OBSERVATIONS

SUR

LES DIVISEURS DES ÉQUATIONS D'UN DEGRÉ QUELCONQUE

QUI PEUVENT ETRE TROUVÉS INDÉPENDAMMENT DE LA SOLUTION DES ÉQUATIONS.

PAR MR. LAMBERT.

§. I.

La difficulté & le peu d'eſpérance de réſoudre des équations d'un degré quelconque a porté les Analyſtes à examiner du moins la nature des équations & à rechercher différens moyens pour trouver les racines, lorſque certaines conditions en facilitoient le chemin. Tel étoit le cas où on peut préſumer que quelque racine eſt rationelle, ou qu'il y en a deux ou pluſieurs d'égales. Et encore, quand on ne peut pas ſavoir d'avance, ſi dans une équation qu'on ſe propoſe de réſoudre, il ſe trouve de ces ſortes de racines, on ne laiſſe pas du moins de faire une tentative, & il y a des cas où elle réuſſit. J'ai obſervé que ſurtout cette opportunité ſe rencontre dans les équations qui ſont le réſultat d'un *maximum* & d'un *minimum* qu'on cherche, & qu'il s'en préſente auſſi dans la théorie des combinaiſons & dans différentes opérations qu'on fait à l'égard des ſuites infinies. Mais il s'en faut de beaucoup que les racines rationelles, & celles qui ſont égales, ſoient les ſeules qui puiſſent être trouvées ſans réſoudre toute l'équation. Il y en a bien d'autres. Et comme dans les Inſtitutions élémentaires de l'Algebre qui me ſont connues, je ne me rappelle pas d'en avoir rien vu, je vais expoſer ici ce que j'ai trouvé en faiſant là-deſſus des re-

cher-

cherches. Je commencerai même par les racines rationelles. On ſait qu'on ne les a cherchées qu'en tâtonnant, & que toutes les fois que l'équation en avoit plus d'une, il falloit trouver chacune ſéparément.

§. 2. Il y a cependant moien de remédier à ce double inconvénient. Pour cet effet il n'y a qu'à réſoudre le dernier terme de l'équation en ſes diviſeurs. Enſuite on regarde chacun de ces diviſeurs comme une racine d'une équation, qui ſera d'un degré égal au nombre de ces diviſeurs. Cette équation ſe formera ſans peine. Or je dis que ſi l'équation propoſée a une ou pluſieurs racines rationelles, elle aura un diviſeur commun avec l'équation formée des diviſeurs de ſon dernier terme. Ce diviſeur commun peut être trouvé ſans peine, & il ſera d'un degré égal au nombre des racines rationelles de l'équation propoſée. Soit p. ex. l'équation

$$0 = x^5 - 8x^4 + 20x^3 - 22x^2 + 15x - 6.$$

Or les diviſeurs du dernier terme ſont 1, 2, 3, 6. Formant donc les racines

racines	$0 = x - 1$	$0 = x - 3$
	$0 = x + 1$	$0 = x + 9$
	$0 = x - 2$	$0 = x - 6$
	$0 = x + 2$	$0 = x + 6$

qui donnent

$$0 = x^2 - 1$$
$$0 = x^2 - 4$$
$$0 = x^2 - 9$$
$$0 = x^2 - 36,$$

on aura l'équation

$$0 = x^8 - 50x^6 + 553x^4 - 1800x^2 + 1296.$$

Cette équation ſe trouve avoir avec l'équation propoſée le diviſeur commun $0 = x^2 - 3x + 2$

dont les deux racines, pour être rationelles, doivent être 1, 2.

§. 3. Lorſque dans ce procédé on ſait d'avance que toutes les racines ſont poſitives, alors on n'a pas beſoin de prendre les diviſeurs du dernier terme négatifs. C'eſt ainſi que, dans l'exemple que je viens de propoſer, il eût ſuffi de prendre les diviſeurs poſitifs 1, 2, 3, 6, & d'en former l'équation

$$0 = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 72x + 36.$$

§. 4. Lorſqu'il arrive que le dernier terme a un grand nombre de diviſeurs, on ſait qu'en augmentant ou en diminuant ſes racines d'une ou de pluſieurs unités, on peut réduire l'équation à une autre dont le dernier terme a le moins de diviſeurs qu'il ſera poſſible, juſques-là même que ſi l'équation propoſée n'a point de facteur rationel, on peut la changer de plus d'une maniere en ſorte que ſon dernier terme devient un nombre premier; ce qui n'arrivera pas toutes les fois que l'équation a un ou plus d'un facteur rationel, à moins qu'à l'exception d'un ſeul tous les autres ne ſoient égaux, ou qu'ils n'ayent au moins le dernier terme égal. Et même dans ce cas il eſt requis qu'en rabaiſſant ce terme à l'unité, le terme de l'autre facteur devienne nombre premier.

