VIII.
Anmerkungen über die Verwandlung und Auflösung der Gleichungen.

§. 1.

Tab. II. Es ist aus den Anfangsgründen der Algebra bekannt, daß die Auflösung einer Gleichung vom vierten Grade von der Auflösung einer cubischen Gleichung abhängt, auf welche sich jene reduciren läßt, und daß, wenn bey jener alle vier Wurzeln entweder unmöglich oder real sind, die drey Wurzeln der letztern real sind. Da nun dieser letztere Fall immer auf die Trisection eines Circulbogens reducirt werden kann, so sieht man überhaupt leicht ein, daß sich auch jede Biquadratgleichungen, deren Wurzeln sämtlich entweder unmöglich oder real sind, auf die Trisection eines Circulbogens solle können reduciren lassen. Die Frage ist nun, die Methode dazu zu finden und brauchbar zu machen.

§. 2.

Um in der Auflösung dieser Frage nicht ohne Noth Weitläuftigkeiten einzumengen, so werden wir setzen, daß in der fürgegebenen Biquadratgleichung das zweyte Glied weggeschaft sey, weil

weil dieses in jedem Falle, ohne Mühe voraus geschehen kann. Es sey demnach

$$0 = x^4 + Ax^2 + Bx + C.$$

Man sehe diese Gleichung als das Product zwoer Quadratgleichungen

$$0 = xx + ax + b$$
$$0 = xx - ax + c$$

an, welches

$$\begin{aligned} 0 = x^4 &+ bx^2 + acx + bc \\ &+ c \quad - ab \\ &- aa \end{aligned}$$

ist, so lassen sich durch die Vergleichung der Glieder die Coefficienten a, b, c durch A, B, C bestimmen, und die gesuchten vier Wurzeln werden sodann

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - b)}$$
$$x = +\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - c)}$$

seyn. Wird nun die Vergleichung der Glieder angestellt, so ist

$$A = b + c - aa$$
$$B = ac - ab$$
$$C = bc$$

demnach

$$c + b = A + aa \qquad 2c = A + aa + B:a.$$
$$c - b = B:a \qquad 2b = A + aa - B:a.$$
$$(c+b)^2 - (c-b)^2 = 4bc = 4C = (A + a^2)^2 - B^2 : a^2$$
$$4C = A^2 + 2a^2A + a^4 - B^2 : a^2$$

folglich

$$\begin{aligned} 0 = a^6 + 2a^4A + A^2a^2 &- B^2 \\ &- 4Ca^2 \end{aligned}$$

Man setze

$$a^2 = z - \tfrac{2}{3} A$$

so ist, wenn man diesen Werth substituirt und die Reduction vornimmt,

$$\begin{aligned} 0 = z^3 &- \tfrac{1}{3} A^2 z - \tfrac{2}{27} A^3 \\ &- 4 C z + \tfrac{8}{3} C A \\ &\qquad\;\; - B^2 \end{aligned}$$

Man setze nun

$$z = r \operatorname{cosin.} v$$
$$r \operatorname{cos.} 3 v = D$$

so giebt die Trigonometrie folgende Gleichung

$$0 = z^3 - \tfrac{3}{4} rr z - \tfrac{1}{4} rr D.$$

Wird diese mit der erst gefundenen verglichen, so ist

$$\tfrac{3}{4} rr = \tfrac{1}{3} A^2 + 4 C$$
$$\tfrac{1}{4} rr D = \tfrac{2}{27} A^3 - \tfrac{8}{3} C A + B^2$$

folglich

$$r = \tfrac{2}{3} \sqrt{(12 C + A^2)}$$
$$D = (2 A^3 - 72 C A + 27 B^2) : (36 C + 3 A^2)$$

Endlich, wenn man in den für x gefundenen zwo Gleichungen die für c, b gefundene Werthe setzt, so sind alle vier Wurzeln

$$x = \pm \tfrac{1}{2} a + \sqrt{(-\tfrac{1}{2} A - \tfrac{1}{4} a^2 \mp B : 2 a)}.$$

§. 3.

Wir haben nun nur den Rückweg zu nehmen, um die Operationen anzuzeigen, durch welche man die Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^4 + A x^2 + B x + C$$

findet. Dieses geschiehet demnach folgendermaßen:

1°.

1°. Man macht

$$r = \tfrac{2}{3}\sqrt{(12C + AA)}$$

$$D = (2A^3 - 72CA + 27BB):(36C + 3AA)$$

2°. Sodann setzt man

$$D:r = \text{cosin. } 3v,$$

und nachdem man den Bogen 3 v gefunden, so sucht man den Cosinus von v, und macht

$$r.\ \text{cos. } v = z$$

$$\sqrt{(z - \tfrac{2}{3}A)} = a.$$

3°. Hat man nun a gefunden, so sind

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(-\frac{A}{2} - \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{B}{2a}\right)}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(-\frac{A}{2} - \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{B}{2a}\right)}$$

die gesuchte vier Wurzeln.

§. 4.

Es sey z. E. die Gleichung

$$0 = x^4 - 15x^2 + 10x + 24$$

so ist

$$A = -15$$
$$B = +10$$
$$C = +24$$

demnach

$$r = \tfrac{2}{3}\sqrt{(12.24 + 15.15)} = \tfrac{2}{3}\sqrt{513} = \sqrt{228}$$

$$D = \frac{-2.15^3 - 72.24.15 + 27.10.10}{36.24 - 3.15.15} = \frac{270}{19}$$

$$\text{cosin. } 3v = D:r = 270:19\sqrt{228} = 135:\sqrt{(3.19^3)}$$

½ log.

$$\tfrac{1}{2}\,\log. 228 = \log. r = 1,1789674$$

$$\log. 270 = 2,4313638$$
$$\log. 19 = 1,2787536$$

$$\log. 270:19 = 1,1526102$$

$$\log. \cos. 3v = 0,9736428 - 1$$

demnach $3v = 19^\circ . 45' . 37\tfrac{1}{7}''$
$$v = 6 .\ 35 . 12\tfrac{1}{3}$$
$$\log. \cos. v = 0,9971238 - 1$$
$$\log. r = 1,1789674$$

$$\log. z \ldots . = 1,1760912$$

$$z = 15$$

Ferner $a^2 = z - \tfrac{2}{3}A = 15 + 10 = 25$
$$a = 5$$

und
$$x = \tfrac{5}{2} \pm \surd\left(\tfrac{15}{2} - \tfrac{25}{4} - \tfrac{10}{10}\right) = \tfrac{5}{2} \pm \tfrac{1}{2}$$
$$x = -\tfrac{5}{2} \pm \surd\left(\tfrac{15}{2} - \tfrac{25}{4} + \tfrac{10}{10}\right) = -\tfrac{5}{2} \pm \tfrac{3}{2}$$

demnach sind die Wurzeln $+3, +2, -4, -1$.

§. 5.

Da sich auf diese Art nur diejenigen Biquadratgleichungen auflösen lassen, welche alle Wurzeln entweder unmöglich oder real haben, so kömmt es darauf an, die Grenzen zu bestimmen, in welchen solches möglich ist. Man sieht aus dieser Auflösung, daß es erstlich auf den Ausdruck

$$D : r = \cos. 3v$$

ankömmt.

ankömmt. Denn ein Cosinus kann nicht grösser als 1 seyn. Werden demnach für D, r die gefundenen Werthe gesetzt, so muß

$$(2A^3 - 72CA + 27B^2) : 2(12C + AA)^{3:2} < 1$$

folglich

$$2A^3 - 72CA + 27B^2 < 2(12C + AA)^{3:2}$$

seyn, und unter dieser Bedingung sind demnach alle vier Wurzeln entweder unmöglich oder real. Man sieht zugleich, daß eben diese Bedingung voraussetzt, es müsse sich aus

$$12C + AA$$

die Quadratwurzel können ausziehen lassen, und folglich wenn C negativ ist, 12 C kleiner als AA seyn. Beydes geht nun allemal an, wenn die vier Wurzeln sämtlich entweder real oder unmöglich sind, weil in diesen Fällen die cubische Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = z^3 - \tfrac{1}{3}A^2 z &- \tfrac{2}{27}A^3 \\ - 4Cz &+ \tfrac{8}{3}CA \\ &- BB \end{aligned}$$

drey reale Wurzeln hat. Es kömmt demnach ferners auf den Ausdruck

$$a = \sqrt{(z - \tfrac{2}{3}A)}$$

an, welcher ebenfalls real seyn muß, dafern in den Wurzeln

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(-A - \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{B}{2a}\right)}$$

$$x = -\frac{1}{2a} \pm \sqrt{\left(-A - \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{B}{2a}\right)}$$

keine andere Unmöglichkeit seyn solle, als die, welche

welche aus den Wurzelzeichen, womit sie an sich schon behaftet sind, herrühren kann.

§. 6.

Da demnach hiebey so viele Bedingungen vorkommen, so ist leicht zu erachten, daß die Möglichkeit aller vier Wurzeln in sehr engen Schranken eingeschlossen seyn müssen. Die allgemeine Methode, dadurch man sonst diese Frage entscheidet, giebt an, man solle in der Gleichung

$$o = x^4 + Ax^2 + Bx + C$$

das letzte Glied C als veränderlich ansehen, und bestimmen, wenn es ein maximum oder ein minimum wird. Denn ist es sodann in der fürgegebenen Gleichung grösser als das maximum, oder kleiner als das minimum, so läßt sich daraus schliessen, ob die Gleichung reale Wurzeln hat oder nicht. Wenn man diesem zufolge die Gleichung differentirt und $dC = o$ setzt, so erhält man

$$o = 4x^3 + 2Ax + B$$

eine cubische Gleichung, welche man aufzulösen hat, um diejenigen x zu bestimmen, unter welchen C ein maximum oder ein minimum wird. Sind in dieser Gleichung zwo Wurzeln unmöglich, so fallen dadurch schon zwo Wurzeln aus der fürgegebenen Biquadratgleichung ins Unmögliche, und C hat nur ein maximum zur Grenze der Möglichkeit der zwo übrigen Wurzeln.

§. 7.

§. 7.

Da hiebey eine Cubicgleichung aufzulösen, bey der vorhergehenden Probe aber eine Trisection eines Circulbogens vorzunehmen ist, welche ungefehr eben so viel als eine Cubicgleichung sagen will; so habe ich auf Mittel gedacht, beydes zu vermeiden, und die Grenzen der Möglichkeit der Wurzeln auf eine deutlichere und mehr in die Augen fallende Art kenntlich zu machen. Zu diesem Ende merke ich an, daß, wenn man in der Gleichung

$$0 = x^4 + Ax^2 + Bx + C$$

das Zeichen des dritten Gliedes $+B$ in $-B$ verwandelt, man dadurch an der Gleichung weiter nichts ändert, als daß die positive Wurzeln negativ, und hinwiederum die negativen positiv werden. Da dieses auf die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Wurzeln keinen Einfluß hat, so werde ich das Zeichen des dritten Gliedes, in dieser Absicht, als Gleichgültig ansehen.

§. 8.

Hingegen hat es mit dem Zeichen des zweyten und vierten Gliedes eine ganz andere Bewandniß. Ihre Verwechselung hat in die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Wurzeln, einen sehr beträchtlichen Einfluß. Und besonders muß der Fall, wo A positiv ist, anders behandelt werden, als wo A negativ ist, weil dieser letztere Fall mehrere Umstände darbeut.

