SUR LE FROTTEMENT entant qu'il rallentit le mouvement.

PAR M. LAMBERT.

§. 1.

On reconnoit généralement que pour juger de l'effet d'une machine il ne ſuffit pas de la conſidérer ſimplement dans ſon état d'équilibre, mais que le frottement qu'elle ſouffre dans ſes différentes parties doit néceſſairement entrer en ligne de compte. Ce n'eſt cependant que vers la fin du ſiecle paſſé qu'on a commencé à en examiner les effets, tant par la théorie que par l'expérience. Je ne retracerai pas l'hiſtoire de ce qu'on a fait à cet égard. Il ſuffira ici d'obſerver qu'on s'eſt ordinairement borné à déterminer de combien dans chaque machine il faut augmenter la force mouvante pour qu'elle commence à vaincre le frottement. On a cru aſſez généralement que l'effet du frottement étoit le même, ou demandoit la même augmentation de la force mouvante, quelle que pût être la viteſſe du mouvement de la machine. C'étoit cependant là ce qu'on pouvoit croire de plus paradoxe. Auſſi Mr. *de Muſſchenbroeck* s'en douta bien, & les expériences qu'il fit au moyen de ſon *Tribometre* lui firent voir le contraire, du moins de la façon dont il enviſageoit la choſe. Car du reſte ces expériences ne ſont pas ce qu'il a fait ou imaginé de mieux.

§. 2. Mais conſidérons d'abord la choſe en elle-même. Il me paroit évident que les parties des machines expoſées au frottement reçoivent continuellement de petits chocs dans les particules éminentes de leur ſurface. Chacun de ces petits chocs contribue à s'oppoſer au mouvement & à le rallentir, à proportion que l'inégalité de la ſurface, la preſſion & la viteſſe ſont plus grandes. Quelques-unes des particules éminentes ſont déprimées, d'autres font froiffées, & c'eft de là que réfulte le double effet du frottement que perfonne n'ignore, c'eft que le frottement *polit* la furface & l'*ufe*.

§. 3. Voici donc ce que je crois pouvoir établir. Que la furface qui eft frottée parcoure l'élément de l'efpace dx, elle rencontre un certain nombre d'obftacles, & ce nombre eft proportionel à dx. Chaque obftacle diminue la viteffe à proportion qu'elle eft plus grande. Cela fuit immédiatement de la théorie du choc des corps. Ainfi nommant la viteffe $= c$, on aura

$$- a\,dc = c\,dx.$$

§. 4. Cette formule eft la même que celle qu'on trouve pour la réfiftance des fluides, que l'on peut également déduire de la théorie du choc des corps. Auffi la différence entre la réfiftance des fluides, & celle qui réfulte du frottement des corps, ne me paroit pas être fort grande. Car dans l'un & l'autre cas il y a des particules déplacées & écartées. Toute la différence qu'il y a c'eft que dans le frottement les particules, pour être déplacées, demandent plus d'effort & diminuent la viteffe plus confidérablement.

§. 5. L'analogie que je viens d'établir entre le frottement & la réfiftance des fluides, me difpenfe d'expofer ici toutes les formules qu'on peut déduire de la formule générale

$$- a\,dc = c\,dx.$$

Je m'en rapporterai donc fimplement au Mémoire que j'ai lu à l'Académie en 1765, & qui fe trouve dans le Volume de cette année. Il s'agira principalement d'en appliquer les réfultats à quelques expériences, afin de voir comment elles s'accorderont avec cette théorie.

§. 6. Les expériences dont je ferai ufage fe trouvent depuis 1751 dans un petit mais excellent Ouvrage allemand de Mr. *Schober*, qu'il intitule: Verfuch einer Theorie von der Ueberwucht, qu'on pourroit peut-être traduire par *Effai d'une théorie de la prépondérance*. Cet Ouvrage renferme, outre une bonne théorie, un aſſez grand nombre de très belles expériences, dont le but eſt de faire voir comment la force accélératrice de la gravité eſt diminuée tant par des contrepoids que par l'inertie & par le frottement, entant que l'effet du frottement, ou eſt très petit, ou peut être regardé, ſinon comme indépendant de la viteſſe, du moins comme y étant ſenſiblement proportionel. Mr. *Schober* applique ſa théorie à la plus grande partie de ſes expériences avec aſſez de ſuccès. Auſſi Mrs. *Kæſtner* & *Karſten* n'ont-ils pas manqué d'en tirer parti dans leurs élémens de Mathématiques. Car dans ces ſortes de recherches les expériences bien entendues & bien exécutées ne ſont pas encore fort fréquentes, & on doit ſavoir bon gré à Mr. *Schober* d'avoir publié celles qu'il a faites.

§. 7. Mr. *Schober* cependant ſoupçonne que l'opinion aſſez généralement reçue ſur la quantité conſtante du frottement n'eſt pas trop juſte, parce que l'action de la force mouvante ceſſant ou étant arrêtée tout d'un coup, le mouvement des parties ſe rallentit très ſenſiblement & enfin tout rentre dans le repos. Il ajoute que la machine étant une fois en mouvement, il faut aſſez peu de force pour le continuer, mais qu'il laiſſe cette diſcuſſion à quelque grand théoréticien. Mais quoique ſuivant cela Mr. *Schober* renonce à ces recherches, il ne laiſſe pas de rapporter les expériences qu'il a faites là-deſſus, & qui ſont très bien imaginées. Elles ſont deſtinées à ſervir de confirmation à la théorie, & c'eſt rendre juſtice à Mr. *Schober* que de les y employer. Voici donc d'abord les expériences.

