II.

Bemerkungen über die scheinbare Bahn der Cometen.

(Observations sur l'orbite apparente des Comètes, Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin Année 1771.)

[352] § 1. Die Astronomen haben bis jetzt mehr Gewicht darauf gelegt, die wahren Bahnen der Cometen zu ermitteln, als die Erscheinungen zu bestimmen, welche man daraus für ihre scheinbaren Bahnen ableiten kann. Man kann zwar, wenn die wahre Bahn bekannt ist, daraus die scheinbare Bewegung sehr leicht ableiten, ja sogar voraussagen, aber man macht dies immer nur für bestimmte Fälle und eine allgemeine Theorie ist daher nicht ausgebildet worden. Man begnügt sich zu wissen, dass drei Beobachtungen zur Berechnung der wahren Bahn nöthig sind, und man hat dafür mehrere Methoden vorgeschlagen, welche alle schliesslich auf Versuche und Annäherungen hinauslaufen. Das ist eine lange Arbeit und daher verdient Alles Aufmerksamkeit, was sie abkürzen kann. In dieser Absicht möchte ich eine allgemeine Theorie der scheinbaren Bahnen vorschlagen und um nicht blos beim Vorschlag zu bleiben, gebe ich hier eine Probe, aus der man wohl ersehen wird, dass es sich lohnt über diese Sache nachzudenken.

§ 2. Wenn die Erde und der Comet sich in geraden Linien mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen würden, so wäre die scheinbare Bahn des Cometen eine sehr einfache und man brauchte keine Theorie; denn er würde einen grössten Kreis der Sphäre beschreiben. Zwei Beobachtungen würden genügen, um die Lage dieses grössten Kreises zu bestimmen und eine dritte wäre nöthig, um die Ungleichförmigkeit der scheinbaren Geschwindigkeit zu ermitteln und damit die ganze scheinbare Bewegung des Cometen. Aber so liegt die Sache in Wirklichkeit nicht. Sehr selten liegen mehr als drei Punkte [**353**] der scheinbaren Bahn genau in einem grössten Kreise; also können weder die Erde noch der Comet sich in gerader Linie und mit gleichmässiger Geschwindigkeit bewegen.

§ 3. Wenn ein Comet sich genau in der Ebene der Ekliptik bewegen würde, so fände seine scheinbare Bewegung ebenfalls in der Ekliptik, also in einem grössten Kreise statt. Aber dieser Fall tritt nicht ein; wenigstens sind bis jetzt alle Cometen ober- oder unterhalb der Ekliptik gesehen worden oder sie haben dieselbe nur in einem Punkte geschnitten. Man weiss sogar, dass die meisten Cometenbahnen sehr starke Neigung haben. Wir können also auch von dem Falle absehen, wo der Comet sich in der Ebene der Erdbahn bewegt.

§ 4. Wenn wir nun auch die scheinbare Bewegung der Cometen in grössten Kreisen nicht zulassen können, so werden uns diese doch von Nutzen sein, indem sie uns als Vergleichsmittel dienen. Betrachten wir die scheinbare Bahn eines Cometen, nehmen darauf zwei Punkte und legen durch sie einen grössten Kreis. Ich behaupte, *wenn die zwischenliegenden Punkte der scheinbaren Bahn auf derselben Seite liegen, wie die zugehörigen Oerter der Sonne, dann ist der Comet weiter von der Sonne entfernt als die Erde und im entgegengesetzten Falle ist er näher.*

§ 5. Da ich hier vorläufig dieses Theorem nur anführe, um den Nutzen der scheinbaren Bahn erkennen zu lassen, so habe ich die näheren Bestimmungen nicht ausgesprochen. Denn es ist nicht gleichgültig, wie die Punkte A, B, C genommen werden; im Gegentheil, es ist angemessen, eine Wahl zu treffen. Aber all' das wird sich besser durch die Analyse zeigen, die mich auf dieses Theorem geführt hat und die ich jetzt auseinandersetzen will, zuerst im Allgemeinen und dann im Besonderen.

