlen $= 1,1283790...$

Es ist aber $\frac{167}{148} = 1,1283784...$

demnach der Unterschied $= 0,0000006...$

Es geschieht selten, daß man diesen Diameter in practischen Fällen genauer zu wissen verlangt.

§. 6.

Da es, wenn man den Diameter einer Kugel mit der Seite eines gleichräumigten Würfels vergleicht, ebenfalls möglich ist, auf solche Cubiczahlen zu verfallen, woraus man die Quadratur des Cirkels, oder die Cubatur der Sphären erträumen könnte; so wird es eben nicht undienlich seyn, solchen künftigen Vorfällen vorzubeugen, und solche Cubiczahlen nach eben der Methode voraus zu bestimmen, zumal da sie bey Berechnung des räumlichen Inhalts der Kugeln, und bey Verfertigung der

Caliberstäben mit Vortheil gebraucht werden können. Es sey demnach der Diameter der Kugel $= a$, die Seite des gleichräumigten Würfels $= b$, die Ludolphische Zahlen $3{,}1415926\ldots = \pi$, so ist nach der bekannten Archimedischen Regel

$$b^3 : a^3 = \quad : 6$$

demnach $\quad b : a = \sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{6}\right)}.$

Nun ist

$$\pi = 3{,}141592{,}653589{,}793238{,}462\ldots$$
$$\tfrac{1}{6}\pi = 0{,}523598{,}775598{,}298873{,}077\ldots$$

Und hieraus die Cubicwurzel

$$b:a = 0{,}805995{,}977008{,}234820\ldots$$

welche in einen immer fortgehenden Bruch aufgelöst

$$b:a = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{6+ \text{etc.}}}}}}}}$$

giebt. Hieraus erhält man nun

$$\begin{aligned} b:a &= 4:5 + \\ &= 25:31 - \\ &= 54:67 + \\ &= 457:567 - \\ &= 2796:3469 + \\ &= 17233:21381 - \text{etc.} \end{aligned}$$

Dem-

Demnach, wenn der Diameter einer Kugel $= 1$ ist, so wird die Seite eines gleichräumigten Würfels durch jeden der Brüche $\frac{4}{5}, \frac{25}{31}, \frac{54}{67}, \frac{457}{567}, \frac{2796}{3469}, \frac{17233}{21381}$ 2c. desto genauer ausgedrückt, je grösser derselbe ist. Cubirt man diese Brüche, so geben sie den Inhalt der Kugel. Setzt man aber den körperlichen Inhalt der Kugel $= 1$, so stellen eben diese Brüche umgekehrt $\frac{5}{4}, \frac{25}{31}, \frac{67}{54}, \frac{567}{457}, \frac{3469}{2796}, \frac{21381}{17233}$ 2c. den Diameter der Kugel vor. Man kann sich mehrentheils mit dem Bruche $\frac{567}{457}$ begnügen, weil derselbe, wenn man nachrechnet, den Diameter der Kugel eben so genau giebt, als man denselben vermittelst der logarithmischen Tabellen findet.

§. 7.

Ich habe bey dieser Rechnung die Cubicwurzel von $\frac{1}{6}\pi$ bis auf die 18te Decimalstelle geliefert. Da es nun eine verdrüßige und ungemein langwierige Arbeit wäre, wenn man sie nach den gemeinen Regeln bis so weit suchen wolte, so wird es nicht undienlich seyn, wenn ich noch beyfüge, wie ich diese Wurzel vermittelst einer einigen Regel de tri gefunden, und zugleich, wie ich mich versichert habe, daß sie bis auf die 18te Decimalstelle richtig ist.

§. 8.