Um demnach bey dem ersteren anzufangen, so setze ich

$$x^4 + Ax^2 = Bx - C = z$$

Hier ist nun offenbar z positiv, es mag nun x
Fig. I. positiv oder negativ seyn. Nimmt man auf AP die Abscissen x, und richtet die Ordinaten

$$PM = z = x^4 + Ax^2$$

auf, so läßt sich die Linie NAM construiren, welches ebenfalls der andern Gleichung

$$z = Bx - C$$

genügen leisten wird. Man sieht zu diesem Ende B als eine Tangente eines Winkels φ an, und indem man RAP $= \varphi$ macht, und die Linie AR zieht, so macht man AQ $= -$C, und zieht durch Q die Linie QM mit AR parallel. Denn so hat man, wenn AP $= x$ ist,

$$PR = AP.\ \text{tang.}\ \varphi = Bx$$
$$RM = AQ = C$$

folglich $PM = Bx - C = z.$

§. 9.

Nun solte, wenn die Gleichung

$$o = x^4 + Ax^2 B \pm x + C$$

reale Wurzeln hat, die Linie QM allemal die krumme Linie NAM entweder berühren oder schneiden. Denn man muß für z einerley Werth finden, es sey daß man $x^4 + Ax$ aus P in M trage, oder PM durch Bx — C bestimme. In der Figur ist QM so gezogen, daß sie die Linie NAM berühre. Und dieses macht,

macht, daß, so lange der Winkel $RAP = \varphi$ beybehalten wird, Q der tiefste Punct ist, der einen Durchschnitt zulasse. Man sieht daraus, daß wenn in der Gleichung

$$0 = x^4 + Ax^2 \pm Bx + C$$

C positiv ist, dieses Glied eine gewisse Grösse nicht überschreiten darf, wofern die Gleichung mögliche Wurzeln haben solle. Ist aber C negativ, so fällt Q über A, und da sind zween Durchschnittspuncten schlechthin nothwendig. Wenn demnach A positiv, C aber negativ ist, so hat die Gleichung nothwendig zwo mögliche und zwo unmögliche Wurzeln.

§. 10.

Ist aber C positiv, so fällt Q unter A, und da sind zuweilen zween Durchschnitte möglich. Man sieht leicht, daß dieses theils von dem Winkel RAP, theils auch von der Grösse der Linie $AQ = C$ abhängt. Wir werden um beydes zu bestimmen, den Winkel RAP aufsuchen, unter welchem, wenn A Q angenommen wird, Q M die Linie NAM berührt. Denn man sieht leicht, daß dieses der kleinste ist, unter welchem Durchschnitte möglich sind. Es sey demnach

$$AP = x,$$

$$PM = z$$

$$x^4 + Ax^2 = z,$$

so ist $\quad \text{tang.}\,\varphi = B = \frac{dz}{dx} = 4x^3 + 2Ax.$

$$PR = x\,\text{tang.}\,\varphi = 4x^4 + 2Ax^2$$
$$PM = z = x^4 + Ax^2$$

demnach

$$PR - PM = 3x^4 + Ax^2 = C$$
$$x = \sqrt{(-\tfrac{1}{6}A + \sqrt{(\tfrac{1}{36}A^2 + C)})}$$

folglich

$$B = 4\left[-\tfrac{1}{6}A + \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \frac{C}{3}\right)}\right]^{3:2} +$$
$$2A\left[-\tfrac{1}{6}A + \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \frac{C}{3}\right)}\right]^{1:2}$$

Dieses ist demnach die kleinste Tangente, unter welcher zween Durchschnitte, und daher auch zwo Wurzeln der Gleichung

$$o = x^4 + Ax^2 \pm Bx + C$$

möglich sind. Wenn nemlich, wie wir es hier nehmen, A und C positiv sind, so muß

$$B > 4\left[-\tfrac{1}{6}A + \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \frac{C}{3}\right)}\right]^{3:2} +$$
$$2A[-\tfrac{1}{6}A + \sqrt{(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C)}]^{1:2}$$

seyn.

§. 11.

Diese Formel würde gar keinen Werth geben, wenn man darin C negativ setzen wolte, es sey denn, daß man auch A negativ machte. Dieses will nun sagen, daß nur in dem Fall, wo A negativ ist, der Punct Q über der Linie AP, oder innert der Linie NAM sey, und dadurch eine Tangente gezogen werden kann.

Wie

Wie dieses möglich wird, werden wir nun noch untersuchen, indem wir uns zu der Betrachtung des zweyten allgemeinen Falles wenden, in welchem nemlich A negativ ist.

§. 12.

Es sey demnach

$$x^4 - Ax^2 = +Bx - C = +z.$$

Man setze Fig. II.

$$AP = x$$
$$PM = z$$

so wird sich vermittelst der Gleichung

$$x^4 - Ax^2 = -z$$

die Linie NEBAMFL construiren lassen, welche allemal eine in A eingebogene Gestalt hat, weil die kleinern Ordinaten anfangs negativ und erst nachgehends positiv werden, nachdem $x^2 > A$ wird. Diese Linie hat ferner immer in A ein maximum, in E, F zwey minima, und zwischen E, A, F zween Wendungspuncten. Dieses macht, daß sich, jedoch unter gewissen Bedingungen, drey parallele Tangente ziehen lassen, so ofte nemlich eine an dem eingebogenen Theile gezogen wird.

§. 13.

Hiebey giebt es nun, in Ansehung der Durchschnitte, drey verschiedene Fälle. Einmal, so oft eine Linie den eingebogenen Theil EAF durchschneidet, so durchschneidet sie auch die auswertigen EN, FL. Man sieht leicht, daß die Linien EF, BD, deren erstere die beyden minima berührt, die andere aber die Tangente bey dem Wendungspunct B ist, die äusserſten von denen sind, welche vier Durchschnitte machen können, und daß eben so der Winkel BDC unter allen der kleinste ist, imgleichen daß jede Linie, welche vier Durchschnitte machen solle, zwischen C und D durchgehen müsse, folglich in der Gleichung das vierte Glied, wenn es positiv ist, nicht grösser als AD, und wenn es negativ ist, nicht grösser als AC seyn könne, dafern alle vier Wurzeln sollen können real seyn. Diese zween Grenzpuncten lassen sich nun leicht bestimmen. Denn für C wird z ein minimum, demnach

$$dz=(4x^3-2Ax)\,dx=0$$
$$x=\sqrt{\tfrac{1}{2}A}$$
$$AC=x^4-Ax^2=\tfrac{1}{4}A^2-\tfrac{1}{2}A^2=-\tfrac{1}{4}A^2$$

Sodann wird D durch die Tangente des Wendungspunct bestimmt. Für diesen ist

$$ddz=(12x^2-2A)\,dx^2=0$$
$$AG=x=\sqrt{\tfrac{1}{6}A}$$
$$GB=x^4-Ax^2=\tfrac{1}{36}A^2-\tfrac{1}{6}A^2=-\tfrac{5}{36}A^2$$

Es ist aber

$$(GB+AD):AG=dz:dx=4x^3-2Ax=-\tfrac{4}{3}A\sqrt{\tfrac{1}{6}A},$$

folglich

$$(\tfrac{5}{36}A^2+AD):\sqrt{\tfrac{1}{6}A}=\tfrac{4}{3}A\sqrt{\tfrac{1}{6}A}$$
$$AD=\tfrac{4}{18}A^2-\tfrac{5}{36}A^2=\tfrac{1}{12}A^2.$$

§. 14.

Fällt demnach das vierte Glied zwischen CD, so sind zwo Wurzeln nothwendig real, und die zwo andern können es seyn, wenn B nicht zu groß ist. Es sey z. E. das vierte Glied $C = AQ$. Man ziehe aus Q die Tangente QM, und durch M die Ordinate MP; so ist

$$AP = x$$
$$PM = + z$$

Nun ist $x^4 - Ax^2 = + z$

$$\frac{dz}{dx} = \text{tang.}\, MTP = 4x^3 - 2Ax = + B$$
$$Qm = - Bx = 4x^4 - 2Ax^2$$
$$PM \qquad = x^4 - Ax^2$$
$$Qm - PM = 3x^4 - Ax^2 = + C.$$

Dieses giebt nun eben so wie vorhin (§. 10.)

$$B = 4\left[+\tfrac{1}{6}A \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \frac{C}{3}\right)}\right]^{3:2} - 2A\left[+\tfrac{1}{6}A \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C\right)}\right]^{1:2}$$

welches demnach die Lage der aus dem Punct Q gezogenen Tangente angiebt, welche zugleich die Grenzlinie der realen Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^4 - Ax^2 \pm Bx \pm C$$

ist. Wir werden nun sehen, wie sich diese Grenzen nach den verschiedenen Werthen des letzten Gliedes C richten. Und da haben wir folgende Fälle:

I°. Wenn C positiv ist, so fällt Q unterhalb A. Ist nun in diesem Fall C grösser als $\frac{1}{4}A^2$, so fällt Q unter die Linie EF, zwo Wurzeln sind unmöglich, und sollen die übrigen beyden möglich seyn, so muß

$$B > 4\left[+\tfrac{1}{6}A + \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C\right)}\right]^{3:2} - 2A\left[+\tfrac{1}{6}A + \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C\right)}\right]^{1:2}$$

seyn, wiedrigenfalls sind alle vier unmöglich.

II. Ist aber C kleiner als $\frac{1}{4}A^2$, so fällt Q zwischen AC, und da sind zwo Wurzeln nothwendig real. Sollen es die beyden andern auch seyn, so muß

$$B < 4\left[+\tfrac{1}{6}A + \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C\right)}\right]^{3:2} - 2A\left[+\tfrac{1}{6}A + \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C\right)}\right]^{1:2}$$

seyn. Denn in diesem Fall hat die Tangente QM eine umgekehrte Lage, weil sie in EF durch den 90ten Grad geht.

III. Ist hingegen C negativ und kleiner als AD, so fällt Q nicht nur über A, sondern die Formel giebt, in diesem Fall, für B zween reale Werthe. Dieses will nun sagen, daß wenn z. E. C = Aq ist, durch den Punct q zwo Tangenten qk, qn können gezogen werden. Demnach muß in diesem Falle

$$B < 4\left[+\tfrac{1}{6}A + \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}A^2 - \tfrac{1}{3}C\right)}\right]^{3:2} - 2A\left[+\tfrac{1}{6}A + \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}A^2 - \tfrac{1}{3}C\right)}\right]^{1:2}$$

und

$$B > 4\left[+\tfrac{1}{6}A - \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}A - \tfrac{1}{3}C\right)}\right]^{3:2} - 2A\left[+\tfrac{1}{6}A - \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}A^2 - \tfrac{1}{3}C\right)}\right]^{1:2}$$

seyn.

seyn. Widrigenfalls sind nur zwo Wurzeln real.

IV. Ist endlich C negativ und grösser als AD, so giebt die Formel für B gar keinen realen Werth. Das will nun sagen, man könne durch den Punct Q, wenn derselbe über D hinauf fällt, keine Tangente ziehen. Es sind auch in diesem Fall nothwendig zwo Wurzeln real, und zwo unmöglich.

