ESSAI DE TAXÉOMÉTRIE

ou sur la mesure de l'Ordre.

PAR M. LAMBERT.

§. 1. Quoique, depuis le renouvellement des Lettres, les Mathématiques ayent été enrichies de plusieurs parties, par l'application qu'on en a faite à différens objets de physique, il s'en faut de beaucoup qu'on ait également réussi dans ce qui regarde les objets métaphysiques. Ces objets paroissent moins traitables, & il n'est pas même facile d'en indiquer la cause. Il faudroit pour cet effet remonter à l'origine des idées abstraites, afin de mieux connoitre celles qu'on traite dans la Métaphysique, & surtout dans l'Ontologie. Je n'exposerai pas ici les recherches que j'ai faites là-dessus. Elles forment un assés gros Volume. Mais je rapporterai néanmoins quelques phénomenes, qui se sont présentés comme d'eux-mêmes dans ces recherches. Le premier est, que j'ai remarqué que quand un philosophe croit avoir bien discuté & arrangé les sujets de ses recherches, c'est ordinairement de façon que le géometre, bien loin de pouvoir tout de suite y appliquer le calcul, se voit obligé de remanier ces sujets, tout comme si le philosophe n'y avoit pas touché. Il arrive même que les recherches du philosophe servent plutôt à l'égarer qu'à l'éclairer. On n'a qu'à parcourir les ouvrages de physique écrits par ceux qui, encore dans le siecle passé, s'en sont tenus à Aristote & aux dogmes scholastiques, & en les comparant avec les ouvrages physico-mathématiques qui ont paru depuis, on trouvera un grand nombre d'exemples qui éclairciront ce que je viens de dire. Mais il n'est pas difficile de s'en convaincre par des considérations générales. On sait que le géometre demande des homogénéités, vû qu'il n'y a que les quantités homogenes, qui soient susceptibles d'addition & de soustraction, ou qui admettent le *plus* & le *minus*. Mais ce n'eſt pas là ce que le philoſophe recherche principalement. On trouve à la vérité chez les ſcholaſtiques que de tems en tems ils ont tâché d'établir, quels objets admettent le *plus* & le *minus*, ou le *magis* & le *minus*, & quels ſont ceux qui ne l'admettent pas? Mais outre qu'ils ne l'ont pas fait partout, ils ſe ſont contentés de l'indiquer, ſans en tirer parti. Enſuite ce fut la mode de ne plus les lire, & les métaphyſiciens qui vinrent après eux, bien loin de pourſuivre ces recherches, s'attacherent plus aux *généralités* qu'aux *homogénéités*. Mais il arrive malheureuſement que les idées les plus générales comprennent ce qu'il y a de plus hétérogene & s'y étendent. Voici le ſecond phénomene.

§. 2. Nous devons aux langues & à leur pauvreté, ſinon les idées, du moins les termes métaphyſiques. D'abord ces termes ne déſignoient que des objets individuels & ſenſibles. Peu à peu on les appliqua aux objets ſemblables, & à force de reſſemblance, on parvint à donner un même nom à des objets de plus en plus moins reſſemblans. De là les noms génériques. Mais il falloit encore les rendre métaphoriques, & les transférer même au monde intellectuel, aux idées abſtraites. On voit bien qu'en tout cela les homogénéités, auxquelles il auroit fallu s'attacher, furent perdues de vue au point qu'il n'en reſta que les plus connoiſſables, telles que ſont *l'eſpace* & le *tems*, & les choſes qui, pour être d'une même eſpece, peuvent être *comptées*. On comprend par-là, d'où vient que l'Arithmétique, la Géométrie & la Chronologie ont été les premieres parties des Mathématiques, & pourquoi l'Aſtronomie, qui ne demandoit que cela, les ſuivit preſque immédiatement.

§. 3. Comme cependant, pour avoir une connoiſſance nette & exemte de toute confuſion, il faut en revenir aux homogénéités, il eſt clair qu'il importe, non ſeulement au géometre, mais même au philoſophe, de les rechercher, & ſurtout celles qui ſe trouvent dans les ſujets ontologiques. Tout ce qui eſt homogene préſente une idée ſimple, & réciproquement les idées ſimples ſuppoſent des objets homogenes. Ainſi en trouvant les unes on trouve les autres. On voit bien qu'à cet égard il faudra faire main baſſe ſur toutes ces généralités métaphyſiques, qui pour s'étendre à des objets hétérogenes,

nous

nous laiſſent toujours dans quelque confuſion. Voici maintenant le troiſieme phénomene.

