EXAMEN
d'une espece de Superstition ramenée au calcul des probabilités.

PAR M. LAMBERT.

Je suppose que dans les États de l'Europe où l'Astrologie judiciaire ne remplit plus les almanacs de prédictions sur le tems & sur d'autres évenemens, on n'ignore pas qu'il y en a encore où les almanacs en sont tout remplis. C'est actuellement le cas où l'Allemagne se trouve; non que les personnes éclairées ne méprisent ces chimeres astrologiques, mais parce que le gros de la nation en est fort avide. Un almanac qui en seroit purgé perdroit tout son crédit, & si on omettoit toutes ces prédictions à la fois, il en résulteroit un murmure général & peut-être même une révolte. Tout au moins les faiseurs d'almanacs seroient-ils obligés de se dérober aux yeux du public pour assez longtems.

Dans ce que je viens de dire il n'y a rien d'exagéré. Peut-être même n'ai-je pas tout dit. Il est d'autant plus étonnant de voir le peu de progrès que les connoissances font chés une nation, & même une nation qui se cultive & qui étudie ses intérêts.

C'est un phénomene qui semble assez naturellement mériter quelque examen. On ne sauroit dire que parmi ceux qui consultent les prédictions des almanacs, il n'y en ait aucun qui ne le fasse par une simple stupidité. Une bonne partie d'entr'eux sait très bien que l'almanac leur en impose assez souvent. Mais cela ne suffit pas pour les y faire renoncer. Ils diront, par ex. que le barométre trompe bien souvent aussi, & que nonobstant cela on le consulte. Ils ajouteront qu'on ne sauroit exiger des Astrologues qu'ils sachent tout, & que c'est déjà beaucoup qu'ils ne se trompent pas toujours. Ils se rappelleront même bien des cas où l'almanac avoit prédit le tems, on ne ſauroit mieux. En un mot chaque accompliſſement des prédictions de l'almanac leur donne un nouveau crédit, & fait qu'on pardonne de grand cœur aux faiſeurs d'almanacs toutes leurs mépriſes.

Voilà à peu près ce qu'on m'a dit, & même aſſez ſouvent, de plus fort en faveur des prédictions aſtrologiques des almanacs. J'avois beau alléguer des raiſons générales. J'avois beau dire que les faiſeurs d'almanacs y mettent le tems à tout hazard, en obſervant ſimplement de ſe conformer à ce qu'exige chaque ſaiſon de l'année; que pluſieurs d'entr'eux ne font que copier quelque vieux almanac ou en remettre le ſoin à l'Imprimeur: on ne m'en croyoit point, & les raiſons générales ne faiſoient point d'impreſſion. Une ſeule prédiction, vérifiée par l'évenement, fait plus d'effet que tout cela. A quoi ſe joint encore que le tems qu'il fait eſt toujours interprété en faveur de l'almanac, pour peu que l'un ou l'autre ſoit équivoque. Si le ciel eſt ſimplement couvert, l'almanac devinera juſte ſoit qu'il mette beau tems ou pluie ou couvert. Car le tems couvert eſt douteux & peut incliner au beau auſſi bien qu'à la pluie. Si l'almanac prédit un tems variable, quelques nuées ou des nuages entremêlés de clarté ſuffiront pour regarder comme variable le plus beau ou le plus mauvais tems du monde. Enfin, comme l'almanac n'aſſigne le tems que pour des jours entiers, il eſt fort naturel qu'on lui accorde quelque latitude à cet égard. On pardonne même au faiſeur d'almanacs quand il ne s'eſt trompé que d'un ou de deux jours. On ſe conſole de ce que l'art de prédire le tems n'a pas encore été pouſſé auſſi loin que celui de prédire les éclipſes.

Il me ſemble que c'eſt là plus qu'il n'en faut pour prononcer ſentence de condamnation contre tous ceux qui voudroient bannir des almanacs les prédictions ſur le tems. Je vais maintenant examiner le même ſujet d'une façon plus générale & rélativement aux principes des probabilités. Le public s'en tient à la ſimple comparaiſon des prédictions avec l'évenement. Suppoſons qu'il faſſe cette comparaiſon avec plus de rigueur qu'il ne fait; il s'agit de ſavoir, ſi moyennant cette comparaiſon & faiſant abſtraction de toute conſidération générale, il peut revenir de ſon erreur?

