

IX.

Quadratur und Rectifica-
tion der krummen Linien durch
geradlinichte Vielecke, welche um die-
selben und in denselben beschrieben
werden können.

§. 1.

Tab. III. **A**rchimedes ist der erste gewesen, welcher
sich, da die Quadratur und Rectification
des Circuls nicht genau gefunden noch durch
Zahlen ausgedrucket werden konnte, in Sinn
kommen liesse, diese beyden Grössen, vermit-
telst der um den Circul und in denselben beschrie-
benen Vielecke dergestalt zu bestimmen, daß
er die Schranken angeben könnte, zwischen
welchen sie siele. Die durchaus gleichförmige
Krümmung des Circuls machte, daß man die
sogenannten regulären Vielecke dazu gebran-
chen konnte, bey welchen sich von einer Seite
auf den ganzen Umkreis schliessen liesse; und
einige geometrische Lehrsätze verhalfen dazu, daß
man durch fortgesetztes Halbiren aus jedem an-
genommenen Vielecke andere von 2, 4, 8, 16,
32 u. mal mehr Seiten berechnen konnte.

§. 2.

§. 2.

Diese Schieflichkeiten fallen bey jeden andern krummen Linien größtentheils weg. Es lassen sich zwar um und in denselben geradlinichte Vielecke beschreiben, dabey aber werden, wenn man die Seiten gleich macht, die Winkel ungleich, und hinviederum erhält man bey gleichen Winkeln ungleiche Seiten; dieses macht, daß sich nicht so unbedingt von jeder Seite auf den ganzen Umkreis des Vieleckes schließen läßt. Ueberdies läßt sich auch nicht so leicht bestimmen, wie wenn das Vieleck um die Linie gezogen oder angenommen worden, daß demselben entsprechende Vieleck in derselben müsse gezogen werden, weil sich, wenn man nicht zwei oder mehr Bedingungen zugleich annimmt, unzählige ziehen lassen, die sämtlich einander unähnlich sind. Hingegen ist bey dem Circul die Anzahl der Seiten, und die Bedingung, daß sie einander gleich seyn sollen völlig zureichend.

§. 3.

Da demnach bey der Ziehung der Vielecke um jede andere krumme Linien, die nicht Circul sind, viel willkürliches bleibt, so werden wir bey dem anfangen, was für sich am einfachsten, und besonders in der Ausübung am leichtesten ist. Und hier bieten sich sogleich zween Fälle an. Denn hat man nach beliebigen Regeln ein Vieleck in eine krumme Linie beschrie-

beschrieben, so ist unter allen Vielecken, die von gleichvielen Seiten um dasselbe beschrieben werden können, dasjenige das gleichförmigste und regulärste, dessen Seiten mit den Seiten des inner der krummen Linie gezogenen Parallelen sind. Die Regularität wird grösser und zu den vorhabenden Absichten bequemer, wenn man die Winkel gleich macht, welche jede zwei Seiten des Vieleckes mit einander machen.

§. 4.

Fig. I. So j. E. sey AMNB eine halbe Ellipse. Solte in und um dieselbe ein Sechseck beschrieben werden, so macht man den Winkel MAB = 60 Gr. und zieht AM. Sodann wird AMN = MNB = 120 Gr. gemacht, und MN, NB gezogen, so ist AMNB die Hälfte des Sechseckes in der Ellipse. Ferner zieht man die Tangente am, mn, nb mit AM, MN, NB parallel, und so ist amnb die Hälfte des Sechseckes um die Ellipse. Dieser Art die Vielecke in und um eine krumme Linie zu zeichnen, hat in Absicht auf die Ausübung etwas sehr leichtes und einfaches, weil sich dabey die Durchschnittspuncten M, N, B, m, n, b von selbst ergeben, und weil es sehr leicht ist, Tangenten an eine krumme Linie zu ziehen, welche mit der Chorde derselben parallel seyn.

§. 5.

Es verschwindet aber diese Leichtigkeit größtentheils, wenn man bey dem äussern Vielecke

ecke anfängt, und sodann das Innere nach demselben ziehen will, weil sich die Punkte A, M, N, B nicht eben so leicht durch die Punkten a, m, n, b bestimmen lassen. Mit der Bedingung, daß die innern Seiten den äußern parallel seyn sollen, reicht man nicht aus, weil sich unter dieser Bedingung unzählige Vielecke ziehen lassen, in dem man z. E. den Punct M auf dem ganzen Bogen $\mu \nu$, der zwischen den Berührungspuncten μ , ν liegt, annehmen kann, wo man will. Geht man aber von der Bedingung der parallelen Lage beyder Vielecke ab, so ist der einfachste und kenntlichste Fall derjenige, wo, nachdem das äussere Vieleck gezogen worden, das Innere in die Berührungspuncten μ , ν , ϵ falle. Auf diese Art stellt $a \mu \nu \epsilon \gamma$ die Hälfte des Sechsecks vor. Die Bestimmung der Berührungspuncte ist es nun, was hiebey die meiste Schwierigkeit verursacht. Hingegen hat diese letztere Art der Bezeichnung beyder Vielecke den Vortheil, daß sich dabey einzelne Stücke der krummen Linie, dergleichen $\mu M \nu$ ist, besonders betrachten, und mit dem Triangel $\mu m \nu$ vergleichen lassen. Ueberdies ist der Winkel $E m a$ das Maas der Krümmung des Bogens $\mu M \nu$, weil derselben in μ die Richtung μm , in ν die Richtung νm hat. Werden aus μ , ν parallele Ordinaten μa , νc auf AB gezogen, so findet sich

$$E m \mu = m \nu c - a \mu a.$$

Denn

256 IX. Quadratur u. Rectification

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + ex^6 + \dots$$

ausdrücken. Ich sage überhaupt und ohne Rücksicht auf gewisse Punkte einiger krummen Linien, wo statt ganzer Exponenten gebrochene zum Vorschein kommen, oder wo einige der ersten Glieder dieser Reihe $= 0$ werden. Man setze A wäre ein solcher Punkt, so darf man nur anstatt aus der Tangente A P die Abscissenlinie zu machen, die Abscissen auf M T nehmen, und man wird die Reihe

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \dots$$

immer ganz erhalten. In dieser Reihe bleiben nemlich die beyden ersten Glieder, welche sonst

$$A + Bx$$

seyn würden, weg, weil y zugleich mit $x = 0$ wird, und weil Bx nur vorkommt, wo die Abscissenlinie die krumme Linie unter einem Winkel schneidet, deren Tangente $= B$ ist.

§. 2.

Wenn wir demnach die Reihe

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \dots$$

als die allgemeinste Gleichung zwischen y und x annehmen, so ist

$$dy = dx(2ax + 3bx^2 + 4cx^3 + 5dx^4 + \dots)$$

Werden nun diese Werthe in den erst gefundenen Reihen (§. 7.) gesetzt, und die für den Bogen AM angezeigten Integrationen vorgenommen,

$$\begin{aligned} \text{men, so erhält man den Bogen } AM &= x + \\ \frac{2}{3} a^2 x^3 + \frac{3}{2} a b x^4 + \frac{5}{8} a c x^5 + \frac{5}{2} a d x^6 + \frac{17}{8} a e x^7 + \kappa. \\ &+ \frac{1}{8} b b \dots + \frac{1}{2} b c \dots + \frac{1}{8} b d \dots \\ &- \frac{2}{3} a^4 \dots - 2 a^3 b \dots + \frac{1}{8} c c \dots \\ &- \frac{1}{8} a^3 c \dots \\ &- \frac{2}{7} a^2 b^2 \dots \\ &+ \frac{1}{4} a^6 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{die Chorde } AM &= x + \\ \frac{1}{2} a^2 x^3 + a b x^4 + a c x^5 + a d x^6 + a e x^7 + \kappa. \\ &+ \frac{1}{2} b b \dots + b c \dots + b d \dots \\ &- \frac{1}{8} a^4 \dots - \frac{1}{2} a^3 b \dots + \frac{1}{8} c c \dots \\ &- \frac{1}{8} a^3 c \dots \\ &- \frac{1}{2} b^2 a^2 \dots \\ &+ \frac{1}{8} a^6 \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ferner die Summe der Tangenten } AT + TM &= \\ x + a^2 x^3 + \frac{5}{2} a b x^4 + 3 a c x^5 + \frac{7}{2} a d x^6 + 4 a e x^7 \\ &- a^4 \dots - \frac{1}{2} a^3 b \dots - 7 a^3 c \dots \\ &+ \frac{3}{2} b^2 \dots + \frac{1}{2} b c \dots - \frac{4}{3} a^2 b^2 \dots \\ &+ 4 b d \dots \\ &+ 2 c c \dots \\ &+ 2 a^6 \dots \end{aligned}$$

§. 10.

Vergleicht man nun diese drey Reihen mit einander, so finden sich die Coefficienten a, b, c, d &c. in allen auf einerley Art verwickelt, und der Unterschied besteht nur in den Zahlen, womit sie in jeder Reihe besonders multiplicirt sind. Diese Zahlen finden sich nun aber so beschaffen, daß, wenn man $\frac{1}{2} (AT + TM)$ zu

II. Th. Lamb. Beytr. R $\frac{2}{3}$ von

258 IX. Quadratur u. Rectification

$\frac{2}{3}$ von der Chorde addirt, man eine Reihe

$$AT + TM + 2AM = x + \frac{2}{3}a^2x^3 +$$

$$\frac{2}{3}abx^4 + \frac{2}{3}acx^5 + \frac{2}{3}adx^6 + 2aex^7 + x,$$

$$+ \frac{2}{3}bb... + \frac{2}{3}bc... + 2bd...$$

$$- \frac{2}{3}a^4... - \frac{2}{3}a^3b... + cc...$$

$$- \frac{2}{3}a^5c...$$

$$- \frac{2}{3}a^2b^2...$$

$$+ \frac{2}{3}a^6...$$

erhält, deren drey ersten Glieder mit der für den Bogen AM gefundenen Reihe übereintreffen, und welche folglich nur um $AT + TM + 2AM$

$$AmM = + \frac{2}{3}acx^5 + \frac{2}{3}adx^6 + \frac{2}{3}aex^7 + x,$$

$$- \frac{2}{3}bb... - \frac{2}{3}bc... - \frac{2}{3}bd...$$

$$- \frac{2}{3}a^4... - \frac{2}{3}a^3b... - \frac{2}{3}cc...$$

$$- \frac{2}{3}a^5c...$$

$$- \frac{2}{3}a^2b^2...$$

$$- \frac{2}{3}a^6...$$

größer ist, als der Bogen. Da dieser Unterschied erst bey der fünften Dignität der Abscisse x anfängt, so wird derselbe bey jeden Halbiren der Abscisse, oder auch des Bogens, 32 mal kleiner. Man kann also hieraus beurtheilen, was man sich von dieser Art, die Länge einer krummen Linie durch Näherung zu bestimmen, zu versprechen hat, oder von wie wenigen Graden der Krümmung man den Bogen AmM annehmen müsse, wenn der Fehler, den man zulässt, wenn man für dessen Länge

$$AT + TM + 2AM$$

annimmt, eine gewisse Grösse nicht überschreiten sollen.

§. 11.

Wir wollen um dieses auf eine leichte Art verständlicher zu machen, den Halbmesser des Krümmungskreises zur Einheit annehmen, und die Fehler bestimmen, die man zuläßt, wenn man auf diese Art die Länge eines Bogens des Krümmungskreises sucht. Es sey demnach AM ein Circulbogen, dessen Halbmesser $= 1$ ist; so ist AM dessen Chorde, $AT = TM$ die Tangente der Hälfte des Bogens. Man setze nun den Bogen stufenweise 5, 10, 15 Gr. so wird man für

$$\begin{array}{l} 5 \text{ Gr. } \frac{AT + TM + 2AM}{3} = 0,0872665 \\ 10 \text{ " } \frac{\quad}{3} = 0,1745334 \\ 15 \text{ " } \frac{\quad}{3} = 0,2618033 \\ 20 \text{ " } \frac{\quad}{3} = 0,3490823 \end{array}$$

erhalten, da hingegen die Länge des Bogens selbst für

$$\begin{array}{l} 5^\circ \quad \quad \quad = 0,0872665 \\ 10 \quad \quad \quad = 0,1745329 \\ 15 \quad \quad \quad = 0,2617994 \\ 20 \quad \quad \quad = 0,3490659 \end{array}$$

ist. Zieht man diese Zahlen von den ersten ab, so bleibt für

$$R \quad 2 \qquad \qquad 5 \text{ Gr.}$$

5 Gr.	• • • • •	== 0,000 0000
10	• • • • •	== 0,0000005
15	• • • • •	== 0,0000039
20	• • • • •	== 0,0000165

11.