§. 4. Non ſeulement les langues nous écartent des véritables principes de nos connoiſſances, en nous offrant des termes généraux, qui comprennent une infinité d'hétérogénéités complexes & confuſes; mais elles font bien pis, en ce que tous ces termes ſont tellement accommodés les uns aux autres, qu'au premier abord on croiroit qu'ils s'expliquent & s'éclairciſſent parfaitement bien. On en entrevoit plus ou moins une liaiſon & une dépendance mutuelle, qui les fait paroitre ſuſceptibles d'un arrangement ſyſtématique. Ajoutons encore, qu'un ſemblable ſyſteme devient en quelque façon néceſſaire, auſſi longtems que ces termes ſont en uſage. Mais cet uſage n'aboutit qu'à nous aider à exprimer comme en gros ce que nous penſons, ſans que nous puiſſions toujours éviter le riſque d'être mal entendus. Car il ſe peut très-bien, que ceux à qui nous voulons nous faire entendre, comprennent ſous les mêmes termes de tout autres hétérogénéités que celles que nous voulons indiquer. Or les Mathématiques nous font voir qu'il n'en eſt pas de même à l'égard des homogénéités. Partout où on eſt parvenu à les développer, elles préſentent des idées ſimples, eſſentiellement différentes les unes des autres, très connoiſſables & exemtes de Logomachie. Et voilà ce qu'il faut pour un ſyſteme net & bien arrangé.

§. 5. J'ai cru devoir commencer par cet avant-propos un Mémoire où j'en ferai l'application & où il s'agit de l'ordre, & de la façon d'en meſurer les degrés. Commençons par indiquer ce que les philoſophes en ont dit. Je ne remonterai pas aux ſcholaſtiques, qui traitent cette matiere aſſez confuſément. *Mr. Wolf* ſemble être le premier qui ait entrepris avec quelque ſuccès de répandre plus de jour ſur l'Ontologie, & la plupart des définitions qu'il donne, quoique nominales, ne laiſſent pas d'être aſſés conformes aux regles de la Logique. Surtout la théorie qu'il donne de *l'ordre* & de la *perfection*, eſt fort lumineuſe & ſuſceptible de bien des applications, quoiqu'il ne l'ait pas pouſſée au dernier degré de préciſion auquel elle devroit être portée. La définition qu'il donne de *l'ordre* eſt nominale, en ce qu'il fait conſiſter l'ordre dans *la reſſemblance de ce qui eſt ſimultané & ſucceſſif.* On voit bien que cette définition à été trouvée par voie d'abſtraction de quelques cas particuliers. Car on la retrouvera, par exemple, dans l'ordre d'une bataille, dans celui d'une bibliotheque, dans l'arrangement d'un jardin, d'un palais, des orgues &c. J'ai trouvé cependant que l'idée de reſſemblance qui entre dans cette définition, ne ſemble indiquer qu'une certaine *eſpece* d'ordre, & nommément celle où il y entre de la *ſymmétrie* & de *l'eurythmie*, & où on a principalement égard à la *diſpoſition ſimplement locale* des parties, entant qu'elles occupent, par exemple, le milieu, les extrémités, les places de devant, de deſſus, d'en bas, de derriere, de côté &c. ou entant que rélativement à leur plus ou moins de *reſſemblance* on les range dans certaines *claſſes* &c. On voit bien que tout cela peut ſe faire dans pluſieurs cas indépendamment de la liaiſon que les parties peuvent avoir entr'elles. C'eſt ainſi, par exemple, que dans tous les animaux les membres qui ſont d'un côté, ſe trouvent encore de l'autre, au lieu que les membres qui ſont uniques, occupent le milieu. Voilà un ordre qui eſt ſymmétrique, & qui enviſagé ſous ce ſeul point de vue eſt ſimplement *local*. Il eſt bien vrai que, tout local qu'il eſt, les loix de l'équilibre & d'autres vues fort eſſentielles le rendent néceſſaire, de ſorte que ce n'eſt pas la ſimple beauté de la ſymmétrie qui a porté le Créateur à établir cet ordre dans la ſtructure des corps des animaux & des hommes. Et c'eſt à quoi les poëtes, les orateurs & les artiſtes, qui prennent tant de ſoin de l'ordre local ou de l'arrangement ſymmétrique de leurs ouvrages, pourroient quelquefois avoir plus égard. Le beau doit encore offrir du réel.

§. *6*. Il y a une autre eſpece d'ordre, qui ne doit point être examiné ſuivant les regles de la ſymmétrie, & où il n'eſt pas queſtion d'une ſimple *reſſemblance* ſenſible ou extérieure, mais de *liaiſons* bien plus réelles. Tel eſt l'arrangement des moyens pour parvenir à quelque but qu'on ſe propoſe. Et c'eſt ſurtout dans ce ſens qu'on dit, que tout ce qui ſe fait, doit ſe faire avec ordre. C'eſt dans ce ſens auſſi, que tout ce qui ſe fait dans la nature, ſe fait avec ordre, mais avec un ordre ſi compliqué & bien ſouvent ſi peu ſymmétrique, qu'on croiroit n'y trouver que les effets du hazard.