§. 8. Qu'on ſe figure quatre roues dentées & engrenant dans leurs pignons. Celle d'en-bas a 72 dents, ſon pignon en a 12. La ſeconde a 64 dents, ſon pignon 8. La troiſieme a 56 dents, ſon pignon 8. La quatrieme a 48 dents, ſon pignon 6. A l'eſſieu de ce dernier pignon ſe trouvoit affermie une platine circulaire ou un diſque de plomb, de 4 pouces de diametre & de $4\frac{1}{4}$ lignes d'épaiſſeur, peſant 4 livres $14\frac{3}{4}$ onces, poids de Cologne. A l'eſſieu de la roue d'en-bas étoit affermi un cylindre dont la circonférence étoit de $1\frac{14}{100}$ pied de Paris. C'eſt à ce cylindre qu'on appliqua les poids qui devoient faire tourner les roues & le diſque. M. *Schober* y appliqua encore une clochette, qui devoit ſonner toutes les fois que le poids en devidant le fil faiſoit faire un demi-tour au cylindre, & par conſéquent 3 tours à la ſeconde roue, 24 tours à la troiſieme, 168 tours à la quatrieme, ou enfin 1344 tours au diſque. C'eſt ainſi qu'il étoit fort facile de compter les ſecondes de tems que le cylindre employoit pour chaque demi-tour, tandis que la machine continuoit ſon jeu. Mr. *Schober* répéta l'expérience quatre fois en employant des poids de 15, 20, 25 & 30 livres. Voici maintenant les réſultats.

Demi-tours du cylindre.	Poids de 15 livres.	Poids de 20 livres.	Poids de 25 livres.	Poids de 30 livres.
1	385″	294″	241″	213″
2	163	125	104	93
3	122	98	87	75
4	117	87	75	64
5	109	78	66	56
6	105	71	61	52
7	103	67	56	49
8	102	63	54	46
9	100	60	50	45
10	101	58	48	43
11	100	56	47	41
12	99	55	46	43*

Il y a apparence que le dernier nombre 43 doit être 40; peut-être qu'il y a là une faute d'impreſſion.

§. 9. Comme dans chaque demi-tour du cylindre le poids deſcendoit de $\frac{57}{100}$ d'un pied, on voit que pour chacune de ces deſcentes le nombre de ſecondes étoit & fort grand & fort inégal. Le poids deſcendoit donc fort lentement. Il devoit d'abord vaincre l'inertie du diſque de plomb. Et s'il n'y avoit point eu de frottement, cela n'auroit pas empêché le poids de deſcendre d'un mouvement uniformément accéléré, en ſorte que pour les quatre premiers demi-tours du cylindre il n'eût fallu que le double du tems que demandoit le premier demi-tour. Mais le frottement empêcha cette accélération uniforme. On voit, tout au contraire, que la viteſſe de la rotation du cylindre étoit aſymptotique, & qu'après les 6 premiers tours ou les 12 premiers demi-tours elle devint ſenſiblement conſtante dans toutes les quatre expériences.

§. 10. Or comme l'effet du frottement revient à celui de la réſiſtance des fluides, on voit que ce cas eſt entierement analogue à celui de la deſcente d'un corps dont la gravité ſpécifique n'eſt gueres plus grande que celle du fluide dans lequel il deſcend, à commencer du repos. Et comme ici il ne s'agit que de comparer le tems avec l'eſpace parcouru, nous pourrons nous en tenir aux formules

$$c : C = \cos 2\omega,$$

$$x = a.\ \log.\ \mathrm{cosec}\ 2\omega,$$

$$\tau = \frac{a}{C}.\ \log.\cot\omega,$$

que j'ai données dans le Mémoire *ſur la réſiſtance des fluides* cité ci-deſſus.

§. 11. Dans ces formules le tems τ ſe compte du commencement de la deſcente, de même que l'eſpace parcouru x. Enſuite c eſt la viteſſe qui répond à un tems quelconque τ, & C eſt la viteſſe terminale, ou qui répond à un tems infini. Enfin a eſt une conſtante qui dépend des circonſtances particulieres des expériences, & des unités qu'on met pour baſe.

§. 12. Comme donc le tems τ doit être compté du commencement, & que Mr. *Schober* ne rapporte que les intervalles du tems employé pour chaque demi-tour du cylindre, on voit qu'il faut ſucceſſivement prendre les ſommes de ces intervalles. C'eſt ce qui nous donne la Table ſuivante.

	15 livr.	20 livr.	25 livr.	30 livr.
x	τ	τ	τ	τ
1	385″	294″	241″	213
2	548	419	345	306
3	670	517	432	381
4	787	604	507	445
5	896	682	573	501
6	1001	753	634	553
7	1104	820	690	602
8	1206	883	744	648
9	1306	943	794	693
10	1407	1001	842	736
11	1507	1057	889	777
12	1606	1112	935	817

§. 13. Or afin de m'aſſurer s'il n'y a pas dans ces expériences des irrégularités trop conſidérables, je conſtruiſis les nombres de cette Table en prenant les x comme des abſciſſes ſur la droite AB, & en faiſant les ordonnées égales aux nombres τ. C'eſt de cette façon que j'obtins autant de points pour les quatre lignes courbes AD, AE, AF, AG, & je vis que ces courbes avoient une courbure aſſez uniforme & réguliere, & que ſi dans les expériences il y avoit quelque irrégularité elle ne pouvoit être que très petite & de peu de conſéquence.

Pl. I. Fig. 1.

§. 14. J'entrepris donc d'appliquer les formules

$$c : C = \operatorname{cof} 2\omega,$$

$$x = a . \log. \operatorname{cofec.} 2\omega,$$

$$\tau = \frac{a}{c} \log. \cot \omega,$$

à la premiere expérience. Il s'agiſſoit de déterminer la conſtante a & la viteſſe terminale C. On voit bien qu'il falloit y parvenir par approximation. Pour cet effet la Table me fit voir que dans cette expérience le poids alloit acquérir une viteſſe telle que le cylindre fît un demi-tour environ en 100 ſecondes de tems. Enſuite, je pouvois par conſtruction déterminer à très peu près le point de la courbe AD où la viteſſe étoit la moitié de c.

