

SUR
 LES LORNETTES ACHROMATIQUES
d'une seule espece de verre.

P A R M. L A M B E R T.

Dans les Écrits dioptriques on a ordinairement grand soin de déterminer à des minuties près les rayons & les foyers des verres, afin de rendre, ou nulle, ou du moins aussi petite qu'il est possible, la confusion qui résulte des rayons de différente couleur & de la figure sphérique des verres. C'est ensuite à l'Artiste à travailler ses verres avec toute l'exacritude que la théorie lui prescrit. Je n'ai pas vu que les Artistes soient en état de donner à leurs verres exactement la figure qu'ils voudroient leur donner. Deux verres formés dans un même moule, ont presque toujours des foyers plus ou moins différens. Si l'Artiste veut avoir un verre exactement conforme à la théorie, il se voit ordinairement obligé d'en faire plusieurs, & de choisir ensuite celui qui y répond le mieux. S'il ne veut point perdre de tems, ou si, pour ne point trop hausser le prix de ses Instrumens dioptriques, il ne peut point le faire, ce sera à la théorie à voir s'il n'est pas possible d'y trouver quelque autre remede.

Il y a plusieurs années qu'il s'agissoit ici de faire faire des objectifs achromatiques. L'effet ne répondit pas à l'attente. On alléqua pour raison, que les verres n'avoient ni les foyers ni les sphéricités conformes à la théorie. C'est alors que je proposai de voir, s'il n'y avoit pas moyen de redresser ces défauts en donnant aux verres quelque distance, & sous quelles conditions cela pourroit se faire. Cette proposition ne fut point goûtée, & je ne me vis pas fort pressé d'en faire quelque essai en mon particulier.

Cette idée cependant me revint il y a quelques semaines. Je me mis donc à examiner, si en employant des verres d'une même espece, on ne pourroit

pas, au moyen des distances, produire quelque chose d'achromatique. Je vis que cela étoit possible, quoique cette possibilité eût des bornes fort étroites. Comme cependant il en peut résulter quelque avantage pour les lorgnettes, je vais les examiner dans cette vue.

J'entens ici par Lorgnettes des tubes de quelques pouces de longueur, ayant un objectif convexe & un oculaire concave. Ces fortes de tubes, qu'on appelle Hollandois, & dont l'invention, venue de Hollande, a donné lieu à celle de toutes les autres especes, passent pour les moins parfaits de tous. On ne peut gueres leur donner plusieurs pieds de longueur & un grossissement considérable, parce que le champ apparent deviendroit comme infiniment petit. Aussi tout ce qu'on en fait ce sont des lorgnettes, ou de petites lunettes d'approche de quelques pouces de longueur, propres à être mises en poche. Le grossissement ne va ordinairement qu'au double & rarement au-delà du triple ou du quadruple. Avec tout cela elles ont l'avantage de représenter les objets droits, avec beaucoup de netteté & avec leur clarté naturelle. Elles sont d'ailleurs d'une construction très facile & se vendent à bon prix, ce qui fait que tout le monde & surtout les personnes myopes s'en procurent.

Le champ apparent dans ces fortes de lunettes dépend d'un côté de l'ouverture de l'objectif, de l'autre de l'ouverture de la prunelle. Si le tube doit grossir n fois, le demi-diametre de la prunelle étant posé $= p$, on aura np pour le demi-diametre de l'ouverture de l'objectif, & c'est la moindre grandeur qu'on puisse lui donner, à moins qu'on ne veuille rendre l'objet vu par le tube moins clair qu'il ne paroît à l'œil nud. Dans ce cas la tangente du demi-diametre du champ apparent est p , divisé par la longueur du tube ou par la distance des deux verres.

Ce champ est le plus petit qu'on puisse admettre sans diminuer la clarté de l'objet. Mais on l'aggrandit en donnant plus d'ouverture à l'objectif, ce qui, lorsque le tube ne grossit que du double ou du triple, est toujours possible jusqu'à un certain point. Mais si on fait cette ouverture plus grande que le grossissement ne l'admet, les objets vus vers l'extrémité du champ apparent auront des bords colorés, & l'aberration de sphéricité devient perceptible.