§. 7. Comme en philoſophie il eſt très eſſentiel de diſtinguer les deux eſpeces d'ordre dont je viens de parler, nous pourrons appeller la ſeconde eſpece *l'ordre légal*, tout comme nous avons appellé la premiere *l'ordre local*, ou bien nous employerons les termes *d'ordre de liaiſon* & *d'ordre de reſſem-*

blance, parce que c'eſt par-là que ces deux eſpeces ſe diſtinguent. Elles peuvent ſe trouver enſemble dans un même objet; mais il arrive bien ſouvent qu'on trouve l'une ſans l'autre. Et ſi *le défaut d'ordre de reſſemblance* devoit être nommé *hazard*, comme en effet c'eſt la ſeule définition valable qu'on puiſſe donner de ce terme, non ſeulement on pourroit dire qu'il y a du hazard dans le monde, mais qu'il y en a même dans la Géométrie. Car en extrayant, par exemple, la racine quarrée du nombre 12 au moyen d'une ſuite décimale 3, 46410, 16151, 37754, 58705, 48926, 83011, 74473, 38856, 10507, 62067, 12561, 11613, 95890, 38660, 33817, 60007, 41622, 92373, 51449, 71513, 48 &c. il eſt clair qu'il y a dans ces nombres un *ordre de liaiſon*, & que chacun y occupe néceſſairement ſa place; mais il eſt également vrai auſſi, qu'il n'y a abſolument point *d'ordre de reſſemblance*, & qu'ils ſe ſuccedent comme jettés au hazard. Tous les chiffres s'y rencontrent autant de fois l'un que l'autre, & cela auroit également lieu s'ils avoient été jettés au ſort ou produits au hazard. Auſſi le calcul des probabilités y eſt parfaitement applicable, quoique *l'ordre de liaiſon* qui regne dans ces nombres, ait une néceſſité géométrique. Et cela me paroit mériter d'autant plus d'attention, que ſans la différence qu'il y a entre ces deux eſpeces d'ordre, les calculs de probabilité ne ſeroient gueres applicables aux cas où on les applique depuis qu'ils ont été inventés. Mais retournons à nos définitions.

§. 8. L'uſage que Mr. Wolf & ſes ſucceſſeurs ont fait de la définition de l'ordre qu'il a donnée, c'eſt que non ſeulement on en a déduit pluſieurs propoſitions qui peuvent être d'uſage, mais on a encore tâché d'indiquer le *plus* & le *moins* qu'il peut y avoir dans différens ordres. Ils ont établi que l'ordre eſt d'autant plus grand, qu'il y a plus de reſſemblances, & qu'il s'y trouve plus de parties reſſemblantes. Avouons que cette conſéquence, à ne la conſidérer que philoſophiquement, paroit fort naturelle. Il n'y eſt queſtion que de *parties* & de *reſſemblances*. Mais en Métaphyſique il s'en faut de beaucoup que tout ce qui eſt déſigné par un même nom, ſoit auſſi homogene que le géometre le demande. Il y a là encore bien à trier. Feu Mr. Baumgarten, qui parmi les philoſophes allemans s'eſt aquis beaucoup de célébrité, a donné dans ſa Métaphyſique des *principia matheſeos* *intenſorum*, où il traite d'une façon aſſés ſemblable la plupart des idées métaphyſiques. Voici en propres termes, ce qu'il dit de l'ordre: *Ordo minimus eſt minima in conjunctione identitas. Ergo quo major eſt conjunctionis identitas, hoc major ſit ordo, donec ſit maximus, ubi maxima conjunctionis identitas, id eſt, ubi plurima maxima toties tantumque conjunguntur eodem modo, quoties quantumque poſſunt.* On peut dire que cela pourroit paſſer pour la vie commune, où il ne s'agit que d'eſtimer en gros le plus ou moins d'ordre qu'il y auroit en certains cas. Il me ſemble cependant que *l'identité* n'admet point de degrés intenſifs, & qu'ainſi la *major identitas* doit être eſtimée par le nombre des choſes identiques; & de cette maniere la *minima identitas* eſt l'identité de deux choſes à l'égard d'un ſeul attribut. Mais quand même on accorderoit tout cela, nous ſommes encore aſſés éloignés de la *meſure* de l'ordre. Nous allons voir que pour y parvenir il faut une toute autre méthode, & que bien loin de s'arrêter à ces ſortes de généralités qui renferment les cas les plus hétérogenes, il faudra marcher pas à pas, afin d'aller du plus ſimple au plus compoſé, & de meſurer chaque eſpece d'ordre de la façon qu'elle doit être meſurée. Je ne dirai pas juſqu'où je pouſſerai ces recherches; mais je croirai toujours avoir franchi le pas le plus difficile, en ce que j'aurai franchi le premier. Je dirai donc que c'eſt ſurtout à *l'ordre de reſſemblance*, qui eſt purement local, que je m'attacherai dans ce Mémoire. Il eſt plus ſenſible que *l'ordre de liaiſon*, qui a outre cela des principes plus néceſſaires & d'une toute autre nature. Ainſi, toutes les fois que je parlerai de l'ordre, c'eſt *l'ordre de reſſemblance* qu'il faudra entendre, à moins que je ne déſigne expreſſément l'ordre de liaiſon. Ce qui étant préſuppoſé, je dirai que *l'ordre le plus ſimple* c'eſt *l'ordre linéaire*, en ce qu'il n'a qu'une ſeule *dimenſion locale*. Telle eſt, par exemple, une ſuite d'arbres qui bordent une allée, telle eſt une ſuite de colonnes ou d'arcs qui ſoutiennent un aqueduc. Telle eſt la mélodie d'un air qu'on chante, & tel eſt encore chaque diſcours qu'on prononce. En tout cela, comme dans une infinité d'autres cas, l'ordre, qu'on peut appeller *ordre de ſucceſſion*, eſt ſimplement linéaire. Voyons maintenant ce qu'on doit y conſidérer.