C'eſt ce que j'obtins par le moyen des tangentes. Ce point répondoit à très peu près à l'abſciſſe $x = 2$. Or ayant de cette façon $c = \frac{1}{2} C$, j'avois $\omega = 30°$, & comme à $x = 2$ répond $\tau = 548$, il n'étoit pas difficile de déterminer les valeurs a, $\frac{a}{C}$ & ainſi C. Or cette valeur de C étant un peu différente de la valeur $C = \frac{1}{100}$ que j'avois miſe pour baſe, je continuai de déterminer le tout plus exactement au moyen des interpolations.

§. 15. De cette maniere & en employant les logarithmes tabulaires je trouvai

$$x = 15,78 . \log. \operatorname{coſec} 2\omega,$$

$$\tau = 1518 . \log. \cot \omega.$$

Ainſi, par ex. lorſqu'il s'agit de trouver le tems τ qui répond à $x = 8$, on a

$$\frac{8}{15,78} = 0,50696 = \log. \operatorname{coſec} 2\omega,$$

donc

$$\log. \sin 2\omega = 9,49304,$$

$$2\omega = 18°. \; 8',$$

$$\omega = 9. \; 4,$$

$$\log. \cot \omega = 0,79970,$$

ce logarithme étant multiplié par 1518 donne

$$\tau = 1210''.$$

Calculant de cette façon les valeurs de τ répondantes à $x = 1, 2, 3 \ldots 12$, ces valeurs pourront être comparées à celles que donne l'expérience, comme on le verra dans cette Table.

x	τ par expér.	τ calculé.	diff.
1	385	365	— 20
2	548	528	— 20
3	670	663	— 7
4	787	783	— 4
5	896	896	+ 0
6	1001	1003	+ 2
7	1104	1108	+ 4
8	1206	1210	+ 4
9	1306	1310	+ 4
10	1407	1410	+ 3
11	1507	1508	+ 1
12	1606	1606	+ 0

On voit que les différences ſont très petites & qu'il n'y a que lès deux premieres qui ſoient plus conſidérables. Cela peut être attribué à ce que dabord le mouvement eſt fort lent. Car alors les moindres irrégularités dans le frottement deviennent perceptibles & arrêtent le mouvement.

§. 16. Pour trouver la véritable valeur de a, il faut dans les deux équations

$$x = 15,78.\ \log.\ \operatorname{coſec} 2\omega$$

$$\tau = 1518\ \log.\ \cot \omega$$

introduire les logarithmes hyperboliques, & par conſéquent multiplier les coëfficiens par 0,43429 - - - -, ce qui donne

$$x = 6,853.\ \log.\ \operatorname{coſec} 2\omega,$$

$$\tau = 659,3.\ \log.\ \cot \omega,$$

& ainſi

$$a = 6,853,$$

$$C = 0,01039.$$

§. 17. Comme on a en général

$$2e^{x:a} = e^{+\tau C:a} + e^{-\tau C:a},$$

on

on aura, en ſubſtituant les valeurs a, C,

$$2e^{x:6,853} = e^{+\tau:659,3} + e^{-\tau:659,3}$$

ce qui pour le mouvement initial donne

$$x = \frac{\tau^2 C^2}{2a} = 0,000007876.\tau^2.$$

§. 18. Or comme l'unité pour la meſure de la deſcente eſt un demi-tour du cylindre, c'eſt à dire $\frac{57}{100}$ pied de Paris, en multipliant 0,000007876 par 0,57, on aura en parties décimales du pied de Paris

$$a = 3,91,$$
$$C = 0,00593,$$
$$x = 0,000004489.\tau^2.$$

Or pour l'action de la gravité naturelle on a

$$x = 15,096.\tau^2.$$

Donc la gravité naturelle eſt à la gravité rélative qui dans cette expérience fit deſcendre le poids, comme 15,096 à 0,000004489, ou comme 1 à 0,0000002974.

§. 19. Pour la ſeconde expérience je trouvai, en employant les logarithmes tabulaires,

$$x = 50,85 \log.\ \mathrm{coſec}\ 2\omega,$$
$$\tau = 2252 \log.\ \mathrm{cot}\ \omega,$$

& par conſéquent la Table ſuivante.

x	τ par expér.	τ par le calcul.	diff.
1	294	297	+ 3
2	419	423	+ 4
3	517	521	+ 4
4	604	606	+ 2
5	682	683	+ 1
6	753	754	+ 1
7	820	820	0
8	883	883	0
9	943	944	+ 1
10	1001	1002	+ 1
11	1057	1058	+ 1
12	1112	1114	+ 2

Ici les différences sont encore plus petites que dans la premiere expérience, & en diminuant le coëfficient 2252 de 3 ou 4 unités elles deviennent encore plus petites.

§. 20. Or en introduisant les logarithmes hyperboliques on a

$$x = 22,08 \text{ log. cosec } 2\omega,$$

$$\tau = 978,1 \text{ log. cot } \omega,$$

& ainsi

$$a = 22,08 = 12,59 \text{ pieds},$$

$$C = 0,02257 = 0,01286 \text{ pied},$$

ce qui pour le mouvement initial donne

$$x = \frac{\tau^2 . C^2}{2a} = 0,00001131.\tau^2$$

ou bien en parties décimales du pied de Paris

$$x = 0,000006447.\tau^2.$$

Ainsi la gravité rélative dans cette expérience est $= 0,000006447$, tandis que la gravité naturelle est $15,096$, ce qui donne le rapport de 1 à $0,0000004270$.