A cet égard il y a trois cas différens, qui se présentent assez naturellement, & qui semblent offrir autant de regles particulieres. 1°. Supposons que l'almanac trompe plus souvent qu'il ne devine juste. Dans ce cas on doit être porté à croire que ses prédictions sont fausses. 2°. S'il trompe aussi souvent qu'il devine juste, la question restera indécise. 3°. S'il devine juste plus souvent qu'il ne trompe, on continuera de le consulter.

Ces trois regles paroissent très justes, & nous n'avons qu'à changer d'objets pour les trouver pratiquées par des personnes éclairées. Car dans tous les cas qui ne sauroient être décidés avec une entiere certitude, on tâche de s'en tenir à ce qui arrive, sinon toujours, du moins le plus souvent. Il n'y a rien là qui ne soit conforme aux regles de la prudence. Je crois avoir vu quelque part & nommément dans les Transactions philosophiques, que le Marquis *Poleni* en a usé ainsi par rapport aux variations du barométre. Il savoit par expérience que le tems ne s'y conforme pas toujours. Cela l'engagea à voir si les exceptions étoient plus fréquentes que l'accord. Il trouva qu'à Padoue il pleut environ deux fois plus souvent lorsque le barométre tombe que lorsqu'il monte. Ainsi dans le dernier cas la pluie est deux fois moins probable que dans le premier.

Avec tout cela les trois regles que je viens de rapporter, admettent des restrictions lorsqu'il s'agit, non des évenemens, mais de leurs causes. S'il y a plusieurs causes qui concourent pour produire & pour empêcher quelque évenement, il est très possible qu'à l'égard de certains évenemens les causes qui les empêchent soient plus fortes & plus fréquentes que celles qui les produisent. Si donc dans ces cas on compare l'évenement simplement avec une des causes qui peuvent le produire lorsque rien ne les empêche, on trouvera que ces causes ne sont que rarement suivies de l'évenement. On sera même porté à les exclure du nombre des causes, à moins qu'on ne les reconnoisse pour telles par d'autres raisons & indépendamment de cet examen. Il en est de même lorsqu'un évenement dû à des causes inconnues revient fort souvent, & que d'un autre côté il y a quelque cauſe qu'on rencontre auſſi fort ſouvent, quoiqu'elle ne ſoit pas la cauſe de l'évenement. Dans ce cas on obſervera rarement la cauſe ſans obſerver en même tems l'évenement, & pour peu qu'on y ſoupçonne quelque liaiſon on fera le paralogiſme de *non cauſſæ ut cauſſæ*. Car tout ce qui peut être déduit de ces ſortes d'obſervations, c'eſt que l'évenement de même que la cauſe s'obſerve très fréquemment, ou bien l'un & l'autre ſont fort ordinaires.

Revenons maintenant aux almanacs & à la façon dont le public en juge. Que le faiſeur d'almanacs ſuive les regles de l'aſtrologie judiciaire, ou qu'il y marque le tems ſuivant ſa fantaiſie, ou enfin qu'il décide par le ſort quels jours il doit mettre beau ou mauvais tems; tout cela revient à peu près au même. Le tems qu'il fait effectivement ne ſuit aucune de ces regles, parce qu'il eſt produit par une infinité de cauſes & varie à peu près comme le bonheur & le malheur dans les jeux de hazard, puiſqu'encore dans ces jeux les cauſes déterminantes varient d'une infinité de manieres.