§. 9. Qu'on ſe figure une ſuite d'objets rangés en ligne droite, ou pour parler plus généralement, en *ſucceſſion linéaire*. Si ces objets ſont abſolument reſſemblans les uns aux autres, il eſt indifférent lequel ſera le premier, le ſecond &c. & toute la différence qu'on pourra encore faire, regarde les intervalles qui pourront ſéparer les objets. Ces intervalles pourront être égaux, ou inégaux, & il eſt clair que dans ce dernier cas, la ſymmétrie demande des rapports qui admettent beaucoup de variations, ſuivant les différentes vues qu'on pourra ſe propoſer. Mais ſi les objets ne ſont point abſolument ſemblables, leur différence entrera pareillement en ligne de compte, & encore en ce cas les regles de la ſymmétrie pourront être applicables. Je me borne ici à en faire mention. Il reſte encore un autre point, qui n'eſt pas du reſſort de la ſymmétrie; c'eſt le *rang* ou la dignité que les objets, qu'il s'agit de ranger, pourront avoir, & qui demande un arrangement qui y ſoit conforme. On ſait que ce cas a lieu dans pluſieurs ſolennités, où il ſe forme des *proceſſions* qui doivent être arrangées ſuivant le rang ou la dignité des perſonnes. Il s'y mêle quelquefois des bizarreries gothiques, & bien ſouvent il y ſurvient des diſputes, tant pour ce qu'il y a de local dans l'arrangement, que ſurtout pour ce qui regarde l'évaluation de chaque qualité dont les dignités ſont compoſées. Ce dernier point n'entre pas dans le plan de ce Mémoire. J'admettrai donc les dignités comme déterminées, & il s'agira de voir, comment, dans chaque arrangement, les degrés ou plutôt les défauts de l'ordre peuvent être évalués.

§. 10. D'abord il eſt clair qu'on numérote les places en ſorte qu'elles quadrent avec les numéros des dignités. Et cette convenance ou cet accord des numéros correſpondans ou homologues eſt ce qu'on appelle le *rang*. Quand tout eſt arrangé de façon que les numéros conviennent, l'ordre eſt *abſolu*. C'eſt une *unité*, qui reſte abſolument telle. Mais ſi dans l'arrangement il y a des *qui pro quo*, alors il y a des *rangs bleſſés*, & voilà ce qui ſe calcule. Le défaut d'ordre s'accroit ſuivant une double dimenſion. D'abord il eſt plus grand en raiſon du nombre des places dont un objet eſt mis en arriere. Enſuite ce défaut s'aggrave encore en raiſon de la dignité de l'objet qu'on a mis en arriere. Il eſt donc en raiſon compoſée de la dignité & du nombre des places. Mais ce n'eſt pas tout; car on manque également en mettant un objet de moindre dignité à la place d'un objet plus éminent. On lui fait plus d'honneur qu'il ne lui en convient, & comme cela entre également dans le compte du *qui pro quo*, la ſomme des défauts d'ordre en doit être augmentée. Si bien donc que pour avoir cette ſomme il faut multiplier la dignité de chaque objet déplacé, par le nombre des places dont il a été avancé ou reculé, & la ſomme de ces produits ſera celle des défauts, & indiquera en même tems le degré de repréhenſibilité du déſordre.

§. 11. Après avoir trouvé cette regle, je n'ai pas manqué de l'appliquer à un exemple qui ne fût pas trop prolixe. Par les principes du calcul des permutations on ſait que quatre objets peuvent être tranſpoſés ou changer de place en 24 manieres différentes. J'ai donc numéroté les 4 places, & en donnant aux objets les dignités équidifférentes 1, 2, 3, 4, qui dans cet exemple ſont arbitraires, j'ai calculé les défauts d'ordre, ou les degrés de leze-rang, pour toutes les 24 tranſpoſitions poſſibles. Les voici ſuivant l'ordre des défauts.

Arrangemens.	Défauts.	Arrangemens.	Défauts.	Arrangemens.	Défauts.	Arrangemens.	Défauts.
1 2 3 4	0	3 1 2 4	9	2 4 3 1	13	4 2 1 3	17
2 1 3 4	3	2 1 4 3	10	3 2 4 1	13	4 1 2 3	18
1 3 2 4	5	1 3 4 2	11	2 8 2 3	15	3 4 2 1	19
1 2 4 3	7	1 4 3 2	12	3 1 4 2	15	3 4 1 2	20
2 3 1 4	7	2 3 4 1	12	4 2 3 1	15	4 3 2 1	20
3 2 1 4	8	1 4 2 3	13	4 1 3 2	17	4 3 1 2	21

Ces défauts ſont calculés d'après la regle que je viens de donner, & qui n'a point de difficulté. C'eſt ainſi, par exemple, que pour le dernier arrangement on aura:

4 eſt tranſpoſé de 3 places, ce qui fait . .	12.	$= 4 \cdot 3$
3 . . . . . . d'une place	3	$= 3 \cdot 1$
1 . . . . . . de 2 places	2	$= 1 \cdot 2$
2 . . . . . . de 2 places	4	$= 2 \cdot 2$
La ſomme eſt	21.	