§. 15.

Wenn in der Gleichung das Glied $B = 0$ ist, so lassen sich alle diese Formeln sehr abkürzen. Denn so sind

I°. in der Gleichung

$$0 = x^4 + Ax^2 + C$$

alle vier Wurzeln unmöglich.

II. In der Gleichung

$$0 = x^4 \pm Ax^2 - C$$

sind immer zwo Wurzeln real und zwo unmöglich.

III. In der Gleichung

$$0 = x^4 - Ax^2 + C$$

sind alle vier Wurzeln real, wenn C kleiner als $\frac{1}{4}A^2$ ist. Ist aber C grösser als $\frac{1}{4}A^2$ so sind alle vier Wurzeln unmöglich. Alles dieses erhellet auch daraus, daß die Gleichung

$$0 = x^4 - ax^2 + b^2$$

aufgelöst, die Wurzeln

$$2x = \pm\sqrt{(a + 2b)} \pm \sqrt{(a - 2b)}$$ giebt.

§. 16.

Ist hingegen der zweyte Coefficient $A = 0$, so haben wir die erste Figur, und da sind immer zwo Wurzeln unmöglich. Die übrigen zwo sind real, wenn C negativ ist. (§. 9.) Ist aber C positiv, so sind diese zwo Wurzeln nur alsdann real, wenn

$$B > 4\left(\frac{C}{3}\right)^{3:4}$$

oder $\quad 27 B^4 > 256 C^3$ ist.

§. 17.

Man wird übrigens aus dem §. 10. und §. 14. ersehen, daß die hier gebrauchte Methode deswegen angieng, weil sich aus der Gleichung

$$3x^4 \pm Ax^2 = C$$

die Wurzel sehr leicht ausziehen liesse. Ungeachtet aber dieses Verfahren bey höhern Gleichungen so unbedingt nicht angeht, so finden sich doch ganze Classen derselben, bey denen es angebracht werden kann. So z. E. lassen sich auf diese Art bey jeder Gleichung von drey Gliedern

$$x^m + Ax + B = 0$$

und so auch bey jeder Gleichung von folgender Form

$$x^{2m} + Ax^m + Bx + C = 0$$

die Anzahl der realen Wurzeln und die Schranken ihrer Möglichkeit bestimmen. Ich werde mich aber hier dabey nicht lange aufhalten, sondern zu andern Betrachtung fortschreiten, die sich über die Gleichungen machen lassen.

§. 18.

§. 18.

Seit dem man gefunden, daß jede Gleichung als ein Product von einer gewissen Anzahl Gleichungen vom ersten Grade angesehen werden kann, und daß sich mit den Wurzeln verschiedene Veränderungen vornehmen lassen, so hat man mit solchen Veränderungen verschiedene Proben gemacht, und zu dem Ende für die Wurzel x, bald $y \pm a$, bald y a, bald $y : a$, bald auch y^n gesetzt, und dadurch die Gleichung in eine andere verwandelt, die man zu verschiedenen Absichten besser gebrauchen konnte. Besonders wird, wenn man $x = y^n$ setzt, und n eine ganze Zahl ist, die Gleichung in eine andere verwandelt, welche von n mal höherm Grade ist, und daher n mal mehr Wurzeln hat. Sind hiebey alle Wurzeln x negativ, so werden alle Wurzeln y unmöglich, so oft n eine gerade Zahl ist. Und so viele Wurzeln x negativ sind, wird man n mal so viel unmögliche Wurzeln y haben. Sind hingegen alle Wurzeln x positiv, und n ist eine gerade Zahl, so wird man für jede Wurzel x zwo mögliche, und $n - 2$ unmögliche Wurzeln y haben. Ist aber n eine ungerade Zahl, so erhält man für jede Wurzel x eine mögliche, und $n - 1$ unmögliche Wurzeln. Sind endlich einige Wurzeln x unmöglich, so erhält man für jede derselben n unmögliche Wurzeln y. Alles dieses folgt ohne Mühe aus der Gleichung

$$y^n - x = 0.$$

§. 19.

Will man hiebey für n eine gebrochene Zahl setzen, z. E. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ rc. so wird man mehrentheils eine Gleichung erhalten, worin die Exponenten von y gebrochne Zahlen sind, und damit läßt sich nicht viel ausrichten. Ich sage mehrentheils: denn hat x an sich schon solche Dignitäten, die sich durch einen Bruch n aufheben, oder auf ganze Zahlen bringen lassen, so ist dieses ein Fall, bey welchem man schon oft mit Vortheil $y^n = x$ gesetzt hat. So z. E. hatten wir oben (§. 2.) die Gleichung

$$\begin{aligned} o = a^6 + 2a^4A + A^2a^2 &- B^2. \\ -4Ca^2 & \end{aligned}$$

Da sich hier alle Exponenten von a durch 2 dividiren lassen, so kann man

$$a = y^{1:2}$$

setzen, und dadurch die Gleichung in

$$\begin{aligned} o = y^3 + 2Ay^2 + A^2y &- B^2 \\ -4Cy & \end{aligned}$$

verwandeln, welche nun nur vom dritten Grade ist. Dieses wäre nun nicht angegangen, wenn in der ersten Gleichung ungerade Exponenten von a vorgekommen wären.

§. 20.

Man hätte sich aber nach der Betrachtung der bisher erwähnten Verwandlungen zu folgenden Aufgaben wenden können, die wir hier auflösen werden: **Eine Gleichung von jedem**

dem Grade in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln Quadrate, Cubi oder jede Dignitäten von den Wurzeln der erstern sind? Ungeachtet die Methode zur Auflösung dieser Aufgabe allgemein ist, so werden wir doch bey den Quadraten anfangen, weil dieser eine besondere Auflösung der Aufgabe zulassen.

§. 21.

Es sey demnach eine jede Wurzel der fürgegebenen Gleichung

$$x + a = 0.$$

Man nehme ganz willkührlich noch eine andere

$$x - a = 0$$

und multiplicire diese beyde Gleichungen mit einander, so hat man

$$x^2 - a^2 = 0.$$

Man setze nun

$$x^2 = y$$

so ist

$$y - a^2 = 0$$

demnach y das Quadrat der Wurzel x. Hiebey haben wir nun weiter nichts gethan, als daß wir zu der Wurzel — a noch eine andere + a genommen haben. Es mag nun a positiv oder negativ seyn, so erhält man immer

$$y - a^2 = 0$$

eine positive Wurzel der neuen Gleichung. Da man aber die Gleichung vorerst auflösen müßte, wenn man dieses mit jeder Wurzel x besonders vor-

vornehmen wolte, so haben wir nur noch zu sehen, wie es ohne die Auflösung der Gleichung geschehen kann.

§. 22.

Nun weiß man, daß bey jeder Gleichung die positiven Wurzeln in negative, und die negativen in positive verwandelt werden, wenn man bey dem zweyten, vierten, sechsten ꝛc. Gliede das Zeichen verwechselt. Man darf daher nur die Gleichung, so durch diese Verwechslung der Zeichen entsteht, mit der fürgegebenen multipliciren, so werden in dem Product alle ungerade Dignitäten von $x = 0$, und damit kann man $x^2 = y$ setzen, um die Gleichung zu erhalten, deren Wurzeln Quadrate von den Wurzeln der fürgegebenen Gleichung sind.

§. 23.

Es sey demnach überhaupt

$$0 = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{ꝛc.}$$

so macht man

$$0 = x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} - cx^{m-3} + \text{ꝛc.}$$

Werden nun diese Gleichungen mit einander multiplicirt, so ist

$$\begin{array}{llll} 0 = x^{2m} & + 2bx^{2m-2} & + 2dx^{2m-4} & + 2fx^{2m-6} + \text{ꝛc.} \\ & - aa\,.. & - 2ac\,.. & - 2ae\,.. \\ & & + bb\,.. & + 2bd\,.. \\ & & & - cc\,.. \end{array}$$

Setzt

Setzt man demnach

$$xx = y$$

so erhält man

$$\begin{array}{llll} o = y^m + 2b\,y^{m-1} & + 2d\,y^{m-2} & + 2f\,y^{m-3} & + \text{etc.} \\ \quad - aa.. & - 2ac.. & - 2ae.. & \\ & + bb.. & + 2bd.. & \\ & & - cc.. & \end{array}$$

eine Gleichung deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln der Gleichung

$$o = x^m + a\,x^{m-1} + b\,x^{m-2} + e\,x^{m-3} + \text{etc.}$$

sind. Wir werden nun hievon ein und andern Gebrauch machen.

§. 24.

Es sey z. E. die cubische Gleichung

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

wird diese mit

$$o = x^3 - ax^2 + bx - c$$

multiplicirt, und in dem Producte $x^2 = y$ gesetzt, so erhält man

$$\begin{array}{l} o = y^3 + 2by^2 - 2acy - cc \\ \qquad - aay^2 + bby \end{array}$$

Es ist unnöthig zu erinnern, daß man jede der Coefficienten a, b, c negativ nehmen könne, wenn in einem fürgegebenen Fall nicht alle Glieder positiv sind.

§. 25.

Man setze nun die letzte Gleichung

$$o = y^3 + Ay^2 + By - CC,$$

so

so kann man den Rückweg nehmen, und die erstere wiederum daraus herleiten, indem man die Coefficienten a, b, c durch A, B, C bestimmt. Dieses will sodann sagen: **Wenn eine cubische Gleichung gegeben, eine andere zu finden, deren Wurzeln Quadratwurzeln der ersten sind.** Diese Aufgabe ist nun nicht mehr so einfach, wie die vorhergehende, weil man an statt einer Gleichung mehrere findet, die der Bedingung genügen leistet. Denn jede Quadratzahl hat sowohl eine positive als negative Wurzel, und beyde thun der Bedingung ein Genügen. Man setze die Wurzeln der Gleichung

$$o = y^3 + Ay^2 + By - CC$$

seyn p^2, q^2, r^2, so sind die Quadratwurzeln davon

$$+p,\ +q,\ +r$$
$$-p\ \ -q\ \ -r$$

aus diesen lassen sich nun 8 cubische Gleichungen machen, deren Wurzeln

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$+p$	$+p$	$+p$	$+p$	$-p$	$-p$	$-p$	$-p$
$+q$	$+q$	$-q$	$-q$	$+q$	$+q$	$-q$	$-q$
$+r$	$-r$	$+r$	$-r$	$+r$	$-r$	$+r$	$-r$

sind. Man würde daher auf eine Gleichung vom 8ten Grade verfallen, wenn der letzte Coefficient $CC = cc$ nicht an sich schon zwo allgemeine Classen angäbe, wodurch die Gleichung auf den vierten Grad herunter gesetzt wird.

§. 26.

§. 26.

Um aber die Auflösung vorzunehmen, so haben wir

$$cc = CC \text{ und daher } c = C$$
$$2b - aa = A$$
$$bb - 2ac = B = bb - 2aC$$

Hieraus findet man

$$o = a^4 + 2Aa^2 - 8Ca + A^2 - 4B$$

§. 27.