Afin de faire avec toute la facilité possible le calcul pour les rayons de différente réfrangibilité, je désignerai par F, f les foyers de l'objectif & de l'oculaire pour les rayons les plus réfrangibles; & ces foyers multipliés par $(1 + r)$ désigneront les foyers pour les rayons les moins réfrangibles, qui par conséquent seront $(F + Fr)$ & $(f + fr)$.

La valeur de la lettre r est une fraction assez petite pour que, du moins dans la plupart des cas, ses dignités supérieures à la première puissent être omises. L'abréviation qui en résulte pour le calcul, n'est pas cependant la raison principale. La valeur de la lettre r est constante pour une même espèce de rayons; mais elle est variable lorsqu'il s'agit d'avoir égard aux rayons de toute espèce. Si donc il s'agit de les réunir toutes, il faut dans le calcul faire $\equiv 0$ les termes multipliés par r, r^2, r^3 &c. Par là on obtient autant d'équations qu'il y a de dignités de r . Le nombre de ces dignités augmente avec le nombre des verres, & les équations qu'on trouve, offrent assez souvent des conditions très peu favorables au but qu'on se propose. Mais dès que les puissances r^2, r^3 &c. peuvent être omises, uniquement parce que l'effet qui en résulte est imperceptible, on a le choix de déterminer une, deux ou plusieurs des quantités qui entrent dans le calcul, & on les déterminera de manière à pouvoir en retirer quelque avantage pour le tube.

Ensuite je désignerai par k le terme de la vision distincte, c'est à dire, la distance à laquelle l'oeil voit les petits objets distinctement. Cette distance est assez variable. Pour les yeux myopes elle est rarement au-dessous de 3 à 4 pouces, plus ordinairement de 7, 8 à 9 pouces. Pour les yeux presbytes elle peut être de plusieurs pieds, & elle aura même une valeur infinie lorsque l'œil est absolument presbyte.

Enfin, je désignerai par $F - b$ l'intervalle entre l'objectif & l'oculaire, ou la distance des deux verres, de sorte que b exprime la distance de l'oculaire du foyer des rayons les plus réfrangibles de l'objectif.

L'oculaire étant supposé concave, on y applique l'œil immédiatement. Ainsi les rayons doivent être brisés par l'oculaire, comme s'ils partoient d'un point dont la distance de l'oculaire est $\equiv k$, c'est à dire, égale au terme

de la vision distincte. Or c'est dans ce point que les rayons de différente réfrangibilité doivent se réunir.

Les théorèmes de la Dioptrique donnent, pour les rayons les moins réfrangibles qui sortent d'un point de l'axe, l'équation

$$k' = \frac{(b + Fr) \cdot (f + fr)}{b - f + Fr - fr}.$$

En faisant $r = 0$, on a pour les rayons les plus réfrangibles

$$k = \frac{bf}{b - f}.$$

Ces deux quantités doivent être égales; donc

$$k = \frac{bf}{b - f} = \frac{(b + Fr) \cdot (f + fr)}{b - f + Fr - fr};$$

ou bien

$$bf(b - f + Fr - fr) = (b - f) \cdot (b + Fr) \cdot (f + fr).$$

Or, en faisant les multiplications indiquées dans cette formule, & en omettant les termes qui s'entredétruisent, on a

$$0 = (bb - Ff)fr + (b - f)fFrr.$$

Si donc on ne vouloit ou ne pouvoit pas regarder rr comme une quantité assez petite pour être omise, il faudroit faire

$$bb - Ff = 0$$

&

$$b - f = 0.$$

Cette dernière équation donneroit

$$k = \frac{bf}{b - f} = \infty.$$

Elle ne fauroit donc avoir lieu que pour un œil absolument presbyte. Ensuite, en substituant $b = f$ dans la première de ces équations, elle donne $b = f = F$, c'est à dire que les deux verres auront un même foyer, leur distance sera $= 0$, & l'effet des verres quant au grossissement se réduira à rien.

Mais il arrive fort à propos que le second membre de l'équation

$$0 = (bb - Ff)fr + (b - f)fFrr$$

peut être omis, sans qu'on ait besoin de poser $b - f = 0$, & qu'il suffit de faire

$$bb - Ff = 0.$$

Ainsi nous aurons les deux équations

$$bb = Ff,$$

$$bk = kf + bf,$$

& par conséquent

$$f = \frac{bk}{b+k},$$

$$F = \frac{bb + bk}{k}.$$

Supposons par ex. le terme de la vision distincte $k = 8'' = 96'''$; & $b = 4'' = 48'''$, on aura $f = 32'''$ & $F = 72'''$. Le grossissement sera $F : b = \frac{3}{2}$; & la longueur du tube $F - b = 24'''$.