J'obſerve en paſſant, que dans les ſix cas où le No. 4. eſt à ſa place, les défauts ſont les mêmes que lorſqu'il n'y a que trois objets; & comme ces défauts ſont 0, 3, 5, 7, 8, 9, on voit qu'ils ſont beaucoup moins grands. La raiſon en eſt claire; c'eſt que le No. 4. fait un grave perſonnage, & le nombre des places eſt pareillement augmenté d'une unité.

§. 12. Dans le cas que je viens d'expoſer, on voit que ce ne ſont pas les degrés de l'ordre, mais bien ceux des défauts, qui doivent être évalués. Chaque objet doit occuper la place qui répond à ſa dignité, & dès que cela eſt, tous les rangs ſont obſervés & l'ordre eſt abſolu, en ſorte qu'alors il n'y a rien à calculer. Car le nombre des objets & des places ne produit tout au plus qu'une ſérie ou une proceſſion plus ou moins longue ou nombreuſe, & ſi c'eſt une ſolennité elle en peut devenir plus pompeuſe. Mais tout cela n'en rend l'ordre ni plus ni moins grand, dès qu'il eſt abſolu, ou qu'il n'y a point de rang bleſſé. Mais dès qu'il y en a, il eſt clair que les déplacemens peuvent être comptés, & qu'ils s'aggravent encore en raiſon des dignités lézées par ces déplacemens. Du reſte il y a encore d'autres cas où, au lieu de ce qu'on croiroit d'abord devoir être calculé, on trouve que c'eſt tout le contraire qui doit l'être. C'eſt ainſi, par exemple, que lorſqu'il s'agit des degrés de la vue diſtincte, ce ne ſont pas ces degrés, mais les degrés de confuſion qui doivent être calculés. Car la vue abſolument diſtincte eſt une unité abſolue, comme l'ordre abſolu des rangs. L'un & l'autre a lieu partout où la confuſion, ou le défaut d'ordre, eſt $= 0$.

§. 13. Mais paſſons à d'autres cas où l'ordre abſolu eſt une unité, qui pour les degrés inférieurs admet des fractions. Ces cas ſont ceux où les objets qu'il faut mettre en ordre ont leurs places aſſignées, mais en ſorte que pour les remplir dignement ils doivent répondre en tout aux conditions attachées à chaque place. Tel eſt, par exemple, le cas d'une bibliotheque bien rangée. Les livres s'y claſſifient d'abord ſuivant les ſciences; enſuite on a égard à leur ancienneté, au format, à la reliure &c. Et il eſt clair que ſi chaque livre ſatisfait à toutes ces conditions, il occupera ſa place par tous les titres, & la bibliotheque ſera abſolument bien arrangée. L'ordre dans lequel elle ſe trouve ſera cette unité abſolue dont je viens de parler. Elle ne ſauroit devenir plus grande, quoiqu'elle admette des fractions; & ces fractions expriment les degrés inférieurs de l'ordre, qui aura lieu lorſqu'il y aura des exceptions à faire, c'eſt à dire, lorſque les livres d'une même claſſe ne ſatisfont pas à toutes les conditions.

§. 14. Obſervons cependant que quoique cette unité ſoit abſolue dans tous les cas, elle ne laiſſe pas de dépendre d'autant d'unités qu'il y a de regles à obſerver. Et ſi ces regles ne ſont pas d'une même importance, ces unités ne ſauroient non plus être priſes ſur une même échelle, mais ſur des échelles proportionellement plus ou moins grandes, de ſorte qu'après qu'on a fait le calcul, il faut y joindre la réduction que demande la diverſité des échelles. Voici maintenant comment ce calcul doit être fait, & pour plus de clarté retenons l'exemple des livres & de la bibliotheque.

§. 15. Suppoſons que le nombre des livres ſoit $= n$, & que chaque livre doive ſatisfaire à 3 conditions, dont l'importance ſoit déſignée par a, b, c. Je dis d'abord que le produit $n(a+b+c)$ eſt l'unité abſolue. Et ſi tous les livres ſatisfont à ces conditions, chacun ſéparément, l'ordre ſera pareillement abſolu. Enſuite je remarque qu'il y a toujours moyen d'arranger les livres en ſorte que du moins ils ſatisfaſſent tous à la condition principale, qui ſoit a. Suppoſons donc qu'ils ne ſatisfaſſent pas tous aux deux autres conditions b, c, mais qu'il y en ait

m qui y ſatisfaſſent,
p qui ne ſatisfaſſent qu'à la condition b,
q qui ne ſatisfaſſent qu'à la condition c,
r qui ne ſatisfaſſent à aucune de ces deux conditions.