Diese Gleichung werde ich eben hier nicht auflösen, sondern noch einen andern Rückweg nehmen, und zeigen, wie wenn man jede Gleichung vom vierten Grade, deren zweytes Glied = o ist, mit der gegenwärtigen vergleicht, man auf die cubische Gleichung

$$o = y^3 + Ay^2 + By - CC$$

kommen, und nachdem man ihre Wurzeln p^2, q^2, r^2 gefunden, sodann auch die Wurzeln der Gleichung vom vierten Grade haben könne, welche man mit

$$o = a^4 + 2Aa^2 - 8Ca + A^2 - 4B$$

verglichen hatte. Denn da a der Coefficient des zweyten Gliedes der Gleichung

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

und folglich die Summe ihrer Wurzeln ist, so ist

$$a = p + q + r.$$

§. 28.

§. 28.

Da es genug ist, dieses Verfahren in einem Beyspiele zu zeigen, so werde ich die oben (§. 4.) schon gebrauchte Gleichung

$$0 = x^4 - 15x^2 + 10x + 24,$$

oder, wenn wir a für x setzen

$$0 = a^4 - 15a^2 + 10a + 24$$

dazu gebrauchen. Diese mit

$$\begin{aligned} 0 = a^4 + 2Aa^2 - 8C + A^2 \\ -4B \end{aligned}$$

verglichen, giebt

$$A = -\tfrac{15}{2}$$
$$C = -\tfrac{5}{4}$$
$$B = +\tfrac{129}{16}$$

demnach, wenn diese Werthe in der Gleichung

$$0 = y^3 + Ay^2 + By - CC$$

gesetzt werden,

$$0 = y^3 - \tfrac{15}{2}y^2 + \tfrac{129}{16}y - \tfrac{25}{16}$$

eine cubische Gleichung, von deren Auflösung die Auflösung der fürgegebenen Gleichung vom 4ten Grade abhängt.

§. 29.

Man setze, um erstlich die Brüche aufzuheben,

$$y = \tfrac{1}{4}v$$

so ist

$$0 = v^3 - 30v^2 + 129v - 100$$

Ferner setze man, um das zweyte Glied wegzuschaffen,

$$v = z + 10,$$

so ist

$$0 = z^3 - 171z - 810.$$

Vergleicht man diese Gleichung eben so wie oben (§. 2.) mit

$$0 = z^3 - \tfrac{3}{4}rrz - \tfrac{1}{4}rrD,$$

so findet man

$$\tfrac{3}{4}rr = 171$$

$$\tfrac{1}{4}rrD = 810$$

folglich $r = \sqrt{228}$

$$D = \frac{270}{19}$$

welches eben die Werthe sind, die wir oben (§. 4.) gefunden haben. Wir haben demnach auf eben die Art die Wurzel $z = 15$, und damit die beyden übrigen $z = -6$ und $z = -9$. Da nun $v = z + 10$ ist, so sind 25, 4, 1 die drey Werthe von v, und eben so $\frac{25}{4}$, 1, $\frac{1}{4}$ die drey Werthe von y. Da nun $y = x^2$ ist, so sind $\pm\frac{5}{2}$, ± 1, $\pm\frac{1}{2}$ die drey Werthe von x. Nun ist a deren Summe, demnach ist

$$a = \pm\tfrac{5}{2} \pm 1 \pm \tfrac{1}{2}$$

dieses giebt achterley Werthe, von denen wir aber nur

$$a = +\tfrac{5}{2} + 1 - \tfrac{1}{2} = +3$$

$$a = +\tfrac{5}{2} - 1 + \tfrac{1}{2} = +2$$

$$a = -\tfrac{5}{2} - 1 - \tfrac{1}{2} = -4$$

$$a = -\tfrac{5}{2} + 1 + \tfrac{1}{2} = -1$$

gebrauchen, welche der fürgegebenen Gleichung Genügen thun.

§. 30.

So ofte in der Gleichung (§. 23.)

$$0 = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{etc.}$$

alle Wurzeln real sind, sie mögen nun positiv oder negativ seyn, so ofte sind auch in der andern Gleichung

$$\begin{array}{llll} 0 = y^m + 2by^{m-1} & + 2dy^{m-2} & + 2fy^{m-3} & + \text{etc.} \\ \quad\quad\; - aa & - 2ac.. & - 2ae.. & \\ & + bb.. & + 2bd.. & \\ & & - cc.. & \end{array}$$

die Wurzeln nicht nur real, sondern sämtlich positiv, weil sie Quadrate von den Wurzeln x sind. Wird demnach diese zweyte Gleichung in Zahlen gerechnet, so wird sich jedesmal finden, daß die Zeichen + — der Ordnung nach abwechseln.

§. 31.

Findet sich aber diese einförmige Abwechselung nicht, so ist es nothwendig ein Zeichen, daß in der ersten Gleichung einige Wurzeln unmöglich seyn müssen. Es sey z. E. die Gleichung

$$0 = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 1,$$

wird diese mit

$$0 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$$

multiplicirt, so ist das Product, wenn man $x^2 = y$ setzt,

$$0 = y^4 + 4y^3 + 10y^2 + 4y + 1.$$

Da

Da nun hier gar keine Abwechselung der Zeichen ist, so hat die Gleichung

$$0 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$$

nothwendig unmögliche Wurzeln.

§. 32.

Es läßt sich aber diese Anmerkung nicht umkehren, weil der unmöglichen Wurzeln ungeachtet, die Zeichen zuweilen dennoch einförmig abwechseln können. Um dieses auf eine allgemeinere Art aufzuklären, und zugleich die Umstände zu bestimmen, wo die Abwechselung der Zeichen auch bey den unmöglichen Wurzeln statt hat, so sey eine derselben

$$0 = x + a + b\sqrt{-1}.$$

Sind nun alle Coefficienten der Gleichung rational, so hat die Gleichung nothwendig noch eine andere Wurzel von der Form

$$0 = x + a - b\sqrt{-1}.$$

Werden diese beyden Wurzeln mit einander multiplicirt, so ist das Product

$$0 = x^2 + 2ax + \begin{array}{l} aa \\ + bb \end{array}$$

ein Factor der Gleichung. Man nehme nun den Factor

$$0 = x^2 - 2ax + \begin{array}{l} aa \\ + bb \end{array}$$

und multiplicire damit den erstern, so ist, wenn man $x^2 = y$ setzt, das Product

$$0 = y^2 + 2(bb - aa)y + (aa + bb)^2$$

der correspondirende Factor derjenigen Gleichung, deren Wurzeln y, Quadrate der Wurzeln x werden sollen. Ist nun hiebey $a > b$, so wird in diesem Factor das zweyte Glied negativ, und damit hat, der unmöglichen Wurzel ungeachtet, die Abwechselung der Zeichen statt. Man sieht leicht, daß eine Gleichung von lauter unmöglichen Wurzeln aus lauter solchen Wurzeln

$$0 = x \pm a \pm b\sqrt{-1}$$

wo $a > b$ ist bestehen, und damit in der zweyten Gleichung (§. 30.) eine einförmige Abwechselung der Zeichen statt finden kann. Man sieht aber auch, daß, wenn in allen Wurzeln $a < b$ ist, alsdann in dieser zweyten Gleichung nothwendig alle Zeichen + sind. Mischen sich aber beyde Fälle durcheinander, oder kommen zu den unmöglichen Wurzeln noch reale hinzu, so kann man für die Folge und Abwechselung der Zeichen keinen so unbedingten Schluß machen, ungeachtet man, wenn die Abwechselung der Zeichen nicht durchgängig ist, sicher schliessen kann, daß in der ersten Gleichung unmögliche Wurzeln seyn müssen.

§. 33.

Wenn man zu dem Factor

$$0 = y^2 + 2(bb - aa)y + (aa + bb)^2$$

den Factor

$$0 = y^2 - 2(bb - aa)y + (aa + bb)^2$$

nimmt, und indem man beyde mit einander multi-

multiplicirt, in dem Producte $y^2 = z$ setzt, so erhält man

$$0 = z^2 - 2(a^4 - 6a^2b^2 + b^4)y^2 + (aa+bb)^4$$

einen Factor derjenigen Gleichung, deren Wurzeln Biquadrate von x sind. In diesem Factor ist nun das zweyte Glied alsdenn negativ, wenn

$$a^4 + b^4 > 6a^2b^2$$

oder $$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 > 8a^2b^2$$

oder $$a^2 + b^2 > 2ab\sqrt{2}$$

ist, welches sich zuträgt, so ofte entweder

$$a > b(1+\sqrt{2})$$

oder $$b > a(1+\sqrt{2})$$

ist. Da demnach hier nur erfordert wird, daß a, b in grösserer Verhältniß ungleich seyn, als 1 zu $1+\sqrt{2}$ ist; so trägt sich dieses öfters zu, als die Bedingung bey den Quadraten, welche fordert, daß $a > b$ seyn müsse. Es kann daher auch leichter geschehen, daß eine Abwechselung der Zeichen statt findet, wenn man eine Gleichung in eine solche verwandelt, deren Wurzeln Biquadrate der Wurzeln der erstern sind. Indessen kann allerdings auch das Gegentheil zutreffen.

§. 34.

So z. E. haben wir vorhin (§. 31.) gesehen, daß die Gleichung

$$0 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$$

mit

$$0 = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

vier Gleichungen vom ersten Grade, aus denen man

$$A = -a$$
$$B = +aa - b$$
$$C = ab$$
$$D = bb$$

erhält. Da nun nach der zweyten Absicht

$$\alpha = C + aB + bA$$
$$\beta = bD$$

ist, so erhält man hiedurch die gesuchte Gleichung

$$0 = z^2 - 3abz + b^3 + a^3 ..$$

deren Wurzeln die Cubi der Wurzeln von

$$0 = x^2 + ax + b$$

sind.

§. 37.

Es sey z. E.

$$0 = x^2 - 10x + 9$$

eine Gleichung, deren Wurzeln offenbar 1 und 9 sind; so ist

$$a = -10$$
$$b = +9$$

demnach

$$a^3 - 3ab = -1000 + 270 = -730$$
$$b^3 = 729$$

und

$$0 = z^2 - 730z + 729$$

eine Gleichung deren Wurzeln wiederum offenbar 1 und 729, folglich die Cubi von 1 und 9 sind.

§. 38.

§. 38.