Nach der Newtonschen Binnomialformel ist überhaupt

$$x = (a + b)^n = a^n + n a^{n-1} b + n.\frac{n-1}{2}.a^{n-2} b^2 + \&c.$$

Man multiplicire nun diese Reihe mit $1 + zb:a$, und in dem Producte

$$x\left(1 + \frac{zb}{a}\right) = a^n + n a^{n-1} b + n.\frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 + \text{2c.}$$
$$+ z a^{n-1} b + n.z.a^{n-2} b^2 + n.\frac{n-1}{2}.z a^{n-3} b^3 + \text{2c.}$$

setze man, um z zu bestimmen, das dritte Glied

$$n.\frac{n-1}{2}.a^{n-2} b^2 + n.z.a^{n-2} b^2 = 0$$

so ist $$z = -\frac{n-1}{2}$$

Wird nun dieser Werth von z in dem Producte gesetzt, so erhält man

$$x\left(1 - \frac{n-1}{2}.\frac{b}{a}\right) = a^n + \frac{n+1}{2} a^{n-1} b + * - \frac{n-1}{2}.\frac{n+1}{6} a^{n-3} b^3 - \&c.$$

und hieraus

$$x = (a + b)^n = \left(\frac{2a + (n+1)b}{2a - (n-1)b}\right) a^n + * - \frac{n.(n-1).(n+1) a^{n-2} b^3}{6(2a - (n-1).b)} - \&c.$$

Von dieser Reihe wird das erste Glied zur Bestimmung der Wurzel gebraucht, das zweyte aber dient, um zu finden, wie weit man mit dem ersten ausreicht.

§. 8.

Nun ist für die Cubicwurzel $n = \frac{1}{3}$. Setzt man diesen Werth, so erhält man nach den behörigen Reductionen die Formel

$$x = \sqrt[3]{(a + b)} = \frac{3a + 2b}{3a + 1b}. \sqrt[3]{a} + * + \frac{2b^3 . \sqrt[3]{a}}{81a^3 + 27aab} + \&c.$$

Diese habe ich nun, um aus

$a + b = \frac{1}{6}\pi = 0,523598,775598,298873,077 \ldots$

die Cubicwurzel zu ziehen, folgendermassen angewandt. Erstlich fand ich, vermittelst der Logarithmen die sechs ersten Decimalstellen dieser Wurzel. Diese sind

$$0,805995 = \sqrt[3]{a}$$

Und da

$$805995 = 806000 - 5$$

ist, so liesse sich hievon der Cubus leicht finden. Ich setzte demnach denselben

$$0,5235968715204498\,75 = a$$

und dadurch erhielt ich

$$b = 0,0000019040778489980771 07\ldots$$

Da nun, wenn man das erste Glied der Reihe

$$x = \sqrt[3]{(a+b)} = \frac{3a+2b}{3a+b} \cdot \sqrt[3]{a}$$

allein beybehält, dieses die Regel de tri giebt

$$(3a+b):(3a+2b) = \sqrt[3]{a} : x$$

oder $(a+\frac{1}{3}b):(a+\frac{2}{3}b) = \sqrt[3]{a} : x$,
so durfte ich nur die Werthe von a und b setzen, um den Werth

$$x = \sqrt[3]{(a+b)} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} = 0,805995977008234820\ldots$$

zu erhalten. Daß nun aber dieser Werth bis auf die 18te Decimalstelle richtig seye, fand ich vermittelst des zweyten Gliedes der Reihe

$$\frac{2b^3 \cdot \sqrt[3]{a}}{81a^3 + 27a^2b}$$

durch einen leichten Ueberschlag. Denn da b um 275000 mal kleiner ist als a, so konnte ich dieses Glied

$$\frac{2b^3}{81a^3} \cdot \sqrt[3]{a}$$

setzen. Nun ist

$$3 \log. b : a = 0,6820508 - 17$$
$$\log. \tfrac{2}{81} = 1,6074550$$

demnach $\log. \frac{2b^3}{81a^3} = 0,9145458 - 19.$

Da

Da nun hier die Characteristica $= -19$, und $a < 1$ ist, so ist klar, daß

$$\frac{2b^3}{81a^3}\cdot\sqrt[3]{a}$$

einen Decimalbruch vorstellt, der erst auf der 19ten Decimalstelle anfängt. Und so ist die durch

$$x=\frac{3a+2b}{3a+b}\cdot\sqrt[3]{a}$$

gefundene Decimalreihe bis auf die achtzehnte Stelle genau.

§. 9.