S'il s'agit maintenant de calculer l'effet de la petite quantité omise, on aura d'abord

$$k' = \frac{(48 + 72r) \cdot (32 + 32r)}{16 + 40r},$$

ce qui donne

$$k' = 96 + \frac{288rr}{2 + 5r}.$$

Or en donnant à r la plus grande valeur, elle sera, pour le verre commun, $= \frac{1}{55}$, suivant les recherches de M. *Beguelin*; donc

$$k' = 96 + \frac{288}{5325},$$

ou bien à très peu près

$$k = 96 + \frac{2}{37},$$

de sorte que l'aberration en longueur qui en résulte n'est que $\frac{2}{37}$ d'une ligne. Le diamètre de l'aberration en largeur qui en résulte, se trou-

ve en multipliant $\frac{1}{37}$ par le diamètre de la prunelle, lequel je supposerai d'une ligne, & en divisant le produit par $k = 96''$. Il ne fera donc que $\frac{1}{37} \cdot \frac{1}{96}$, ou, plus exactement, de $\frac{1}{349800}$ ligne, ce qui étant encore divisé par $96''$ donne pour la corde de l'angle sous lequel la bordure colorée tombe dans l'œil, $\frac{1}{349800}$ partie du rayon, ce qui ne fait que $\frac{3}{5}$ d'une seconde. Or dans les tubes astronomiques, construits suivant la Table de M. *Huygens*, on tolere pour les couleurs un angle visuel de près de $30'$, lorsque cet angle est calculé en supposant $r = \frac{1}{55}$. Car la corde de cet angle est toujours $\frac{1}{110} \cdot \frac{10}{11} = \frac{1}{121}$ partie du rayon.

Posons généralement le terme de la vision distincte $k = 1$, & en faisant successivement $b = 1, 2, 3, 4$ &c, les équations trouvées nous donneront la Table suivante:

b	F	f	$F : b$	$F - b$
1	2	1 : 2	2	1
2	6	2 : 3	3	4
3	12	3 : 4	4	9
4	20	4 : 5	5	16
5	30	5 : 6	6	25
6	42	6 : 7	7	36
7	56	7 : 8	8	49
8	72	8 : 9	9	64
9	90	9 : 10	10	81
10	100	10 : 11	11	100
&c.				

Cette Table fait d'abord voir que la longueur du tube $F - b$ croit à très peu près comme le carré du grossissement, & même davantage. Pour peu que l'œil soit presbyte, le tube devient d'une longueur d'autant plus considérable qu'il doit grossir davantage. Ainsi les lunettes achromatiques, faites d'une même espèce de verre, ne sont à proprement parler que pour les myopes, & pour un même grossissement elles se raccourcissent en raison du terme de la vision distincte. Mais aussi ce sont les myopes qui en ont le plus besoin pour voir les objets éloignés aussi distinctement qu'un œil presbyte les voit à une moindre distance. L'avan-

rage qu'ont ces lorgnettes achromatiques, c'est qu'on peut donner à l'objectif une ouverture très considérable, & par là le champ apparent en devient d'autant plus grand. Car les couleurs étant réduites à zéro dans l'axe, seront encore imperceptibles pour les points de l'objet vus hors de l'axe. J'en ai fait l'essai avec un objectif de 24 pouces de foyer & de 7 pouces d'ouverture, c'est à dire, avec un verre ardent fait de glace de miroir & supérieurement bien travaillé par M. *Brander*, célèbre Mécanicien à Augsbourg. J'adaptai à cet objectif un oculaire concave de $4\frac{4}{5}$ pouces de foyer, à une distance de 18 pouces, & j'obtins un grossissement $= 2\frac{1}{2}$, & un champ apparent de 10 degrés. En diminuant l'ouverture d'un demi-pouce, les couleurs qu'on voyoit vers les bords du champ, disparurent entièrement.