§. 5. J'obſerve encore qu'avant d'employer la méthode que je viens d'indiquer, on fait bien de voir ſi l'équation qu'on ſe propoſe n'a point de racines égales. Car, outre que ces racines peuvent être trouvées d'elles-mêmes, il eſt clair qu'elles augmenteroient le nombre des diviſeurs du dernier terme ſans néceſſité.

§. 6. Outre les cas où une ou pluſieurs racines ſont rationelles, il arrive fort ſouvent qu'une racine eſt la ſomme ou la différence d'une quantité rationelle, & d'une autre qui eſt ou irrationelle ou même imaginaire. C'eſt ce qui arrive toutes les fois que l'équation eſt diviſible par un facteur rationel du ſecond degré, mais dont les racines ne ſont point rationelles. Mais, lors même que ces racines ſont rationelles, ce facteur du ſecond degré pourra toujours être trouvé. Soit p. ex. l'équation

$$0 = x^3 - 5x^2 + 11x - 7.$$

Fai-

Faisons $x = y + z$, & on aura

$$\begin{aligned} 0 = & \; y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 \\ & - 5y^2 - 10yz - 5z^2 \\ & + 11y + 11z \\ & - 7. \end{aligned}$$

Or, comme z peut également être prise négative, cette équation se divise en deux parties

$$0 = y^3 - 5y^2 + 11y - 7 + (3y - 5)z^2$$
$$0 = (3y^2 - 10y + 11 + z^2)z.$$

La seconde de ces équations donne

$$- z^2 = 3y^2 - 10y + 11.$$

Et cette valeur étant substituée dans la premiere, on aura

$$0 = y^3 - 5y^2 + 9y - 6.$$

Or cette équation a la racine rationelle

$$0 = y - 2.$$

Et cette valeur étant substituée dans l'équation

$$- z^2 = 3y^2 - 10y + 11$$

donne

$$- z^3 = 3$$

d'où l'on tire

$$x = y + z = 2 \pm \sqrt{-3}.$$

On voit bien que dans ce procédé y signifie la moitié de la somme, & z la moitié de la différence de deux racines quelconques d'une équation. Si donc l'équation x est du m degré, on parviendra à une équation y du $m.(m-1):2$ degré, qui aura tout autant de racines rationelles, que l'équation x a de facteurs de la forme

$$0 = x^2 - px + q,$$

où il suffit que p soit rationel.

§. 7.

§. 7. Voici une autre maniere de résoudre ce probleme. Soit l'équation

$$0 = x^m - a x^{m-1} + b x^{m-2} - \text{etc.}$$

Et en dénotant par $\int x^n$ la somme des puissances n des racines, on sait qu'il est

$$\begin{aligned}
\int x &= a \\
\int x^2 &= a\int x - 2b \\
\int x^3 &= a\int x^2 - b\int x + 3c \\
\int x^4 &= a\int x^3 - b\int x^2 + c\int x - d \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Or, en désignant par y la somme de deux racines quelconques, on aura l'équation

$$0 = y^{m(m-1):2} - A y^{m(m-1):2-1} + \text{etc.}$$

Et il sera de même

$$\begin{aligned}
\int y &= A \\
\int y^2 &= A\int y - 2B \\
\int y^3 &= A\int y^2 - B\int y - 3C \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

& réciproquement

$$\begin{aligned}
A &= \int y \\
2B &= A\int y - \int y^2 \\
3C &= B\int y - A\int y^2 + \int y^3 \\
4D &= C\int y - B\int y^2 - A\int y^3 - \int y^4 \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Or j'ai trouvé, en posant pour plus de briéveté

$$m \,.\, \frac{m-1}{2} = n$$

qu'il

qu'il est

$$\int y = (n-1)\int x$$
$$\int y^2 = (n-2)\int x^2 + \tfrac{2}{2}\int x . \int x$$
$$\int y^3 = (n-4)\int x^3 + 3\int x^2 . \int x$$
$$\int y^4 = (n-8)\int x^4 + 4\int x^3 . \int x + \tfrac{6}{2}\int x^2 . \int x^2$$
$$\int y^5 = (n-16)\int x^5 + 5\int x^4 . \int x + 10\int x^3 . \int x^2$$
$$\int y^6 = (n-32)\int x^6 + 6\int x^5 . \int x + 15\int x^4 . \int x^2 + \tfrac{20}{2}\int x^3 . \int x^3$$

etc.