Um noch ein Beyspiel anzubringen, so sey die cubische Gleichung

$$0 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

und diese solle in eine andere

$$0 = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

verwandelt werden, so, daß die Wurzeln der letztern die Cubi der Wurzeln der erstern seyn. Da nun hier $z = x^3$ ist, so verwandelt sich die letztere Gleichung in

$$0 = x^9 + \alpha x^6 + \beta x^3 + \gamma.$$

Da diese vom neunten Grade ist, so muß die fürgegebene

$$0 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

mit einem Factor oder Gleichung vom sechsten Grade

$$\begin{aligned} 0 = x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 \\ + Ex + F \end{aligned}$$

multiplicirt, und in dem Producte

$$\begin{array}{lllllllll} 0 = x^9 & + Ax^8 & + Bx^7 & + Cx^6 & + Dx^5 & + Ex^4 & + Fx^3 & & \\ & + a\,.. & + aA\,.. & + aB\,.. & + aC\,.. & + aD\,.. & + aE\,.. & + aFx^2 & \\ & & + b\,.. & + bA\,.. & + bB\,.. & + bC\,.. & + bD\,.. & + bE\,.. & + bFx \\ & & & + c\,.. & + cA\,.. & + cB\,.. & + cC\,.. & + cD\,.. & + cE\,.. + cF \end{array}$$

das 2, 3, 5, 6, 8, 9te Glied = 0 gesetzt werden, um die Coefficienten A, B, C, D, E, F zu bestimmen, und sodann die übrigen Glieder

$$\begin{array}{llll} 0 = x^9 + & Cx^6 & + Fx^3 & + cF \\ & + aB\,.. & + aE\,.. & \\ & + bA\,.. & + bD\,.. & \\ & + C\,.. & + cC\,.. & \end{array}$$

mit

$$o = x^9 + \alpha x^6 + \beta x^3 + \gamma$$

zu vergleichen. Wir haben demnach

$$o = A + a$$
$$o = B + aA + b$$
$$o = D + aC + bB + cA$$
$$o = E + aD + bC + cB$$
$$o = aF + bE + cD$$
$$o = bF + cE$$

sechs Gleichungen vom ersten Grade, durch deren Auflösung man

$$A = -a$$
$$B = + aa - b$$
$$C = + 2c - ab$$
$$D = + bb - ac$$
$$E = - cb$$
$$F = + cc$$

findet. Da nun ferner

$$\alpha = C + aB + bA + c$$
$$\beta = F + aE + bD + cC$$
$$\gamma = cF$$

ist, so haben wir nur noch die gefundenen Werthe von A, B, C, D, E, F in diesen drey Gleichungen zu setzen, um die Coefficienten α, β, γ der gesuchten Gleichung

$$o = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

zu bestimmen, welche demnach folgende

$$\begin{aligned} o = z^3 + 3cz^2 &+ 3ccz + c^3 \\ -3ab\,.. &- 3abc\,.. \\ + a^3\,.. &+ b^3\,.. \end{aligned}$$

seyn

seyn wird. Die Wurzeln dieser Gleichung sind demnach die Cubi der Wurzeln von der fürgegebenen

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

§. 39.

Es sey z. E. die Gleichung

$$o = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$$

deren Wurzeln 1, 2, 4 sind, so ist

$$a = -7$$
$$b = +14$$
$$c = -8$$

demnach

$$3c - 3ab + a^3 = -73$$
$$3cc - 3abc + b^3 = +584$$
$$c^3 = -512$$

folglich die gesuchte Gleichung

$$o = z^3 - 73z^2 + 584z - 512$$

deren Wurzeln 1, 8, 64, oder die Cubi von den Wurzeln 1, 2, 4 sind.

§. 40.

Wenn in der fürgegebenen Gleichung das zweyte Glied $= o$, oder die Gleichung

$$o = x^3 + bx + c$$

ist, so ist auch in der gefundenen Gleichung $a = o$, und dieses macht dieselbe um ein merkliches einfacher, weil sie sodann schlechthin nur

$$o = z^3 + 3cz^2 + 3ccz + c^3$$
$$ + b^3z$$

ist,

ist, und sich daher in

$$o=(z+c)^3+b^3z$$

verwandelt, welches, weil $z=x^3$ ist,

$$o=z+c+bx$$

und daher die Gleichung

$$o=x^3+c+bx,$$

oder $\qquad o=x^3+bx+c$

wieder herfürbringt.

§. 41.

Da wir hier

$$z=x^3$$

haben, so ist

$$o=x^3-z.$$

Diese Gleichung hat ausser der Wurzel

$$o=x-\sqrt[3]{z}$$

noch zwo andere

$$o=x+\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{z}.(1\pm\sqrt{-3})$$

welche folglich ebenfalls Wurzeln der Gleichung

$$o=x^9+\alpha x^6+\beta x^3+\gamma$$

sind. Da nun diese Gleichung durch die Multiplication der beyden Gleichungen

$$o=x^3+ax^2+bx+c$$

$$o=x^6+Ax^5+Bx^4+Cx^3+Dx^2+Ex+F$$

heraus gebracht worden, und die Wurzeln der erstern dieser Gleichungen

$$o=x-\sqrt[3]{z}$$

sind, so sind die Wurzeln der leztern Gleichung nothwendig

o=

$$0 = x + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{z}.\,(1 \pm \sqrt{-3}).$$

Wenn demnach entweder die Gleichung

$$0 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

oder die Gleichung

$$0 = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

aufgelöst worden, so ist ebenfalls die Gleichung

$$0 = x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$

oder, wenn wir für die Coefficienten ihre Werthe setzen,

$$0 = x^6 - ax^5 + aax^4 + 2cx^3 + bbx^4 - cbx + cc$$
$$- bx^4 - abx^3 - acx^4$$

so gut als aufgelöst. Man hat sich aber darüber nicht zu verwundern: denn die Coefficienten dieser Gleichung werden sämtlich durch a, b, c bestimmt. Daher kann man nur drey, oder wenn man auch $x = v + k$, oder $x = x : k$ setzt, nur vier derselben willkührlich bestimmen. Die übrigen sind sodann durch diese zugleich mit bestimmt.

§. 42.

Wir können hier, ehe wir uns zu der Umkehrung dieser Aufgabe wenden, theils noch einer andern Methode Erwähnung thun, theils noch folgenden Lehrsatz anführen, welcher aus der bisher gebrauchten Methode fließt, und überhaupt so viel sagen will: wenn eine Gleichung

$$0 = x^{mn} + \alpha x^{(m-1)n} + \beta x^{(m-2)n} + \gamma x^{(m-3)n}$$
$$+ \text{etc.}$$

durch

durch die Gleichung

$$o = x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + c x^{m-3} + \text{rc.}$$

getheilt werden kann, und in ersterer $x^n = z$ gesetzt wird, so sind die Wurzeln der Gleichung

$$o = z^m + \alpha z^{m-1} + \beta x^{m-2} + \gamma z^{m-3} + \text{rc.}$$

die n^{te} Dignität der Gleichung

$$o = x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + c x^{m-3} + \text{rc.}$$

§. 43.

Die andere Methode, deren wir hier nur Erwähnung thun werden, gründet sich auf den Newtonschen Satz, welcher angiebt, wie man, vermittelst der Coefficienten einer Gleichung, nicht nur die Summe der Wurzeln, sondern auch die Summe von jeden Dignitäten derselben finden könne. Diese Summen werden durch $\int x$, $\int x^2$, $\int x^3$, $\int x^4$ rc. angezeigt, so, daß $\int x^n$ die Summe der n^{ten} Dignität aller Wurzeln der Gleichung anzeige. Die Gleichung sey

$$o = x^m - a x^{m-1} + b x^{m-2} - c x^{m-3} + \text{rc.}$$

so ist

$$\int x = a$$
$$\int x^2 = a\int x - 2b$$
$$\int x^3 = a\int x^2 - b\int x + 3c$$
$$\int x^4 = a\int x^3 - b\int x^2 + c\int x - 4d$$

&c.

Ferners, indem man $z = x^n$ setzt, sey wiederum die Gleichung

$$o = z^m - \alpha z^{m-1} + \beta z^{m-2} - \gamma z^{m-3} + \text{rc.}$$

so

so ist ebenfalls

$$\int z = \alpha$$
$$\int z^2 = \alpha \int z - 2\beta$$
$$\int z^3 = \alpha \int z^2 - \beta \int z + 3\gamma$$
$$\int z^4 = \alpha \int z^3 - \beta \int z^2 + \gamma \int z - 4\delta$$
&c.

Da nun vermöge der Voraussetzung $z = x^n$ ist, so ist

$$\int z = \int x^n$$
$$\int z^2 = \int x^{2n}$$
$$\int z^3 = \int z^{3n}$$
&c.

Nun sind vermöge der erstern Gleichungen $\int x^n$, $\int x^{2n}$, $\int x^{3n}$ &c. durch a, b, c, d &c. gegeben, demnach hat man $\int z$, $\int z^2$, $\int z^3$ &c. und folglich lassen sich durch die letztern Gleichungen die Coefficienten α, β, γ, δ &c. und damit die Gleichung

$$0 = z^m - \alpha z^{m-1} + \beta z^{m-2} - \text{\&c.}$$

finden, deren Wurzeln die n^{te} Dignität von den Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^m - a x^{m-1} + b x^{m-2} - \text{\&c.}$$

seyn werden. Man sieht, ohne mein Erinnern, daß man dieses Verfahren weiter ausdehnen, und z. E.

$$\int z = \int x^n + A \int x^p + B \int x^q + \text{\&c.}$$
$$\int z^2 = \int x^{2n} + A^2 \int x^{2p} + B^2 \int x^{2q} + \text{\&c.}$$
&c.

setzen kann.

§. 44.

§. 44.

Um nun auf die Umkehrung dieser Aufgaben zu kommen, so werden wir zu dem Beyspiele des §. 36. zurücke kehren. Wir haben daselbst gesehen, daß wenn die Quadratgleichung

$$o = x^2 + ax + b$$

in

$$o = z^2 - 3abz + b^3 \\ + a^3 z$$

verwandelt wird, sodann die Wurzeln dieser letztern Gleichung Cubi von den Wurzeln der erstern sind. Es sey nun eine Quadratgleichung

$$o = z^2 + Az + B$$

gegeben, und diese solle in eine andere dergestalt verwandelt werden, daß dieser letztern Wurzeln Cubicwurzeln von denen der fürgegebenen Gleichung sind. Um dieses zu erhalten, so wird die Gleichung

$$o = z^2 + Az + B$$

mit

$$o = z^2 - 3abz + b^3 \\ + a^3 z$$

verglichen, um die Coefficienten a, b durch A und B zu bestimmen. Wir haben demnach

$$A = a^3 - 3ab$$
$$B = b^3$$

dieses giebt

$$b = \sqrt[3]{B}$$

und $o = a^3 - 3a\sqrt[3]{B} - A.$

welches

welches eine cubische Gleichung ist, durch deren Auflösung man a findet. Die gesuchte Gleichung ist sodann

$$0 = x^2 + ax + b.$$

Man sieht leicht, daß sowohl b als a drey Werthe hat, und daß man daher anstatt einer Gleichung neune findet, die der Aufgabe Genügen leisten.

§. 45.

Wir werden uns aber damit nicht aufhalten, sondern diese an sich schon umgekehrte Aufgabe noch auf eine andere Art umkehren. Es kann nemlich die letzte Gleichung

$$0 = a^3 - 3a\sqrt[3]{B} - A$$

mit jeder Cubicgleichung

$$0 = a^3 + pa + q$$

deren zweytes Glied mangelt, verglichen werden. Thut man dieses, so erhält man

$$A = -q$$
$$B = -\tfrac{1}{27}p^3$$

Da nun

$$0 = z^2 + Az + B$$

ist, so darf man nur die gefundenen Werthe von A, B in dieser Gleichung setzen, um

$$0 = z^2 - qz - \tfrac{1}{27}p^3$$

zu erhalten. Diese Gleichung aufgelöst, giebt die zwo Wurzeln

$$z = \tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}.$$

Nun ist $\qquad z = x^3$

demnach haben wir die zwo Wurzeln

$$x = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)})}$$

Nun ist vermöge der Gleichung

$$o = x^2 + ax + b$$

$-a$ die Summe der beyden Wurzeln x, demnach haben wir

$$-a = \sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]} + \sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$

welches die bekannte Cardanische Formel ist, die man nach den bisherigen Methoden, die Gleichung

$$o = a^3 + pa + q$$

aufzulösen, findet. Man sieht zugleich, daß die beyden Glieder, aus denen sie besteht, Cubicwurzeln von den Wurzeln der Gleichung $o = z^2 - qz - \tfrac{1}{27}p^3$ sind.