Je passerai encore à la considération du cas où on emploie trois verres, afin de voir sous quelles conditions on en peut faire une lorgnette achromatique, lorsqu'on la fait d'une même espèce de verre.

F—————f——C——φ————B——A.

Soit *F* le foyer & la place de l'objectif, que je suppose être convexe. Que l'image formée par ce verre tombe en *A*. En plaçant en *f* une lentille convexe, cette image en *A* sera effacée, & il s'en formera une autre plus proche & plus petite en *B*. Qu'on place en φ un oculaire concave φ, un œil myope verra l'objet comme s'il étoit placé en *C*. L'intervalle *Cφ* est censé donné, puisque c'est la mesure de la longueur de la vue, ou bien la plus petite distance à laquelle l'œil voit les objets & leurs petites parties distinctement. Je la poserai en général $= \lambda$. Nommant donc, comme ci-dessus, φ + $r\phi$ le foyer de l'oculaire concave, & faisant $= c$ l'intervalle qui est entre l'oculaire & l'image *B*, nous aurons

$$c = \frac{\lambda\phi(1+r)}{\lambda - \phi(1+r)},$$

& en rejetant les puissances supérieures de *r*, cette distance sera

$$c = \frac{\lambda\phi}{\lambda - \phi} + r\phi \cdot \frac{\lambda\lambda}{(\lambda - \phi)^2}.$$

Je la poseraï, pour plus de briéveté,

$$c = \frac{\lambda\Phi}{\lambda - \Phi} + rD,$$

de forte que rD dénote ce qu'on appelle l'aberration en longueur.

Nommons maintenant pour les rayons bleus

k la distance entre le verre f & l'image B ,

b la distance entre le verre f & l'image A ,

f le foyer du verre f ,

& nous aurons pour les rayons rouges le foyer $f(1 + r)$ & la distance $k + rD$, & l'autre distance doit être $b + Fr$, puisque dans l'image A l'aberration en longueur dérive de l'objectif F . Cela donne

$$b + Fr = \frac{(k + rD) \cdot f(1 + r)}{f(1 + r) - k - rD},$$

ou bien, en omettant les puissances supérieures de r ,

$$b + Fr = \frac{kf}{f - k} + rf \cdot \frac{Df - kk}{(f - k)^2},$$

ce qui donne les deux équations

$$b = \frac{kf}{f - k},$$

$$F = \frac{Df - kk}{(f - k)^2} \cdot f.$$

Ces deux équations font que, quatre des quantités λ , Φ , k , f , b , F étant données, on trouvera par là les 2 autres. Supposons par ex. qu'on ait λ , Φ , k , f ; on trouvera de suite

$$c = \frac{\lambda\Phi}{\lambda - \Phi},$$

$$b = \frac{kf}{f - k},$$

$$D = cc : \Phi = \frac{\lambda^2\Phi}{(\lambda - \Phi)^2},$$

$$F = f \cdot \frac{Df - kk}{(f - k)^2},$$

& on aura

$$\text{le grossissement } n = \frac{Fk}{bc},$$

$$\text{la longueur du tube } L = F - b + k - c.$$

Mais on n'a pas le choix de prendre pour λ , ϕ , k , f des quantités quelconques, puisqu'il faut satisfaire encore aux conditions que l'ordre des verres exige. Cet ordre demande d'abord

$$k > c,$$

$$F > b,$$

& en substituant les valeurs

$$f \cdot \frac{Df - kk}{(f - k)^2} > \frac{kf}{f - k},$$

d'où l'on tire

$$Dff - fkk > kff - fkk,$$

c'est à dire,

$$D > k.$$

Ainsi k doit toujours être plus grande que c , mais plus petite que D . On aura donc pour k les limites

$$k > \frac{\lambda\phi}{\lambda - \phi},$$

$$k < \frac{\lambda\lambda\phi}{(\lambda - \phi)^2},$$

& ces limites sont d'autant plus étroites, que l'oculaire est plus concave.