Voraus man sieht, daß, wenn man einen Fehler, der sich auf $\frac{1}{200000}$ des Halbmessers für einen Bogen von 20 Graden beläuft, nicht achten will, man auf diese Art Bögen von 20 Graden Krümmung rectificiren kann. Nimmt man aber lauter Bögen von 5 Graden, so ist der Fehler nicht so groß, daß er auf 10 Millionen 1 betrüge. Da nun die gemeinen Tafeln der Sinus, Tangenten, Secanten ebenfalls nur bis auf $10\,000\,000^{\text{te}}$ Theile berechnet sind, und man sich fast bey allen Rechnungen damit begnügt, so erhellet hieraus, daß man sich aus gleichen Gründen begnügen kann, bey der Rectification jeder krummen Linie, dieselbe in solche Stücke zu theilen, deren Krümmung 5 Gr. beträgt, und daß man sodann für die Länge jedes Bogens AmA schlechthin nur

$$AT + TM + \frac{1}{2}AM$$

nehmen darf. Der Fehler wird immer kleiner als $\frac{1}{10\,000\,000}$ Theil des Halbmessers des Krümmungskreises seyn.

§. 12.

Will man sich aber statt der Berechnung der Construction bedienen, so wird die Figur
selten

seltener so groß gezeichnet, daß $\frac{1}{10000}$ des Halbmessers des Krümmungskreises merklich wäre, daher kann man kürzer verfahren, und mit einmal die Länge solcher Stücke der krummen Linien finden, deren Krümmung sich bis auf 20 Gr. beläuft. Wir haben nun noch zu sehen, was sowohl bey der Berechnung als bey der Construction zu thun ist.

§. 13.

Es sey demnach AMN jede krumme Linie. Fig. III.
Auf AP werden die Abzissen AP, AQ, und die senkrechten Ordinaten PM, QN genommen. TMR, VRN seyn die Tangenten in M und N; R derselben Durchschnittspunct, und MN die Chorde, so ist der zwischen M und N liegende Bogen um desto genauer

$$\frac{MR + RN + 2MN}{3}$$

je kleiner die Krümmung desselben ist, so, daß bey jeder doppelt kleinern Krümmung der Fehler bey 32 mal geringer wird (§. 10.).

§. 14.

Man sehe nun

$$\begin{array}{lll} AP = x & AQ = \xi & MTP = \omega \\ PM = y & QN = \eta & NVQ = \phi \end{array}$$

so wird

$$\text{tang. } \omega = dy : dx$$

$$\text{tang. } \phi = d\eta : d\xi$$

und folglich

$$N \ 3$$

$$\text{tang.}$$

$$\text{tang. VRT} = \text{tang. } (\omega - \varphi) = \frac{dy \cdot d\xi - dx \cdot d\eta}{dx \cdot d\xi + dy \cdot d\eta}$$

seyn. Hiedurch wird, weil VRT die Krümmung des Bogens ist, dieselbe bestimmt, und man kann in Absicht auf die zu erhaltende Genauigkeit nach §. 11. erörtern, ob man den fürgegebenen Bogen MN, dessen Länge zu finden, ganz beibehalten könne, oder denselben in Theile zerfallen müsse, indem man zwischen PQ noch eine oder mehrere Abscissen annimmt. Da im letztern Fall für jeden Theil einerley Rechnung vorzunehmen ist, wie für den ganzen Bogen, so können wir AM als einen solchen Theil angeben, und die Rechnung, wodurch die Chorde MN, nebst den Tangenten MR, RN, oder überhaupt die Seiten des Triangels MRN bestimmt werden, wird folgendermassen gefunden.

§. 15.

Man ziehe NH, MK mit der Abscissenlinie AQ und KRL mit den Ordinaten parallel, so ist $MH = ML + KN = \xi - x$

$$LH = LR + RK = \eta - y$$

Nun ist

$$ML = MR \cos. \omega \quad LR = MR \sin. \omega$$

$$KN = NR \cos. \varphi \quad RK = NR \sin. \varphi$$

dennoch

$$MR \cos. \omega + NR \cos. \varphi = \xi - x$$

$$MR \sin. \omega + NR \sin. \varphi = \eta - y.$$

Wer

Werden diese Gleichungen aufgelöst, so findet sich

$$MR = \frac{(n-y) \cos. \Phi - (\xi-x) \sin. \Phi}{\sin. (\omega - \Phi)}$$

$$NR = \frac{-(n-y) \cos. \omega + (\xi-x) \sin. \omega}{\sin. (\omega - \Phi)}$$

Da nun die Chorde

$$MN = \sqrt{(\xi-x)^2 + (n-y)^2}$$

ist, so lassen sich vermittlest dieser dreien Formeln die drey Seiten MR, RN, NM des Triangels MRN und daher die durch Näherung gesuchte Länge des Bogens, welche

$$\frac{MR + RN + 2MN}{3}$$

seyn wird, leicht finden.

§. 16.

Man kann auch, wenn man sich der trigonometrischen Tabellen bedienen will,

$$dy : dx = \text{tang. } \omega$$

$$dn : d\xi = \text{tang. } \Phi$$

$$(n-y) : (\xi-x) = \text{tang. } \psi$$

machen, und nachdem man auf diese Art die Winkel ω , Φ , ψ , welche TMP, VNQ, NMH sind, gefunden, und die Chorde

$$MN = \sqrt{(\xi-x)^2 + (n-y)^2}$$

berechnet ist, so wird man

$$\frac{MR + RN + 2MN}{3} = \frac{\sin(\psi - \Phi) + \sin(\omega - \psi) + 2 \sin(\omega - \Phi)}{3 \sin(\omega - \Phi)} \cdot MN$$

N 4

für

264 IX. Quadratur u. Rectification

für die durch Näherung gesuchte Länge des Bogens erhalten.

§. 17.

Diese Formel fließt aus den ersten Sätzen der Trigonometrie, weil

$$\psi - \phi = RNM$$

$$\omega - \psi = RMN$$

$$\omega - \phi = MRV$$

und die Seiten RM, RN, MN in Verhältniß der Sinus dieser Winkel sind. Uebrigens läßt sich diese Formel in sofern noch zusammenziehen, als

$$r(\psi - \phi) + r(\omega - \psi) = 2r \frac{\omega - \phi}{2} \cdot \operatorname{cof.} \frac{2\psi - \omega - \phi}{2}$$

und

$$\sin. (\omega - \phi) = 2r \frac{\omega - \phi}{2} \cdot \operatorname{cof.} \frac{\omega - \phi}{2}$$

ist. Denn werden diese Werthe substituiert, so erhält man

$$\frac{MR + RN + 2MN}{3} = \operatorname{cof.} \left(\frac{2\psi - \omega - \phi}{2} \right) MN = 3 \operatorname{cof.} \frac{\omega - \phi}{2} + \frac{2MN}{3}$$

§. 18.

Um dieses Verfahren durch ein leichtes Beispiel zu erläutern, so sey AMN eine Parabel, und

$$2x = yy$$

dennoch

$$2dx = 2ydy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} = \operatorname{tang.} \omega$$

und

und daher auch

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{\eta} = \text{tang. } \Phi.$$

Man setze $\frac{1}{2}$ E. P sey der Brennpunct, folglich $y=1$, $x=\frac{1}{2}$, $\omega=45$ Gr. und die Krümmung des Bogens NM werde von 5 Gr. angenommen, so ist $\Phi=45^\circ-5^\circ=40^\circ$. demnach $1:\eta=\text{tang. } 40$ Gr.

$$\eta=1,1917536$$

$$\log. \eta=0,0761865$$

$$2 \log. \eta=0,1523730$$

$$\log. 2=0,3010300$$

$$\log. \xi=0,8513430-1$$

$$\xi=0,7101384$$

$$\eta=1,1917536$$

$$x=0,5000000$$

$$y=1,0000000$$

$$\xi-x=0,2101384$$

$$\eta-y=0,1917536$$

$$\frac{\eta-y}{\xi-x}=0,9125205=\text{tang. } \psi$$

$$\psi=42^\circ.22'.52''$$

$$\omega+\Phi=42.30.0$$

$$\frac{\omega+\Phi}{2}-\psi=0.7.8 \log. \cos.=0,9999991-1$$

$$\frac{\omega-\Phi}{2}=2.30.0 \log. \cos.=0,9995865-1$$

$$\text{diff. } 0,0004126$$

$$\text{Serner NM}=0,2844777 \log. \text{MN}=0,4540483-1$$

$$\log. (\text{MR} + \text{RN})=0,4544609-1$$

R 5

MR +

266 IX. Quadratur u. Rectification

$$MR + RN = 0,2847481$$

$$\frac{1}{2}(MR + RN) = 0,0949160$$

$$\frac{1}{4}MN = 0,1896518$$

$$0,2845678$$

Und dieses ist demnach bis auf einen $\frac{1}{1000000}$ Theil des halben Parameters der Parabel die Länge des Bogens MN, welche zu suchen war.

§. 19.

Nimmt man aber den Bogen grösser an, z. E. von 15 Grad Krümmung, so, daß $\omega = 45^\circ$, $\phi = 30^\circ$ Grad sey, so findet man

$$x = \frac{1}{2}$$

$$\xi = \frac{3}{2}$$

$$y = 1$$

$$\eta = \sqrt{3}$$

demnach

$$\xi - x = 1$$

$$\eta - y = \sqrt{3} - 1 \text{ daher } NM = 1,2393137$$

$$\text{tang. } \psi = \sqrt{3} - 1 = 0,7320508$$

$$\psi = 36^\circ.12'.22''$$

$$\frac{1}{2}(\omega - \phi) = 37.30.0$$

$$\frac{1}{2}(\omega + \phi) - \psi = 1.17.38 \text{ log. cos.} = 0,9998892 - 1$$

$$\frac{1}{2}(\omega - \phi) = 7.30.0 \text{ log. cos.} = 0,9962686 - 1$$

$$\text{diff.} = 0,0036206$$

$$\text{log. } NM = 0,0931812$$

$$\text{log. } (RM + RN) = 0,0968018$$

$$RM + RN = 1,2496888$$

$$\frac{1}{2}(RM + RN) = 0,4165629$$

$$\frac{1}{4}MN = 0,8262091$$

$$1,2427720.$$

Dit

Dieses wäre demnach die durch diese Näherung
gefundene Länge des Bogens. Es ist aber
die wahre Länge

$$= 1,2427361$$

demnach der Unterschied $0,0000359$
welcher sich kaum auf $\frac{1}{33000}$ Theil des Bo-
gens beläuft.

§. 20.

Wenn man sich statt der Rechnung mit der
Construction begnügen will, so kann man nich-
tentheils noch grössere Bögen vornehmen, weil
man bey den Constructionen selten so scharf
verfährt, daß man auf 33000 nicht um 1 feh-
len sollte. Ueberdies wird die Arbeit kürzer,
weil die Seiten der Triangel MRN ebender
gemessen als berechnet sind. Hingegen kann
die Ziehung der Tangenten MR, RN, oder
der Chorden MN Schwierigkeiten und Weit-
läufigkeiten haben. Denn ungeachtet sich
diese Linien, jede für sich betrachtet, leicht zie-
hen lassen, so kommt hier die Bedingung vor,
daß, wenn die Tangenten gezogen sind, die
Chorden in die Berührungspuncte gezogen wer-
den; oder hinwiederum, daß, wenn die Chor-
den gezogen sind, die Tangenten an die End-
puncten der Chorden gezogen werden. Hiebey
kommt es auf besondere Vortheile an, die man
aus der Natur der vorhabenden krummen Linie
vorerst finden muß, so wie man dergleichen
für die parabelischen, logarithmischen und an-
dere Linien gefunden.

