SUR

LA FLUIDITÉ

DU SABLE, DE LA TERRE ET D'AUTRES CORPS MOUS, rélativement aux loix de l'Hydrodynamique.

PAR M. LAMBERT.

§. 1.

Les expériences & la théorie qui feront le ſujet de ce Mémoire, regardent le pilotage & la ſolidité du fondement des ouvrages d'architecture, & contribueront en même temps à répandre du jour ſur quelques queſtions embarraſſantes.

§. 2. Il y a longtems qu'on s'eſt étonné de ce qu'un petit coup de marteau fait plus d'effet que n'en produit un poids d'une groſſeur conſidérable, lorſqu'il s'agit d'applatir du plomb, ou d'enfoncer un clou, ou de fendre & de caſſer un corps &c. Mr. *de Camus*, dans ſon Traité des forces mouvantes publié en 1722 & réimprimé en 1724, rapporte pluſieurs expériences qu'il a faites pour déterminer ces effets du choc en les comparant avec ceux qu'il produiſit au moyen de la ſimple preſſion des poids. Quoique ces expériences ſoient aſſez peu exactes, parce que M. *de Camus*, au lieu de meſurer les effets, s'eſt contenté de les eſtimer, elles ne laiſſent pas de faire voir que la différence entre le choc & la ſimple preſſion eſt très conſidérable. C'eſt ainſi par ex. que dans la 10^me^ Propoſition du troiſieme Chapitre il trouve, *qu'un poids de $1\frac{1}{4}$ livre tombant de huit pouces de haut fait autant d'effort pour comprimer ou écraſer un corps ou ſolide, qu'un poids de 200 livres poſé ſans chûte.* La différence entre $1\frac{1}{4}$ & 200 livres eſt ſans contredit très conſidérable, & d'autant plus qu'une chûte de 8 pouces de haut ne produit pas une fort grande viteſſe.

§. 3. M. *de Camus* crut pouvoir mesurer l'effet des chocs par ces sortes de comparaisons. A cet égard il n'est pas le premier qui ait eu cette idée. On est naturellement porté à croire que le choc peut être évalué par des poids, & c'est sur ce pied que le P. *Mersenne* & *Descartes* & ensuite *Leibnitz* ont cru pouvoir établir quelque loi générale, en regardant l'effet du choc comme égal au produit de la masse & de la vitesse ou du quarré de la vitesse. Les disputes occasionnées par ces évaluations sont trop connues pour que je m'y arrête ici, & j'en ai déjà parlé autre-part. Ainsi je dirai simplement que dans ces disputes on a cherché de part & d'autre à confirmer par des expériences le sentiment qu'on avoit embrassé, & que parmi ces expériences il y en avoit plusieurs qui étoient assez mal arrangées pour qu'on n'en ait pu tirer aucune conséquence légitime & générale. J'aurai occasion d'en parler dans la suite. Je commence par celles que j'ai faites moi-même, dans l'intention de les établir pour base de la théorie.

§. 4. Je n'employai d'abord que du sable, que j'avois criblé pour l'avoir bien fin. Je le versai dans un vase & j'en applanis la surface. Ensuite je pris un parallélipipede de bois de buis, qui au moyen d'une charniere pouvoit être replié. En un mot c'étoit un pied de Paris, tel qu'on en achete. Comme j'en ferai usage dans les expériences suivantes, je l'appellerai simplement le pied ou le parallélipipede de buis. La base étoit de 15 lignes quarrées, & en le repliant elle se doubloit. Le poids en étoit de $1\frac{3}{32}$ once, & la pesanteur spécifique de 93 à 94 livres, poids de Berlin, pour le pied cubique. Je plaçai ce parallélipipede doucement sur le sable, afin de voir jusqu'où il s'enfonceroit, après que je l'eus chargé de différens poids. Voici les résultats.