Comme cependant la valeur de f reste encore fort arbitraire, nous tâcherons de la resserrer entre des limites plus étroites. Le grossissement étant

$$n = \frac{Fk}{bc},$$

nous aurons, en substituant les valeurs de F , k , b ,

$$n = \frac{1}{c} \cdot \frac{Df - kk}{f - k}.$$

Dans cette expression, c , D ne dépendent que de λ , ϕ , que nous supposons données. Ainsi il n'y a que k , f , qui dépendent de la lentille f . Or il arrive à propos qu'en faisant k variable, le grossissement n varie en sorte qu'il a un *maximum*. Différentiant donc on aura

$$c \, dn = 0 = - \frac{2k}{f-k} + \frac{Df - kk}{(f-k)^2},$$

d'où l'on tire

$$k = f - \sqrt{ff - Df},$$

de sorte qu'ayant λ , c , f , on trouve la valeur de k , qui produit le plus grand grossissement. Je dis *le plus grand*; car en posant

$$k = f - \sqrt{ff - Df} \pm \mu,$$

on trouve

$$n = \frac{2k}{c} - \frac{\mu\mu}{c\sqrt{ff - Df}},$$

& par conséquent un grossissement moins grand que lorsqu'on fait $m = 0$, & par conséquent

$$k = f - \sqrt{ff - Df}.$$

Cette équation nous fait encore voir qu'à moins qu'on ne fasse f négative, ou bien la lentille f concave, on doit toujours prendre $f > D$. Et comme il faut faire $k > c$, il s'ensuit

$$c < f - \sqrt{ff - Df},$$

d'où il résulte que

$$f < \frac{c^2}{2c - D},$$

ou bien, en substituant les valeurs de c , D ,

$$f < \frac{\lambda\phi}{\lambda - 2\phi};$$

de sorte que les limites pour les valeurs positives de f sont

$$f > \frac{\lambda \lambda \phi}{(\lambda - \phi)^2},$$

$$f < \frac{\lambda \phi}{\lambda - 2\phi}.$$

Ces limites sont d'autant plus étroites que l'oculaire est plus concave.

Le grossissement pour le cas du *maximum* est

$$n = \frac{2k}{c};$$

mais il est en général

$$n = \frac{Fk}{bc},$$

d'où résulte

$$F = 2b,$$

de sorte que la lentille f doit être placée au milieu de la distance focale de l'objectif. La longueur du tube se réduit à

$$L = b + k - c = \frac{fD}{f - k} - c = \frac{kD}{D - k} - c.$$

Les limites que nous venons de trouver, tant pour k que pour f , déterminent encore les limites du grossissement & de la longueur du tube. Car k ne pouvant pas être plus petit que c , il s'ensuit qu'en faisant $k = c$, c'est la moindre valeur qu'on puisse donner à k . Dans ce cas les verres f , ϕ , se touchent immédiatement, la longueur du tube devient $= b = \frac{1}{2}F = \lambda$, & le grossissement est simplement $n = 2$, & on a

$$f = \frac{\lambda \phi}{\lambda - 2\phi}.$$

Au contraire, k ne pouvant être plus grand que D , il s'ensuit qu'en faisant $k = D$, c'est la plus grande valeur qu'on puisse donner à k . Dans ce cas le grossissement est

$$n = \frac{2D}{c} = \frac{2\lambda}{\lambda - \phi},$$

& tant le foyer que la distance de l'objectif F deviennent infinis, c'est à dire que ce cas revient à celui où il n'y a que les deux verres Φ ; f , & on a $f = D = k$. Par là le grossissement se réduit à la moitié & se trouve être simplement $= k : c = D : c$, puisqu'en faisant abstraction de l'objectif F , on fait encore abstraction du rapport $F : b = 2 : 1$ qui entre dans l'expression $n = \frac{Fk}{bc}$.

Voici une Table que j'ai calculée en supposant $\lambda = 100$, & en donnant à Φ les valeurs 5, 10, 15, 20, &c.