& en général

$$\int y^p = -2^{p-1}\int x^p + \frac{n}{2}\int x^p + \frac{p}{2}\int x^{p-1}\int x + \frac{p}{2} . \frac{p-1}{2}\int x^{p-2}\int x^2$$
$$+ \frac{p}{2} . \frac{p-1}{2} . \frac{p-2}{3}\int x^{p-3}\int x^3 + \text{etc.}$$

Soit p. ex. l'équation

$$0 = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 18x + 9$$

on aura d'abord

$$\int x = 6 \qquad \int x^4 = 68$$
$$\int x^2 = 8 \qquad \int x^5 = 245$$
$$\int x^3 = 18 \qquad \int x^6 = 776.$$

Par là on trouve

$$\int y = 18 \qquad \int y^4 = 352$$
$$\int y^2 = 52 \qquad \int y^5 = 528$$
$$\int y^3 = 144 \qquad \int y^6 = 1472.$$

Et par là enfin

$$A = 18 \qquad D = 1276$$
$$B = 136 \qquad E = 1608$$
$$C = 552 \qquad F = 864,$$

 ce

ce qui donne

$$o = y^6 - 18y^5 + 136y^4 - 552y^3 + 1276y^2 - 1608y + 864.$$

Cette équation se trouve avoir deux racines rationelles

$$o = y - 2.$$
$$o = y - 4,$$

ce qui pour l'équation proposée donne les deux facteurs

$$o = x^2 - 2x + M.$$
$$o = x^2 - 4x + N.$$

Or, pour trouver les derniers termes M, N, on n'a qu'à diviser l'équation

$$o = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 18x + 9$$

par l'un de ces facteurs. Ainsi p. ex. en divisant

$$\begin{array}{r|l|r}
x^2 - 2x + M & x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 18x + 9 & x^2 - 4x + 6 \\
\text{Diviseur} & -x^4 + 2x^3 - Mx^2 & -M \\
\cline{2-2}
 & \quad -4x^3 + 14x^2 - 18x & \text{Quotient} \\
 & \qquad\quad - Mx^2 & \\
 & \quad +4x^3 - 8x^2 + 4Mx & \\
\cline{2-2}
 & \qquad\quad + 6x^2 - 18x + 9 & \\
 & \qquad\quad - Mx^2 + 4Mx & \\
 & \qquad\quad - 6x^2 + 12x - 6M & \\
 & \qquad\quad + Mx^2 - 2Mx + M^2 & \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad - 6x + 9 & \\
 & \text{Résidu} \quad + 2Mx - 6M & \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad + M^2. &
\end{array}$$

Or chaque terme de ce résidu doit être $= o$. De là on obtient

$$M = 3.$$

Et

Et partant on aura en substituant cette valeur

$$\text{le diviseur} \quad o = x^2 - 2x + 3,$$
$$\text{le quotient} \quad o = x^2 - 4x + 3.$$

Et voilà les deux facteurs de l'équation proposée, qu'il s'agissoit de trouver. Le premier n'a point de racines rationelles. Le second en a deux, qui auroient pu être trouvées indépendamment de ce procédé. Mais ici je ne me suis servi de cette équation qu'en forme d'exemple.

§. 8. Comme de la façon que je viens d'indiquer on peut, de chaque équation x, en tirer une autre y telle que chaque racine y est la somme de deux racines x, je reprendrai l'équation

$$o = x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 18x + 9.$$

Soient ses racines

$$\begin{aligned} o &= x - \alpha \\ o &= x - \beta \\ o &= x - \gamma \\ o &= x - \delta; \end{aligned}$$

& il est clair qu'on aura pour y les six équations

$$\begin{array}{lll} o = y - \alpha - \beta & o = y - \alpha - \gamma & o = y - \alpha - \delta \\ o = y - \gamma - \delta & o = y - \beta - \delta & o = y - \beta - \gamma, \end{array}$$