§. 46.

Um das Beyspiel des §. 38. ebenfalls noch umzukehren; so haben wir daselbst gesehen, daß wenn man jede cubische Gleichung

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

in

$$\begin{aligned} o = z^3 &+ 3cz^2 + 3ccz + c^3 \\ &- 3ab.. - 3abc... \\ &+ a^3.. + b^3.. \end{aligned}$$

verwandelt, sodann die Wurzeln dieser letztern Gleichung Cubi von den Wurzeln der erstern sind. Ist nun von diesen Gleichungen die letztere

tere gegeben, so, daß man

$$0 = z^3 + Az^2 + Bz + C^3$$

hat, so läßt sich die erstere finden, und derselben Wurzeln werden sodann Cubicwurzeln der Wurzeln der fürgegebenen Gleichung seyn. Zu diesem Ende haben wir

$$A = 3c - 3ab + a^3$$
$$B = 3cc - 3abc + b^3$$
$$C^3 = c^3$$

und hieraus findet sich für a folgende Gleichung

$$0 = a^9 + 3(3C - A)a^6 + 3(3C - A)^2 . a^3 + (3C - A)^3$$
$$- \quad 27 C . a^6 - (B - AC) . a^3$$

eine Gleichung vom neunten Grade, welche aber in eine cubische verwandelt wird, wenn man $a^3 = v$ setzt. Ist a durch die Auflösung dieser Gleichung gefunden, so hat man

$$b = \frac{3C - A + a^3}{3a}$$

und damit die Gleichung, die zu suchen war,

$$0 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

welche aber, weil A 9 Werthe, C aber 3 hat, auf 27 Arten verändert werden kann. Man sieht überhaupt aus diesen Beyspielen, daß man auf desto weitläuftigere Formeln verfällt, je höher die Dignitäten und Gleichungen sind, die man in einander zu verwandeln vornimmt.

§. 47.

Indessen wird es nicht undienlich seyn, hier noch anzuzeigen, daß sich die bisher gebrauchte

Methode ebenfalls auf andere Functionen der Wurzeln ausdehnen läßt. Man habe z. E. die Gleichung

$$0 = x^2 + ax + b$$

und diese solle in eine andere

$$0 = z^2 + \alpha z + \beta$$

verwandelt werden, so, daß jede Wurzel der letztern eine Function der Wurzeln der erstern sey, die wir durch

$$z = x^2 + mx + n$$

ausdrücken wollen. Um dieses zu erhalten, so setze man erstlich diesen Werth von z in der zweyten Gleichung. Nun ist

$$\begin{array}{lr} z^2 = x^4 + 2mx^3 + 2nx^2 & \\ & + m^2x^2 + 2mnx + n^2 \\ + \alpha z = & + \alpha x^2 + m\alpha x + n\alpha \\ + \beta = & + \beta \end{array}$$

Da diese Gleichung vom vierten Grade ist, so muß die erstere

$$0 = x^2 + ax + b$$

mit

$$0 = x^2 + Ax + B$$

multipliciret werden, um ebenfalls ein Product vom vierten Grade

$$\begin{array}{rl} 0 = x^4 + ax^3 + bx^2 & \\ + Ax^3 + Aax^2 + Abx & \\ + Bx^2 + Bax + Bb & \end{array}$$

zu haben. Vergleicht man nun die Coefficienten, so haben wir

$$2m = A + a$$
$$2n + \alpha + mm = b + Aa + B$$
$$2mn + m\alpha = Ab + Ba$$
$$n^2 + n\alpha + \beta = Bb$$

vier Gleichungen, durch welche sich α, β, A, B bestimmen lassen. Werden demnach diese aufgelöst, so findet sich

$$A = 2m - a$$
$$B = m^2 + b - ma$$
$$\alpha = ma - aa + 2b - 2n$$
$$\beta = bm^2 + bb - mba + n^2 - nma + na^2 - 2nb$$

und dadurch ist die Gleichung

$$0 = z^2 + az + \beta$$

welche zu suchen war, bestimmt.

§. 48.

Es sey z. E. die Gleichung

$$0 = x^2 - 10x + 16$$

in eine solche

$$0 = z^2 + \alpha z + \beta$$

zu verwandeln, so, daß die Wurzeln der letztern eine Function

$$z = x^2 + 3x + 2$$

der Wurzeln der erstern seyn. Hier haben wir demnach

$$a = -10 \qquad m = +3$$
$$b = +16 \qquad n = +2$$

und hieraus finden sich die Werthe

$$A = +16 \qquad \alpha = -102$$
$$B = +55 \qquad \beta = +1080$$

demnach die gesuchte Gleichung

$$0 = z^2 - 102z + 1080.$$

Die Probe ist leicht gemacht. Denn die Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^2 - 10x + 16$$

sind $+2$ und $+8$. Wird jede derselben in der Function

$$z = x^2 + 3x + 2$$

gesetzt, so erhält man die beyden Werthe $z = 12$ und $z = 90$. Und eben dieses sind auch die Wurzeln der für z gefundenen Gleichung

$$0 = z^2 - 102z + 1080.$$

§. 49.

Will man diese Aufgabe umkehren, und aus der Gleichung

$$0 = z^2 + \alpha z + \beta$$

die Gleichung

$$0 = x^2 + ax + b$$

finden, so müssen a, b durch α, β vermittelst der Gleichungen

$$\alpha = ma - aa + 2b - 2n$$

$$\beta = bm^2 + bb - mba + n^2 - nma + na^2 - 2nb$$

bestimmt werden. Man verfällt dadurch auf eine Gleichung vom vierten Grade, welche etwas weitläuftig ist. Ich werde sie nicht hersetzen, weil es hier bey der angezeigten Möglichkeit der Aufgabe sein bewenden haben kann.

§. 50.

§. 50.

Es läßt sich aber die Aufgabe noch auf eine andere Art umkehren. Man kann nehmlich die Function

$$z = x^2 + mx + n$$

und in derselben besonders die beyden Coefficienten m, n zum Quæsito machen, und da wird der hiebey vorkommende Fall am schicklichsten in Form eines Satzes und einer Aufgabe zugleich vorgetragen. Der Satz ist folgender: **Wenn zwo Quadratgleichungen**

$$0 = x^2 + ax + b$$
$$0 = z^2 + \alpha z + \beta$$

gegeben, so läßt sich, und zwar ohne die Gleichungen vorerst aufzulösen, die Wurzel der einen z als eine Function der Wurzel der andern ansehen, welche die rationale Form

$$z = x^2 + mx + n$$

hat. Die Aufgabe ist nun: die Coefficienten m, n zu bestimmen. Der Beweis und zugleich die Auflösung kömmt auf die (§. 47.) gefundene vier Gleichungen

$$2m = A + a$$
$$2n + \alpha + mm = b + Aa + B$$
$$2mn + m\alpha = Ab + Ba$$
$$nn + n\alpha + \beta = Bb$$

an. Werden aus diesen die beyden Grössen A, B, die wir nur, um die Aufgabe möglich zu machen, gebraucht haben, weggeschaft, so bleiben noch zwo Gleichungen für m und n, durch deren Auflösung

$$m = a \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha\alpha - 4\beta}{aa - 4b}\right)}$$

$$n = b - \tfrac{1}{2}\alpha \pm \tfrac{1}{2} a \sqrt{\left(\frac{\alpha\alpha - 4\beta}{aa - 4b}\right)}$$

gefunden, und damit die gesuchte Function

$$z = x^2 + mx + n$$

zugleich bestimmt wird.

§. 51.

Man setze z. E. wie vorhin die zwo Gleichungen

$$0 = x^2 - 10x + 16.$$
$$0 = z^2 - 102x + 1080.$$

so ist

$$a = -10 \qquad \alpha = -102$$
$$b = +16 \qquad \beta = +1080$$

Hieraus erhält man

$$\sqrt{(\alpha\alpha - 4\beta)} = \sqrt{6084} = 78$$
$$\sqrt{(aa - 4b)} = \sqrt{36} = 6$$

demnach $m = -10 \pm 13$

$n = 16 + 51 \mp 65$

dieses giebt

den einen Werth von $m = +3$.
den correspondirenden von $n = +2$.
den andern Werth von $m = -23$.
den correspondirenden von $n = +132$.

demnach die beyden Functionen

z =

$z = xx + 3x + 2.$
$z = xx - 23x + 132.$

Setzt man in jeder dieser Functionen die Werthe von x, welche 2 und 8 sind, so giebt jede die zween Werthe von z, nemlich 12 und 90. Demnach hat man die Wahl, welche von diesen Functionen man gebrauchen will. Solte man aber nur eine Wurzel von x wissen oder haben, oder dieselbe lieber gebrauchen wollen, so muß man sie in jeder von diesen zwo Functionen setzen, um die beyden Werthe von z zu erhalten.

§. 52.

Endlich kann die Aufgabe, wiewohl auf eine unbestimmtere Art, noch dergestalt umgekehrt werden, daß, wenn nur die Function

$z = xx + mx + n$

gegeben, zwo Gleichungen

$o = xx + ax + b$
$o = zz + \alpha z + \beta$

zu finden seyn, deren die erste x, die andere z besonders enthalte. Diese Aufgabe ist an sich unbestimmt, und dient daher fürnemlich nur, wenn in der fürgegebenen Function z und x als veränderlich angesehen werden. Denn hier sind die vier Coefficienten a, b, α, β vermittelst der vier Gleichungen

$2m = A + a$
$2n + \alpha + mm = b + Aa + B$
$2mn + m\alpha = Ab + Ba$
$n^2 + n\alpha + \beta = Bb$

zu suchen; demnach müssen A, B, als willkührliche Grössen beybehalten werden, und man findet

$$a = 2m - A$$
$$b = B - mA + mm$$
$$\alpha = AA + mA + 2B - 2n$$
$$\beta = BB - mAB + m^2B + n^2 - mnA - 2nB + nAA.$$

Da nun nur m und n gegeben sind, so können A, B willkührlich angenommen werden, und die Gleichungen

$$o = xx + ax + b$$
$$o = zz + \alpha z + \beta$$

werden immer der Function

$$z = xx + mx + n$$

ein Genügen thun; das will sagen, man wird aus der ersten dieser Gleichungen zwo Wurzeln x finden, welche den aus der zweyten gefundenen Wurzeln z entsprechen, und dieses geht nicht nur durch alle mögliche, sondern auch durch alle unmögliche Werthe von x und z.

§. 53.