Φ	c	k	D	f	$\frac{\lambda\Phi}{\lambda - 2\Phi}$	limites de n	
5	$5\frac{5}{8}$		$5\frac{5}{8}\frac{4}{1}$		$5\frac{5}{8}$	2	$2\frac{2}{5}$
10	$11\frac{1}{2}$		$11\frac{1}{2}\frac{8}{1}$		$12\frac{1}{2}$	2	$2\frac{2}{3}$
15	$17\frac{1}{4}$		$20\frac{3}{8}\frac{9}{2}$		$21\frac{3}{4}$	2	$2\frac{6}{7}$
20	25		$31\frac{1}{4}$		$33\frac{1}{2}$	2	$2\frac{2}{3}$
25	$33\frac{1}{2}$		$44\frac{1}{2}$		50	2	$2\frac{2}{3}$
30	$42\frac{1}{2}$		$61\frac{1}{2}\frac{1}{2}$		75	2	$2\frac{6}{7}$
35	$53\frac{1}{3}$		$82\frac{1}{3}\frac{2}{3}$		$116\frac{2}{3}$	2	$3\frac{1}{3}$
40	$66\frac{2}{3}$		$111\frac{1}{3}$		200	2	$3\frac{1}{3}$
45	$81\frac{1}{2}$		$148\frac{1}{2}\frac{1}{2}$		450	2	$3\frac{1}{2}$
50	100		200		infini	2	4
55	$122\frac{2}{3}$		$271\frac{2}{3}\frac{1}{3}$		— 550	2	$4\frac{1}{3}$
60	150		375		— 300	2	5
65	$185\frac{5}{7}$		$530\frac{5}{7}\frac{2}{7}$		— $216\frac{2}{3}$	2	$5\frac{2}{3}$
70	$233\frac{1}{3}$		$777\frac{1}{3}$		— 175	2	$6\frac{2}{3}$
75	300		1200		— 150	2	8
80	400		2000		— $133\frac{1}{3}$	2	10
85	$566\frac{2}{3}$		$3777\frac{2}{3}$		— $121\frac{2}{3}$	2	$13\frac{1}{3}$
90	900		9000		— $112\frac{1}{2}$	2	20
95	1900		38000		— $105\frac{5}{6}$	2	40
100	infini		infini		— 100	2	infini.

J'ai placé les deux colonnes vuides pour k & f , entre celles dont les nombres désignent les limites de ces deux quantités. - On voit que pour tous les cas où $\phi > \frac{1}{2}\lambda$, la valeur positive de f peut, non seulement aller à l'infini, mais même devenir négative. Le grossissement, même pour le cas où on fait $k = D$, croit beaucoup plus lentement que la longueur du tube.

La supposition $\lambda = 100$, sur laquelle les nombres de cette Table sont calculés, convient à la plupart des yeux myopes, lorsqu'on regarde ces nombres comme des lignes du pouce. Car 100 lignes donneront 8 pouces 4 lignes, & c'est ordinairement la distance à laquelle on voit les petits objets distinctement.

Voici maintenant l'ordre du calcul qu'on peut faire pour un oculaire quelconque, mais dont le foyer est plus petit que λ .

On cherche d'abord

$$c = \frac{\lambda\phi}{\lambda - \phi},$$

$$D = \frac{\lambda\lambda\phi}{(\lambda - \phi)^2} = \frac{c\phi}{\phi},$$

$$E = \frac{\lambda\phi}{\lambda - 2\phi},$$

& il faut prendre f en sorte que $f > D$ & $f < E$; ce qui étant fait, on aura

$$k = f - \sqrt{ff - fD}.$$

Mais si au lieu de f on fixe la valeur de k , il faut la fixer en sorte que $k > c$ & $k < D$, & on aura

$$f = \frac{kk}{2k - D}.$$

Ensuite on aura

$$b = \frac{fk}{f - k} = \frac{kk}{D - k} = \frac{ff - f\sqrt{ff - fD}}{\sqrt{ff - fD}},$$

$$P = 2b = \frac{2fk}{f-k} = \frac{2kk}{D-k},$$

$$L = \frac{fD}{f-k} - c = \frac{kD}{D-k} - c,$$

$$n = \frac{2k}{f}.$$

Ces sortes de lorgnettes ou de tubes, quoique faits d'une même espèce de verre, sont achromatiques dans le même sens que les tubes faits de différente sorte de verre. L'aberration de réfrangibilité dans l'axe est réduite à zéro, de sorte qu'il ne reste que l'aberration de sphéricité, qui peut devenir assez sensible, vu la grande ouverture qu'on peut donner à l'objectif. A cet égard on peut avoir recours au même moyen dont on s'est servi à l'égard des tubes composés de deux espèces de verre, c'est de faire des objectifs doublés ou triplés, qui rendent l'aberration de sphéricité = 0.