& partant les facteurs du second degré

$$\begin{array}{ll} o = y^2 & - \alpha y + (\alpha + \beta) \,.\, (\gamma - \delta) \\ & - \beta \ldots \\ & - \gamma \ldots \\ & - \delta \ldots \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} o = y^2 & - \alpha y + (\alpha + \gamma) \, (\beta + \delta) \\ & - \beta \ldots \\ & - \gamma \ldots \\ & - \delta \ldots \end{array}$$

$$o = y^2 - \alpha y + (\alpha + \delta)(\beta + \gamma)$$
$$ - \beta \ldots$$
$$ - \gamma \ldots$$
$$ - \delta \ldots$$

Or le second terme de chacun de ces facteurs est la somme des racines de l'équation proposée, & partant $= 6$. De la sorte nous avons les trois facteurs

$$o = y^2 - 6y + M'$$
$$o = y^2 - 6y + M''$$
$$o = y^2 - 6y + M'''$$

dont le produit doit être égal à l'équation

$$o = y^6 - 18y^5 + 136y^4 - 552y^3 + 1276y^2 - 1608y + 864.$$

Or on voit aisément que les derniers termes M', M'', M''' peuvent être regardés comme des racines d'une équation cubique

$$o = M^3 - \lambda M^2 + \mu M - \nu.$$

En multipliant donc les trois facteurs ensemble, le produit sera

$$\begin{array}{l} o = y^6 - 18y^5 + 108y^4 - 216\ y^3 + 36M'y^2 - 6M'M''.y + M'M''M''' \\ + M' .. \ - 12M' .. + 36M'' .. - 6M'M''' .. \\ + M'' .. \ - 12M'' .. + 36M''' .. - 6M''M''' .. \\ + M''' .. - 12M''' .. + M'M'' .. \\ + M'M''' .. \\ + M''M''' .. \end{array}$$

ce qui donne

$$\begin{array}{l} o = y^6 - 18y^5 + 108y^4 - 216y^3 + 36\lambda y^2 - 6\mu y + \nu \\ - \lambda \ldots - 12\lambda \ldots + \mu\ .. \end{array}$$

Donc

Donc en comparant les termes on aura

$$108 + \lambda = 136$$
$$216 + 12\lambda = 552$$
$$36\lambda + \mu = 1276$$
$$6\mu = 1608$$
$$\nu = 864.$$

D'entre ces égalités chacune des deux premieres donne $\lambda = 28$. La cinquieme $\nu = 864$, la quatrieme $\mu = 268$, & ces valeurs conviennent encore à la troisieme. Il sera donc

$$o = M^3 - 28M^2 + 268M - 864.$$

Cette équation se trouve avoir la racine rationelle

$$o = M - 8,$$

& encore les deux racines imaginaires

$$o = M - 10 - \sqrt{-}$$
$$o = M - 10 + \sqrt{-8},$$

de sorte que les trois facteurs sont

$$o = y^2 - 6y + 8$$
$$o = y^2 - 6y + 10 + \sqrt{-8}$$
$$o = y^2 - 6y + 10 - \sqrt{-8}.$$

De là on tire les 6 valeurs de y

$$y = 2$$
$$y = 4$$
$$y = 3 \pm \sqrt{(-1 \pm \sqrt{-8})}$$

ou bien, toute réduction faite,

$$
\begin{aligned}
y &= 2 \quad . \quad . \quad . \quad . &&= \alpha + \beta \\
y &= 4 \quad . \quad . \quad . \quad . &&= \gamma + \delta \\
y &= 2 + \sqrt{-2} &&= \alpha + \gamma \\
y &= 4 - \sqrt{-2} &&= \beta + \delta \\
y &= 4 + \sqrt{-2} &&= \alpha + \delta \\
y &= 2 - \sqrt{-2} &&= \beta + \gamma.
\end{aligned}
$$

D'où il suit

$$
\begin{aligned}
\gamma &= 1 \\
\delta &= 3 \\
\alpha &= 1 + \sqrt{-2} \\
\beta &= 1 - \sqrt{-2}.
\end{aligned}
$$

Voilà donc les quatre racines qu'il s'agissoit de trouver.