§. 21. Pour la troisieme expérience je trouvai, en employant les logarithmes tabulaires,

$$x = 53\tfrac{1}{3} . \log. \operatorname{cosec.} 2\omega,$$

$$\tau = 1944 . \log. \cot \omega,$$

& par conséquent la Table suivante.

x	τ exp.	τ calc.	diff.
1	241	250	+ 9
2	345	356	+ 11
3	432	441	+ 9
4	507	510	+ 3
5	573	575	+ 2
6	634	634	0
7	690	690	0
8	744	743	— 1
9	794	793	— 1
10	842	842	0
11	889	890	+ 1
12	935	935	0

Ici donc il n'y a que les trois premieres différences qui soient un peu plus considérables, ce que j'attribue encore à ce que le mouvement initial étant fort lent, les irrégularités dans le frottement deviennent plus sensibles. Cependant comme dans cette expérience les premieres différences sont positives, il semble que la rotation du disque avoit d'abord été moins retardée que dans la premiere expérience.

§. 22. En introduisant les logarithmes hyperboliques, les deux équations pour cette expérience sont

$$x = 23{,}16 \ \log. \operatorname{cosec} 2\omega,$$

$$\tau = 844{,}3 \ \log. \cot \omega,$$

ce qui donne

$$a = 23{,}16 \quad = 13{,}20 \text{ pieds},$$

$$C = 0{,}02743 = 0{,}01563 \text{ pied},$$

& par conſéquent pour le mouvement initial

$$x = \frac{\tau^2 . C^2}{2a} = 0,00001624 . \tau^2,$$

ou bien en parties décimales du pied de Paris

$$x = 0,000009257 . \tau^2 .$$

Ainſi la gravité rélative dans cette expérience étoit $= 0,000009257$, tandis que la gravité naturelle eſt $= 15,096$; ce qui donne le rapport de 1 à $0,0000006132$.

§. 23. Enfin je trouvai pour la quatrieme expérience

$$x = 50,85 . \text{log. coſec } 2\omega,$$

$$\tau = 1654 . \text{log. cot } \omega,$$

& par conſéquent la Table ſuivante.

x	τ exp.	τ calc.	diff.
1	213	218	+ 5
2	306	310	+ 4
3	381	383	+ 2
4	445	446	+ 1
5	501	502	+ 1
6	553	554	+ 1
7	602	603	+ 1
8	648	649	+ 1
9	693	693	0
10	736	736	0
11	777	777	0
12	817	818	+ 1

Encore ici les deux premieres différences ſont les plus conſidérables, comme dans les trois expériences précédentes. La raiſon en eſt la même, c'eſt que dans les mouvemens lents les effets du frottement ſont plus irréguliers. C'eſt ce que j'ai conſtamment obſervé dans les bouſſoles, & ſurtout dans celles qui ne ſont pas fort aimantées, & qui par cette raiſon font leurs oſcillations fort lentement. Quelquefois leur mouvement, au lieu de s'accélérer, ſe rallentit pour vaincre un obſtacle que le frottement leur oppoſe, & après l'avoir vaincu il recommence à s'accélérer au point qu'il ſemble n'avoir rien perdu. C'eſt ainſi qu'une boule rallentit ſon mouvement lorſqu'elle rencontre quelque élévation où elle doit monter; mais ce mouvement recommence à s'accélérer lorſqu'elle redeſcend.

§. 24. Mais pour revenir à notre expérience, il reſte encore à introduire les logarithmes hyperboliques dans nos deux équations. C'eſt ce qui les change en

$$x = 22{,}08.\log.\ \mathrm{cosec}\ 2\omega,$$
$$\tau = 718{,}3\ \log.\ \cot\ \omega.$$

De là on tire

$$a = 22{,}08 = 12{,}59\ \text{pieds},$$
$$C = 0{,}03074 = 0{,}01752\ \text{pied},$$

& ainſi pour le mouvement initial

$$x = \frac{\tau^2.C^2}{2a} = 0{,}000021403.\tau^2,$$

ou bien en parties décimales du pied de Paris,

$$x = 0{,}0000121185.\tau^2.$$

Ainſi la gravité rélative dans cette expérience eſt $= 0{,}0000121185$, tandisque la gravité naturelle eſt $= 15{,}096$, ce qui donne le rapport de 1 à 0,00000087O2.

§. 25. On voit donc que les formules

$$x = a.\log.\ \mathrm{cosec}\ 2\omega,$$
$$\tau = \frac{a}{C}.\log.\ \cot\ \omega,$$

expriment dans les quatre expériences de Mr. *Schober* l'accélération du mouvement auſſi exactement qu'on pouvoit s'y attendre, & qu'ainſi la théorie de la réſiſtance des fluides s'applique parfaitement bien à la réſiſtance qui réſulte du frottement. On voit auſſi que les différences entre la théorie

& les expériences font plus petites à mesure que le mouvement est plus accéléré, & que ces différences ne font anomales que lorsque le mouvement est encore fort lent.

§. 26. Il nous reste à comparer entr'elles les quatre expériences. Mais faute de données je ne pourrai pas faire cette comparaison fort completement. On sait que pour mettre une machine en mouvement il faut un certain degré de force pour contrebalancer le frottement. Je désignerai cette force par un poids $= b$. Et cette quantité pour une même machine est constante, à moins que les parties de la machine ne s'usent ou ne s'alterent avec le tems.

§. 27. Mais si en augmentant la force motrice il en résulte une plus grande pression & ainsi un frottement plus fort, il est clair que le poids b doit être augmenté d'une quantité, que je désignerai par $n(P - b)$, où P dénote le poids égal à la force entiere, & n une partie de $(P - b)$, de sorte qu'en général $n(P - b)$ est une fonction de P, qui se détermine par l'arrangement de la machine.

§. 28. Ce qui étant établi, la partie de la force qui met la machine en mouvement est exprimée par

$$p = P - n(P - b) - b = (P - b).(1 - n).$$

Et c'est de cette partie que dépend l'accélération du mouvement, du moins dans les premiers instans.