§. 21.

§. 21.

Es kommen aber besonders in der angewandten Mathematik Fälle vor, wo die krumme Linie schlechthin durch Versuche bestimmt wird, und wo die Gleichung dazu noch nicht bekannt ist. Und da ist die Frage: wie, wenn man an solche Linien Tangenten gezogen, der Berührungspunct gefunden werden könne? Diese Frage läßt sich für alle diejenigen Berührungspuncten, wo entweder die krumme Linie einen Diameter hat, oder wo wenigstens der Halbmesser des Krümmungskreises weder 0 noch ∞ ist, folgendermassen auflösen: Es

Fig. III. sey AMB ein Stück einer krummen Linie, und an dieselbe sey die Tangente TM gezogen. Um den Berührungspunct M zu finden, ziehe man mit der Tangente parallele Chorden AB, so viel man will, und so nahe beysammen, als man will. Jede Chorde theile man in zween gleiche Theile, und so wird sich durch die Theilungspuncte C, eine Linie MC ziehen lassen, welche in den Berührungspunct M trifft. Diese Linie ist gerade und ein Diameter, wenn AMN ein Kegelschnitt ist. In andern Fällen kann sie ebenfalls gerade seyn, wenn nemlich die krumme Linie einen oder mehrere Diameter hat, und einer derselben in den Punct M trifft. In allen übrigen Fällen ist CM eine krumme Linie, und zwar ist ihre Krümmung desto geringer, je weniger sich die Linie AMB von der Krümmung eines Kegelschnittes entfernt. Da nun

nun bey denen krummen Linien, wo diese Bedingung wegfallen kann, sie nur bey einzelnen Punkten, wie z. E. bey den Wendungspuncten wegfällt, so kann diese Methode überhaupt betrachtet so gut als allgemein angesehen werden. Daß aber der Gebrauch davon viel allgemeiner sey läßt sich leicht erachten. Man sehe z. E. AB sey eine Abscissenlinie, so habe die Ordinate in M ein Maximum. Die größte Ordinate findet sich durch Ziehung der mit AB parallelen Tangente ohne Mühe. Will man aber die Ordinate selbst ziehen, so muß vorerst der Punct M gefunden werden. Und dazu dient die erst angegebene Methode, immer vorausgesetzt, daß die Gleichung, wodurch die Natur der Linie AMB ausgedrückt wird, nicht bekannt sey.

§. 22.

Um nun zu sehen, wiefern die bisher angeführten Betrachtungen ebenfalls zur Quadratur der krummen Linien dienen können, wenn diese vermittelt der Vielecke durch Näherung gesucht wird, so werden wir zur 2ten Figur zurück kehren, und da heist sich die Anmerkung von selbst an, daß wenn der Bogen AmM ein Stück einer krummen Linie ist, sodann ATM ein Stück des um dieselbe beschriebenen Vieleckes sey, so wie die Chorde AM eine Seite des in derselben beschriebenen Vieleckes ist. Der Unterschied des Flächenraumes ergiebt sich theils aus dem Abschnitte AMm , und um

Fig. II.

270 IX. Quadratur u. Rectification

so viel ist die krumme Linie grösser als das zu der Seite A M gehörende Theil des in der krummen Linie beschriebenen Vieleckes; theils aus dem Raume A m M T, um welchen die Linie kleiner ist als der zu den Seiten A T M gehörende Theil des um die krumme Linie beschriebenen Vieleckes.

§. 23.

Wir wollen damit anfangen, daß wir den Raum A m M P suchen, und hiezu werden wir die vorhin gebrauchte Benennung anwenden. (§. 6. seqq.) Es ist demnach

$$A m M P = \int y dx = \frac{1}{2} a x^2 + \frac{1}{2} b x^4 + \frac{1}{2} c x^5 + \frac{1}{2} d x^6 + x.$$

hingegen ist der Raum des

$$\triangle A M P = \frac{1}{2} x y = \frac{1}{2} a x^3 + \frac{1}{2} b x^4 + \frac{1}{2} c x^5 + \frac{1}{2} d x^6 + x.$$

Nimmt man demnach $\frac{2}{3}$ von diesem Triangel, so ist

$$\frac{2}{3} \triangle A M P = \frac{1}{3} x y = \frac{1}{3} a x^3 + \frac{1}{3} b x^4 + \frac{1}{3} c x^5 + \frac{1}{3} d x^6 + x.$$

hievon der Raum A m M P abgezogen, bleibt

$$\frac{2}{3} \triangle A M P - A m M P = -\frac{1}{3} b x^4 + \frac{1}{3} c x^5 + \frac{1}{3} d x^6 + x.$$

Eosern man nun diesen Unterschied für nichts achten kann, läßt sich der Raum A m M P als $\frac{2}{3}$ von dem Raum des Triangels A M P ansehen, und eben so wird der Raum A m M Q $= \frac{2}{3}$ A P M Q seyn. Denn A M m A = A M P

$AMP - AmMP = \frac{1}{3} AMP = \frac{1}{3} APMQ$,
und folglich $AMmQ = (\frac{1}{3} + \frac{1}{2}) APMQ$
 $= \frac{5}{6} APMQ$.

§. 24.

Alles dieses hat nach geometrischer Schärfe
statt, wenn der Bogen $A m M$ ein Stück ei-
ner Parabel ist. Dennoch kommt es in je-
dem andern Fall der Wahrheit um desto nä-
her, je weniger die Krümmung des Bogens
 $A m M$ von der Krümmung eines denselben
osculirenden parabolischen Bogens abweicht.

§. 25.

Wir können aber ferner das Segment
 $AMm A$, mit dem Triangel AMT verglei-
chen, dessen Inhalt $= \frac{1}{2} \cdot AT \cdot PM$ ist. Wer-
den demnach die Werthe

$$AT = \frac{1}{2}x + \frac{bxx}{4a} + cx^3 + \frac{3}{2}d \cdot x^4 + \&c.$$

$$- \frac{3bb}{8aa} \dots - \frac{5bc}{4aa} \dots$$

$$+ \frac{9b^3}{8a^3} \dots$$

$PM = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$
mit einander multiplicirt, so findet sich die
Hälfte des Productes $\triangle AMT =$

$$\frac{1}{4}ax^3 + \frac{3}{4}bx^4 + \frac{1}{2}cx^5 + \frac{3}{4}dx^6 + \&c.$$

$$- \frac{bb}{16a} \dots - \frac{bc}{4a} \dots$$

$$+ \frac{3b^3}{8a^2} \dots$$

Hinge-

272 IX. Quadratur u. Rectification

Hingegen ist das Segment $AmMA = \triangle AMP - AmMP$, folglich $AmMA = \frac{1}{2}ax^3 + \frac{1}{4}bx^4 + \frac{1}{120}cx^5 + \frac{1}{2}dx^6 + \&c.$
 Wird demnach wiederum $\frac{2}{3}$ von dem Triangel AMT genommen und das Segment $AmMA$ davon abgezogen, so bleibt $\frac{2}{3}AMT - AmMA = \frac{1}{4}bx^4 + \frac{1}{360}cx^5 + \frac{1}{12}dx^6 + \&c.$

$$- \frac{\frac{1}{24}a}{b^2} \dots - \frac{\frac{1}{6}a}{b^3} \dots$$

$$+ \frac{\frac{1}{4}a^2}{b^3} \dots$$

Dieser Unterschied wird ebenfalls $= 0$, so oft AmM ein Stück einer Parabel ist. Demnach ist derselbe in jedem andern Fall desto unmerklicher, je weniger AmM von der Krümmung des osculirenden parabolischen Bogens abweicht. Man kann daher, so oft die Krümmung des Bogens von wenigen Graden ist, für das Segment $AmMA$, $\frac{2}{3}$ des $\triangle AMT$ nehmen.

§. 26.

Will man aber das Segment $AmMA$ mit beiden Triangeln AMT und AMP vergleichen, so darf man nur $\frac{1}{4}AMP + \frac{1}{2}AMT$ zusammen addiren, und das Segment wird nur um

$$+ \frac{\frac{11}{120}cx^5 + \frac{1}{4}dx^6 + \&c.}{b}$$

$$+ \frac{\frac{24a}{b^3}}{16a^2} \dots$$

größ-

größer seyn. Da dieser Unterschied, welcher bey jedem parabolischen Bogen ebenfalls $= 0$ wird, sich erst bey der fünften Dignität der Abscisse x äußert, so sieht man leicht, daß man auf diese Art der Wahrheit sehr viel näher kömmt, und der Bogen bey gleichem Fehler merklich größer seyn kann.

§. 27.

Es sey $J. E. A m M$ ein Circulbogen $= \omega$, dessen Halbmesser $= 1$, so ist $AP = \sin. \omega$, $MP = 1 - \cos. \omega$, $AT = TM = \text{tang. } \frac{1}{2} \omega$, demnach

$$\frac{1}{2} \Delta AMP = \frac{1}{2} (1 - \cos. \omega) \sin. \omega = \frac{1}{2} \sin. \omega - \frac{1}{2} \sin. 2\omega$$

$$\frac{1}{2} \Delta AMT = \frac{1}{2} \text{tang. } \frac{1}{2} \omega (1 - \cos. \omega) =$$

$$\frac{1}{2} \text{tang. } \frac{1}{2} \omega - \frac{1}{2} \sin. \omega$$

und

$$\frac{1}{2} \Delta AMP + \frac{1}{2} \Delta AMT = \frac{1}{2} \text{tang. } \frac{1}{2} \omega + \frac{1}{2} \sin. \omega - \frac{1}{2} \sin. 2\omega.$$

Dieses giebt für einen Bogen von 20 Graden den Werth 0,0034645.

Es ist aber der wahre Inhalt des

Segmentes 0,0035228

diff. 0,0000583.

Der Unterschied ist $\frac{1}{60}$ Theil des Segmentes, oder $\frac{1}{33000}$ Theil des Quadrats des Halbmessers, oder der Einheit, welche bey dieser Ausmessung zum Grunde liegt. Wäre der Bogen nur von 10 Gr. so würde man nach dieser Formel 0,0004405 anstatt 0,0004423

ll. Th. Lamb. Beytr. S finden,

274 IX. Quadratur u. Rectification

finden, und daher der Unterschied nur 0,0000018 schyn.

§. 28.

Indessen, wenn es nur um das Segment $A m M n$ zu thun ist, so kann man es bey der ersten Methode (§. 23.) bewegen lassen, wenn man nemlich die Chorde $A M$ mit der Höhe $n m$ multiplicirt und von dem Producte $\frac{2}{3}$ nimmt. Man setze z. E. wiederum $A m M$ sey ein Circulbogen von ω Graden, so ist die Chorde $A M = 2 \sin. \frac{1}{2} \omega$, und die Sagitte $n m = 1 - \cos. \frac{1}{2} \omega$, daher

$$\frac{2}{3} \cdot A M \cdot n m = \frac{4}{3} (\sin. \frac{1}{2} \omega - \frac{1}{2} \sin. \omega)$$

dies giebt für den Bogen von 20 Graden 0,0035175 anstatt des wahren Inhaltes 0,0035228, der Unterschied ist nun hier nur 0,0000053, bey 11 mal kleiner als vorhin, welches daher rührt, weil hier anstatt des Segmentes $A m M Q$ das Segment $A m M n A$ quadriert worden.

§. 29.