§ 6. (Fig. 27.) Sei S das Centrum der Sonne, MN ein Theil der Cometenbahn, Q ein zwischenliegender Punkt, der ungefähr in der Mitte liegt. Zieht man die Sehne MN und die Radienvectoren SM, SQ, SN, so behaupte ich e r s t e n s, dass die Zeiten, die der Comet braucht, um die Bogen MQ und QN zu durchlaufen, sehr nahe im Verhältniss der Stücke Mq und qN der Sehne MN stehen. Denn die Zeiten verhalten sich wie die Flächen der Sectoren MSQ und SQN und daher

[**354**] nahe wie die Dreiecke SMQ und SQN. Da nun diese Dreiecke die Grundlinie SQ gemeinsam haben, und ihre Höhen sich wie Mq zu qN verhalten, so folgt, dass ihre Flächen sich wie die Strecken Mq und qN verhalten, und folglich verhalten sich die Zeiten, die der Comet braucht, um die Bogen MQ und QN zu durchlaufen, ebenfalls sehr nahe wie diese Strecken Mq und qN. Ich bemerke noch, dass man beweisen kann, dass es immer einen Punkt Q giebt, für den dieser Satz streng richtig ist. Aber im Allgemeinen genügt es, den Winkel MSN hinlänglich klein zu nehmen, um den Unterschied unmerklich werden zu lassen.

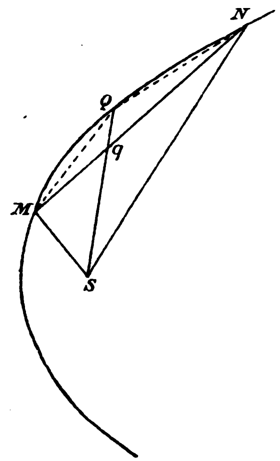

Fig. 27.

§ 7. Zweitens setzen wir voraus, dass für jede Cometenbahn die Zeit, um den Bogen MN zu durchlaufen dieselbe sei und dass sie so klein sei, dass der Winkel MSN 15 bis 20 Grad nicht überschreitet. Wenn dann der Punkt Q ungefähr in der Mitte des Bogens MN liegt, so dass der Pfeil Qq wenig oder gar nicht sich von seinem Maximum unterscheidet, so behaupte ich, dass Qq sehr nahe umgekehrt proportional dem Quadrat von SQ sein wird. Denn da die Krümmung des Bogens MQ eine Wirkung der Gravitation ist, kann man den Pfeil Qq als Wirkung des Falles des Cometen gegen die Sonne betrachten. Es wird also Qq, wenigstens genähert, proportional dem Quadrat der Zeit und umgekehrt proportional dem Quadrat der Distanz SQ sein. Nun ist die Zeit als constant oder gleich für alle Fälle vorausgesetzt; also ist Qq einfach und sehr nahe umgekehrt proportional dem Quadrat von SQ. In Bezug hierauf bemerke ich noch, dass es Punkte Q giebt, wo das Theorem streng gilt. Aber da man diese Punkte nicht immer auswählen kann, halte ich an dem »nahezu« fest, das um so mehr der Wahrheit nahe kommen wird, je weniger spitz der Winkel MqS und je kleiner der Winkel MSN ist.

§ 8. (Fig. 28.) Sei jetzt S das Centrum der Sonne, AC die Bahn der Erde, MN die Bahn des Cometen, so zwar dass der Comet sich in den Punkten M, Q, N befindet, wenn die Erde in A, B, C ist. Wir setzen die Zeitintervalle noch als nahezu gleich voraus. Ziehen wir dann die Sehnen AC und MN und

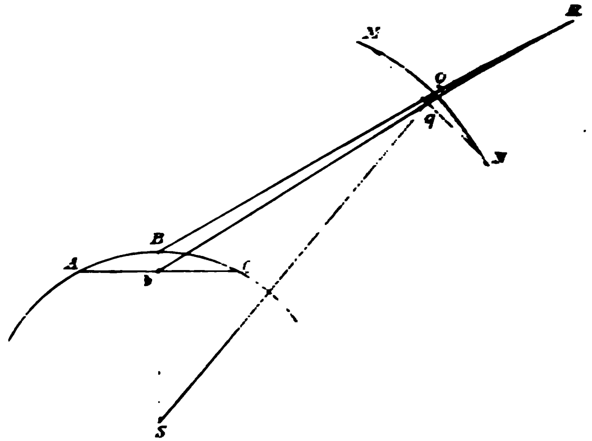

Fig. 28.