Il eſt clair que l'ordre ne ſera pas abſolu, mais qu'il ſera d'autant plus petit que les nombres p, q, r ſeront plus grands. Or, pour trouver ce degré inférieur, il faut multiplier le nombre de chaque eſpece par la ſomme des valeurs a, b, c, aſſignées aux conditions auxquelles elles ſatisfont, ce qui donne

$$m(a+b+c)+p(a+b)+q(a+c)+ra;$$

& la ſomme de ces produits étant diviſée par $n(a+b+c)$, qui marque l'unité abſolue, on aura la fraction

$$\frac{m(a+b+c)+p(a+b)+q(a+c)+ra}{n(a+b+c)}$$

qui

qui exprime la valeur de l'ordre de la bibliotheque arrangée de la façon que nous venons de ſuppoſer.

§. 16. S'il s'agiſſoit de calculer la valeur de l'ordre qui ſe trouve dans la verſification, on procéderoit de la même maniere. Dans chaque vers les places pour les ſyllabes longues & breves ſont aſſignées, & c'eſt au poëte à arranger ſon vers en ſorte que la condition à l'égard de chaque place ſoit remplie. La Langue offre des ſyllables de trois ou quatre longueurs différentes, au lieu que le vers n'en veut que de deux eſpeces. Et ſi le poëte remplit ces places en ſorte que ſon poëme ſoit bientôt achevé, il eſt clair qu'on trouvera ſouvent pour la valeur de l'ordre, non l'unité abſolue, mais une fraction aſſés petite. Il y a une remarque aſſés ſemblable à faire à l'égard du nombre oratoire des périodes. Il faut que l'harmonie qui doit s'y faire ſentir ſoit conforme au ſujet, & quelques membres de la période étant donnés, les autres en ſont d'autant moins arbitraires, ſi on veut que la période ſoit bien arrondie, & que l'ordre ou l'arrangement des paroles & des phraſes ſoit abſolu. Il en eſt de même de l'arrangement des différentes parties d'une théorie, lorſqu'on veut que l'ordre y ſoit abſolu. Il s'agit, dans ce cas, non ſeulement d'éviter les redites, mais ſurtout de faire en ſorte que tout ce qu'on établit ſoit précédé de ce qui eſt requis pour l'entendre, pour s'en convaincre, & pour l'exécuter lorſqu'il s'agit de la pratique. Tel eſt, ou peu s'en faut, l'ordre qui regne dans les Élémens d'*Euclide*. Mais ſi à cet égard on repaſſe la plupart des Inſtitutions de Chymie, on y trouvera un ordre d'un degré bien inférieur; & quand il s'agit des écrits où l'ordre eſt $= 0$, c'eſt aux alchymiſtes qu'il faut s'adreſſer. Le calcul, dans tous ces cas & dans beaucoup d'autres, eſt à très peu près le même. Tout ſe réduit à évaluer les degrés d'importance des regles auxquelles chaque partie doit ſatisfaire. J'obſerve ſeulement que dans les écrits théorétiques il peut arriver que toutes les regles concourent à aſſigner ſa place à chaque énoncé. Dans ces cas les défauts d'ordre s'évaluent ſuivant les déplacemens. Et comme chaque énoncé peut être regardé comme d'autant plus important que ſa place eſt plus près du commencement, il eſt clair que ſon déplacement s'aggrave par ſon degré d'importance; & voilà ce qui rend le calcul parfaitement ſemblable à celui que nous avons donné ci-deſſus pour les rangs.

§. 17. Mais il se peut aussi que les regles ne s'accordent pas à assigner une même place à chaque objet, & que les déplacemens puissent être comptés. Dans ces sortes de cas il se peut que l'une des regles l'emporte de façon qu'elle doit être absolument observée. Mais si cela n'est pas, & que chaque regle garde ses droits, il est clair que, de quelque façon que l'objet soit placé, l'ordre ne sera pas absolu, mais qu'il y aura des défauts qu'il convient de calculer. Pour cet effet il faut d'abord évaluer l'importance de chaque regle. Ce degré doit être multiplié par la distance qui est entre l'objet & la place que la regle lui assigne, & la somme de tous ces produits marquera le degré de défaut d'ordre qui, suivant l'arrangement qu'on a fait, peut être plus ou moins considérable. De là il suit que, quand il n'y a que deux regles, on manque le moins quand on s'en tient à celle qui est de plus grande importance. Quand il y en a plusieurs, c'est ordinairement à une des intermédiaires qu'il faut s'en tenir, à moins que celle qui demande la place la plus avancée ou la plus reculée ne l'emporte en importance sur la somme des degrés d'importance de toutes les autres. Comme dans ce calcul la distance de l'objet de la place que chaque regle lui assigne, se prend toûjours positivement, de quelque côté de cette place que se trouve l'objet, cela fait qu'il n'y est pas question de la continuité; par cette raison le calcul reste toujours numérique, & le changement des signes + & — n'y a pas lieu. Cependant les regles que je viens de donner peuvent être d'usage en plusieurs cas. J'ai observé qu'on les suit assés bien dans les solennités, où il s'agit d'évaluer les prétensions à tel ou tel rang, & où les différens titres font qu'il faut se décider pour l'un aux dépens des autres. Cela arrive également dans l'arrangement d'un systeme, d'un ouvrage théorétique, où les regles de la méthode ne s'accordent pas à assigner une même place à quelque partie du systeme. Toute la difficulté qu'il y a c'est d'évaluer l'importance de chaque regle. Cependant ce que je viens d'établir fait voir que partout où il n'y a que deux regles il suffit de savoir en gros quelle est la plus importante, parce que c'est celle-là qu'il faut suivre. Mais quand il y en a plusieurs, alors sans doute la connoissance exacte du degré d'importance de chacune devient plus nécessaire, surtout où il faut s'en tenir à une de celles qui assignent une place intermédiaire. Du reste il est clair que si plusieurs regles exigent une même place, elles équivaudront à une regle dont l'importance eſt égale à la ſomme de toutes celles qui aſſignent la même place.