§. 29. Or dans les expériences de Mr. *Schober* il y a deux causes qui rallentissent cette accélération. L'une c'est l'inertie des roues & des pignons, & surtout celle du disque de plomb, dont l'effet est fort considérable; car son poids est de $4\frac{59}{64}$ livres $= \frac{315}{64}$ livres. Et si le poids P, suspendu au cylindre, étoit immédiatement appliqué à l'essieu qui fait tourner le disque, sa distance du centre ne pourroit être que de $\frac{114}{100} \cdot \frac{7}{44} \cdot \frac{1}{2688}$ $= \frac{19}{2200.128}$ pied. Or le demi-diametre du disque étant $= \frac{1}{6}$ pied, il s'ensuit que la gravité rélative du poids P est

$$\gamma = 15,096 . \frac{19.19.P}{P.19.19 + 35.32.2200.2200},$$

ou bien

$$\gamma = \frac{15,096.\,P}{P + 15016066}.$$

§. 30. Or comme dans ces expériences le poids P ne va pas au delà de 30 livres, on voit aisément qu'on peut omettre ce poids dans le dénominateur de cette fraction, ce qui donne plus briévement

$$\gamma = 0,0000010053 2.\,P.$$

Si donc le poids P n'avoit à vaincre que l'inertie du disque, il auroit la gravité rélative γ, & descendroit avec une vitesse uniformément accélérée, en sorte que sa chûte dans la premiere seconde seroit de $0,00000100532.P$ pied.

§. 31. Quant à l'inertie du rouage, je ne saurois l'évaluer faute de données. Mais l'effet en devoit être une diminution à très peu près proportionelle au poids P, de sorte que nous pourrons faire

$$\gamma = 0,00000100532.\,mP$$

où m est une fraction d'une valeur à très peu près constante.

§. 32. Cette gravité auroit donc lieu si le frottement n'y mettoit un double obstacle. D'abord la partie efficace du poids P se réduit à $p = (P - b).(1 - n)$, & cela change cette gravité en

$$\gamma = 0,00000100532.\,m.(P - b).(1 - n)$$

qui ne laisseroit pas néanmoins de produire un mouvement uniformément accéléré. Mais comme le frottement s'oppose encore en raison du quarré de la vitesse, comme dans la résistance des fluides, cela change l'accélération, en sorte que les courbes AD, AE, AF, AG, au lieu d'être des paraboles de la forme

$$x = 0,00000100532.\,m.(P - b).(1 - n).\tau^2,$$

deviennent asymptotiques.

§. 33. Mais comme elles ne s'écartent que peu à peu de la nature parabolique, cela fait que pour les premiers instans on peut leur substituer des paraboles. C'eſt auſſi ce que j'ai fait ci-deſſus en déterminant la gravité rélative pour chacune des quatre expériences. Voilà donc ce qui, en ſubſtituant les valeurs de P, nous fournit les quatre équations ſuivantes:

$$0{,}00000100532 . m . (15 - b) . (1 - n) = 0{,}0000044 89, \quad (\S. 16.)$$
$$0{,}00000100532 . m\,(20 - b) . (1 - n) = 0{,}0000064 47, \quad (\S. 20.)$$
$$0{,}00000100532 . m\,(25 - b) . (1 - n) = 0{,}0000092 57, \quad (\S. 22.)$$
$$0{,}00000100532 . m\,(30 - b) . (1 - n) = 0{,}0000121 85, \quad (\S. 24.)$$

d'où l'on tire

$$m . (15 - b) . (1 - n) = 4{,}47$$
$$m . (20 - b) . (1 - n) = 6{,}41$$
$$m . (25 - b) . (1 - n) = 9{,}21$$
$$m . (30 - b) . (1 - n) = 12{,}12.$$

Fig. 2. §. 34. Soient maintenant les abſciſſes AP, AQ, AR, AS proportionelles aux poids $P = 15, 20, 25, 30$, & les ordonnées PD, QE, RF, SG proportionelles aux gravités γ répondantes. La courbe $DEFG$ exprimera les rapports entre P & γ, en ce que γ doit être en raiſon de $(P - b) . (1 - n)$ ou bien

$$\gamma = 0{,}00000100532 . m . (P - b) . (1 - n).$$

§. 35. Or ſi dans cette équation n étoit conſtante, γ croîtroit dans le rapport de $(P - b)$, & par conſéquent la ligne GD ſeroit droite. La Figure fait voir qu'elle ne l'eſt pas, mais que cependant la partie EG ne s'écarte pas ſenſiblement de la droite TEG. La valeur de n eſt donc variable, en ſorte qu'elle approche aſſez vite d'une quantité conſtante. Voilà donc ce qui fait que dans les trois dernieres expériences la partie des poids requiſe pour vaincre le frottement eſt $= AT$, ce qui revient à environ 9 livres.

§. 36.

§. 36. De cette maniere la partie des poids qui produisoit le mouvement dans ces trois expériences étoit

$$\begin{array}{llcl} \text{Exp. } 2. & TQ = 20 - 9 = 11, \\ 3. & TR = 25 - 9 = 16, \\ 4. & TS = 30 - 9 = 21, \end{array}$$

& c'eſt à ces poids que les gravités rélatives QE, RF, SG ſont à très peu près proportionelles.

§. 37. Si donc nous faiſons

$$SG = 0{,}0000126,$$

nous aurons

$$RF = 0{,}0000096,$$
$$QE = 0{,}0000066.$$

§. 38. Or la valeur $\frac{1}{a}$ étant la meſure abſolue de la réſiſtance, elle doit avoir été dans ces trois expériences à très peu près conſtante, puiſque le poids requis pour vaincre le frottement l'eſt de même. Auſſi les valeurs de a trouvées ci-deſſus pour ces trois expériences étant

$$\begin{array}{ll} a = 12{,}59 \text{ pieds} & (\S.\ 20.) \\ a = 13{,}20 & (\S.\ 22.) \\ a = 12{,}59 & (\S.\ 24.) \end{array}$$

on voit que ces valeurs different aſſez peu entr'elles. Je poſerai donc pour plus de briéveté $a = 12\frac{1}{2}$ pieds.