[355] die Radienvectoren SB und SQ, dann wird nach dem zweiten Satz § 7 sehr nahe sein:

$$Bb : \frac{1}{SB^2} = Qq : \frac{1}{SQ^2}$$

und dies giebt:

$$Bb : Qq = SQ^2 : SB^2 .$$

§ 9. Nach dem ersten Satze § 6 hat man ebenso sehr nahe

$$Ab : bC = Mq : qN ,$$

da diese Theile der Sehnen sich nahezu wie die Zwischenzeiten verhalten.

§ 10. Und daraus folgt nun, dass wir voraussetzen können, dass die Erde, statt den Bogen ABC zu durchlaufen, die Sehne AbC durchläuft und dass der Comet, statt den Bogen MQN zu durchlaufen, die Sehne MqN durchläuft, beide in gleichförmiger Geschwindigkeit, da die Zeitintervalle, nahe wenigstens, im Verhältniss der Strecken $Ab : bC$ und $Mq : qN$ stehen.

§ 11. In diesem Falle aber wird die scheinbare Bahn des Cometen ein grösster Kreis der Sphäre; und dieser grösste Kreis kann gezeichnet werden mit Hülfe der in A und C angestellten Beobachtungen. Diese beiden Punkte sind dem Bogen ABC und der Sehne AbC gemeinsam. Es wird also nur die in dem Zwischenpunkte B erhaltene Beobachtung von der Voraussetzung geradliniger Bahnen abweichen. Untersuchen wir, in welcher Weise.

§ 12. Offenbar sieht die Erde in B den Cometen in Q in der Richtung der Geraden BQ, und unter der Voraussetzung geradliniger Bahnen wird die Erde in b den Cometen in q in der Richtung der Geraden bq sehen. Wenn also die Geraden BQ und bq parallel zu einander sind, so wird der scheinbare Ort des Cometen in dem einen wie in dem anderen Falle derselbe sein. Im entgegengesetzten Falle werden sie sich von einander unterscheiden. Das wollen wir nun bestimmen.

§ 13. Zunächst sieht man, dass die Punkte b und q, da sie den Geraden SB bez. SQ angehören, in der Ebene des [**356**] Dreieckes BSQ liegen, welches auch die Lage der Cometenbahn sei. Nehmen wir also den Fall, wo die Geraden BQ und bq zu einander parallel sind, so werden wir haben:

$$Bb : Qq = SB : SQ\,.$$

Da aber nach dem zweiten Theorem (§ 7) allgemein

$$Bb : Qq = SQ^2 : SB^2$$

ist, so folgt:

$$SB : SQ = SQ^2 : SB^2$$

oder

$$SQ = SB\,.$$

Also: die Geraden BQ und bq sind nur dann zu einander parallel, wenn der Comet in Q eben so weit von der Sonne entfernt ist wie die Erde. Nur in diesem Falle auch kann der grösste Kreis, der durch die scheinbaren Oerter des Cometen zur Zeit der ersten und dritten Beobachtung hindurchgelegt wird, durch den scheinbaren Ort des Cometen zur Zeit der zweiten Beobachtung hindurchgehen.

§ 14. Nehmen wir weiter an:

$$SQ > SB,$$

dann sieht man nach dem zweiten Satze (§ 7), dass mit noch grösserem Rechte

$$Bb > Qq$$

sein wird. Also nähern sich die Geraden BQ und bq um so mehr, je näher man an Qq kommt, und dies noch um so mehr, als in diesem Falle die Gerade SQ gegen die Gerade BQ geneigter ist als SB. Sie werden also einen Schnittpunkt R haben, welcher jenseits des Cometen in Q liegt. Weiter folgt, dass der Winkel SbR grösser ist, als der Winkel SBR. Und daraus ergiebt sich, dass der scheinbare Ort des Cometen gesehen von der Erde in B weniger weit von der Sonne entfernt scheint, als wenn man ihn vom Punkte b der geradlinigen Bahn in der Richtung der Geraden bq sähe. Der Winkel BRb ist das Maass der Differenz.