Was bisher (§. 47. seqq.) von den Verhältnissen der beyden Quadratgleichungen

$$o = x^2 + ax + b$$
$$o = z^2 + \alpha z + \beta$$

und der Function

$$z = x^2 + mx + n$$

gesagt worden, ist in Absicht auf die dabey gebrauchte

gebrauchte Methode viel allgemeiner, weil es sich auf jede Gleichungen und rationale Functionen erstreckt. Alles dabey zielet überhaupt dahin, daß man mit den **Wurzeln der Gleichungen, ohne diese vorerst aufzulösen, jede Veränderungen vornehmen könne.** Und in diesem Stücke ist man in der Algebra noch zurücke geblieben, wie man es schon aus den bisher angeführten Beyspielen ersehen kann, welche ungleich weiter gehen, als wenn man nur $x+a$, $x-a$, ax, $x:a$ anstatt der Wurzel x setzt. Indessen hat man besonders mit den trigonometrischen Formeln Verwandlungen vorgenommen, welche denen, die wie hier für jede Gleichungen vorschlagen, sehr ähnlich sind, und an sich betrachtet, schwerer zu seyn scheinen, weil die Circulbögen, in Absicht auf die Sinus und Tangenten, transcendente Grössen sind.

§. 54.

Um aber dennoch auch, in Absicht auf jede Gleichungen, hierin den Weg gebähnt zu machen, so werden wir bey folgender Aufgabe anfangen. **Es seyn zwo Gleichungen**

$$0 = x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{etc.}$$

$$0 = y^n - \alpha x^{n-1} + \varepsilon y^{n-2} - \gamma y^{n-3} + \text{etc.}$$

gegeben, und es solle, ohne diese vorerst aufzulösen, eine dritte Gleichung

$$0 = z^\lambda - Az^{\lambda-1} + Bz^{\lambda-2} - Cz^{\lambda-3} + \text{etc.}$$

daraus hergeleitet werden, so, daß jede Wur-

Wurzel z die Summe zwoer Wurzeln $x+y$ sey.

§. 55.

Ehe wir die Auflösung dieser Aufgabe hersetzen, werden wir einige Anmerkungen darüber voraus schicken. Einmal sieht man leicht, daß, wenn auch die Analysis so weit gebracht wäre, daß man die beyden ersten Gleichungen auflösen könnte, die dritte dennoch nicht wohl anders als durch eine weitläuftige Rechnung daraus würde hergeleitet werden, besonders in allen den Fällen, wo die Wurzeln irrational wären. Denn da würden nachgehends, wie wir bald sehen werden, diese irrationalen Grössen sämtlich wieder aus der Rechnung wegfallen, weil, wenn die Coefficienten a, b, c, d &c. α, β, γ, δ &c. rational sind, die Coefficienten A, B, C, D &c. es nothwendig auch sind.

§. 56.

Sodann tragen wir hier die Aufgabe aufs allgemeinste vor. Wir nehmen in der dritten Gleichung so viele Wurzeln z an, als heraus kommen müssen, wenn jede Wurzel x zu jeder Wurzel y besonders addirt wird. Wenn demnach die Anzahl der Wurzeln der ersten Gleichung $=$ m, der andern $=$ n ist, so ist die Anzahl der Wurzeln, so die dritte Gleichung haben wird $=$ m n, und dieses bestimmt den Exponenten $\lambda =$ m n. Diese Anzahl kann alsdann vermindert werden, wenn in der ersten oder andern Gleichung, oder auch in beyden, etliche Wurzeln gleich sind. Man muß dieses aber voraus wissen, oder aus den Umständen schliessen können. Wir setzen hier alle Wurzeln ungleich, und um eine Einförmigkeit in der Rechnung beyzubehalten, alle positiv, weil, wenn in besondern Fällen einige, oder alle negativ sind, die Aenderung der Zeichen sich darnach einrichten läßt.

§. 57.

Diese so absolute Allgemeinheit trägt viel dazu bey, daß wir die Auflösung der Aufgabe einfacher machen, und auf ihre allgemeinste Gesetze bringen können. Und dazu werden uns die oben (§. 43.) angeführten Formeln von der Summe der Dignitäten der Wurzeln jeder Gleichung dienen können. Denn da hier die Coefficienten der beyden ersten Gleichungen gegeben sind, so sind, vermittelst dieser Formeln, auch die Summen von jeden Dignitäten ihrer Wurzeln gegeben. Es ist demnach nur die Frage, wie aus diesen Summen die Summen jeder Dignitäten der Wurzeln der dritten Gleichung gefunden werden können; das will sagen, wie sich aus $\int x^n$ und $\int y^n$ die Summe $\int (x+y)^n = \int z^n$ herleiten lasse. Denn sind diese gefunden, so dienen die vorbemeldeten Formeln (§. 43.) ebenfalls wiederum, um die gesuchten Coefficienten A, B, C &c. daraus zu bestimmen.

§. 58.

Man setze zu diesem Ende, P, Q, R &c. seyn die Wurzeln der ersten Gleichung; p, q, r &c. die Wurzeln der zweyten; so werden

$P+p$	$Q+p$	$R+p$	&c.
$P+q$	$Q+q$	$R+q$	
$P+r$	$Q+r$	$R+r$	
&c.	&c.	&c.	

die Wurzeln der dritten seyn. Nun findet sich jede Dignität k dieser Wurzeln, vermittelst des *Newtonschen* Binomialsatzes. Es ist nemlich

$$(P+p)^k = P^k + k.P^{k-1}p + k.\frac{k-1}{2}.P^{k-2}p^2 + \&c.\ldots + p^k$$

$$(Q+p)^k = Q^k + k.Q^{k-1}p + k.\frac{k-1}{2}.Q^{k-2}p^2 + \&c.\ldots + p^k$$

$$(R+p)^k = R^k + k.R^{k-1}p + k.\frac{k-1}{2}.R^{k-2}p^2 + \&c.\ldots + p^k$$

&c.

Da man eben so viele Reihen für q, r, s &c. findet, als für p; so erhellt überhaupt hieraus folgendes:

1°. Wenn alle diese Dignitäten zusammen addirt werden, so erhält man so viele

P^k, Q^k, R^k &c.

als Wurzeln p, q, r &c. sind. Da nun die Anzahl dieser Wurzeln $= n$ ist, so ist die Summe von allen

$= n$

$= n(P^k + Q^k + R^k + \&c.) = n\int x^k$.

2°. Auf gleiche Art erhält man so viele p^k, q^k, r^k &c. als Wurzeln P, Q, R &c. sind. Demnach ist die Summe von allen

$= m(p^k + q^k + r^k + \&c.) = m\int y^k$.

3°. Dieses sind demnach die Summen der ersten und letzten Glieder aller Reihen. Die Summen der darauf folgenden ersten, zweyten, dritten... w^{ten} Glieder, lassen sich auf eine allgemeine Formel bringen. Denn da sie einerley Coefficienten haben, so sind die w^{ten} Glieder, mit Weglassung des Coefficienten,

$$P^{k-w}(p^w + q^w + r^w + \&c.)$$
$$Q^{k-w}(p^w + q^w + r^w + \&c.)$$
$$R^{k-w}(p^w + q^w + r^w + \&c.)$$
&c.

daher ihre Summe

$$= \int x^{k-w}. \int y^w.$$

4°. Wird demnach in dieser Formel, der Ordnung nach, für w, 1, 2, 3, 4 rc. gesetzt, so erhält man

$$\int(x+y)^k = \int z^k = n\int x^k + k\int x^{k-1}. \int y + k.\frac{k-1}{2}.\int x^{k-2}\int y^2 + k.\frac{k-1}{2}.\frac{k-2}{3}.\int x^{k-3}.\int y^3 + \&c.$$

welches die gesuchte Formel ist.

§. 59.

§. 59.

Diese Formel scheint in dem ersten und letzten Gliede einen besondern Coefficienten zu haben. Es läßt sich aber derselbe auch dadurch herleiten, daß

$$n = \int y^0$$
$$m = \int x^0$$

ist. Denn $\int y^0$ will sagen, so viele Einheiten als die zweyte Gleichung Wurzeln hat, und $\int x^0$ so viele Einheiten, als Wurzeln der ersten Gleichung sind. Und damit bringen diese beyde Coefficienten keine Anomalie in die Formel. Diese Formel ist übrigens der *Newtonschen* in allem ähnlich, und unterscheidet sich nur darin, daß, anstatt daß in der *Newtonschen*, um eine Dignität heraus zu bringen, nur Dignitäten mit einander multiplicirt werden, in dieser ganzen Summen von Dignitäten mit einander multiplicirt werden müssen, und dadurch aber auch eine Summe von Dignitäten heraus gebracht wird, deren jede ein Binomium ist.

§. 60.

Setzen wir nun in dieser Formel für k der Ordnung nach 1, 2, 3, 4, 5, 6 rc. und bemerken dabey, daß wo ein Exponent von x, $= 0$ wird, man $\int x^0 = m$ setzen müsse, so haben wir

$$\int z = n \int x + m \int y$$
$$\int z^2 = n \int x^2 + 2 \int x . \int y + m \int y^2$$
$$\int z^3 = n \int x^3 + 3 \int x^2 . \int y + 3 \int x . \int y^2 + m \int y^3$$
$$\int z^4 = n \int x^4 + 4 \int x^3 . \int y + 6 \int x^2 . \int y^2 + 4 \int x . \int y^3 + m \int y^4 \text{ \&c.}$$

§. 61.

§. 61.

Um nun dieses Verfahren durch das einfachste Beyspiel zu erläutern, so seyn zwo Quadratgleichungen

$$0 = x^2 - ax + b$$
$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

gegeben, und es solle eine Gleichung gefunden werden, deren Wurzeln $z = x + y$ sind. Diese Gleichung ist nun (§. 56.)

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

weil die Summe der Exponenten $n + m = 2 + 2 = 4 = \lambda$ ist. Nun ist vermöge der Formel des §. 43.

$\int x = a$	$\int y = \alpha$
$\int x^2 = a^2 - 2b$	$\int y^2 = \alpha^2 - 2\beta$
$\int x^3 = a^3 - 3ab$	$\int y^3 = \alpha^3 - 3\beta\alpha$
$\int x^4 = a^4 - 4a^2b + 2bb$	$\int y^4 = \alpha^4 - 4\beta\alpha^2 + 2\beta\beta$

folglich

$$\int z = 2(a + \alpha)$$
$$\int z^2 = 2a^2 - 4b + 2\alpha^2 - 4\beta + 2a\alpha$$
$$\int z^3 = 2a^3 - 6ab + 2\alpha^3 - 6\alpha\beta + 3\alpha a^2 - 6\alpha b + 3a\alpha^2 - 6a\beta$$
$$\int z^4 = 2a^4 - 8ab + 4bb + 2\alpha^4 - 8\alpha^2\beta + 4\beta\beta + 4a^3\alpha - 12ab\alpha + 4\alpha^3 a - 12\alpha\beta a + 6a^2\alpha^2 - 12a^2\beta - 12\alpha^2 b + 24b\beta$$

Da nun (§. 43.)

$$A = fz$$
$$2B = Afz - fz^2$$
$$3C = fz^3 - Afz^2 + Bfz$$
$$4D = Afz^3 - Bfz^2 + Cfz - fz^4$$

ist, so findet sich, wenn man die Werthe von fz, fz^2, fz^3, fz^4 in diesen Formeln setzt, und die Reduction vornimmt

$$A = 2(a + \alpha)$$
$$B = (a + \alpha)^2 + (a\alpha + 2b + 2\beta)$$
$$C = (a\alpha + 2b + 2\beta).(a + \alpha)$$
$$D = (a\beta + \alpha b).(a + \alpha) + (\beta - b)^2$$

und damit ist die gesuchte Gleichung

$$o = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

bestimmt, und gefunden, deren Wurzeln z die Summe $x + y$ der Wurzeln der Gleichungen

$$o = x^2 - ax + b$$
$$o = y^2 - \alpha x + \beta$$

sind.