Fig. V. Es sey, um nun zu allgemeinem Betrachtungen fortzuschreiten, $A \mu m M$ ein Stück einer beliebigen krummen Linie, $A P$ eine Tangente, A deren Berührungspunct, $A N, M P$ auf $A P$ senkrecht, $M N$ parallel, und man habe das Segment $A M N$ zu quadriren. Um dieses auch bey solchen krummen Linien, für welche man die Gleichung nicht weiß, und die folglich

folglich aus Versuchen construirt, oder auch von freyer Hand gezogen sind, so genau man es gebraucht oder verlangt, oder auch so genau es die Grösse der Figur zulässt, zu erhalten, kann man die Linie in m, μ in beliebige kleinere Theile theilen, und in dem man $A\mu, \mu m, m M$ durch gerade Linie zusammen zieht, das dadurch entstehende Vieleck $N A \mu m M$ besonders, und nach den erst angegebenen Methoden die kleinen Segmente $A\mu, \mu m, m M$ jedes besonders quadriren, und die Summe wird dem Wahren desto näher kommen, in je mehr Theile man den Bogen $A M$ getheilt hat. Es ist dabei eben nicht nothwendig, daß die Theile einander genau gleich seyn, jedoch ist es gut, wenn sie nicht gar zu ungleich sind, weil die grössern Segmente nach den erst angegebenen Methoden minder genau quadriert werden als die kleinern.

§. 30.

Wir wollen aber das Willkürliche, welches bey dieser Eintheilung bleibt, so einschränken, daß wir die Abscisse AP in beliebiger Anzahl gleicher Theile theilen, und aus den Theilungspuncten, dergleichen π, p sind, Ordinaten $\pi\mu, p m$ aufrichten, und durch Ziehung der Parallelen $\mu v, m n$, die Rectangel $A v \mu \pi, A n m p$ vollenden. Nun kann der Inhalt dieser Rectangel, sowohl durch Rechnung als durch Construction, immer leicht gefunden werden. Die Frage ist demnach, ob sich aus

denselben der Inhalt des Segmentes. AMN , oder auch der Segmente Amn , $A\mu v$ eben so leicht, und um desto genauer finden lasse, in je mehr gleiche Theile AP getheilt worden? Und zwar, welches wohl zu merken, ohne daß man weiter nichts als den Inhalt der Rectangel $A\mu$, Am , AM &c. wisse.

§. 31.

Die Bedingung, die wir zur Auslösung dieser Frage, annehmen, ist, daß die Abscissen auf der Tangente AP , und zwar von dem Berührungspunct A an gerechnet, genommen werden. Sodann, da wir die Anzahl der Theile willkürlich und daher unbestimmt lassen, so werden wir $A\pi$ den ersten, πp den zweiten, pP den dritten Theil nennen, und auf diese Art fortfahren, um sodann die Wahl zu behalten, bey welchem wir stehen bleiben wollen.

§. 32.

Es sey demnach

$$\begin{array}{llll} A\pi = x & \pi\mu = y' & A\pi\mu v = R' & A\mu v = S' \\ Ap = 2x & p m = y'' & Ap m n = R'' & Am n = S'' \\ AP = 3x & PM = y''' & APMN = R''' & AMN = S''' \\ \&c. & \&c. & \&c. \end{array}$$

Und die Verhältniß zwischen x , y , werden wie vorher (§. 8.) und aus eben den Gründen, durch die Reihe

$$y' = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

ausgedrückt; so wird man

$$y'' =$$

$$\begin{aligned}y'' &= 4ax^2 + 8bx^3 + 16cx^4 + 32dx^5 + \kappa. \\y''' &= 9ax^2 + 27bx^3 + 81cx^4 + 243dx^5 + \kappa. \\y^{iv} &= 16ax^2 + 64bx^3 + 256cx^4 + 1024dx^5 + \kappa.\end{aligned}$$

&c.

$$\begin{aligned}R' &= ax^3 + bx^4 + cx^5 + dx^6 + \kappa. \\R'' &= 8ax^3 + 16bx^4 + 32cx^5 + 64dx^6 + \kappa. \\R''' &= 27ax^3 + 81bx^4 + 243cx^5 + 729dx^6 + \kappa. \\R^{iv} &= 64ax^3 + 256bx^4 + 1024cx^5 + 4096dx^6 + \kappa.\end{aligned}$$

&c.

und

$$\begin{aligned}S' &= \frac{2}{3}ax^3 + \frac{3}{4}bx^4 + \frac{4}{5}cx^5 + \frac{5}{6}dx^6 + \kappa. \\S'' &= \frac{2 \cdot 8}{3}ax^3 + \frac{3 \cdot 16}{4}bx^4 + \frac{4 \cdot 32}{5}cx^5 + \frac{5 \cdot 64}{6}dx^6 + \kappa. \\S''' &= \frac{2 \cdot 27}{3}ax^3 + \frac{3 \cdot 81}{4}bx^4 + \frac{4 \cdot 243}{5}cx^5 + \frac{5 \cdot 729}{6}dx^6 + \kappa. \\S^{iv} &= \frac{2 \cdot 64}{3}ax^3 + \frac{3 \cdot 256}{4}bx^4 + \frac{4 \cdot 1024}{5}cx^5 + \frac{5 \cdot 4096}{6}dx^6 + \kappa.\end{aligned}$$

&c.

erhalten. Um nun hiebei die Brüche zu vermeiden, und nicht jedes Segment besonders mit den Rectangeln zu vergleichen, werden wir überhaupt

$S = \alpha ax^3 + \epsilon bx^4 + \gamma cx^5 + \delta dx^6 + \kappa.$
setzen, weil die Werthe von α , ϵ , γ , δ &c. nachgehends ohne Mühe für die Segmente S' , S'' , S''' &c. können gesetzt werden.

§. 33.

Da nun die Reihen, so wir für jede Rectangel und Segmente gefunden, nur in den Zahlen, womit ihre Glieder multiplicirt werden,

$\Sigma 3$

von

278 IX. Quadratur u. Rectification

von einander verschieden sind, so läßt sich für je des Segment eine Reihe von Zahlen m, n, p, q, r &c. gedenken, so, daß

$$S = mR' + nR'' + pR''' + qR^{IV} + r.$$

werde. Da nun hiebey x nicht veränderlich seyn könnte, dafern diese Vergleichung nicht auch bey jedem Gliede statt hätte, so erhalten wir dadurch

$$a = m + 8n + 27p + 64q + 125r + x.$$

$$b = m + 16n + 81p + 256q + 625r + x.$$

$$c = m + 32n + 243p + 1024q + 3125r + x.$$

$$d = m + 64n + 729p + 4096q + 15625r + x.$$

$$e = m + 128n + 2187p + 16384q + 78125r + x.$$

§. 34.

Da diese Gleichungen in allwegen ins Unendliche fortgehen, so kommt es nun darauf an, wie viele Glieder man beybehalten will, oder auch in wie viele Theile die Abscisse AP getheilt wird. So viele Glieder man beybehält, so viele Gleichungen werden auch beybehalten, um m, n, p &c. dadurch zu bestimmen. Da aber alle Coefficienten geometrische Progressionen sind, so findet sich in der Auflösung etwas einförmiges, welches macht, daß die verschiedenen Werthe, so m, n, p, q &c. erhalten, wenn man 1, 2, 3 x . von diesen Buchstaben beybehält, nach gewissen Gesetzen können aus einander hergeleitet werden. So z. E. um die verschiedene Werthe des m zu finden, schaft man

man aus diesen Gleichungen, der Ordnung nach, m , p , q &c. weg. Nun wird erstlich n weggeschafft, wenn jede Gleichung verdoppelt von der nächstfolgenden abgezogen wird. Denn so bleibt

$$\begin{aligned} 6 - 2\alpha &= -m + 27p + 128q + 375r + \kappa. \\ \gamma - 2\delta &= -m + 81p + 512q + 1875r + \kappa. \\ \delta - 2\gamma &= -m + 243p + 2048q + 9375r + \kappa. \\ \epsilon - 2\delta &= -m + 729p + 8192q + 46875r + \kappa. \end{aligned}$$

&c.

Hier sind die Coefficienten ebenfalls geometrische Progressionen. Daher wird p weggeschafft, wenn jede Gleichung dreysach genommen, von der nächstfolgenden abgezogen wird; so bleibt

$$\begin{aligned} \gamma - 5\delta + 6\alpha &= 2m + 128q + 750r + \kappa. \\ \delta - 5\gamma + 6\epsilon &= 2m + 512q + 3750r + \kappa. \\ \epsilon - 5\delta + 6\gamma &= 2m + 2048q + 18750r + \kappa. \end{aligned}$$

&c.

Um eben so q wegzuschaffen, wird jede Gleichung vierfach genommen von der nächstfolgenden abgezogen; demnach bleibt

$$\begin{aligned} \delta - 9\gamma + 26\epsilon - 24\alpha &= -6m + 750r + \kappa. \\ \epsilon - 9\delta + 26\gamma - 24\epsilon &= -6m + 3750r + \kappa. \end{aligned}$$

&c.

Aus diesen Gleichungen wird r weggeschafft, wenn jede fünffach genommen von der nächstfolgenden abgezogen wird. Und so bleibt

$$\epsilon - 14\delta + 71\gamma - 154\epsilon - 120\alpha = 24m + \kappa.$$

Auf diese Art erhält man, der Ordnung nach, die Werthe

$$m = a$$

$$m = 2a - 6$$

$$2m = 6a - 56 + \gamma$$

$$6m = 24a - 266 + 9\gamma - 8$$

$$24m = 120a - 1546 + 71\gamma - 14\delta + \epsilon$$

&c.

Und man sieht aus der Art wie die Buchstaben m, p, q, r &c. weggeschafft worden, daß in diesen Werthen von m die Coefficienten durch die Multiplication der Factoren

$1 \cdot (2-1) \cdot (3-1) \cdot (4-1) \cdot (5-1) \text{ u.}$
erzeugt werden.

§. 35.

Aus denen in vorhergehenden §. gefundenen Ueberresten, lassen sich nun ferner die Werthe von jedem der übrigen Buchstaben finden. Denn man darf nur anstatt denselben wegzuschaffen, m wegschaffen. So z. E. wenn man die Werthe von q finden will, so zieht man die Gleichungen

$$\gamma - 56 + 6a = 2m + 128q + 750r + 10\epsilon$$

$$\delta - 5\gamma + 66 = 2m + 512q + 3750r + 10\epsilon$$

$$\epsilon - 5\gamma + 6\delta = 2m + 2048q + 18750r + 10\epsilon$$

&c.

jede von der nächstfolgenden ab, und so bleibe

$$\delta - 6\gamma + 116 - 6a = 384q + 3000r + 10\epsilon$$

$$\epsilon - 6\delta + 11\gamma - 66 = 1536q + 15000r + 10\epsilon$$

&c.

Hier wird nun, um q beizubehalten, r weggeschafft, indem man jede Gleichung fünffach
genom-

ad pag. 292.

$+m =$	a	$1a - 7d - 1f + \gamma$	$14a - 26f + 9\gamma - 2$	$110a - 154f + 71\gamma - 14\delta + 1$	$710a - 1044f + 590\gamma - 155\delta + 10e - 5$	δe	
$-n =$	a	$1a - 6f$	$12a - 4f + \gamma$	$12a - 19f + 8\gamma - 2$	$60a - 827f + 38\gamma - 11\delta + 1$	$460a - 762f + 461\gamma - 137\delta + 10e - 5$	δe
$+p =$	a	$1a - 5f + \gamma$	$8a - 14f + 7\gamma - 2$	$40a - 78f + 49\gamma - 13\delta + 1$	$340a - 508f + 272\gamma - 121\delta + 13e - 6$	δe	
$-q =$	a	$1a - 4f + \gamma$	$6a - 11f + 6\gamma - 2$	$30a - 61f + 41\gamma - 11\delta + 1$	$250a - 395f + 207\gamma - 107\delta + 17e - 6$	δe	
$+r =$	a	$1a - 3f + \gamma$	$4a - 8f + 5\gamma - 2$	$24a - 50f + 34\gamma - 10\delta + 1$	$144a - 234f + 160\gamma - 91\delta + 16e - 6$	δe	
$-s =$	a	$1a - 2f + \gamma$	$2a - 5f + 4\gamma - 2$	$12a - 39f + 26\gamma - 9\delta + 1$	$120a - 274f + 225\gamma - 85\delta + 14e - 6$	δe	
					$816f + 3e - 1$		

δe

genommen von der nächstfolgenden abzieht;
und so bleibt

$$s - 11d + 41\gamma - 61\delta + 30\alpha = -384q + x.$$

&c.