Ce parallélipipede pesant demi-onces	s'enfonça lignes
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{2}{3}$
4	1
5	$1\frac{1}{2}$
6	2
7	$2\frac{1}{2}$
8	$2\frac{1}{2}$
9	3
10	$3\frac{1}{2}$
14	5
18	6

D'après ces nombres j'ai construit la premiere Figure où les abscisses marquent les poids, & les ordonnées les lignes de l'enfoncement répondant. Pl. II. Fig. 1. On voit qu'à quelques petites anomalies près les ordonnées aboutissent à une ligne droite, & qu'ainsi *les enfoncemens sont simplement en raison des poids.*

§. 5. Là-dessus je repliai le parallélipipede pour en doubler la base, & en répétant ces expériences je trouvai les enfoncemens répondans aux mêmes poids deux fois plus petits. Cela me fit voir *que les enfoncemens sont en raison réciproque des bases.* Je répétai ces expériences avec d'autres parallélipipedes & je trouvai ces conséquences très bien confirmées, aussi longtems que j'employai le même sable. Mais lorsque je changeai de sable, les parallélipipedes s'enfoncerent plus ou moins, suivant que le sable étoit plus ou moins fin, ou que les grains de sable étoient plus ou moins arrondis. Cela me fit voir que dans la formule que je voulois établir par ces expériences il y entroit un coëfficient qui, pour une même espece de sable, étoit constant, mais qui varioit suivant les différens sables que j'employois.

§. 6. J'établis donc que les enfoncemens sont en raison directe des poids & en raison réciproque des bases, & que le coëfficient qui doit réduire ces rapports à l'égalité, ſe détermine par la nature du ſable qu'on emploie.

§. 7. Les enfoncemens dont je viens de parler, ſont l'effet de la chûte du parallélipipede, depuis la ſurface du ſable juſqu'à la profondeur où il s'enfonce. Cette profondeur cependant n'eſt pas celle où le parallélipipede fait équilibre avec le ſable, parce que celle-ci n'en eſt que la moitié. Car ſi par ex. dans la derniere expérience du §. 4. le parallélipipede peſant 18 demi-onces s'enfonce de 6 lignes en tombant depuis la ſurface, il ne s'enfonça point du tout lorſque je commençai à le placer en ſorte que ſa baſe étoit 3 lignes au-deſſous de la ſurface du ſable. Ainſi ce parallélipipede peſant 18 pouces fait équilibre avec le ſable lorſqu'il s'y trouve enfoncé de 3 lignes.

§. 8. Dans tout cela il y a bien des choſes qui font entrevoir une parfaite reſſemblance entre la fluidité du ſable & celle des liquides. Car encore dans les liquides un parallélipipede ſpécifiquement plus léger, ſera en équilibre lorſque la profondeur à laquelle il y eſt enfoncé eſt en raiſon directe de ſon poids & en raiſon réciproque de ſa baſe & de la gravité ſpécifique du liquide.

§. 9. A cet égard donc on peut attribuer au ſable une eſpece de gravité ſpécifique, entant qu'il fait équilibre aux corps qui y ſont enfoncés à une certaine profondeur. C'eſt ainſi que dans le ſable dont j'ai fait uſage dans les expériences du §. 4, le parallélipipede reſte en équilibre lorſqu'il y eſt enfoncé à la profondeur de 3 lignes (§. 7). Or ſa baſe étant de 15 lignes quarrées (§. 4) la partie enfoncée du parallélipipede eſt de 45 lignes cubiques. C'eſt donc autant que ſi un volume égal de ſable, en vertu des loix de l'Hydroſtatique, faiſoit équilibre au poids du parallélipipede qui eſt de 18 demi-onces. Car c'eſt moyennant ce poids que le parallélipipede peut être cenſé avoir chaſſé de leur place ces 45 lignes cubiques de ſable. Or ces 45 lignes cubiques ſont à un pied cubique, comme ces 18 demi-onces à 37324,8 livres. Ainſi à l'égard de ſa force hydroſtatique ce ſable eſt équivalent, quant à l'effet, à un liquide dont un pied cubique peſeroit au-delà de 37000 livres. Voilà donc l'évaluation de la force hydroſtatique du ſable que j'ai employé dans les expériences du §. 4.