Suppoſons maintenant que le faiſeur d'almanacs nuance & varie ſes prédictions en ſorte qu'il aſſigne 30 modifications différentes de tems. Donnons encore au tems qu'il fait effectivement 30 modifications différentes. Dans ce cas le public ſeroit bientôt détrompé, parce que l'almanac ne s'accorderoit que très rarement avec le tems qu'il fait. Le calcul qu'on peut faire là-deſſus revient à celui du *jeu de rencontre*, que M. *Euler* a décrit dans les Mémoires de l'Académie de l'Année 1751. Mais comme il n'y a calculé que les cas où une rencontre quelconque fait gagner le jeu, je vais en donner une ſolution générale. Qu'il y ait donc n choſes, & que chacune ait ſa place aſſignée. La queſtion eſt, de combien de manieres elles peuvent être tranſpoſées en ſorte qu'il n'y en ait aucune ou qu'il y en ait 1 ou 2 ou 3 ou 4 ou 5 &c. à leur place. D'abord on ſait que le nombre des cas poſſibles eſt $= 1.2.3.4.5 - - - n$. Enſuite il eſt clair qu'entre ces cas il n'y en a qu'un ſeul où chaque piece ſoit à ſa place. De plus, s'il y en a de déplacées, il ne ſauroit y en avoir moins de deux. Car pour en déplacer une il faut néceſſairement en déplacer une autre. Or ces deux pieces peuvent être priſes de $n \,.\, \frac{n-1}{2}$ manieres différentes. Mais lesquelles que ce ſoit qu'on prenne il n'y a qu'un ſeul moyen de les déplacer, c'eſt de mettre chacune à la place de l'autre. Ainſi le nombre de cas pour 2 pieces déplacées eſt $= n \,.\, \frac{n-1}{2}$.

Paſſons à 3 pieces. Elles peuvent d'abord être choiſies de $n \,.\, \frac{n-1}{2} \,.\, \frac{n-2}{3}$ manieres. Mais il n'y a que deux manieres de les déplacer. Car l'une doit être miſe à la place d'une des deux autres, & celle à la place de laquelle on la met, doit être miſe à la place de la troiſieme. Ainſi le nombre des cas poſſibles pour 3 pieces déplacées eſt $= 2 \,.\, n \,.\, \frac{n-1}{2} \,.\, \frac{n-2}{3}$. En continuant de cette façon on trouvera les cas poſſibles pour 0, 2, 3, 4, 5 &c. pieces déplacées, exprimés par les termes de la ſuite

$$x = 1 + \left(n \,.\, \frac{n-1}{2}\right) + 2.\left(n \,.\, \frac{n-1}{2} \,.\, \frac{n-2}{3}\right) + 9\left(n \text{----} \frac{n-3}{4}\right)$$
$$+ 44\left(n \text{----} \frac{n-4}{5}\right) + 265\left(n \text{----} \frac{n-5}{6}\right) + \&c.$$

dont la ſomme eſt égale au produit $1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5$ - - - - - - n.

Cette ſuite eſt compoſée des termes de la formule binominale de *Newton* multipliés par les coëfficiens 1, 2, 9, 44, 265, 1854, 14833 &c. & ces coëfficiens ſont tels que

$$\begin{aligned}
2 &= 1 \,.\, 3 - 1, \\
9 &= 2 \,.\, 4 + 1, \\
44 &= 9 \,.\, 5 - 1, \\
265 &= 44 \,.\, 6 + 1, \\
1854 &= 265 \,.\, 7 - 1, \\
14833 &= 1854 \,.\, 8 + 1, \\
&\&c.
\end{aligned}$$

On peut encore trouver ces nombres moyennant la suite

$$x = 1 + \left(n . \frac{n-1}{2}\right) + 2\left(n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3}\right) + 9\left(n \text{ - - - - } \frac{n-3}{4}\right)$$
$$+ 44\left(n \text{ - - - - } \frac{n-1}{5}\right) + 265\left(n \text{ - - - - } \frac{n-5}{6}\right) + \&c.$$

en mettant successivement pour n les valeurs 1, 2, 3, 4 &c. Car la somme x étant $= 1. 2. 3 \text{ - - - - } n$, elle est donnée indépendamment de la suite. Cela fait qu'un des coëfficiens 1, 2, 9, 44 &c. peut être regardé comme inconnu. Supposons

$$x = a + b\left(n . \frac{n-1}{2}\right) + c\left(n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3}\right)$$
$$+ d\left(n \text{ - - - - } \frac{n-3}{4}\right) + \&c.$$

en faisant

$n = 1$, on aura $x = 1 \quad = a$,
$\quad 2, \quad x = 1.2 \quad = a + b$,
$\quad 3, \quad x = 1.2.3 \quad = a + 3b + c$,
$\quad 4, \quad x = 1.2.3.4 = a + 6b + 4c + d$,
&c.

ce qui donne

$a = 1$,
$b = 1$,
$c = 2$,
$d = 9$,
$e = 44$,
&c.