Hier werden demnach, weil man, anstatt wie
vorhin (§. 34.) vierfach abzuziehen, um m weg-
zuschaffen nur einfach abgezogen worden, die
Coefficienten der Werthe von q nicht durch
die Multiplication der Factoren

$$1.(2-1).(3-1).(4-1).(5-1).x.$$

sondern der Factoren

1.(2-1).(3-1).(1-1).(5-1):c.
erzeugt. Man kann zugleich aus dieser An-
merkung abnehmen, wie die Factoren für n,
p, r &c. aussehen müssen, da für jeden dieser
Buchstaben statt der 2, 3, 5 x. fachen, eine
einfache Subtraction vorgenommen wird.

§. 36.

Wir wollen nun die Werthe von m, n, p,
q &c. in nebenstehender Tabelle vorstellen.

§. 37.

Die Bildung dieser Tabelle beruht für-
nehmlich auf der Bestimmung der Coefficienten,
so in den Zählern dieser Brüche vorkom-
men. Und dabey liegen die untersten Brüche
oder Glieder jeder Columnne zum Grunde. Diese
entstehen eben so wie die obersten aus der Mul-
tiplication der Binomialfactoren

$$1.(2-1).(3-1).(4-1).(5-1).x.$$

S 5

die

die übrigen entspringen aus diesen durch ähnliche Factoren. So z. E. für q

$$(6 - 11 + 6 - 1) \cdot (5 - 1) = 30 - 61 + 41 - 11 + 1$$

$$(30 - 61 + 41 - 11 + 1) \cdot (6 - 1) = 180 -$$

$$396 + 307 - 107 + 17 - 1 \text{ u. s. w.}$$

Die Nenner aber sind Producte aus Cubiczahlen und den natürlichen Zahlen 1, 2, 4 u. s. w.

§. 38.

Fig. V. Um nun den Gebrauch dieser Tabelle zu zeigen, so wollen wir z. E. sehen, die fürgegebene Abscisse A P werde in 3 gleiche Theile getheilt, und es solle das Segment A M N quadriert werden. Hier haben wir demnach (§. 32.)

$$S = S''' = \frac{2 \cdot 27}{3} ax^4 + \frac{3 \cdot 81}{4} bx^4 + \frac{4 \cdot 243}{5} cx^5$$

folglich

$$a = \frac{2 \cdot 27}{3} = 18$$

$$b = \frac{3 \cdot 81}{4} = \frac{243}{4}$$

$$c = \frac{4 \cdot 243}{5} = \frac{972}{5}$$

und in vorstehender Tabelle die dritte Columnne

$$+ m = \frac{6x - 56 + \gamma}{2}$$

$$- n = \frac{3x - 46 + \gamma}{8}$$

$$+ p = \frac{2x - 36 + \gamma}{54}$$

Wap

Werden in diesen Formeln die Werthe von a , b , c , γ gesetzt, so erhält man

$$m = \frac{27}{40}$$

$$n = \frac{27}{40}$$

$$p = + \frac{107}{120}$$

demnach

$$AMN = \frac{107}{120} APMN = \frac{27}{40} Apmn = \frac{27}{40} A\pi\mu\gamma$$

woraus man sieht, der wievielte Theil von den drey Rectangeln müsse genommen werden, um den Inhalt des Segmentes durch diese Näherung zu erhalten. Man erhält denselben vollkommen, wenn die Gleichung für die krumme Linie wirklich nicht mehr als die drey ersten Glieder

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4$$

hat, oder auch nur

$$y = ax^2 + bx^3$$

oder endlich auch nur

$$y = ax^2$$

ist.

§. 39.

Um aber ein Beyspiel zu geben, wo dieses nicht vorkommt, und wo man folglich in der That nur eine Näherung erhält, so wollen wir setzen AM sey ein Circulbogen von 30° Gr. und dessen Halbmesser $= 1$. Hier haben wir demnach

$$AP = \sin. 30^\circ = \frac{1}{2} \quad PM = 1 - \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,1339746$$

$$Ap = \frac{2}{3} AP = \frac{1}{3} \quad pm = 1 - \sqrt{\frac{8}{9}} = 0,0571910$$

$$A\pi = \frac{1}{3} AP = \frac{1}{6} \quad \pi\mu = 1 - \sqrt{\frac{13}{6}} = 0,0139868$$

und

284 IX. Quadratur u. Rectification

und hieraus

$$APMN = 0,0669873$$

$$Apmn = 0,0190637$$

$$A\pi\mu\nu = 0,0023311$$

$$\text{demnach den Inhalt des Segmentes AMN} \\ = \frac{107}{120} APMN - \frac{27}{40} (Apmn + A\pi\mu\nu)$$

$$= 0,0452888$$

$$\text{Es ist aber der wahre Inhalt} = 0,0452930$$

$$\text{demnach der Unterschied nur} = 0,0000042$$

Da sich dieser Unterschied erst bey der sechsten Dignität der Abscisse x zu äussern anfängt, so wird derselbe 64 mal geringer, wenn man den Bogen nur halb so groß annimmt.

§. 40.

Setzt man, die Abscisse AP solle in 4 gleiche Theile getheilt werden, und man wolle ebenfalls das ganze Segment AMN quadriten, so haben wir $S = S^{iv}$, demnach (§. 32.)

$$\alpha = \frac{2 \cdot 64}{3} = \frac{128}{3}$$

$$\epsilon = \frac{3 \cdot 256}{4} = 192$$

$$\gamma = \frac{4 \cdot 1024}{5} = \frac{4096}{5}$$

$$\delta = \frac{5 \cdot 4096}{6} = \frac{10240}{3}$$

und aus der Tabelle (§. 36.)

+ m

$$+ m = \frac{24x - 265 + 9y - \delta}{6}$$

$$- n = \frac{12x - 195 + 8y - \delta}{16}$$

$$+ p = \frac{8x - 145 + 7y - \delta}{34}$$

$$- q = \frac{6x - 115 + 6y - \delta}{384}$$

Werden in diesen Formeln die Werthe von x , y , gesetzt, so findet man nach geschehener Reduction

$$m = -\frac{64}{23}$$

$$n = -\frac{4}{13}$$

$$p = -\frac{63}{133}$$

$$q = +\frac{83}{90}$$

demnach erhält man

$$S = \frac{83}{90} R^{IV} - \frac{63}{133} R^{III} - \frac{4}{13} R^{II} - \frac{64}{23} R^I$$

§. 41.

Diese Formel giebt für das Segment eines Circulbogens von 30 Gr.

$$S = 0,0452925$$

welcher Werth von den wahren nur um 0,000005 verschieden ist.

§. 42.

Wollte man hingegen die Abscisse AP nur in zween Theile theilen, so würde man, ebenfalls für das ganze Segment AMN (§. 32. 36.)

$$x =$$

$$\alpha = \frac{1}{3} \sigma$$

$$6 = 12$$

$$+ m = 2\alpha - 6$$

$$- n = \alpha - 6$$

und hieraus

$$m = -\frac{1}{3}$$

$$n = +\frac{2}{3}$$

demnach

$$S = \frac{5}{6} R'' - \frac{1}{3} R'$$

finden. Diese Formel giebt für das Segment eines Circulbogens von 30 Gr.

$$S = 0,0452481$$

welches um 0,0000449 zu wenig ist.

§. 43.

Würde man aber die Abscisse AP ganz behalten, so würde man (§. cit.)

$$\alpha = m = \frac{2}{3}$$

demnach

$$S = \frac{2}{3} R'$$

erhalten. Dieses giebt für das Segment eines Circulbogens von 30 Gr.

$$S = 0,0446582$$

welches um 0,0006348 zu wenig ist. Man sieht demnach aus diesen für einerley Segment gefundenen Unterschieden

$$0,0006348$$

$$0,0000449$$

$$0,0000046$$

$$0,0000005$$

Um wie viel man dem Wahren näher kommt, wenn

Wenn man die Abscisse in mehrere Theile theilt; Ueberdies werden diese Unterschiede, wenn der Bogen selbst kleiner ist, in ungleicher Verhältniß kleiner. Denn wenn man nur die Hälfte des Bogens nimmt, so wird der erste Unterschied 16, der andere 32, der dritte 64, der vierte 128 mal kleiner.

§. 44.

Was aber bey allem diesem besonders anzumerken ist, besteht darin, Daß die Coefficienten der Reihe

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

wodurch die Natur der krummen Linie AM überhaupt ausgedruckt wird, keinen Einfluß auf die Bestimmung der Buchstaben m, n, p, q, r &c. haben, ungeachtet sie daraus hergeleitet sind. In der That bestimmt diese Gleichung oder Reihe in jedem fürgegebenen Fall nur die Größe der Rectangel R' , R'' , R''' &c. aus welchen sodann S vermittelst der Formel

$$S = mR' + nR'' + pR''' + \&c.$$

gefunden wird.

§. 45.

Sehen wir aber genauer nach, wie die Buchstaben m, n, p &c. bestimmt werden, so findet sich, daß wenn in der Reihe

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

wechselseitig einige Glieder = 0 sind, die Buchstaben m, n, p &c. auf eine andere Art bestimmt werden

288 IX. Quadratur u. Rectification

werden können. Wir wollen z. E. $b = d = f = \&c. = 0$ setzen, und so werden wir statt den (§. 33.) angenommenen Gleichungen folgende.

$$\begin{aligned} a &= m + 8n + 27p + 64q + x. \\ \gamma &= m + 32n + 243p + 1024q + x. \\ e &= m + 128n + 2187p + 16384q + x. \\ \eta &= m + 512n + 19683p + 262144q + x. \\ &\&c. \end{aligned}$$

haben, weil die für $\epsilon, \delta, \zeta \&c.$ daselbst angenommene Gleichungen hier wegbleiben können.

§. 46.

Die Auflösung dieser Gleichungen ist nun der vorhergehenden ganz ähnlich. So wird um m zu finden, nach und nach $n, p, q \&c.$ weggelassen. Man zieht nemlich, um anfangs n wegzuschaffen, jede Gleichung vierfach genommen, von der nächstfolgenden ab, und so bleibt

$$\begin{aligned} \gamma - 4a &= -3m + 135p + 768q + x. \\ e - 4\gamma &= -3m + 1215p + 12288q + x. \\ \eta - 4e &= -3m + 10935p + 196608q + x. \\ &\&c. \end{aligned}$$

Um ferner p wegzuschaffen, wird jede Gleichung 9 mal genommen, von der nächstfolgenden abgezogen, und so bleibt

$$\begin{aligned} e - 13\gamma + 36a &= 24m + 5376q + x. \\ \eta - 13e + 36\gamma &= 24m + 86016q + x. \\ &\&c. \end{aligned}$$

Eben

Eben so wird q wegeschaft, wenn jede Gleichung 16 mal genommen, von der nächstfolgenden abgezogen wird, und so bleibt

$$\pi - 29\varepsilon + 244\gamma - 576\alpha = -360m + \pi.$$

Auf diese Art sind nun der Ordnung nach die Werthe, so m erhält,

$$m = \alpha$$

$$m = \frac{4\alpha - \gamma}{3}$$

$$m = \frac{36\alpha - 13\gamma + \varepsilon}{3 \cdot 8}$$

$$m = \frac{576\alpha - 244\gamma + 29\varepsilon - \pi}{3 \cdot 8 \cdot 15}$$

&c.

Die Coefficienten entstehen nun hier aus der Multiplication der Factoren

$$1 \cdot (4-1) \cdot (9-1) \cdot (16-1) \cdot (25-1) \cdot \pi.$$

§. 47.