§. 9. Lorsque l'équation x proposée est du 6^{me} degré, l'équation y sera du 15^{me}. Soient les racines

$$
\begin{aligned}
0 &= x - \alpha \qquad & 0 &= x - \delta \\
0 &= x - \beta \qquad & 0 &= x - \varepsilon \\
0 &= x - \gamma \qquad & 0 &= x - \zeta,
\end{aligned}
$$

on aura pour y les valeurs suivantes

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
\alpha + \beta & \alpha + \gamma & \alpha + \delta & \alpha + \varepsilon & \alpha + \zeta \\
\gamma + \delta & \beta + \varepsilon & \beta + \zeta & \beta + \delta & \beta + \gamma \\
\varepsilon + \zeta & \delta + \zeta & \gamma + \varepsilon & \gamma + \zeta & \varepsilon + \delta
\end{array}
$$

Or la somme de celles de chaque colonne est la somme de toutes les racines x. Cela fait que l'équation y est résoluble en cinq facteurs du troisieme degré

$$o = y^3 - ay^2 + M'y - N'$$
$$o = y^3 - ay^2 + M''y - N''$$
$$o = y^3 - ay^2 + M'''y - N'''$$
$$o = y^3 - ay^2 + M^{IV}y - N^{IV}$$
$$o = y^3 - ay^2 + M^{V}y - N^{V}$$

dont le ſecond terme eſt le même que celui de l'équation propoſée

$$o = x^6 - ax^5 + bx^4 - \text{etc.}$$

§. 10. On trouvera de la même maniere, qu'une équation du 8^me degré étant propoſée, l'équation y qui en réſulte, ſera réſoluble en 7 facteurs du quatrieme degré, qui auront au ſecond terme le même coëfficient que l'équation propoſée. Mais il s'en faut de beaucoup que les coëfficiens des autres termes ſe déterminent auſſi aiſément que je viens de le faire à l'égard de l'équation du 4^me degré. Je paſſerai donc à conſidérer des facteurs d'une autre eſpece, & qu'on rencontre aſſez fréquemment.

§. 11. Lorſqu'une équation quelconque

$$o = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$$

peut être diviſée par un facteur de la forme

$$o = m + nx^2 + px^4 + qx^6 + \text{etc.}$$

où tous les expoſans ſont des nombres pairs, je dis que ce facteur peut toujours être trouvé. Pour cet effet on n'a qu'à partager l'équation en deux parties

$$o = A + Cx^2 + Ex^4 + \text{etc.}$$
$$o = Bx + Dx^3 + Fx^5 + \text{etc.}$$

& le facteur

$$o = m + nx^2 + px^4 + qx^6 + \text{etc.}$$

ſera

ſera le diviſeur commun de chacune de ces deux parties. Car en regardant l'équation

$$o = A + Bx + Cx^2 + \text{etc.}$$

comme le produit de

$$o = m + nx^2 + px^4 + \text{etc.}$$
$$o = a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.}$$

ce produit ſera la ſomme des deux produits ſuivans:

$$o = (a + cx^2 + ex^4 + \text{etc.}) \cdot (m + nx^2 + px^4 + \text{etc.})$$
$$+ x(b + dx^2 + fx^4 + \text{etc.}) \cdot (m + nx^2 + px^4 + \text{etc.}).$$

Or le premier de ces produits donne tous les expoſans pairs

$$A + Cx^2 + Ex^4 + \text{etc.}$$

& le ſecond tous les expoſans impairs

$$Bx + Dx^3 + Fx^5 + \text{etc.}$$

Et chacun eſt ſéparément $= o$, en ce qu'il a

$$o = m + nx^2 + px^4 + \text{etc.}$$

pour facteur.

§. 12. Ainſi p. ex. l'équation

$$o = x^6 - 5x^5 + 2x^4 + 20x^3 - 22x^2 - 10x + 12,$$

qu'on ſuppoſe avoir un facteur de dimenſions paires, ſe réſoud en

$$o = x^6 + 2x^4 - 22x^2 + 12$$
$$o = 5x^5 + 20x^3 - 10x.$$

Et ces deux équations aiant

$$o = x^4 - 4x^2 + 2$$

pour facteur commun, il eſt clair que ce facteur diviſera encore toute l'équation.

§. 13.

§. 13. Si donc une équation a deux racines égales, mais dont l'une est positive tandis que l'autre est négative, elles seront

$$o = x + a$$
$$o = x - a.$$

Et le produit étant

$$o = x^2 - a^2$$

& par conséquent un facteur de dimension paire, il est clair que, par la méthode que je viens d'indiquer, il peut être trouvé.