§. 39. Comme donc on doit avoir

$$2a\gamma = CC,$$

on aura pour la valeur de C

$$\begin{array}{llll} \text{Exp. } 2. & C = \sqrt{(25.QE)} = 0{,}01285 \text{ pied} \\ 3. & C = \sqrt{(25.RF)} = 0{,}01549 \\ 4. & C = \sqrt{(25.SG)} = 0{,}01789. \end{array}$$

Or nous avons trouvé ci-dessus

Exp. 2. $C = 0,01286$ pied

3. $C = 0,01563$

4. $C = 0,01752$.

Ainsi ces valeurs ne different gueres entr'elles.

§. 40. La premiere expérience fait en tout cela une exception assez considérable. La valeur de a est $= 3,91$, ce qui suppose une résistance beaucoup plus grande. La vitesse terminale C est $= 0,00593$, & par conséquent beaucoup plus petite qu'elle ne seroit en comparaison des trois autres expériences, mais pourtant plus grande que la valeur de $a = 3,91$ ne semble l'exiger, puisque ces deux valeurs

$$a = 3,91$$
$$C = 0,00593$$

donnent la gravité rélative

$$\gamma = PD = 0,000004489,$$

qui fait que le point D tombe beaucoup au-dessus de la droite FG. Ainsi cette gravité rélative auroit été plus grande qu'elle n'auroit dû être comparativement aux trois autres expériences. Il n'y a gueres moyen d'expliquer ce phénomene autrement qu'en admettant que dans la premiere expérience quelque cause accidentelle a arrêté & rallenti le mouvement de la machine au commencement, mais que cette cause a cessé peu à peu à mesure que la vitesse alloit en augmentant. Voici ce qui me porte à juger de cette maniere.

Fig. 1. §. 41. Les courbes AD, AE, AF, AG different d'abord infiniment peu de la parabole, & ne commencent à s'en écarter sensiblement qu'après la premiere révolution du cylindre. Voilà ce qui nous met en état d'évaluer la lettre γ au moyen du tems employé pour la premiere demi-révolution, pendant laquelle les poids descendoient de 0,57 pied. Or ce tems étoit dans les quatre expériences de 385, 294,

241, 213 ſecondes. Diviſant donc 0,57 par les quarrés de ces tems, les quotiens nous donneront l'eſpace parcouru dans la premiere ſeconde, & par conſéquent les gravités rélatives.

Exp. 1. $\gamma = 0,000003846$ pied.

2. $\gamma = 0,000006594$

3. $\gamma = 0,000009812$

4. $\gamma = 0,000012780$.

On voit donc que dans la premiere expérience la gravité rélative, au lieu d'être $\gamma = 0,000004489$, n'étoit que $\gamma = 0,000003846$, & ainſi beaucoup plus petite. Or la premiere de ces valeurs ayant été déduite des abſciſſes & des ordonnées de la courbe AD beaucoup plus éloignées du ſommet A, il s'enſuit que cette courbe differe, pour ainſi dire, d'elle-même, ce qui ne peut être attribué qu'à quelque cauſe accidentelle qui peu à peu ceſſa de produire ſon effet.

§. 42. Il y a cependant une autre conſidération à laquelle il convient de nous arrêter. A proprement parler, la ligne GD n'eſt pas dans toute la rigueur géométrique une ligne courbe, mais un polygone, qui commence quelque-part en B, qui s'éleve fort bruſquement au-deſſus de AS, & dont les côtés deviennent & même aſſez vite ſi petits que pour peu que la viteſſe ſoit conſidérable elle affecte la continuité d'une ligne courbe.

§. 43. Qu'on mette un corps ſur un plan incliné. Si d'abord l'inclinaiſon eſt très petite, ce corps reſtera en repos ſans gliſſer, puiſque le frottement de la baſe y met obſtacle. On conçoit qu'il y a un angle d'inclinaiſon $= \alpha$, où la force qui tend à faire deſcendre le corps eſt en équilibre avec le frottement. Il ſemble donc qu'en augmentant cet angle tant ſoit peu, le corps doit commencer à gliſſer avec une lenteur infinie. Cependant cela n'arrive jamais. Car le corps, ou reſte en repos, ou s'il gliſſe, c'eſt toujours avec une viteſſe qui n'eſt rien moins qu'infiniment petite. Il y a là toujours une eſpece de ſaut de la viteſſe $= 0$ à une viteſſe finie. La raiſon en eſt que l'inégalité des ſurfaces n'eſt pas un objet du

calcul des quantités *continues* mais des quantités *discretes*. Les particules éminentes forment autant d'unités numériques, quoique de différente valeur. Ces unités ne se confondent que lorsque la vitesse est assez grande pour qu'elles puissent être regardées comme infiniment petites. Ce n'est qu'alors que le calcul des quantités continues peut avoir lieu. Voilà donc ce qui fait qu'il reste indécis, de quelle maniere la ligne GD doit être
Fig. 1. continuée au-delà de D, & que peut-être déjà en D elle commence à être anomale.

§. 44. Du reste c'est faire l'éloge des expériences de Mr. *Schober* que de dire que les anomalies qui s'y trouvent sont toutes fort petites. Car en examinant de la même façon quelques autres expériences, comme par ex. celle que Mr. *Musschenbroeck* rapporte dans le §. 349. de son *Essai de Physique*, non seulement on ne voit pas comment il en a déterminé les résultats, mais en admettant ces résultats il s'ensuivroit que les vitesses augmentent dans une plus forte raison que le frottement. C'est tout le contraire de ce qui devoit s'ensuivre, puisque le frottement croit comme le quarré de la vitesse. J'ai vu encore d'autres expériences où les vitesses C seroient à très peu près proportionelles au quarré des poids P, qu'on regardoit comme la mesure du frottement, au lieu qu'il eût fallu trouver $CC = 2a\gamma$, c'est à dire le quarré de la vitesse terminale en raison directe de la gravité rélative γ, & en raison inverse de la mesure absolue du frottement, qui est $= \frac{1}{a}$. J'en infere qu'il est très difficile de bien faire ces sortes d'expériences, surtout lorsqu'il s'agit d'en déduire les loix du frottement, ou d'examiner celles qu'on déduit de la théorie. Les mouvemens lents n'y sont d'aucun usage, parce que les petites irrégularités y produisent des anomalies trop sensibles. Et si en général le mouvement est rallenti par une cause accidentelle quelconque, cela influe dans toute la suite de l'observation.