[**357**] § 15. Setzen wir allgemein

$$Bb = \frac{n}{SB^2}$$

$$Qq = \frac{n}{SQ^2}$$

so wird:

$$RQ : RB = \frac{n}{SQ^2} \sin SQB : \frac{n}{SB^2} \sin SBQ .$$

Da aber

$$\sin SQB : \sin SBQ = SB : SQ ,$$

so folgt:

$$RQ : RB = \frac{n}{SQ^2} SB : \frac{n}{SB^2} SQ$$

d. h.

$$RQ : RB = SB^3 : SQ^3 .$$

§ 16. In dem Dreiecke BRb kennt man den Winkel SBR, die Seite Bb und den Winkel BRb, welcher die Differenz ist, für die Zeit der zweiten Beobachtung, zwischen der scheinbaren Bahn und dem grössten Kreise, der durch die scheinbaren Oerter des Cometen, gesehen von A und C aus, hindurchgelegt wird. Das Dreieck BRb ist also nach Grösse, Gestalt und Lage gegeben. Da man also die Gerade BR, den Winkel SBR und die Gerade SB kennt, so ist die ganze Frage darauf zurückgeführt, auf der Geraden BR einen Punkt Q so zu finden, dass

$$QR : BR = BS^3 : QS^3$$

wird. Man sieht daraus, *dass die geocentrische Distanz des Cometen BQ bestimmt ist*, wenigstens insofern, als es unsere nur *genähert* richtigen zwei Theoreme (§ 6, 7) zulassen. Man sieht auch, dass diese Formeln allgemein sind, wie auch die Distanz sei. Es muss aber doch ein Wort gesagt werden über den Fall, wo diese Distanz kleiner ist als SB.

[358] § 17. Nehmen wir

$$SQ < SB,$$

so wird der Punkt R, der im vorigen Falle jenseits des Cometen lag, nun diesseits der Erde gegen A fallen. Denn hier ist $Qq > Bb$ und die Gerade SQ ist weniger gegen die Gerade BQ geneigt als SB. Die Geraden BQ und bq entfernen sich also bei der Annäherung an Qq von einander. Daraus folgt, dass der Winkel SBQ grösser wird als der Winkel Sbq und dass folglich der scheinbare Ort des Cometen, gesehen in der Richtung BQ von der Sonne entfernter erscheinen wird, als wenn man ihn in der Richtung bq im Falle geradliniger Bahnen sähe.

§ 18. Diese Resultate können uns nun von den verschiedenen Wendepunkten Rechenschaft geben, die man in der Curve der scheinbaren Bahn wahrnimmt. Das einfachste Mittel, diese zu erkennen, ist, diese Bahn [auf eine Ebene] zu projiciren, indem man das Auge in den Mittelpunkt der Erde versetzt. Denn alle grössten Kreise der Sphäre werden dann durch gerade Linien repräsentirt und umgekehrt jede Gerade repräsentirt einen grössten Kreis an der Sphäre. Die scheinbare Bahn wird durch eine gekrümmte Linie dargestellt, welche einen Wendepunkt gerade da haben wird, wo der scheinbare Ort des Cometen einer heliocentrischen Distanz zugehört, die gleich der Entfernung der Erde von der Sonne ist. Denn in allen Punkten, welche einer grösseren heliocentrischen Distanz entsprechen, wendet die Curve ihre convexe Seite gegen den Punkt der Ekliptik, wo der entsprechende Ort der Sonne ist; und für jede heliocentrische Distanz, die kleiner ist, wenden sie ihre concave Seite gegen die Sonne. Das ist immer so, ausser wenn der Ort der Sonne in der Tangente liegt, die im entsprechenden Cometenort gezogen wird; denn dann hat die Curve auch dort einen Wendepunkt, weil die convexe Seite zur concaven wird. Zuletzt möchte ich noch bemerken, dass diese Curven sehr genau gezeichnet [359] werden müssen, weil häufig ihre Krümmung sehr klein ist, besonders wenn der Comet weiter von der Sonne entfernt ist als die Erde und die Neigung seiner Bahn nicht gross ist.

§ 19. (Fig. 29.) Man kann sich auch der Rechnung bedienen und zwar wie folgt. Es seien ES die Ekliptik, A, B, C drei geocentrische Oerter des Cometen, projicirt auf die Ekliptik, Aa, Bb, Cc die zugehörigen Breiten, S der Ort der Sonne,

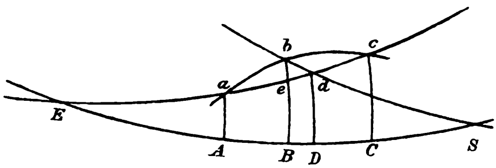

Fig. 29.