§. 62.

Will man anstatt $z = x + y$, die Differenz $z = x - y$ haben, so darf man nur in der zweyten Gleichung α negativ nehmen, weil dieses die Wurzeln y verneinend macht.

§. 63.

Solle aber

$$z = \pi x + \varrho y$$

seyn; so müssen beyde Gleichungen vorerst in solche verwandelt werden, deren Wurzeln

$\xi =$

$\xi = \pi x$, und $\eta = \varrho y$ sind. Man wird demnach

$$o = \xi^2 - a\pi\xi + b\pi^2$$
$$o = \eta^2 - \alpha\varrho\eta + \beta\varrho^2$$

haben, und in den vier Gleichungen, wodurch A, B, C, D bestimmt worden, $a\pi$ anstatt a, und $\alpha\varrho$ anstatt α setzen müssen, um die gesuchte Gleichung

$$o = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

heraus zu bringen.

§. 64.

Solle aber

$$z = \pi x^2 + \varrho y^3 + \tau$$

seyn, so müssen einige Verwandlungen mehr vorgehen. Man macht nemlich nach den oben gegebenen Methoden aus

$$o = x^2 - ax + b$$

eine Gleichung

$$o = \xi^2 + 2b\xi + bb - aa\xi$$

deren Wurzeln $\xi = xx$, oder Quadrate von x sind. Sodann setzt man $\pi\,xx = \pi\,\xi = \zeta$, um dadurch

$$o = \zeta^2 + 2\pi b\zeta + bb\pi\pi - aa\pi\zeta$$

zu erhalten. Endlich setzt man $\zeta + \tau = v$, und so erhält man

$$
\begin{aligned}
0 = v^2 &- 2\tau v + \tau\tau \\
&+ 2\pi b v - 2\pi b\tau \\
&- aa\pi v + aa\pi\tau \\
&+ bb\pi\pi
\end{aligned}
$$

Ferners verwandelt man die zweyte Gleichung

$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

nach der oben angegebenen Methode (§. 36.) in

$$
\begin{aligned}
0 = \eta^2 &- 3\alpha\beta\eta + \beta^3 \\
&+ \alpha^3\eta
\end{aligned}
$$

deren Wurzeln $\eta = y^3$, oder Cubi von y sind. Sodann setzt man $\varrho\eta = \varrho y^3 = \sigma$, und erhält dadurch

$$
\begin{aligned}
0 = \sigma^2 &- 3\alpha\beta\varrho\sigma + \beta^3\varrho^2 \\
&+ \alpha^3\varrho\sigma
\end{aligned}
$$

Da man auf diese Art endlich $z = v + \sigma$ hat, so darf man nur in den 4 Gleichungen, wodurch A, B, C, D bestimmt werden (§. 60.)

$-2\tau + 2\pi b - aa\pi$ anstatt a

$\tau\tau - 2\pi b\tau + aa\pi\tau + b^2\pi^2$ anstatt b

und

$-3\alpha\beta\varrho + \alpha^3\varrho$ anstatt α

$\beta^3\varrho^2$ anstatt β

setzen, um dadurch die Gleichung

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

zu bestimmen, deren Wurzeln sodann

$$z = v + \sigma = \zeta + \tau + \sigma = \pi\xi + \tau + \varrho\eta = \pi x^2 + \tau + \varrho y^3$$

folglich

$$z = \pi x^2 + \varrho y^3 + \tau$$

seyn werden.

§. 65.

Man kann auf eine ähnliche Art

$$z = Mx^k + Nx^h + \&c. + Px^k + Qy^\lambda + \&c. + R$$

setzen, und die Gleichung

$$o = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

aus den beyden Gleichungen

$$o = x^2 - ax + b$$
$$o = y^2 - \alpha y + \beta$$

ohne diese vorerst aufzulösen, heraus bringen. Denn diese beyden Gleichungen lassen sich nach der Regel des §. 47 in zwo andere

$$o = \xi^2 - a'\xi + b'$$
$$o = \eta^2 - \alpha'\eta + \beta'$$

dergestalt verwandeln, daß

$$\xi = Mx^k + Nx^h + \&c. + R$$

und

$$\eta = Py^k + Qy^\lambda + \&c.$$

sey, und so hat man sodann

$$z = \xi + \eta.$$

wodurch sich die Coefficienten in der gesuchten Gleichung

$$o = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

bestimmen lassen.

§. 66.

Wir werden nun aber sehen, wie die Rechnung ausfällt, wenn z nicht die Summe $x + y$, sondern das Product xy ist. Es sey demnach wiederum, wie §. 54.

$$0 = x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{etc.}$$
$$0 = y^n - \alpha y^{n-1} + \beta y^{n-2} - \gamma y^{n-3} + \text{etc.}$$

so ist (§. 54. 56.)

$$0 = z^{mn} - Az^{mn-1} + Bz^{mn-2} - Cz^{mn-3} + \text{etc.}$$

Es seyn ebenfalls, wie (§. 58.) P, Q, R &c. die Wurzeln der ersten Gleichung, p, q, r &c. die Wurzeln der andern; so sind, weil $z = xy$ seyn solle, die Wurzeln der dritten

$$\begin{array}{lll} Pp & Qp & Rp \text{ \&c.} \\ Pq & Qq & Rq \\ Pr & Qr & Rr \\ \text{\&c.} & \text{\&c.} & \text{\&c.} \end{array}$$

Da dieses nun keine Binomia sind, so gebrauchen wir den *Newtonschen* Lehrsatz nicht, sondern es ist überhaupt

$$\begin{array}{llll} fz^k = & +P^k p^k + & Q^k p^k + & R^k p^k \text{ \&c.} \\ & +P^k q^k + & Q^k q^k + & R^k q^k \\ & +P^k r^k + & Q^k r^k + & R^k r^k \\ & \text{\&c.} & \text{\&c.} & \text{\&c.} \end{array}$$

das will sagen,

$$fz^k = fy^k (P^k + Q^k + R^k + \text{\&c.}) = fy^k . fx^k$$

folglich, wenn man der Ordnung nach $k = 1, 2, 3, 4$ etc. setzt,

$$\begin{array}{l} fz = fx . fy \\ fz^2 = fx^2 . fy^2 \\ fz^3 = fx^3 . fy^3 \\ \text{\&c.} \end{array}$$

und

und hieraus vermöge der Formeln des §. 43.

$$+\ A = \int x \int y$$
$$-2B = \int x^2 . \int y^2 - A \int x . \int y$$
$$+3C = \int x^3 . \int y^3 - A \int x^2 . \int y^2 + B \int x . \int y$$
$$-4D = \int x^4 . \int y^4 - A . \int x^3 . \int y^3 + B \int x^2 . \int y^2 - C \int x . \int y .$$

&c.

Da nun $\int x$, $\int x^2$, $\int x^3$ &c. $\int y$, $\int y^2$, $\int y^3$ &c. durch a, b, c &c. α, β, γ &c. gegeben sind, (§. 43.) so hat man vermittelst dieser Formeln auch A, B, C, D &c. und damit die gesuchte Gleichung

$$0 = z^{mn} - A z^{mn-1} + B z^{mn-2} - \text{\&c.}$$

deren Wurzeln $z = xy$ seyn werden. Man sieht zugleich aus diesem Beweise, daß

A durch a, α
B durch a, α, b, β
C durch a, α, b, β, c, γ
&c.

bestimmt wird, so viel auch die fürgegebenen beyden Gleichungen Glieder und Coefficienten haben mögen.

§. 67.

Ungeachtet übrigens die Beweise, so wir sowohl für $z = x + y$, als für $z = xy$ gegeben haben, bey ihrer Allgemeinheit noch sehr einfach sind, so verfällt man dennoch in weitläuftige Rechnungen, wenn man sie in besondern Fällen entwickeln, und die Coefficienten A, B, C, D &c. nicht durch $\int x$, $\int x^2$ &c. $\int y$, $\int y^2$ &c.

sondern durch a, b, c &c. α, β, γ &c. ausdrücken will, dafern diese nicht in Zahlen gegeben sind. Ich habe daher eine andere Methode gesucht, wodurch diese Weitläuftigkeit in besondern Fällen abgekürzt werden kann. Es seyn z. E. zwo Quadratgleichnungen

$$o = x^2 - ax + b$$

$$o = y^2 - \alpha y + \beta$$

gegeben, und eine dritte Gleichung

$$o = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

zu finden, so, daß $z = xy$ sey. Man setze

$$x = z : y$$

in die erste Gleichung

$$o = x^2 - ax + b$$

so verwandelt sich diese in

$$o = z^2 - azy + by^2$$

Nun giebt die zweyte Gleichung mit b multiplicirt

$$o = by^2 - \alpha by + \beta b$$

wird diese abgezogen, so bleibt

$$o = z^2 - b\beta + (\alpha b - az)y$$

demnach

$$y = (b\beta - z^2) : (\alpha b - az)$$

Dieser Werth von y in der Gleichung

$$o = y^2 - \alpha y + \beta$$

gesetzt, und die Reduction vorgenommen, giebt die gesuchte Gleichung

$$\begin{aligned} o = z^4 - a\alpha z^3 + a^2\beta z^2 &- a\alpha b\beta z + b^2\beta^2 \\ + \alpha^2 b\,.. & \\ - 2b\beta\,.. & \end{aligned}$$

deren Wurzeln $z = xy$ sind.

§. 68.

§. 68.

Solte aber z nicht das Product $x\,y$, sondern der Quotient $x:y$, oder ein Product aus $x^m\,y^n$ seyn, so gelangt man besser zum Ziele, wenn man vorerst die beyden Gleichungen

$$o = x^2 - ax + b$$
$$o = y^2 - \alpha y + \beta$$

in zwo andern Quadratgleichungen verwandelt, deren Wurzeln

$$\xi = x^m$$
$$\eta = y^n$$

sind, welches nach den oben angegebenen Methoden geschieht. Denn so erhält man

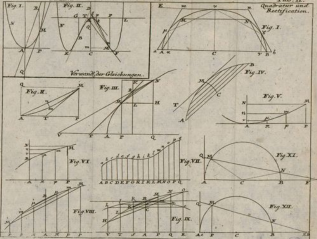
$$z = \xi\eta$$
$$o = \xi^2 - G\xi + H$$
$$o = \eta^2 - K\eta + L$$

und folglich die gesuchte Gleichung

$$\begin{aligned} o = z^4 - GKz^3 + G^2Lz^2 &- GHKLz + H^2L^2 \\ + K^2Hz^2 & \\ - 2HLz^2 & \end{aligned}$$

welche immer eine Biquadratgleichung seyn wird, so groß auch die Exponenten m, n seyn mögen.

Tab. II.



Quadratur und Rectification.
Fig. I.
Fig. II.
Verwandl. der Gleichungen.
Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. XI.
Fig. XII.

A