& par conséquent

$$x = 1 + \left(n . \frac{n-1}{2}\right) + 2\left(n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3}\right) + 9\left(n \text{ - - - - } \frac{n-3}{4}\right)$$
$$+ 44\left(n \text{ - - - - } \frac{n-4}{5}\right) + \&c.$$

Moyennant

Moyennant cette ſuite on peut former les ſuites particulieres pour chaque valeur de n, en faiſant ſucceſſivement $n = 1, 2, 3, 4$ &c. Ainſi p. ex.

n	x Cas poſſibles.									
1	1	= 1								
2	2	= 1	+ 1							
3	6	= 1	+ 3	+ 2						
4	24	= 1	+ 6	+ 8	+ 9					
5	120	= 1	+ 10	+ 20	+ 45	+ 44				
6	720	= 1	+ 15	+ 40	+ 135	+ 264	+ 265			
7	5040	= 1	+ 21	+ 70	+ 315	+ 924	+ 1855	+ 1854		
8	40320	= 1	+ 28	+ 112	+ 630	+ 2464	+ 7420	+ 14832	+ 14833	
9	362880	= 1	+ 36	+ 168	+ 1134	+ 5544	+ 22260	+ 66744	+ 133497	+ 133496
&c.	&c.									
Pieces déplacées		0,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9 &c.

Il eſt facile de voir qu'en continuant cette Table juſqu'à $n = 30$, le nombre des cas poſſibles deviendra d'une grandeur énorme, & que le nombre de ceux qui feroient favorables aux prédictions de l'almanac, reſtera conſidérablement plus petit. Car en général pour x cas il devroit deviner nx fois, mais il ne devine que

$$y = n + (n - 2)\left(n . \frac{n-1}{2}\right) + 2.(n - 3)\left(n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3}\right)$$

$$+ \; 9 (n - 4)\left(n \; - - - - \; \frac{n-3}{4}\right).$$

$$+ \; 44 (n - 5).\left(n \; - - - - \; \frac{n-4}{5}\right)$$

$$+ \; \&c.$$

fois. Cette ſérie ſe trouve égale à celle que nous avons donnée pour x.

Car on a

$$\frac{y}{n} = 1 + (n - 1).\frac{n-2}{2} + 2.(n-1)\frac{n-2}{2}.\frac{n-3}{3}.$$

$$+ 9.(n-1).\frac{n-2}{2}.\frac{n-3}{3}.\frac{n-4}{4}$$

$$+ 44(n-1).\frac{n-2}{2}.\frac{n-3}{3}.\frac{n-4}{4}.\frac{n-5}{5}$$

$$+ \&c.$$

Ce qui eſt la valeur de x pour le nombre de pieces $(n - 1)$. Et ainſi on aura

$$\frac{y}{n} = 1.\ 2.\ 3.\ 4\ -\ -\ -\ -\ (n - 1).$$

Donc

$$y = 1.\ 2.\ 3.\ 4\ -\ -\ -\ -\ n = x.$$

Comme donc dans le cas de n modifications différentes l'almanac, au lieu de deviner nx fois, ne devine que $y = x$ fois, il eſt clair qu'il trompe $n - 1$ fois plus qu'il ne devine, de ſorte qu'en ſuppoſant $n = 30$, il s'enſuit qu'entre 30 prédictions il n'y en aura qu'une qui s'accompliſſe.