§. 14. Cette méthode s'étend encore à tous les facteurs de la forme

$$o = m + nx^{\lambda} + px^{2\lambda} + qx^{3\lambda} + \text{etc.}$$

Soit p. ex. l'équation

$$o = x^{10} - 2x^9 + 3x^8 - 7x^7 + 11x^6 - 9x^5 + 14x^4 - 19x^3 + 6x^2 - 8x + 10.$$

Qu'on la suppose avoir un facteur de la forme

$$o = m + nx^3 + px^6 + \text{etc.}$$

Je dis qu'elle se partagera en trois parties

$$o = x^{10} - 7x^7 + 14x^4 - 8x$$
$$o = 2x^9 + 11x^6 - 19x^3 + 10$$
$$o = 3x^8 - 9x^5 + 6x^2$$

qui auront ce facteur pour diviseur commun. Or ce diviseur commun se trouve être

$$o = x^6 - 3x^3 + 2.$$

Il est donc clair qu'il divisera aussi toute l'équation.

§. 15. On pourra aussi se servir de cette méthode pour changer une équation en sorte qu'elle ait une racine positive égale à une racine négative. Soit p. ex. une équation du 4^{me} degré

$$o = x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d.$$

Qu'on ſuppoſe la ſomme de deux de ſes racines $= 2q$, & en faiſant

$$x = y + q$$

on aura

$$\begin{array}{llllll}
o = y^4 & + 4qy^3 & + 6q^2y^2 & + 4q^3y & + q^4 \\
 & - a \,.. & - 3aq \,.. & - 3aq^2 \,.. & - aq^3 \\
 & & + b \,.. & + 2bq \,.. & + bq^2 \\
 & & & - c \,.. & - cq \\
 & & & & + d.
\end{array}$$

Cette équation aura une racine poſitive égale à une négative. Il ne s'agit donc que de trouver la valeur de q. Or on voit bien que l'équation propoſée étant du quatrieme degré, ce ſera de 6 manieres différentes que ſes racines peuvent être priſes deux à deux, & que par conſéquent q ayant ſix valeurs, on parviendra à une équation du 6^{me} degré. Pour la trouver, nous n'aurons qu'à partager l'équation y en deux parties conformément à ce que j'ai dit au §. 11. Il ſera donc

$$\begin{array}{llll}
o = y^4 & + 6q^2.y^2 & + q^4 & = - y \left\{ \begin{array}{ll} 4qy^2 & + 4q^3 \\ - a \,.. & - 3aq^2 \\ & + 2bq \\ & - c \end{array} \right\} \\
 & - 3aq \,.. & - aq^3 & \\
 & + b & + bq^2 & \\
 & & - cq & \\
 & & + d &
\end{array}$$

D'où l'on tire

$$- y^2 = \frac{4q^3 - 3aq^2 + 2bq - c}{4q - a}$$

& en ſubſtituant cette valeur, il ſera

$$o = \left(\frac{4q^3 - 3aq^2 + 2bq - c}{4q - a}\right)^2 - (6q^2 - 3aq + b)\left(\frac{4q^3 - 3aq^2 + 2bq - c}{4q - a}\right)$$
$$+ q^4 - aq^3 + bq^2 - cq + d.$$

Ce qui, toute réduction faite, donne

$$\begin{array}{lllllll}
0 = 64q^6 & - 96aq^5 & + 48a^2q^4 & - 32abq^3 & + 8a^2bq^2 & - 2a^2cq & + abc \\
 & & + 32b\,.. & - 8a^3\,.. & + 4ac\,.. & + 2ab^2\,.. & - c^2 \\
 & & & & + 4bb\,.. & + 8ad\,.. & - a^2d \\
 & & & & - 16d\,.. & &
\end{array}$$

Cette équation est assez singuliere en ce qu'en posant $a = 0$, elle se réduit à la forme cubique

$$\begin{array}{lllll}
0 = 64q^6 \;\bullet & + 32bq^4 \;\bullet & + 4bbq^2 \;\bullet & - c^2 \\
 & & - 16d\,.. &
\end{array}$$