Ob die Verhältniß des Diameters zum Umkreise durch einen rationalen Bruch ausgedrückt werden könne, ist, meines Wissens, noch nicht erörtert. **Sturm** hat zwar diese Frage zu verneinen gesucht: allein sein Beweis ist mangelhaft, weil es allerdings unendliche Reihen giebt, deren Summa rational ist, ungeachtet alle Glieder irrational sind. Da demnach die Sache noch zu erörtern bleibt, so kann es immer noch Leute geben, die mit Aufsuchung solcher rationalen Brüche ihre Zeit verlieren, oder durch irrige Schlüsse dergleichen auf die Bahn bringen. Nun ist zwar bey jedem, vermittelst der **Ludolphischen** Zahlen, die Probe bald gemacht. Allein, wenn auch der fürgegebene Bruch dadurch verworffen wird, so kann noch immer die Lust bleiben, andere zu suchen. Nun läßt sich diese Lust so geringe machen, daß man das Aufsuchen solcher Brüche leicht wird bleiben lassen. Denn wenn auch die Verhältniß des Diameters zum Umkreise sich genau durch einen rationalen Bruch ausdrücken liesse, so kann man aus den oben (§. 4.) angeführten **Lamyschen** Zahlen, oder auch aus den **Ludolphschen** Zahlen erweisen, daß es ein sehr grosser Bruch seyn müsse. Diese Zahlen lassen sich nemlich in Brüche verwandeln, welche der Ordnung nach grösser und zugleich auch genauer werden. Die Methode und die dabey zu gebrauchende Vorsichtigkeit, habe ich in der Abhandlung von **Verwandlung der Brüche** §. 17. angezeigt und durch Beyspiele erläutert. Nach dieser Methode fand ich für das Verhältniß des Diameters zum Umkreis folgende rationale Brüche oder Verhältnisse

1	:	3
7	:	22
106	:	333
113	:	355
33102	:	103993
33215	:	104348
66317	:	208341
99532	:	312689
265381	:	833719
364913	:	1146408
1360120	:	4272943
1725033	:	5419351
25510582	:	80143857

52746197	165707065
78256779	245850922
131002976	411557987
340262731	1068966896
811528438	2549491779
1963319607	6167950454
4738167652	14885392687
6701487259	21053343141
567663097408	1783366216531
1142027682075	3587785776203
1709690779483	5371151992734
2851718461558	8958937768937
107223273857129	336851849443403
324521540032945	1019514486099146 rc.

Von diesen Verhältnissen ist nun jede folgende genauer als die vorhergehende, und zwischen dieselben fällt keine rationale Verhältniß, die genauer wäre, als die nächst grössere unter den hier angegebenen. Demnach wenn auch die Verhältniß des Diameters zum Umkreise durch ganze Zahlen genau sollte ausgedrückt werden können, so müsten diese Zahlen nothwendig grösser als die letzten

324521540032945 : 1019514486099146

von den hier angegebenen seyn. Diese zwo Zahlen geben die Ludolphische bis auf die 25te Decimalstelle. Wenn sie aber auch ganz genau wären, so sieht man leicht, daß es weitläuftig und beschwerlich wäre damit zu rechnen. Uebrigens entstehen alle diese Verhältnisse aus der Fractio continua

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{2+a}}}}}}}}}}}}}}$$

wobey $a=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{84+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{37+\cfrac{1}{3+ \text{rc.}}}}}}}}}}}}}$

ist.

ist. Weiter habe ich die Berechnung von dieser Fractio continua aus den **Ludolphischen** Zahlen nicht verfolgt. Und so werde ich auch nicht sagen, ob sie, wenn weiter fortgerechnet wird, irgend abgebrochen werde. Wäre dieses, so liesse sich die Verhältniß des Diameters zum Umkreise, durch ganze, wiewohl ungeheuer grosse Zahlen ausdrücken. Ich habe aber in vorbemeldter Abhandlung von **Verwandlung der Brüche** (§. 23) eine andere Fractio continua angegeben, welche nach einem gewissen Gesetze ins Unendliche fortgeht, und die Hofnung, die Verhältniß des Diameters zum Umkreise durch ganze Zahlen zu bestimmen, ganz benimmt.

§. 10.