§. 45. Il convient cependant de faire encore mention des expériences de Mr. *Meister* dans le premier Volume des Nouveaux Commentaires de la Société R. de Gœttingue, qui vient de paroître. Ces expériences me paroissent être faites avec beaucoup de soin de quatre manieres différentes & plusieurs ont été répétées plus d'une fois, tant immédiatement que quelque tems après. Mr. *Meister* ne détaille pas à la vérité toutes les circonstances. Il se borne à indiquer les tems & les espaces parcourus, sans en donner cependant les mesures absolues. Comme dans sa premiere machine la résistance de l'air pouvoit en rallentir le mouvement, je passerai d'abord aux expériences faites avec la seconde machine, où un poids fit tourner une poulie en devidant le fil auquel il étoit suspendu, & qui se détacha entierement aussitôt que le poids fut descendu autant qu'il devoit descendre. Le premier jour M. *Meister* trouva

espaces	tems
46	29,0
40	26,5
35	23,5
30	21,5
25	19,5
20	17,8
15	15,2
10	12,5
5	9,0
1	3,0

§. 46. Afin d'examiner d'abord s'il y a dans ces nombres quelque régularité, je regardai les espaces comme des abscisses & les tems comme les ordonnées d'une ligne courbe, & en construisant cette courbe je vis qu'elle devoit nécessairement passer au-dessus des points trouvés pour les ordonnées répondantes aux abscisses ou aux espaces 25, 30, 30, & que les ordonnées répondantes aux espaces 1, 5 étoient pareillement un peu irrégulieres. Du reste ces différences étoient assez petites & au-dessous d'une unité.

§. 47. J'entrepris donc d'y appliquer les formules (§. 10.) & je trouvai qu'en employant les logarithmes tabulaires il falloit faire les espaces $x = \frac{1}{0,0075} . \log. \operatorname{cosec.} 2\omega$

les tems $\tau = \frac{1}{0,00215} . \log. \cot. \omega$,

ce qui me donna

x	τ calc.	τ exp.	diff.
46	28, 8	29, 0	— 0, 2
40	26, 5	26, 5	*
35	24, 5	23, 5	+ 1, 0
30	22, 4	21, 5	+ 0, 9
25	20, 1	19, 5	+ 0, 6
20	17, 8	17, 8	*
15	15, 1	15, 2	— 0, 1
10	13, 1	12, 5	+ 0, 6
5	8, 5	9, 0	— 0, 5
1	3, 8	3, 0	+ 0, 8

§. 48. Mr. *Meister* répéta les mêmes expériences le second jour plus d'une fois. Je pris donc le terme moyen du résultat de chacune, & je vis qu'il suffisoit d'augmenter les tems τ, trouvés dans le précédent §, dans le rapport de 53 à 58, pour avoir les résultats suivans:

x	τ calc.	τ exp.	diff.
46	31, 6	32, 0	— 0, 4
40	29, 0	28, 8	+ 0, 2
35	25, 9	26, 3	— 0, 4
30	23, 6	24, 1	— 0, 5
25	22, 1	21, 6	+ 0, 5
20	19, 5	19, 2	+ 0, 3
15	16, 5	16, 1	+ 0, 4
10	14, 3	13, 2	+ 1, 1
5	9, 3	9, 0	+ 0, 3
1	4, 2	3, 0	+ 1, 2

Il n'y a donc ici que l'ordonnée $\tau = 13,2$ & $\tau = 3$, qui soit considérablement plus petite que celles que donne le calcul. C'est encore ce qu'il faut attribuer à la lenteur du mouvement, que le moindre obstacle rend fort irrégulier.

§. 49. Je me dispenserai d'appliquer le calcul aux autres expériences que Mr. *Meister* a faites avec la même machine. Les résultats ne different qu'en ce que l'effet du frottement varia par différentes causes extérieures, p. ex. la chaleur, l'humidité &c. que Mr. *Meister* n'a pas laissé de rapporter. Tout ce qui s'ensuit en général c'est qu'il faut écarter les expériences qui different trop considérablement de toutes les autres, & que de celles-ci il faut prendre les termes moyens qui répondront à ce qu'il y a de plus constant & de plus régulier dans le frottement, sans cependant faire entierement abstraction des causes extérieures & accidentelles, qui ne laissent pas de survenir, du moins de tems en tems. Il est clair que la force motrice qu'on applique à la machine doit toujours suffire, même dans les cas où ces causes accidentelles s'y opposent le plus.

§. 50. Quant aux expériences que Mr. *Meister* a faites avec sa troisieme machine, elles demandent encore d'être examinées par la construction, chacune séparément. J'en ai fait l'essai pour la premiere de ces expériences, qui m'a paru être la plus anomale. Voici ce que j'ai trouvé:

x	τ constr.	τ exp.
1	2, 0	2, 0
3	3, 9	3, 2 *
5	5, 0	5, 0
7	6, 1	6, 2
9	6, 8	6, 6
11	7, 6	7, 5
13	8, 4	8, 4
15	9, 0	9, 0
17	9, 5	12, 0 *
19	9, 9	15, 0 *

On voit par là que la seconde & surtout les deux dernieres de ces expériences different très considérablement de ce que demande la régularité de l'accroissement du tems. Or en retenant les ordonnées τ trouvées par la construction, j'ai vu que les tems τ croissent à très peu près comme les racines quarrées des espaces, ce qui indique que l'effet du frottement dû à la vitesse ne doit pas avoir été fort considérable, probablement encore par quelque cauſe accidentelle. Car dans quelques autres expériences que Mr. *Meiſter* a faites avec la même machine il n'en a pas été de même.