§. 18. Éclairciſſons néanmoins ce que nous venons de dire, par le cas où il n'y a que 3 regles.

$$A \ldots\ldots\ldots B \ldots\ldots\ldots C$$
$$\qquad m \qquad\qquad n$$

Soient A, B, C les places aſſignées par chacune des trois regles. Que le degré d'importance ſoit pareillement déſigné par A, B, C. Faiſons m égal au nombre des places ou à l'intervalle AB, & n égal à l'intervalle AC. Soit enfin x la diſtance de l'objet de la place A, de ſorte que cet endroit ſoit quelque part entre A & C. Nous aurons donc

x la diſtance de l'objet de la place A
$m - x$ . . . . B
$n - x$ C

& par conſéquent le défaut d'ordre ſera

$$y = Ax + B(m - x) + C(n - x).$$

Séparons dans cette valeur les parties variables, & nous aurons

$$y = x(A - B - C) + Bm + Cn.$$

D'où l'on voit d'abord que, dès que la regle A équivaut à la ſomme des regles $B + C$, on aura $A - B - C = 0$, & par conſéquent

$$y = Bm + Cn$$

c'eſt à dire que dans ce cas il eſt indifférent laquelle des trois places on donne à l'objet; le défaut d'ordre ſera toujours le même.

Mais ſuppoſons, en ſecond lieu, que la regle A l'emporte ſur la ſomme des deux autres; nous aurons $A > B + C$, & ainſi $A - B - C$ étant une quantité poſitive, il eſt clair que le défaut d'ordre ſera le moindre poſſible en faiſant $x = 0$, c'eſt à dire, en plaçant l'objet en A.

Réciproquement, ſi la ſeconde regle B l'emporte ſur les deux autres, la valeur $A - B - C$ eſt négative, ce qui fait que le déſordre diminue juſqu'à ce qu'il ſoit $x = m$. Faiſons donc $x = m + z$, & nous aurons, puiſque x tombe entre B & C,

$$y = A(m + z) + Bz + C(n - m - z)$$

ou bien

$$y = (A + B - C)z + Am + C(n - m).$$

Mais on a

$$n > m$$
$$A + B - C > 0;$$

donc, pour avoir le moindre défaut, il faut faire $z = 0$, c'eſt à dire que l'objet doit être placé en B. Il convient ici de remarquer que ſuivant la loi de continuité il eût fallu faire

$$y = (m + z)A - Bz + C(n - m - z).$$

Mais j'ai déja dit que les diſtances ſe prennent toujours poſitivement; & c'eſt à quoi il faut avoir égard dans les ſubſtitutions qu'on fait. C'eſt auſſi ce qui rend l'énumération des cas plus diffuſe.

Le cas où $C > A + B$, eſt le même que celui où $A > B + C$; car l'une & l'autre des places A, C, eſt à l'extrémité. Ainſi dans ce cas l'objet doit être placé en C.

Mais il reſte encore quelques autres cas. Suppoſons d'abord A plus grande que B ou C ſéparément, mais que A ſoit $< B + C$. Dans ce cas nous aurons

$$y = -x(B + C - A) + Bm + Cn.$$

Ainſi le défaut d'ordre diminue du moins auſſi longtems qu'on place x entre A & B; de ſorte que tout au moins il faut le placer en B. Plaçons donc x entre B & C, en ſorte que $x = m + z$, & nous aurons, comme auparavant,

$$y = A(m + z) + Bz + C(n - m - z)$$

ou bien

$$y = (A + B - C)z + Am + C(n - m).$$

Or

$$A > C$$

& d'autant plus

$$A + B > C$$

&

$$n > m.$$

Donc le défaut d'ordre s'accroit avec z. Donc il faut faire $z = 0$, & placer l'objet en B.