der dem in b gesehenen Ort des Cometen entspricht. Man ziehe durch ca einen grössten Kreis der Sphäre, der die Ekliptik in E schneide. Dann handelt es sich zuerst darum, diesen Punkt zu finden und sodann den Winkel aEA. Nennen wir zu dem Ende

$$\begin{aligned} Aa &= \alpha & AE &= \varepsilon \\ Cc &= \gamma & AEa &= \varphi \\ AC &= \lambda \end{aligned}$$

dann wird sein

$$\operatorname{cotg} \varphi = \sin \varepsilon \operatorname{cotg} \alpha = \sin(\lambda + \varepsilon) \operatorname{cotg} \gamma\,,$$

also:

$$\sin(\lambda + \varepsilon) : \sin \varepsilon = \operatorname{tang} \gamma : \operatorname{tang} \alpha\,,$$

woraus:

$$\operatorname{tang}(\varepsilon + \tfrac{1}{2}\lambda) : \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\lambda = \sin(\gamma + \alpha) : \sin(\gamma - \alpha)$$

$$\operatorname{tang}(\varepsilon + \tfrac{1}{2}\lambda) = \frac{\sin(\gamma + \alpha) \operatorname{tang} \frac{1}{2}\lambda}{\sin(\gamma - \alpha)}\,.$$

Hieraus findet man den Bogen $\varepsilon + \frac{1}{2}\lambda$, worauf der Bogen $\varepsilon = AE$ und folglich auch der Winkel φ durch

$$\operatorname{cotg} \varphi = \sin \varepsilon \operatorname{cotg} \alpha$$

sich leicht ergeben.

§ 20. Da die Punkte B und S, ferner die Bogen BS und Bb gegeben sind und der Winkel bBS ein Rechter ist, so findet man den Winkel bSB und die Hypotenuse Sb durch die Formeln

$$\operatorname{cotg} bSB = \operatorname{cotg} Bb \sin BS$$
$$\cos bS = \cos Bb \cos BS\,.$$

[360] § 21. Endlich kennt man im Dreieck EdS die Seite ES und die Winkel dSE und dES und findet daher die Seite Sd durch die Formeln:

$$\operatorname{tang} \frac{ED - DS}{2} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2} ES \sin(dSE - dES)}{\sin(dSE + dES)}$$
$$\tfrac{1}{2} ES - \tfrac{1}{2}(ED - DS) = DS$$
$$\operatorname{cotg} dS = \cos dSD \operatorname{cotg} DS\,.$$

§ 22. Wenn man also findet, dass der Bogen Sd grösser ist als der Bogen Sb, so wird man schliessen, dass der in b gesehene Comet näher an der Sonne ist als die Erde. Dagegen wird er entfernter sein, wenn man den Bogen Sd kleiner findet als den Bogen Sb. Wir bemerken noch, dass die Differenz beider Bogen, nämlich bd, das Maass für den Winkel BRb der Figur 28 ist. Man sieht also, wie dieser Winkel gefunden werden kann.

§ 23. Da alle Folgerungen, welche wir eben aus unseren zwei Sätzen gezogen haben, unter den »sehr nahe«, welche wir zugelassen haben, zu leiden haben könnten, so müssen wir darüber einige Bemerkungen machen. Die erste ist, dass, wenn man den Bogen bd sehr klein findet, obwohl der Bogen AC 15, 20 oder mehr Grad beträgt, man im Allgemeinen schliessen wird, dass die heliocentrische Entfernung des Cometen zur Zeit, wo er sich in b befindet, sehr nahe gleich der heliocentrischen Entfernung der Erde ist; aber man wird nicht mit Sicherheit schliessen, ob sie ein wenig grösser oder kleiner ist. Das hängt in diesem Falle von der Wahl der zwischenliegenden Beobachtung in b ab.

§ 24. Ferner ist die Differenz bd, für ein gleiches Zeitintervall, um so beträchtlicher, je näher der Comet an der Sonne ist, weil dann seine Bahn eine grössere Krümmung besitzt. Wenn der Comet näher an der Erde ist, so trägt dies auch dazu bei, den Bogen bd oder den Winkel BRb (Fig. 28) zu vergrössern, der in Hinsicht auf die beiden Punkte B und b eine Art parallaktischer Winkel ist. Es giebt jedoch in dieser Hinsicht ein *Maximum*. Denn man sieht leicht, dass, wenn alle anderen Umstände dieselben bleiben, der Winkel bRB gleich Null wird, wenn entweder der Winkel [**361**] BSQ gleich 0 oder gleich 180° wird. Nimmt man den Winkel BRb als sehr klein an, so findet man, dass er für dieselben Distanzen SB und SQ ein Maximum wird, wenn