Mais les faiſeurs d'almanacs ſe gardent bien de donner au tems qu'il fait tant de modifications différentes, quoiqu'ils ne manquent pas de varier les termes, en employant des ſynonymes & d'autres expreſſions équivalentes. Auſſi le public eſt aſſez bien diſpoſé à ne point prendre ces expreſſions à la rigueur. Tout ſe réduit donc à deux modifications générales, c'eſt le beau tems & le mauvais tems, ou en tout cas à trois, & alors c'eſt le tems clair, le tems couvert & la pluie.

Or nous venons de voir que dans le cas de 2 modifications on a $n = 2$, & cela fait que la moitié des prédictions de l'almanac ſe vérifie par l'évenement. Il ſe peut même que ce ſoit au delà de la moitié. Il ne faut pour cela qu'une ſeule précaution, dont les faiſeurs d'almanacs pourroient ſe ſervir, s'ils ne le font pas en effet; c'eſt de prédire le tems ferein 2 ou 3 fois moins fouvent que le tems couvert, à l'exception des mois de Mars & de Septembre où le beau tems femble prédominer.

Suppofons qu'en effet le nombre des beaux jours foit $= a$, celui des jours couverts $= b$. Si donc le faifeur d'almanacs diftribue ces jours dans fon almanac d'une façon quelconque, le nombre de tous les cas poffibles fera exprimé par le quarré de $(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$. Entre ces cas il y aura

aa, où le beau tems s'accorde avec l'almanac,

ab, où le beau tems contredit l'almanac,

ab, où le tems couvert contredit l'almanac,

bb, où le tems couvert s'accorde avec l'almanac.

Ainfi les cas favorables à l'almanac font $= aa + bb$, & les cas qui le démentent, font $= 2ab$. Mais on fait que toujours $aa + bb > 2ab$. Ainfi il y aura plus de cas favorables à l'almanac qu'il n'y en a de contraires.

Cette regle aura néceffairement lieu dès que le tems eft prédit dans l'almanac dans le même rapport qu'il a effectivement. Mais fi le faifeur d'almanacs ignore ce rapport faute de confulter les obfervations météorologiques, il n'a qu'à diftribuer le beau tems & le tems couvert en proportion égale, & par là il parvient à voir la moitié de fes prédictions confirmées par l'évenement.

Soit le nombre des beaux jours $= a$, celui des jours couverts $= b$. Qu'on faffe $a + b = 2c$. On mettra dans l'almanac c jours couverts & autant de beaux jours, en les entremêlant d'une façon quelconque. Le nombre des cas poffibles eft encore le quarré de $a + b = 2c(a + b)$. Entre ces cas il y aura

ac, où le beau tems s'accorde avec l'almanac.

ac, où il ne s'accorde pas.

bc, où le tems couvert ne s'accorde pas.

bc, où le tems couvert s'accorde.

Ainfi les cas favorables font $= ac + bc$,

& les cas non favorables $= ac + bc$.

Donc l'almanac devine juſte tout autant de fois qu'il ne devine pas juſte. Ici donc la balance eſt tout au moins égale. Dans le calcul précédent elle penchoit même en faveur de l'almanac.

Rappellons-nous maintenant que le vulgaire ne juge que d'après la comparaiſon qu'il fait de l'almanac avec le tems, & nous en inférerons que s'il continue de conſulter l'almanac ce n'eſt pas par une ſtupide ſuperſtition, mais parce qu'il en trouve les prédictions tout au moins autant de fois vérifiées que démenties par l'évenement, & qu'à cet égard il juge ſuivant les mêmes regles de prudence dont tout homme éclairé ſe ſert, lorſque pour examiner la bonté d'une regle & le degré de confiance qu'elle mérite, il n'a d'autre moyen que de comparer le nombre des cas où elle eſt de miſe, avec le nombre de ceux où elle eſt en défaut. Car quand même cette comparaiſon tourneroit à l'avantage de la regle, il ne s'enſuivra pas pour cela que la regle ſe fonde ſur la nature des cas auxquels on veut l'appliquer. Elle peut leur être encore plus étrangere que les regles aſtrologiques ne le ſont aux viciſſitudes de l'air.