Es giebt in der Mathematik noch andere Grössen, von denen es sich eben so viel der Mühe lohnte, zu suchen, ob sie durch rationale Brüche, oder auf eine geschmeidigere Art ausgedrückt werden können, als es noch dermalen durch Decimalzahlen geschieht. Dahin kann besonders die Zahl 2,718281,828459,045235, 36028... gerechnet werden, deren hyperbolischer Logarithmus = 1 ist. Diese Zahl ist in Absicht auf die Logarithmen eben das, was die **Ludolphischen** Zahlen in Absicht auf den Circul sind, und daher in Absicht auf trigonometrische und andere Rechnungen von gleicher **Erheblichkeit**. Fragt man demnach, warum

denn

denn nur die **Ludolphische** Zahlen so viel Wesens machen? so wird diese Frage theils nur aus der Geschichte der Mathematik, und theils auch dadurch beantwortet werden können, daß die Begriffe **Circul**, **Vierecke**, **Grösse**, **gleich** jedermann bekannt sind, welches sich von dem Begrif **hyperbolische Logarithmen** nicht sagen läßt, weil dieser Begrif erst durch den Infinitesimalcalcul bekannt worden, und ohne die Erlernung dieses Calculs nicht wohl deulich gemacht werden kann. Wäre den meisten unter denen, so die Quadratur des Circuls suchen, nicht dieser Riegel geschoben, so würden, allem Ansehen nach, eben so viel vergebliche Bemühungen und fehlgeschlagene Versuche, in Ansehung der Zahl 2,718281, 828459, 045235, 36028... zum Vorschein kommen, als in Ansehung der **Ludolphischen** Zahlen zum Vorschein gekommen sind. Es läßt sich aber auch diese Zahl nicht durch einen rationalen Bruch genau ausdrücken. Denn setzt man dieselbe Kürze halber $= e$, so ist

$$e = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{26 + \text{rc.}}}}}}}}$$

oder

oder $$\frac{e-1}{e+1} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \text{etc.}}}}}}$$

oder

$$\frac{ee-1}{ee+1} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{11 + \text{etc.}}}}}}}$$

und überhaupt

$$\frac{e^x-1}{e^x+1} = \cfrac{1}{2:x + \cfrac{1}{6:x + \cfrac{1}{10:x + \cfrac{1}{14:x + \text{etc.}}}}}$$

Da diese Brüche immer fortgehen, so läßt sich auch weder e noch e^x durch einen rationalen Bruch genau ausdrücken, wenn nemlich x eine rationale Zahl oder Bruch ist. Ich habe übrigens diese Formeln nach der Methode gefunden, die ich in vorbemeldter Abhandlung von **Verwandlung der Brüche** (§. 19. seqq.) angegeben habe.

habe. Die Veranlassung aber, diese Formeln zu suchen, gab mir des Herrn Eulers Analysis infinitorum, wo der Ausdruck

$$\frac{e-1}{2} = 1 : \overline{1+1} : \overline{6+1} : \overline{10+1} : \overline{14+1} : \overline{18+} \text{ etc.}$$

in Zahlen berechnet, in Form eines Beyspieles vorkömmt.

§. 11.

Auf eben diese Veranlassung gienge ich weiter, und fande in Absicht auf die Circulbögen den Ausdruck

$$\text{tang. } v = 1 : \overline{1:v-1} : \overline{3:v-1} : \overline{5:v-1} : \overline{7:v-1} : \overline{9:v-} \text{ etc.}$$

Aus diesem immer fortgehenden Bruche lassen sich, in Absicht auf die unbestimmte Quadratur des Circuls, verschiedene Folgen ziehen. Man setze n eine ganze Zahl, und mache $v = 1:n$, so ist

tang.

$$\text{tang. } v = \cfrac{1}{n - \cfrac{1}{3n - \cfrac{1}{5n - \cfrac{1}{7n - \cfrac{1}{9n - \cfrac{1}{11n - \text{ꝛc.}}}}}}}$$