Die Werthe der übrigen Buchstaben n , p , q &c. finden sich auf eine ähnliche Art. So β . E. wird für p erstlich

$$\gamma - \alpha = 8(4-1)n + 27(9-1)p + 64(16-1)q + \text{\&c.}$$

II. Th. Lamb. Beytr.

§

ferner

290 IX. Quadratur u. Rectification

ferner

$$z - 5\gamma + 4\alpha = 27 \cdot (9-1) \cdot (9-4)p + 64(16-1) \cdot (16-4)q + \&c.$$

sodann

$$\eta - 21z + 84\gamma - 64\alpha = 27 \cdot (9-1) \cdot (9-4)(9-16)p + \&c.$$

&c.

Hingegen erhält man für n

$$\gamma - \alpha = 8(4-1)n + 27(9-1)p + 64(16-1)q + \&c.$$

$$z - 10\gamma + 9\alpha = 8 \cdot (4-1)(4-9)n + 64(16-1)(16-9)q + \&c.$$

$$\eta - 26z + 169\gamma - 144\alpha = 8 \cdot (4-1)(4-9)(4-16)n + \&c.$$

&c.

Und eben so für q

$$\gamma - \alpha = 8(4-1)n + 27(9-1)p + 64(16-1)q + \&c.$$

$$z - 5\gamma + 4\alpha = 27(9-1) \cdot (9-4)p + 64 \cdot (16-1) \cdot (16-4)q + \&c.$$

$$\eta - 14z + 49\gamma - 36\alpha = 64 \cdot (16-1) \cdot (16-4) \cdot (16-9)q + \&c.$$

&c.

§. 48.

Hieraus erwächst sodann folgende Tabelle

+ m =

$+m=$	α	$\frac{4\alpha-\gamma}{4-1}$	$\frac{36\alpha-13\gamma+\epsilon}{(4-1)\cdot(9-1)}$	$\frac{576\alpha-244\gamma+29\epsilon-n}{(4-1)\cdot(9-1)\cdot(16-1)}$	$3c$
$-n=$	α	$\frac{8\cdot(4-1)}{\alpha-\gamma}$	$\frac{8\cdot(4-1)\cdot(9-4)}{9\alpha-10\gamma+\epsilon}$	$\frac{8\cdot(4-1)\cdot(9-4)\cdot(16-4)}{144\alpha-169\gamma+26\epsilon-n}$	$3c$
$+p=$	α	$\frac{4\alpha-5\gamma+\epsilon}{27\cdot(9-1)\cdot(9-4)}$	$\frac{64\alpha-84\gamma+21\epsilon-n}{27\cdot(9-1)\cdot(9-4)\cdot(16-9)}$	$\frac{36\alpha-49\gamma+14\epsilon-n}{64\cdot(16-1)\cdot(16-4)\cdot(16-9)}$	$3c$
$-q=$	α	α	α	α	$3c$

§. 49.

Der Gebrauch dieser Tabelle ist dem von der vorhergehenden ganz ähnlich, dagegen aber nicht so allgemein, weil er sich nur auf die Fälle erstreckt, wo

$$y = ax^2 + cx^4 + ex^6 + gx^8 + \&c.$$

ist. Man setze z. E. die Abscisse werde nur in zweien Theile getheilt, so haben wir $S = S''$, und daher (§. 32. 45.)

$$\alpha = \frac{2 \cdot 8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\gamma = \frac{4 \cdot 32}{5} = \frac{128}{5}$$

und aus der zweyten Columnne der Tabelle (§. 48.)

$$+m = \frac{4\alpha - \gamma}{4-1} = \frac{4\alpha - \gamma}{3}$$

$$-n = \frac{\alpha - \gamma}{8 \cdot (4-1)} = \frac{\alpha - \gamma}{24}$$

folglich

$$m = -\frac{64}{3}$$

$$n = +\frac{32}{5}$$

und daher

$$S = \frac{32}{5} R'' - \frac{64}{3} R'$$

§. 50.

Da bey dem Circul die Bedingung $y = ax^2 + cx^4 + ex^6 + gx^8 + \&c.$ vorkömmt, so wollen wir wiederum einen Circulbogen

culbogen von 30 Gr. für AM setzen, und da giebt die erst gefundene Formel

$$S = 0,0452767$$

welches nur um 0,0000163 von dem Wahren abweicht. Ein Unterschied, der beynahe drey mal geringer ist, als derjenige, den wir für eben diesen Fall (§. 42.) aus den ersten Formeln gefunden haben.

§. 51.

Wir können nun ferner eben diese Methode auch auf diejenigen Fälle ausdehnen, wo die bisher vorausgesetzte Bedingung (§. 31.) wegfällt, und daher die Lage der Abscissenlinie ganz willkürlich gelassen wird. Es sey demnach BM ein Stück einer krummen Linie. Auf Fig. VI. AP werden die Abscissen von A an gerechnet, und die Ordinaten seyn auf dieser Linie senkrecht. Solte nun das Stück ABMP quadrirt werden, so kann man wiederum, wie vorher, die Abscisse AP in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen; und da ist die Frage, wie der gesuchte Inhalt von ABMP durch die vermittelt solcher Theilung entstehende Rectangel APMN, $A p m n$, $A \pi \mu$ &c. bestimmt werden könne; und wie durch eben dieselbe der Inhalt der einzeln Theile $AB\mu\pi$, $ABm p \pi$. bestimmt werde?

§. 52.

Es sey

$$A\pi = x \quad Ap = 2x \quad AP = 3x \text{ \&c.}$$

$$\pi\mu = y' \quad pm = y'' \quad PM = y''' \text{ \&c.}$$

und die Verhältniß zwischen x , y werden durch die Reihe

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{\&c.}$$

ausgedrückt. Man nenne ferner die Segmente S' , S'' , S''' &c. und die Rectangel R' , R'' , R''' &c. so haben wir

$$R' = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + x.$$

$$R'' = 2ax + 4bx^2 + 8cx^3 + 16dx^4 + 32ex^5 + x.$$

$$R''' = 3ax + 9bx^2 + 27cx^3 + 81dx^4 + 243ex^5 + x.$$

$$R^{iv} = 4ax + 16bx^2 + 64cx^3 + 256dx^4 + 1024ex^5 + x.$$

&c.

Ferner

$$S' = ax + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}cx^3 + \frac{1}{4}dx^4 + \frac{1}{5}ex^5 + x.$$

$$S'' = 2ax + \frac{4}{3}bx^2 + \frac{8}{3}cx^3 + \frac{16}{5}dx^4 + \frac{32}{5}ex^5 + x.$$

$$S''' = 3ax + \frac{9}{2}bx^2 + \frac{27}{2}cx^3 + \frac{81}{2}dx^4 + \frac{243}{2}ex^5 + x.$$

$$S^{iv} = 4ax + \frac{16}{3}bx^2 + \frac{64}{3}cx^3 + \frac{256}{3}dx^4 + \frac{1024}{3}ex^5 + x.$$

wofür wir überhaupt

$$S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + x.$$

setzen, welche Reihe sich auch auf die zwischen die Theilungspuncte fallende Abscissen x ausdehnet, weil auch diese Räume y d x durch die Rectangel R' , R'' , R''' &c. bestimmen lassen.

§. 53.

§. 53.

Man setze nun wiederum

$$S = mR' + nR'' + pR''' + qR^{IV} + \&c.$$

so erhält man aus gleichem Grunde, wie §. 33.

die Gleichungen

$$\alpha = m + 2n + 3p + 4q + 5r + \&c.$$

$$\beta = m + 4n + 9p + 16q + 25r + \&c.$$

$$\gamma = m + 8n + 27p + 64q + 125r + \&c.$$

$$\delta = m + 16n + 81p + 256q + 625r + \&c.$$

$$\epsilon = m + 32n + 243p + 1024q + 3125r + \&c.$$

&c.

Dennach sind die Gleichungen wodurch m bestimmt wird

$$\alpha = m + 2n + 3p + 4q + 5r + \&c.$$

$$\beta - 2\alpha = (1-2)m + 3(3-2)p + 4(4-2)q + 5(5-2)r + \&c.$$

$$\gamma - 5\beta + 6\alpha = (1-2).(1-3)m + 4(4-2).(4-3)q + 5(5-2)(5-3)r + \&c.$$

$$\delta - 9\gamma + 26\beta - 24\alpha = (1-2).(1-3).(1-4)m + 5(5-2).(5-3).(5-4)r + \&c.$$

$$\epsilon - 14\delta + 71\gamma - 154\beta + 120\alpha = (1-2).(1-3).(1-4).(1-5)m + \&c.$$

&c.

Ferner die Gleichung wodurch n bestimmt wird

$$\beta - \alpha = 2(2-1)n + 3(3-1)p + 4(4-1)q + 5(5-1)r + \&c.$$

$$\gamma - 4\beta + 3\alpha = 2(2-1)(2-3)n + 4(4-1)(4-3)q + 5(5-1)(5-3)r + \&c.$$

§ 4

§—

296 IX. Quadratur u. Rectification

$$\begin{aligned} \delta - 8\gamma + 19\epsilon - 12\alpha &= 2(2-1) \cdot 2-3) \cdot \\ &\quad (2-4)n + 5 \cdot (5-1) \cdot (5-3) \cdot (5-4) \cdot r + \&c. \\ \epsilon - 13\delta + 59\gamma - 107\epsilon + 60\alpha &= 2 \cdot (2-1) \cdot \\ &\quad (2-3) \cdot (2-4) \cdot (2-5)n + \&c. \\ &\&c. \end{aligned}$$

Eben so die Gleichungen, wodurch die Werthe von p bestimmt werden

$$\begin{aligned} \epsilon - \alpha &= 2(2-1)n + 3(3-1)p + \\ &\quad 4(4-1)q + 5(5-1)r + \&c. \\ \gamma - 3\epsilon + 2\alpha &= 3(3-1)(3-2)p + 4(4-1) \cdot \\ &\quad (4-2)q + 5 \cdot (5-1) \cdot (5-2)r + \&c. \\ \delta - 7\gamma + 14\epsilon - 8\alpha &= 3(3-1)(3-2) \cdot \\ &\quad (3-4)p + 5 \cdot (5-1) \cdot (5-2) \cdot (5-4)r + \&c. \\ \epsilon - 12\delta + 49\gamma - 78\epsilon + 40\alpha &= 3(3-1) \cdot \\ &\quad (3-2) \cdot (3-4) \cdot (3-5)p + \&c. \\ &\&c. \end{aligned}$$

Wiederum die Gleichungen, wodurch q bestimmt wird

$$\begin{aligned} \epsilon - \alpha &= 2(2-1)n + 3(3-1)p + \\ &\quad 4(4-1)q + 5(5-1)r + \&c. \\ \gamma - 3\epsilon + 2\alpha &= 3(3-1)(3-2)p + \\ &\quad 4(4-1)(4-2)q + 5(5-1)(5-2)r + \&c. \\ \delta - 6\gamma + 11\epsilon - 6\alpha &= 4(4-1)(4-2) \cdot \\ &\quad (4-3)q + 5 \cdot (5-1) \cdot (5-2) \cdot (5-3)r + \&c. \\ \epsilon - 11\delta + 41\gamma - 61\epsilon + 30\alpha &= 4(4-1) \cdot \\ &\quad (4-2) \cdot (4-3) \cdot (4-5)q + \&c. \\ &\&c. \end{aligned}$$

Sodann die Gleichungen, wodurch r bestimmt wird

ad pag. 157.

+m=	■	$2x - 3y - 4z + 7$	$24x - 25y + 7z - 1$	$220x - 114y + 71z - 14$	$2730x - 1044y + 180z - 355$
-n=	■	$x - 3$	$18x - 12y + 8z - 1$	$60x - 107y + 32z - 12$	$360x - 702y + 480z - 137$
+p=	■	$x - 1y + 7z$	$8x - 14y + 7z - 1$	$40x - 75y + 48z - 12$	$240x - 308y + 372z - 121$
-q=	■	$3x - 2y$	$6x - 11y + 6z - 1$	$30x - 61y + 41z - 11$	$180x - 356y + 307z - 107$
+r=	■		$4x - 3y + 2z$	$24x - 50y + 34z - 10$	$144x - 324y + 280z - 91$
-s=	■			$120x - 274y + 225z - 81$	
des.					

$$6 - a = 2(2-1)n + 3(3-1)p + 4(4-1)q + 5(5-1)r + \&c.$$

$$\gamma - 36 + 2a = 3(3-1)(3-2)p + 4(4-1)(4-2)q + 5(5-1)(5-2)r + \&c.$$

$$\delta - 6\gamma + 116 - 6a = 4(4-1)(4-2)(4-3)q + 5(5-1)(5-2)(5-3)r + \&c.$$

$$\epsilon - 10\delta + 35\gamma - 506 + 24a = 5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)r + \&c.$$

&c.