Il eſt clair que la même choſe arrivera dans le cas où C ſurpaſſe en importance chacune des regles A, B ſéparément, ſans cependant les ſurpaſſer conjointement.

A d'autant plus forte raiſon faudra-t-il placer l'objet en *B*, lorſque cette regle l'emporte ſur chacune des regles *A*, *C* priſes ſéparément, quand même elle ne l'emporteroit pas ſur les deux conjointement.

§. 19. Voici donc le réſultat du calcul que je viens de détailler pour les cas de trois regles. Il faut s'en tenir à celle qui a le plus d'importance. Si elle l'emporte ſur les deux autres conjointement, l'objet doit être mis à la place qu'elle aſſigne. Mais ſi les deux autres regles l'emportent, quoique chacune priſe ſéparément ſoit de moindre valeur, alors l'objet occupera la place intermédiaire *B*, quelle que ſoit la regle la plus importante. S'il y a deux regles d'une importance égale, ce ſera encore la place intermédiaire, à l'exception du ſeul cas où la troiſieme regle eſt plus importante que la ſomme des deux égales, & que cette troiſieme regle demande une des places extremes *A*, *C*.

§. 20. On voit aiſément que s'il falloit faire l'énumération des cas où il y a plus de trois regles, cette énumération augmenteroit conſidérablement en prolixité, ſurtout pour ce qui regarde les places intermédiaires. Car ſi l'une de ces regles l'emporte ſur la ſomme de toutes les autres, elle s'arroge l'objet, quel que puiſſe être le nombre des regles. Mais voyons s'il y a moyen d'éviter cette énumération des cas, par quelques conſidérations générales. Suppoſons pour cet effet un nombre quelconque de regles & de places en ſucceſſion linéaire. Suppoſons encore l'objet mis dans quelque place intermédiaire; il eſt clair que quand on l'avance d'un côté, par exemple, du côté droit, le degré du défaut d'ordre change de deux façons. D'abord il diminue à l'égard des places qui ſont du côté droit, & enſuite il augmente à l'égard des places qui ſont du côté gauche. Enfin il augmente encore à l'égard de la place dont il a été avancé du côté droit. Cette derniere augmentation a encore lieu, quand même l'objet ſeroit reculé du côté gauche. Mais à l'égard des autres places il arrive tout le contraire. Car le défaut diminue du côté gauche, tandis qu'il augmente du côté droit. L'effet à l'égard de toutes ces places eſt le même; mais il change du poſitif au négatif, ou réciproquement. Il n'y a que l'effet de la place d'où l'objet a été avancé ou reculé, qui reſte toujours poſitif, bien entendu que l'objet ne ſoit pas avancé ou reculé au delà de la place la plus voiſine de celle qu'il occupoit d'abord. Mais la condition du moindre défaut veut que de quelque côté que l'objet ſoit avancé, le défaut aille en augmentant. De là il ſuit que la place qu'il doit occuper eſt telle que l'effet qu'elle produit dans le déplacement eſt plus grand que celui que produiſent toutes les autres places. Il faut donc que la différence entre la ſomme des degrés d'importance du côté droit & celle du côté gauche, ſoit moindre que le degré d'importance de la place qui donne le moindre défaut. Voilà donc la regle qu'il s'agiſſoit de trouver. Elle eſt indépendante de la diſtance qu'il y a entre les places; il ſuffit qu'il y en ait une quelconque. Mais elle dépend de l'importance des regles, & de plus il faut ſavoir quel eſt l'ordre de ces regles à l'égard des places. Moyennant ces données, on trouvera de la façon ſuivante la place qui répond au moindre défaut. Qu'on prenne la ſomme des degrés d'importance de toutes les regles, afin d'avoir la moitié de cette ſomme. Si donc la regle qui demande la place extreme, par exemple, du côté droit, ſurpaſſe en importance la moitié de cette ſomme, alors elle s'arroge l'objet. Sinon, on prendra encore la ſeconde regle, c'eſt à dire celle qui aſſigne la ſeconde place du côté droit. Et ſi le degré d'importance de ces deux regles l'emporte ſur la moitié de la ſomme de toutes les regles, c'eſt alors à cette ſeconde place qu'il faut mettre l'objet. Sinon, on prendra encore la troiſieme regle, c'eſt à dire celle qui aſſigne la troiſieme place du côté droit, &on verra ſi la ſomme des degrés d'importance de ces trois regles ſurpaſſe la moitié de la ſomme de toutes. Si cela eſt, l'objet doit être mis à cette troiſieme place. Sinon, on prendra encore la quatrieme regle, & ainſi de ſuite. Cela veut donc dire qu'il faut ajouter ſelon l'ordre des places les degrés d'importance d'autant de regles, qu'il en faut pour que la ſomme commence à être plus grande que la moitié de la ſomme des degrés de toutes les regles. Et la regle qui commence à produire cet excédent, eſt celle qui aſſigne la place où l'objet doit être mis pour qu'il y ait le moindre défaut d'ordre. S'il arrive que les deux ſommes ſoient égales, alors il y a deux places équivalentes, ou qui produiſent le même moindre défaut.