Da dieser Bruch immer fortgeht, so folgt daraus, daß, so oft ein Circulbogen eine Pars aliquota des Halbmessers ist, die Tangente desselben nothwendig irrational sey. Denn wäre die Tangente rational, so könnte dieser Bruch nicht in einem fortgehen, sondern er müßte irgend aufhören. Um dieses mehr zu erläutern, wollen wir zum Beyspiele $v = 1$ setzen. Da nun auch $n = 1$ wird, so ist

$$\text{tang. arc. } 1 = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{5 - \cfrac{1}{7 - \cfrac{1}{9 - \text{ꝛc.}}}}}}$$

demnach zufolge der vorhin (§. 9.) angeführten Abhandlung

	+ 1	+ 0
+ 1	+ 0	+ 1
− 3	+ 1	+ 1
+ 5	− 3	− 2
− 7	− 14	− 9
+ 9	+ 95	+ 61
− 11	+ 841	+ 540
+ 13 ꝛc.	− 9156 ꝛc.	+ 5879 ꝛc.

Und

Und so wird die Tangente des dem Halbmesser gleichen Bogens, der Ordnung nach, durch die Brüche

$$\frac{3}{2}, \frac{14}{9}, \frac{95}{61}, \frac{841}{540}, \frac{9156}{5879} \text{ rc.}$$

und zwar durch jeden folgenden dergestalt genauer ausgedruckt, daß jeder kleinere Bruch minder genau ist. Da nun diese Reihe von Brüchen nirgends abgebrochen wird, sondern dergestalt fortgeht, daß endlich Nenner und Zähler, ohne gemeinsame Theiler zu haben, grösser werden, als jede fürgegebene Zahl, so läßt sich die Tangente des dem Halbmesser gleichen Bogens durch keinen endlichen oder rationalen Bruch ausdrücken. Eben dieses gilt auch für die Tangenten jeder Bögen die $\frac{1}{n}$ Theil des Halbmessers sind.

§. 12.

Werden die erstgefundene Brüche von einander abgezogen, so findet sichs dadurch, wie geschwinde sie dem wahren Werthe näher kommen. Denn so ist

$$\frac{14}{9} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9}$$

$$\frac{95}{61} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61}$$

$$\frac{841}{540} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61} + \frac{1}{61.540}$$

$$\frac{9156}{5879} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61} + \frac{1}{61.540} + \frac{1}{540.5879}$$

rc.

Fährt

Fährt man auf diese Art fort, so wird die Tangente des dem Halbmesser gleichen Bogens durch eine unendliche Reihe

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61} + \frac{1}{61.540} + \frac{1}{540.5879} + \frac{1}{5879 \cdot 76887} + \text{rc.}$$

ausgedrückt, welche stärker convergirt als jede geometrische Reihe, und man weiß, daß die Summe derselben irrational ist.

§. 13.

Daß aber nicht nur die Tangenten der Bögen $\frac{1}{n}$, sondern überhaupt jeder Bögen $\frac{m}{n}$, die zum Halbmesser ein rationales Verhältniß haben, irrational seyn, erhellet auf eben diese Art. Es sey z. E. $v = \frac{2}{3}$, so ist die Tangente dieses Bogens

$$= \cfrac{1}{3:2 - \cfrac{1}{9:2 - \cfrac{1}{15:2 - \cfrac{1}{21:2 - \text{rc.}}}}}$$

demnach	1	0		
$+3:2$	0	1	$=$	$0:1$
$-9:2$	$+1$	$+3:2$	$=$	$2:3$
$+15:2$	$-9:2$	$-23:4$	$=$	$18:23$
$-21:2$	$-131:4$	$-333:8$	$=$	$262:333$
$+27:2$	$+2715:8$	$+6901:16$	$=$	$5430:6901$
rc.	rc.	rc.		

 Und

Und so wird die Tangente des Bogens $v = \frac{2}{3}$, durch jeden der Brüche $\frac{2}{3}, \frac{18}{23}, \frac{262}{333}, \frac{5430}{6901}$ ꝛc. und zwar durch jeden folgenden dergestallt genauer ausgedrückt, daß jeder kleinere Bruch minder genau ist. Da nun diese Reihe von Brüchen nirgend aufhört, sondern so anwächst, daß endlich Nenner und Zähler, ohne gemeinsame Theiler zu haben, grösser werden als jede fürgegebene Zahl, so folgt, daß die Tangente des Bogens $v = \frac{2}{3}$ irrational sey. Eben dieses gilt auch für die Tangenten jeder Bögen, die $= \frac{m}{n}$ sind, oder zum Halbmesser ein rationales Verhältniß haben. Zieht man die erstgefundene Brüche von einander ab, so erhält man für die Tangente des Bogens $v = \frac{2}{3}$, die Reihe

$$\frac{2}{3} + \frac{8}{3 \cdot 23} + \frac{32}{23 \cdot 333} + \frac{128}{333 \cdot 6901} + \text{ꝛc.}$$

welche ebenfalls stärker als jede geometrische Reihe convergirt und eine irrationale Summe hat.