§. 54.

Aus diesen Gleichungen entsteht sodann beygefügte Tabelle.

§. 55.

Vergleicht man diese Tabelle mit der erstern (§. 36.) so ist sie davon nur in den Cubiczahlen verschieden, welche hier in den Nennern nicht vorkommen, und an deren Statt nur die ledigen Zahlen, oder die Cubicwurzeln, hier als Theiler erscheinen.

§. 56.

Der Gebrauch dieser Tabelle ist dem von beyden vorhergehenden ganz ähnlich. Es sey z. E. ABMP zu quadriren, und die Abscisse AP in drey gleiche Theile getheilt; so haben wir $S = S'''$, demnach (§. 52.)

$$\begin{array}{rcl} a & = & 3 \\ 6 & = & 27 \\ \gamma & = & 27 \\ & 2 & 5 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \\ 27 \\ 27 \\ 27 \end{array} = 9$$

und

298 IX. Quadratur u. Rectification
und aus der dritten Columnne dieser Tabelle

$$+m = \frac{6\alpha - 5\epsilon + \gamma}{2}$$

$$-n = \frac{3\alpha - 4\epsilon + \gamma}{2}$$

$$+p = \frac{2\alpha - 3\epsilon + \gamma}{6}$$

Setzt man in diesen Formeln die Werthe von α, β, γ , so erhält man

$$m = \frac{2}{3}$$

$$n = 0$$

$$p = \frac{1}{3}$$

dennoch, weil $n = 0$ wird,

$$S''' = \frac{1}{2}R''' + \frac{2}{3}R'$$

Man kann daher, so oft man sich mit einer Trisection der Abscisse begnügen will, das mittlere Rectangel weglassen, und schlechthin

$$ABMP = \frac{1}{2}ANMP + \frac{2}{3}A\mu\pi$$

setzen.

§. 57.

Dieses Phänomenon, daß man nemlich eines von den Rectangeln gar nicht gebraucht, kommt auch in andern Fällen vor. So z. E. wenn man sich mit der Bisection der Abscisse begnügt, hat man (§. 52. 54.) $S = S''$

$$\alpha = 2$$

$$\epsilon = \frac{4}{3} = 2$$

$$m = 2\alpha - \epsilon = 2$$

$$n = \frac{\alpha - \epsilon}{2} = 0$$

folg.

folglich schlechthin

$$S'' = 2 R'.$$

§. 58.

Eben so wenn man die Abscisse in 4 Theile theilt, $S = S^{iv}$, und (§. cit.)

$$\alpha = 4$$

$$\beta = \frac{1}{2} \alpha = 8$$

$$\gamma = \frac{1}{4} \alpha = 16$$

$$\delta = \frac{1}{8} \alpha = 32$$

$$+ m = \frac{24\alpha - 26\beta + 9\gamma - \delta}{6} = \frac{8}{3}$$

$$- n = \frac{12\alpha - 19\beta + 8\gamma - \delta}{6} = \frac{1}{3}$$

$$+ p = \frac{8\alpha - 14\beta + 7\gamma - \delta}{6} = \frac{8}{3}$$

$$- q = \frac{6\alpha - 11\beta + 6\gamma - \delta}{24} = 0$$

Demnach

$$S^{iv} = * \frac{8}{9} R''' - \frac{2}{3} R'' + \frac{8}{9} R'$$

§. 59.

Gingegen erhält man, wenn die Abscisse in fünf gleiche Theile getheilt wird

$$S^v = \frac{1}{144} R^v - \frac{25}{144} R^{iv} + \frac{25}{144} R''' - \frac{175}{144} R'' + \frac{135}{144} R'$$

wobei alle fünf Rectangel müssen berechnet werden.

§. 60.

§. 60.

Ueberhaupt betrachtet, sind diese Formeln weniger convergirend als diejenigen, so wir oben für den Fall der fünften Figur gefunden haben. Man hat den Grund davon darin zu suchen, daß hier in der Reihe

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.$$

die ersten zwey Glieder beybehalten werden. Da nun z. E. wenn man die Abscisse A P in drey Theile theilt, und dadurch

$$ABMP = \frac{1}{4} ANMP + \frac{3}{4} A \nu \mu \pi$$

erhält, (§. 56.) diese Formel eigentlich nur da nach aller Schärfe statt hat, wo

$$y = a + bx + cx^2$$

ist, so sieht man leicht, daß in jeden andern Fällen der Fehler, den man dadurch zuläßt, von den übrigen Gliedern

$$dx^3 + ex^4 + fx^5 + \&c.$$

herrührt, und in Absicht auf den Raum ABMP,

$$= \frac{1}{4} dx^4 + \frac{1}{5} ex^5 + \frac{1}{6} fx^6 + \&c.$$

ist. Daher muß auch die Abscisse A $\pi = x$ klein genug seyn, wenn man diesen Unterschied solle weglassen können. Da dieser Unterschied sich hier bey der vierten Dignität von x anfangt, so kömmt man den Wahren 16 mal näher, wenn x um die Hälfte kleiner angenommen wird.

§. 61.

Diese Formeln haben übrigens die Bequemlichkeit, daß man dadurch krumme Linien, so genau man will, quadriren kann, so bald sie construirt sind; und in soferne haben sie selbst auch in der practischen Geometrie ihren Nutzen, wo nicht selten Felder auszumessen vorkommen, deren Grenzlinien sich in die Krümme ziehen. Solche kann man nun in Segmente, dergleichen ABMP ist, eintheilen, und ihren Inhalt, vermittelst der Rectangel Aμ, Am, AM, bestimmen.

§. 62.

Man nimmt zu diesem Ende, wenn z. E. a q eine solche Linie ist, auf A Q, so viele gleiche Theile AB, BC, CD &c. man will, und richtet aus denselben Perpendicularen Aa, Bb auf. Auf diese Art wird man, wenn man diese Theile zu 3 und 3 nimmt nach der Formel des §. 56.

$$AadD = \frac{1}{2} AB.Bb + \frac{1}{4} AD.Dd = \frac{1}{4} AB(Dd + 3Bb)$$

$$DdgG = \frac{1}{2} AB(Gg + \frac{1}{3} Ee)$$

$$GgkK = \frac{1}{2} AB(Kk + \frac{1}{3} Hh)$$

$$KknN = \frac{1}{2} AB(Nn + \frac{1}{3} Ll)$$

$$NnqQ = \frac{1}{2} AB(Qq + \frac{1}{3} Oo)$$

daher den ganzen Inhalt

$$AaqQ = \frac{1}{4} AB(Dd + Gg + Kk + Nn + Qq) + \frac{1}{4} AB(Bb + Ee + Hh + Ll + Oo)$$

erhalten, welcher desto genauer seyn wird, von
jewe-

302 IX. Quadratur u. Rectification

je weniger Graden die Krümmung der Bögen
ab, bc, cd &c. ist.

§. 63.

Man erhält aber den Inhalt genauer, wenn
man die Theile auf A Q zu 4 und 4 nimmt.
Alsdann dient die Formel des §. 58. und es ist

$$AacE = \frac{8}{3} AB.Bb - \frac{2}{3} AC.Cc + \frac{8}{3} AD.Dd$$

$$= \frac{4}{3} AB(2Bb - Cc + 2Dd)$$

$$Ee il = \frac{4}{3} AB(2Ff - Gg + 2Hh)$$

$$Ii Nn = \frac{4}{3} AB(2Kk - Ll + 2Mn)$$

&c.

daher der Inhalt

$$AanN = \frac{8}{3} AB(Bb + Dd + Ff + Hh + Kk + Mm)$$

$$- \frac{4}{3} AB(Cc + Gg + Ll).$$

§. 64.

Will man den Inhalt noch genauer haben,
so nimmt man die Theile auf A Q zu 5 und
5, und gebraucht die Formel des §. 59.
Denn so wird

$$Aa fF = \frac{425}{144} AB.Bb - \frac{175}{144} AC.Cc + \frac{25}{18} AD.Dd$$

$$- \frac{25}{144} AE.Ee + \frac{19}{144} AF.Ff$$

oder

$$Aa fF = \frac{10}{288} AB(85.Bb - 70.Cc + 120.Dd - 10.Ee + 19.Ff)$$

$$Ff il = \frac{10}{288} AB(85.Gg - 70.Hh + 120.Ii - 10.Kk + 19.Ll)$$

$$Ll qQ = \frac{10}{288} AB(85.Mm - 70.Nn + 120.Oo - 10.Pp + 19.Qq)$$

seyn.

§. 65.

§. 65.

Man kann aber auch schlechthin nur die Punkte a, d, g, k, n, q durch gerade Linien zusammenhängen, welche sodann ein geradlinichtes Vieleck ausmachen, welches sich leicht berechnen läßt. Und so bleiben nur noch die Segmente zu berechnen, welche auf diesen Chorden stehen, und theils zu dem Vielecke addirt, theils subtrahirt werden müssen, je nachdem sie außer- oder innerhalb demselben liegen. Es sey $A m M n A$ ein solches Segment, so wird die Chorde $A M$ mit der Höhe $m n$ multiplicirt, und von dem Producte $\frac{2}{3}$ genommen, weil, wie wir oben (§. 23. 28.) gesehen haben, der Inhalt desto genauer $= \frac{2}{3} \cdot A M \cdot m n$ ist, je weniger der Bogen $A m M$ von der Krümmung der denselben osculirenden Parabel abweicht.

§. 66.

Bei den bisher (§. 52 seqq.) betrachteten Formeln, haben wir noch immer gesetzt, daß die Abscissen von A gegen P gerechnet, und daher sämtlich positiv genommen werden. Nimmt man aber eben so viele negative Abscissen mit in die Rechnung, so wird diese ganz geändert, und man reicht damit doppelt weiter, weil man die gleichnamigten Rectangel auf beyden Seiten in eines zusammen nehmen kann. Es sey z. E. das Segment $P' M' M P$ zu quadriren, so wird die Abscisse $P' P$ in 2, 4, 6, 8 u. gleiche Theile

Theile getheilt, und aus den Theilungspuncten perpendicularitäre Ordinaten aufgerichtet. Die mittlere dieser Ordinaten sey A B. Und die Abscissen werden von dem Punct A an gegen P und P' vor- und rückwärts gerechnet. Ziehe man die Puncte M' M, m' m, μ' μ durch gerade Linien zusammen, so ergeben sich die Trapeze P' M' M P, p' m' m p, π' μ' μ π , deren Inhalt der Summe zweyer gleichnamigten Rectangel A P' . P' M' + A P . P M &c. gleich ist.

§. 67.

Man setze nun wiederum $A\pi = x$, $\pi\mu = y$,
und

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.$$

und nenne die Trapeze T', T'', T''' &c. die denselben entsprechende Segmente S', S'', S''' x.
so findet man

$$T' = 2ax + 2cx^3 + 2ex^5 + 2gx^7 + x.$$

$$T'' = 4ax + 16cx^3 + 64ex^5 + 256gx^7 + x.$$

$$T''' = 6ax + 54cx^3 + 486ex^5 + 4374gx^7 + x.$$

&c.

$$S' = 2ax + \frac{2}{3}cx^3 + \frac{2}{5}ex^5 + \frac{2}{7}gx^7 + x.$$

$$S'' = 4ax + \frac{16}{3}cx^3 + \frac{64}{5}ex^5 + \frac{256}{7}gx^7 + x.$$

&c.

wofür wir überhaupt

$$S = 2ax + 2\gamma cx^3 + 2\epsilon ex^5 + 2\eta gx^7 + x.$$

setzen

sehen, um auf eine allgemeine Art die Trapeze T' , T'' , T''' &c. mit jeden Segmenten vergleichen zu können.