Or a étant le second terme de l'équation proposée, il est clair qu'il peut toujours être fait $= 0$. Et voilà ce qui rend les équations du quatrieme degré réduisibles à une équation du troisieme. J'observe ensuite qu'on peut faire $2q = r$, & il sera

$$\begin{array}{lllllll}
0 = r^6 & - 3ar^5 & + 3a^2r^4 & - a^3r^3 & + acr^2 & - aacr & + abc \\
 & & + 2b\,.. & - 4ab\,.. & + 2a^2b\,.. & + abb\,.. & - cc \\
 & & & & + bb\,.. & + 4ad\,.. & - a^2d \\
 & & & & - 4d\,.. & &
\end{array}$$

ou en faisant $a = 0$

$$\begin{array}{llll}
0 = r^6 & + 2br^4 & + bbr^2 & - c^2 \\
 & & - 4d\,.. &
\end{array}$$

Or r est la somme de deux racines de l'équation proposée. Si donc toutes les racines x sont réelles, il est clair que les six valeurs de r le seront aussi. Et s'il y a deux valeurs de x imaginaires, il y en aura quatre de r. Il en sera de même lorsque toutes les racines x sont imaginaires. Mais dans ce cas les quarrés de r auront des valeurs réelles. Car faisant

$$x = a \pm \sqrt{(a^2 - b)}$$
$$x = a \pm \sqrt{(a^2 - c)}$$

Qq 2 on

on aura pour r les valeurs ſuivantes

$$r = + 2a$$
$$r = - 2a$$
$$r = + \surd(a^2 - b) + \surd(a^2 - c)$$
$$r = + \surd(a^2 - b) - \surd(a^2 - c)$$
$$r = - \surd(a^2 - b) + \surd(a^2 - c)$$
$$r = - \surd(a^2 - b) - \surd(a^2 - c).$$

Or, en multipliant $\surd - 1 \,.\, \surd + 1$, on a $\surd - 1$

$$\surd - 1 \,.\, \surd - 1 \quad \cdots\cdot \surd + 1$$
$$\surd + 1 \,.\, \surd + 1 \quad \cdots\cdot \surd + 1.$$

Et par - là ce que je viens de dire s'établit ſans difficulté. Donc, en faiſant

$$rr = v,$$

l'équation

$$o = v^3 + 2bv^2 + bbv - c^2$$
$$- 4dv$$

aura trois racines réelles, ſoit que toutes les racines x ſoient réelles, ſoit qu'il n'y en ait aucune qui le ſoit.

§. 16. Il y a encore une méthode fort générale pour toutes les équations qui ont un facteur d'un degré inférieur quelconque, mais dont tous les coëfficiens ſont rationels. Ces ſortes de facteurs peuvent toujours être trouvés. Pour indiquer cette méthode je me contenterai d'en faire l'application à une équation du quatrieme degré. Car pour les degrés plus élevés la méthode ne differe qu'en ce qu'elle devient plus prolixe. Soit donc p. ex. l'équation

$$o = x^4 - 9x^3 + 25x^2 - 22x + 6;$$

il s'agit de voir ſi elle a un diviſeur de la forme

$$x^2 - ax + b$$

de

de ſorte que les coëfficiens a, b ſoient rationels. Pour cet effet on n'aura qu'à diviſer l'équation par cette formule, & on trouvera le quotient

$$\begin{aligned} = x^2 - 9x &+ 25 \\ + ax &- b \\ &- 9a \\ &+ aa \end{aligned}$$

& le réſidu ſera

$$\begin{aligned} = -22x &+ 6 \\ + 9bx &- 25b \\ - 2abx &+ bb \\ + 25ax &+ 9ab \\ - 9a^2x &- a^2b \\ + a^3x.& \end{aligned}$$

Or, comme ce réſidu doit être $= 0$, pour chacune des racines x, il eſt clair que l'un & l'autre terme devient ſéparément $= 0$. De là on aura

$$b = \frac{22 - 25a + 9a^2 - a^3}{9 - 2a}$$

&

$$0 = b^2 - b\,(25 - 9a + a^2) + 6$$

d'où l'on tire

$$0 = a^6 - 27a^5 + 293a^4 - 1629a^3 + 4873a^2 - 7407a + 4460.$$

On n'aura donc qu'à voir ſi cette équation a une ou plus d'une racine rationelle. Or elle ſe trouve avoir les deux racines

$$0 = a - 4$$
$$0 = a - 5.$$

Et par là on trouve les valeurs répondantes de b

$$0 = b - 2$$
$$0 = b - 3.$$

Donc les facteurs seront

$$0 = x^2 - 4x + 2$$
$$0 = x^2 - 5x + 3.$$