§. 14.

Da demnach die Tangente eines jeden rationalen Bogens irrational ist, so ist hinwiederum auch der Bogen einer jeden rationalen Tangente irrational. Denn man setze, der Bogen wäre rational, so würde der Voraussetzung zuwider die Tangente, vermöge des erst erwiesenen, irrational seyn.

§. 15.

Wir haben in den trigonometrischen Tabellen eine einige rationale Tangente, nemlich die von 45 Gr. welche den Halbmesser gleich, und demnach = 1 ist. Damit ist also der Bogen von 45 Gr. und folglich auch der Bogen von 90, 180, 360 Gr. irrational, oder diese Bögen haben zu dem Halbmesser des Circuls kein rationales Verhältniß.

§. 16.

Aus dem bisher gesagten erhellet demnach so viel, daß kein Bogen nebst seiner Tangente zugleich ein rationales Verhältniß zum Halbmesser haben könne. Es ist aber auf unzählige Arten möglich, daß ein Bogen zu seiner Tangente ein rationales Verhältniß habe. Allein es läßt sich auch beweisen, daß in allen diesen Fällen, sowohl der Bogen als die Tangente desselben, mit dem Halbmesser incommensurabel sind. Denn erstlich können, vermöge des bereits erwiesenen, nicht beyde zugleich zu dem Halbmesser ein rationales Verhältniß haben. Man setze demnach, es sey nur die Tangente oder nur der Bogen allein. Im ersten Fall müßte die Tangente sowohl mit dem Halbmesser als mit dem Bogen commensurabel seyn. Und so wäre eben dadurch auch der Bogen mit dem Halbmesser commensurabel, weil die Summe oder die Differenz zweyer rationalen

Verhältnisse ebenfalls rational ist. Im andern Fall wäre der Bogen zugleich mit der Tangente als mit dem Halbmesser commensurabel, und so würde ebenfalls die Tangente zu dem Halbmesser ein rationales Verhältniß haben. Da nun vermöge des vorhin erwiesenen, Halbmesser, Bogen und Tangente nicht zugleich commensurabel sind, so werden die beyden angeführten Fälle umgestossen; demnach wenn Bogen und Tangente unter sich ein rationales Verhältniß haben, so sind beyde mit dem Halbmesser incommensurabel.

§. 17.

Noch werde ich kurz zween Umstände berühren, die in Absicht auf die Quadratur des Circuls etwas scheinbares haben. Der erste ist folgender Satz: Wenn man um einen Circul ein beliebiges regulaires oder irregulaires Vieleck beschreibt, so, daß jede Seite den Circul berühre, so verhält sich der Umkreis des Vielecks zu seinem Inhalte, wie sich der Umkreis des Circuls zu seinem Inhalte verhält. Den Beweis übergehe ich, weil er sehr leicht ist. Der andere Umstand ist ein Phaenomenon, welches sich folgendermaßen eräugnet: Wenn man 1 durch 0,7853981634... als den vierten Theil der **Ludolphischen** Zahlen dividirt, so geht es 1 mal, und es bleibt 0,2146018366.... Dividirt man ferners diesen

diesen Ueberrest in die 0,7853981634... durch die man vorhin getheilt hatte, so geht es 3 mal und es bleibt 0,1415926536.... Setzt man diesem Ueberrest die Zahl 3 vor, so erhält man 3,1415926536÷.. welches gerade die Ludolphische Zahlen sind. Hiezu sage ich weiter nichts, als daß es ein blosses Phaenomenon ist, woraus sich auf die Quadratur des Circuls schlechthin nicht schliessen läßt. Es ist auch nicht schwer die Ursache davon zu finden.