$$\operatorname{tang} BSQ = \frac{SQ^2 - SB^2}{2SQ \cdot SB},$$

weil sich dann die Punkte B, b, Q auf der Peripherie eines Kreises befinden müssen, dessen Mittelpunkt auf der Geraden SQ liegt, oder was auf dasselbe hinauskommt, weil die Punkte B, b, R sich auf der Peripherie eines Kreises befinden, dessen Mittelpunkt auf der Geraden liegt, welche durch R geht und parallel zu SQ ist. Aber man sieht, dass diese Umstände nicht ausgewählt werden können, weil man die Cometen nehmen muss, wie sie sich zeigen.

§ 25. Wir machen noch einige Anmerkungen, wie man die Wahl des Punktes Q treffen muss. Diese Wahl wäre sehr leicht, wenn dieser Punkt das Perihel des Cometen wäre. Aber dieser günstige Umstand kommt nicht vor und kann auch nicht im voraus erkannt werden. Sei also (Fig. 30) S das Centrum der Sonne, A das Perihel der Cometenbahn, die ich als parabolisch voraussetze. MN sei ein beliebiger Bogen. Theilen wir die Sehne MN in zwei gleiche Theile MG und GN und ziehen durch G die Parallele GQ zur Axe. Dann ist das Dreieck MGS gleich dem Dreieck NGS und das Segment MQG gleich dem Segment NQG, also:

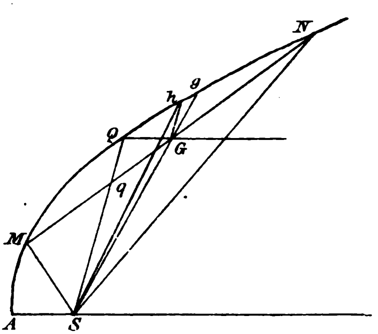

Fig. 30.

$$SMQGS = SGQNS.$$

Dann ziehe man den Radiusvector Sh so, dass das gemischtlinige Dreieck QGg gleich wird dem Sector hSg und man wird haben

$$SMhS = SNhS.$$

Ist nun der Bogen MN nicht sehr gross, so wird Qg als Gerade betrachtet werden dürfen und man bekommt:

$$Sg : Qg = Gg : gh$$

$$gh = \frac{Qg \cdot Gg}{Sg}.$$

[**362**] Daraus sieht man, dass gh eine sehr kleine Grösse ist und dass Gh sehr nahezu parallel zu SQ sein wird.

§ 26. Es sei T die Zeit, welche der Comet braucht, um den Bogen MN zu durchlaufen. Dann habe ich in der Abhandlung: Insigniores orbitae cometarum proprietates, erschienen 1761, gezeigt, dass

$$SQ = \frac{mT}{\sqrt{2GQ}} - \tfrac{1}{3}GQ = \frac{SM + SN}{2} - GQ.$$

In dieser Formel ist die mittlere Distanz der Erde von der Sonne gleich 1 gesetzt und

$$\frac{1}{m} = 116.2648$$

$$m = 0.008\,601\,059\,.$$

Es folgt also:

$$QG = qQ = \frac{m^2 T^2}{2(SQ + \frac{1}{3}QG)^2}$$

oder auch

$$qQ = \frac{m^2 T^2}{2(Sg - \frac{2}{3}QG)^2}.$$

Also ist

$$qQ < \frac{m^2 T^2}{2SQ^2}$$

und

$$qQ > \frac{m^2 T^2}{2Sg^2}.$$

Nun ist

$$qQ > gG;$$

wenn man also

$$gG = \frac{m^2 T^2}{2Sg^2}$$

macht, so wird diese Formel noch genauer sein. Ich schliesse daraus, dass man im Allgemeinen gut thun wird, drei Beobachtungen zu wählen, welche um dasselbe Zeitintervall von einander abstehen. Und dieses Intervall muss noch so klein sein, dass der Winkel MSN 20 Grade nicht übersteigt. Ich lasse noch einige Vorschläge folgen, für die dieselbe Beschränkung [**363**] gilt und deren man sich bei Bestimmung einer Cometenbahn bedienen kann.