§. 68.

Zu diesem Ende sehen wir wiederum

$$S = mT' + nT'' + pT''' + \&c.$$

und erhalten dadurch die Gleichungen.

$$a = m + 2n + 3p + 4q + 5r + x.$$

$$y = m + 8n + 27p + 64q + 125r + x.$$

$$z = m + 32n + 243p + 1024q + 3125r + x.$$

$$w = m + 128n + 2187p + 16384q + 78125r + x.$$

&c.

§. 69.

Hieraus erhält man folgende Tabelle, welche von derjenigen, so wir oben (§. 48.) aus ganz ähnlichen Gleichungen gefunden, nur darinn verschieden ist, daß in den Nennern statt der Cubiczahlen 1, 8, 27, 64 &c. ihre Wurzeln 1, 2, 3, 4 &c. vorkommen.

$$u. Th. Lamb. Weytr. \quad u \quad + m =$$

$+m=$	a	$4a-y$	$36a-13y+z$	$576a-244y+29z-n$	$\pi.$
		$4-1$	$(4-1).(9-1)$	$(4-1).(9-1).(16-1)$	
$-n=$	$---$	$a-y$	$9a-10y+z$	$144a-169y+26z-n$	$\pi.$
		$2(4-1)$	$2(4-1).(9-4)$	$2.(4-1).(9-4).(16-4)$	
$+p=$	$---$	$---$	$4a-5y+z$	$64a-84y+31z-n$	$\pi.$
		$---$	$3(9-1).(9-4)$	$3.(9-1).(9-4).(16-9)$	
$-q=$	$---$	$---$	$---$	$36a-49y+14z-n$	$\pi.$
		$---$	$---$	$4(16-1).(16-4).(16-9)$	

§. 70.

Setzt man nun z. E. die Abscisse $P'P$ werde in 6 gleiche Theile getheilt, so haben wir $S=S'''$, und daher (§. 67.)

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3}{2} \\ \gamma &= \frac{3}{2} \gamma = 9 \\ e &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

und aus der dritten Columne dieser Tabelle

$$+m = \frac{36\alpha - 13\gamma + e}{24}$$

$$-n = \frac{9\alpha - 10\gamma + e}{30}$$

$$+p = \frac{4\alpha - 5\gamma + e}{120}$$

dennach

$$\begin{aligned} m &= \frac{33}{200} \\ n &= \frac{12}{25} \\ p &= \frac{13}{1000} \end{aligned}$$

und

$$S''' = \frac{33}{200} T' + \frac{12}{25} T'' + \frac{13}{1000} T'''$$

§. 71.

Da nun

$$T' = A\pi(\pi\mu + \pi'\mu')$$

$$T'' = 2A\pi(p\mu + p'\mu')$$

$$T''' = 3A\pi(PM + P'M')$$

ist, so ist der ganze Raum

$$P'M'MP = \frac{33}{200} A\pi(\pi\mu + \pi'\mu') + \frac{12}{25} A\pi(p\mu + p'\mu') + \frac{13}{1000} A\pi(PM + P'M').$$

u 2

Diese

Diese Formel fängt nun erst bey der siebenten Dignität des x an von dem wahren Inhalt des Segments $P'M'MP$ abzuweichen.

§. 72.

Man kan aber das Convergiere dieser Formeln noch weiter treiben, weil sich der hier betrachtete Fall (§. 66. seq.) auf denjenigen reduciren läßt, den wir oben (§. 45. seq.) betrachtet haben. Es sey HKO eine jede krumme Linie, die Abscissen werden auf VR von A an vor- und rückwärts genommen, und die Ordinaten seyn auf denselben senkrecht. Man mache nun $AR = AV$, und indem man die Ordinaten VH , RO aufrichtet, und die Chorde HCO zieht, so ziehe man sodann hCo durch C mit VR parallel, so wird man auf diese Art die krumme Linie hBo construiren können, die ihren Scheitelpunct in B hat, deren Arc AB ist, und deren Theile auf beyden Seiten dieser Arc einander ähnlich sind, und so wird auch jeder Raum

$$VhBoR = VHBOR$$

seyn. Denn man setze jede Abscisse

$$AQ = x \quad QN = y$$

$$AT = -x \quad TL = n$$

$$Qn = Tl = z.$$

und $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.$

so ist

$$n = a - bx + cx^2 - dx^3 + \&c.$$

Denn

dennoch

$$\frac{y+n}{2} = a + cx^2 + ex^4 + gx^6 + \&c.$$

Nun aber ist

$$\frac{y+n}{2} - \frac{QN+TL}{2} = Ac = Qn - Tl = z$$

dennoch

$$z = a + cx^2 + ex^4 + gx^6 + \&c.$$

Da nun hier lauter gerade Dimensionen sind, so ist die Linie hBo auf beyden Seiten der Linie AB sich selbst ähnlich, — B ihr Scheitelpunct und BC ihre Ase. Ferner ist der Raum

$$ABNQ = \int y dx = ax + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{2}cx^3 + \frac{1}{4}dx^4 + \frac{1}{2}ex^5 + \&c.$$

$$ABLT = \int y dx = ax - \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{2}cx^3 - \frac{1}{4}dx^4 + \frac{1}{2}ex^5 + \&c.$$

folglich der ganze Raum

$$QNBLT = 2ax + \frac{2}{3}cx^3 + \frac{2}{5}ex^5 + \frac{2}{7}gx^7 + \&c.$$

Eben diese Reihe findet sich aber auch für den Raum QnBLT, dennoch sind diese beyden Räume einander gleich. Es ist daher gleichviel, ob man VHBOR oder VhBoR quadriert. Nun läßt sich das Rectangel VhOR für sich berechnen, dennoch hat man nur noch das Segment hCoBh zu quadriren, und für dieses hat man die Gleichung

$$z - a = cx^2 + ex^4 + gx^6 + \&c.$$

welche eben die ist, die wir bey dem oben (§. 45. seqq.) betrachteten Fall zum Grunde

310 IX. Quadratur u. Rectification

legen. Es wird demnach hiedurch ihr Gebrauch vollends allgemein gemacht.

§. 73.

Wenn es hiebei nur darum zu thun ist, das Segment $HBOCH$ zu quadriren, so wird die Lage der Abscissenlinie gleichgültig, und man thut dabei am besten, wenn man sie mit der Chorde HO parallel zieht, oder die Abscissen selbst auf dieser Chorde von dem Mittel C gegen O und H gerechnet nimmt, und die Ordinate senkrecht aufrichtet. Dadurch erhält man den Vortheil, daß das Segment $hBoCh$ sowohl länger als schmähler, und daher aus beiden Gründen die Krümmung des Bogens hBo vermindert wird. Ich werde mich aber nicht länger hiebei aufhalten, sondern diesen Betrachtungen noch einige andere beifügen, welche die durch Näherung zu bestimmende Rectification und Quadratur des Circuls besonders betreffen.

§. 74.

Fig. XI. Es sey $AMNB$ ein halber Circul, und man habe die Länge des Bogens AM zu bestimmen. Zu diesem Ende richte man auf AB die Tangente AQ senkrecht auf, und trage den dritten Theil des Bogens AM aus B in N . Man ziehe sodann durch NM eine gerade Linie bis in Q , so wird AQ der Länge des Bogens AM desto näher kommen, von je weniger Graden derselbe ist.

§. 75.

§. 75.

Um dieses zu beweisen, setze man den Halbmesser $AC = 1$, den Winkel $NCB = \omega$,
so ist

$$\begin{aligned} MCA &= 3\omega \\ CMN &= CNM = 2\omega \\ CFN &= \omega, \end{aligned}$$

demnach $CF = 2 \cos. \omega$
 $AF = 1 + 2 \cos. \omega$.

Nun ist $AQ = AF \cdot \tan. \omega$

folglich $AQ = (1 + 2 \cos. \omega) \tan. \omega = \tan. \omega + 2 \sin. \omega$.

Man kann demnach aus dem §. 11. sehen, wie dieser Werth dem wahren Werthe des Bogens näher kömmt. Oder da

$$\begin{aligned} \tan. \omega &= \omega + \frac{1}{3} \omega^3 + \frac{1}{5} \omega^5 + \frac{1}{7} \omega^7 + \&c. \\ 2 \sin. \omega &= \omega - \frac{1}{6} \omega^3 + \frac{1}{120} \omega^5 - \frac{1}{3780} \omega^7 + \&c. \end{aligned}$$

folglich $AQ = 3\omega + \frac{1}{20} \omega^5 - \frac{1}{378} \omega^7 + \&c.$

ist, so sieht man hieraus, daß AQ von der wahren Länge des Bogens AM erst in der fünften Dignität von ω anfängt verschieden zu seyn, oder daß

$$AQ - AM = \frac{1}{240} AM^5 - \frac{1}{41824} AM^7 + \&c.$$

ist.

§. 76.

Man kommt aber der Wahrheit ungleich näher, wenn man auf folgende Art verfährt:
Es sey AMB ein halber Circul, und die Länge Fig. XII.

312 IX. Quadratur u. Rectification

des Bogens A M zu suchen. Zu diesem Ende richtet man A Q auf A B senkrecht auf, und ziehe aus M den Sinus M P. Man theile A P in 5 gleiche Theile, und trage C e aus B in E. Wird nun durch E und M eine gerade Linie E M Q gezogen, so wird A Q noch genauer, als vorhin, der Länge des Bogens gleich fern. Denn setzt man $AC = CB = BD = 1$, $AM = \phi$, so ist

$$CP = \cos. \phi, \quad PM = \sin. \phi$$

$$AP = (1 - \cos. \phi)$$

$$ED = \frac{1}{5} AP = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cos. \phi$$

$$BE = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \cos. \phi$$

$$PE = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \cos. \phi$$

$$AE = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} \cos. \phi.$$

Da nun

$$AQ = \frac{PM \cdot AE}{PE}$$

ist, so ist

$$AQ = \frac{(14 + \cos. \phi) \sin. \phi}{9 + 6 \cos. \phi} = \frac{28 \sin. \phi + \sin. 2 \phi}{18 + 12 \cos. \phi}$$

Da nun

$$\sin. \phi = \phi - \frac{1}{2 \cdot 3} \phi^3 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \phi^5 - \kappa.$$

$$\sin. 2 \phi = 2 \phi - \frac{8}{2 \cdot 3} \phi^3 + \frac{32}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \phi^5 - \kappa.$$

$$\cos. \phi = 1 - \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \phi^4 - \kappa.$$

ist, so findet sich, wenn man diese Reihen in der Formel A Q setzt, und die Theilung vornimmt

$$AQ =$$

$$AQ = v - \frac{1}{2700} v^3 + \text{c.}$$

so, daß also der Unterschied zwischen A Q und dem Bogen A M sich erst in der 7ten Dignität des Bogens zu äußern anfängt. Und wenn auch der Bogen $v = 1$ wird, so ist dieser Unterschied dennoch nur $\frac{1}{2700}$ Theil des Halbmessers. Nimmt man aber den Bogen um die Hälfte kleiner, so wird der Fehler bey jeder Bisection 128 mal geringer. Wenn demnach die Länge eines Circulbogens durch Constitution zu bestimmen ist, so ist die hier angegebene so leicht und so genau man es verlangen kann.

§. 77.

Werden aber die beyden erst angegebene Constructionen mit einander verglichen, so findet sich ohne Mühe, daß auch bey der letztern Construction der Bogen B N von dem dritten Theile des Bogens A M gar unmerklich verschieden ist, und daß man folglich dadurch einen Bogen sehr genau in 3 Theile theilen kann. Denn wenn je der Bogen A M gar zu groß ist, so darf man nur denselben halbiren, und den dritten Theil von seiner Hälfte suchen, und diese sodann verdoppeln.