§. 51. Dans les expériences que Mr. *Meiſter* a faites avec ſa 4^me^ machine je trouve qu'en général les tems requis pour parcourir l'eſpace $= 10$ ſurpaſſoient du double & même du triple les tems requis pour parcourir l'eſpace $= 5$. Or cela ne ſauroit être à moins que l'effet du frottement ne croiſſe en plus forte raiſon que le quarré de la viteſſe. Mais outre que Mr. *Meiſter* rapporte lui-même différentes cauſes qui peuvent avoir renforcé l'effet du frottement, il me ſemble que ces mêmes cauſes y ont influé encore d'une autre façon. Mr. *Meiſter* a renouvellé ſes expériences pour chacun des eſpaces 1, 2, 3 - - - - 10 ſéparément, ce qu'il ne pouvoit faire que ſucceſſivement. Or de ſes expériences il réſulte en général, qu'à meſure qu'il les répéta de ſuite le frottement diminua. Si donc p. ex. il a commencé par l'eſpace $= 10$, il devoit trouver le tems τ plus long que s'il avoit commencé par quelqu'autre eſpace. La différence n'eſt pas ſi petite, puiſque pour un même eſpace $= 10$ les tems différoient depuis $34\frac{1}{2}$ juſqu'à 63. Je fais donc entierement abſtraction de ces expériences, & je reviens à rendre juſtice à M. *Schober* ſur ce qu'il a eu l'attention de noter les eſpaces & les tems employés pour chaque demi-révolution du cylindre, ſans ſe voir obligé de remonter la machine pour chacune des 12 demi-révolutions ſéparément. (§. 8.) C'eſt là préciſément ce que demandent les loix de la continuité, de l'uniformité & de l'égalité des circonſtances dans les expériences.

SUR

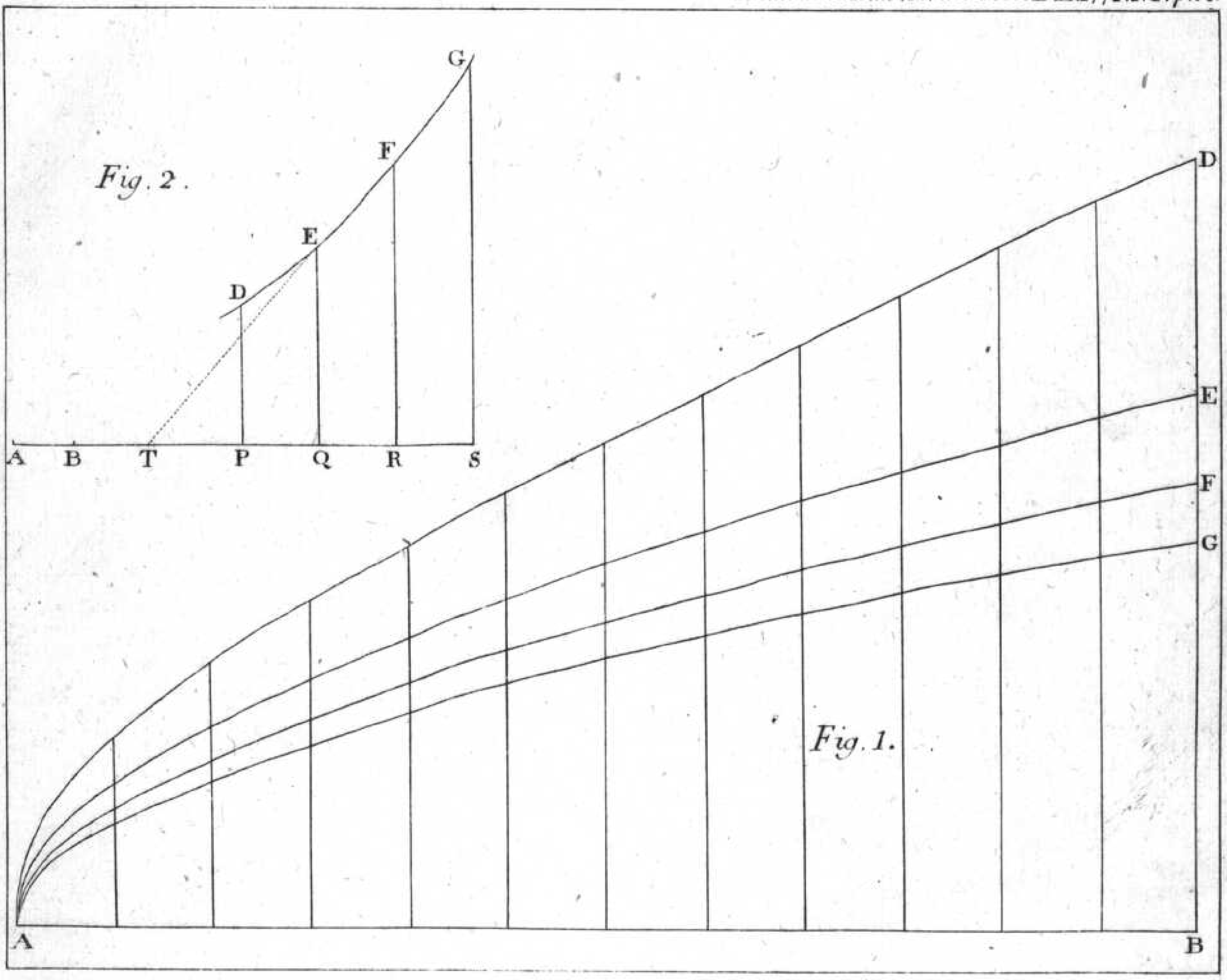
Fig. 2.
G
F
E
D
A
B
T
P
Q
R
S
D
E
F
G
Fig. 1.
A
B