§ 27. Nach dem, was ich oben (§ 19) sagte, sieht man (Fig. 29), dass der Bogen $aedc$ des grössten Kreises derjenige ist, den der Comet scheinbar durchlaufen würde, wenn sowohl seine Bewegung wie die der Erde geradlinig und gleichförmig

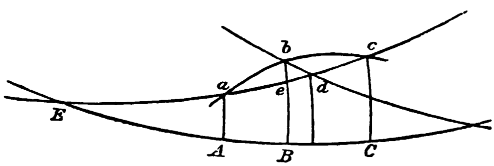

Fig. 29.

wäre, und dass für die Momente der drei Beobachtungen die scheinbaren Oerter des Cometen a, d, c sein würden. Es handelt sich also nur darum, die Länge der Bogen ad und dc mittelst der Bogen EA, EC und des Winkels AEa, die nach § 19 bestimmt werden, zu ermitteln. Sind aber die Bogen ad und dc gefunden, so kann man sie mit den Intervallen der Zeit zwischen den drei Beobachtungen vergleichen, um das Verhältniss der geocentrischen Distanzen des Cometen für die erste und dritte Beobachtung zu bekommen, und zwar folgendermassen.

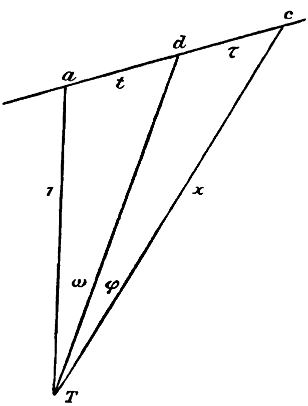

Fig. 31.

§ 28. Man mache (Fig. 31) die Winkel aTd und dTc gleich den Bogen ad und dc von Fig. 29. Nimmt man dann auf der Geraden Ta einen beliebigen Punkt a an, so handelt es sich darum, eine Gerade ac zu ziehen, dass sie die Geraden Td und Tc so schneidet, dass die Strecken ad und dc proportional den Zeitintervallen zwischen den den Punkten a, d, c entsprechenden Beobachtungen werden. Seien diese Zeitenintervalle t und τ, ferner Winkel $aTd = \omega$, $dTc = \varphi$. Macht man $Ta = 1$ und setzt $Tc = x$, so hat man:

$$\sin\omega : ad = \sin adT : aT$$

$$\sin\varphi : dc = \sin adT : cT$$

also

$$\sin adT = \frac{aT \cdot \sin\omega}{ad} = \frac{cT \cdot \sin\varphi}{dc}$$

und folglich

$$cT = aT\frac{dc}{ad} \cdot \frac{\sin\omega}{\sin\varphi}$$

d. h.

$$x = \frac{\tau}{t}\frac{\sin\omega}{\sin\varphi}.$$

[**364**] § 29. Hat man das Verhältniss zwischen aT und cT gefunden, so findet man leicht den Winkel Tac und dann dT oder das Verhältniss dieser Geraden zu aT und cT. Dieses Verhältniss wird nur sehr wenig von dem Verhältnisse der geocentrischen Distanz des Cometen zur Zeit der zweiten Beobachtung zu den beiden anderen geocentrischen Distanzen abweichen. Man findet aber auch sehr nahe die mittlere geocentrische Distanz zur Zeit der zweiten Beobachtung mittelst der Formel des § 16. Man sieht also, dass man auf diese Weise die Versuche, die man zur Ermittelung der Bahn anzustellen hat, bedeutend abkürzen kann. Die ganze übrige Rechnung kann man auf eine einfache successive Annäherung zurückführen, indem man die Formel anwendet (Fig. 30)

$$T = \frac{(SM + SN + MN)^{\frac{3}{2}} - (SM + SN - MN)^{\frac{3}{2}}}{12m},$$

welche ich in dem oben (§ 26) citirten Werke gegeben habe und worin T die Zeit bedeutet, welche der Comet braucht, um den Bogen MN zu durchlaufen. Der Buchstabe m hat dieselbe Bedeutung wie in § 26. Diese Formel ist um so einfacher, als sie keiner anderen Daten bedarf, als der Sehne

MN und der Summe der beiden Radienvectoren SM und SN. Sie gilt für parabolische Bahnen, man kann sie aber leicht auch auf elliptische und hyperbolische Bahnen verallgemeinern. Ich beschränke mich darauf dies hier anzudeuten und den Leser auf das Werk zu verweisen, woraus ich citire, und welches ausserhalb Deutschlands nicht sehr bekannt geworden zu sein scheint.