§. 10. Je crois n'avoir pas beſoin d'avertir qu'en comparant de cette façon le ſable à un liquide cette comparaiſon admet certaines reſtrictions. Ainſi par ex. un corps peut être enfoncé dans le ſable beaucoup plus qu'il ne faut pour qu'il y ait équilibre. Il reſtera dans cet état, tandis que s'il étoit trop enfoncé dans un liquide il remonteroit & ſe remettroit dans l'équilibre après différentes oſcillations. C'eſt à cette différence qu'il convient d'avoir égard, & c'eſt auſſi en quoi la fluidité du ſable differe de celle des liquides. Le ſable s'oppoſe à l'enfoncement comme les liquides, mais il n'eſt pas aſſez fluide pour faire remonter ce qui y eſt enfoncé au-delà du point où il fait équilibre.

§. 11. Après ce que je viens de dire ſur l'état d'équilibre qui peut avoir lieu dans le ſable, je paſſerai à examiner ce qui ſe fait dans les enfoncemens en n'y employant que ce que je viens de nommer la force hydroſtatique du ſable (§. 9). Soit donc D la ſurface du ſable, AB un corps cylindrique ou priſmatique. Suppoſons que ce corps tombe dans le ſable de quelque hauteur $= H$, & qu'il s'enfonce juſqu'en C. Soit encore $AE = b$ la partie qui doit être au-deſſous de la ſurface du ſable pour qu'il y ait équilibre. Si donc le corps en s'enfonçant eſt parvenu à la profondeur AD, qui eſt moindre que AC, il y aura encore quelque reſte de viteſſe. Soit cette viteſſe due à la hauteur $= h$, & faiſons $AD = \xi$, nous aurons, comme pour les liquides, Fig. 2.

$$b\,dh = (b - \xi)\,d\xi,$$

$(b - \xi) : b$ étant la force retardatrice du mouvement. L'intégrale de cette formule eſt

$$bh = b\xi - \tfrac{1}{2}\xi\xi + \text{Conſt.}$$

§. 12. Or pour $\xi = 0$, on a $H = h$, donc

$$bh = bH + b\xi - \tfrac{1}{2}\xi\xi,$$

ce qui pour $h = 0$, donne

$$\xi = AE = b + V(bb + 2bH).$$

§. 13. Si donc le corps ne tombe que depuis la ſurface du ſable D, on a $H = 0$, & par conſéquent $\xi = 2b$, c'eſt à dire, la profondeur à laquelle le corps, tombant depuis la ſurface, s'enfonce, eſt double de celle à laquelle il faut le placer pour qu'il y ait ſimplement équilibre. Et c'eſt auſſi, comme je l'ai dit (§. 7.), ce que mes expériences m'ont fait voir.

§. 14. Mais pour examiner la formule $\xi = b + V(bb + 2bH)$ dans les cas où H n'eſt pas $= 0$, je pris le même ſable & le même parallélipipede que j'avois employés dans l'expérience du §. 4; & après avoir chaque fois applani la ſurface du ſable, j'y laiſſai tomber le parallélipipede de la hauteur de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 12 pouces, & je trouvai les enfoncemens répondans de $\frac{2}{3}$, $2\frac{1}{2}$, 3^{2}, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{3}$, 6, $6\frac{1}{2}$, 9 lignes. Or en faiſant dans la formule $b = \frac{1}{4}$, elle devient

$$\xi = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}V(1 + 8H)$$

& donne les valeurs renfermées dans la Table ſuivante.

H	ξ calc.	ξ exp.
$0'''$	$\frac{1}{2}'''$	$\frac{2}{3}'''$
12	$2\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{2}$
24	4	$3\frac{2}{3}$
36	$4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$
48	$5\frac{1}{3}$	$5\frac{1}{6}$
72	$5\frac{3}{4}$	6
144	$8\frac{3}{4}$	9

§. 15. Il ne m'étoit gueres poſſible de continuer ces expériences avec le même ſable, vu que je n'en avois pas aſſez pour en remplir un vaſe plus large. J'en pris donc d'autre qui étoit moins fin, & y laiſſant tomber le même parallélipipede de la hauteur de 0, 1, 2, 3, 4, 5 pieds, je trouvai les enfoncemens répondans de $\frac{1}{2}$, 7, 10, 12, 14, $15\frac{1}{2}$ lignes. Il étoit aſſez difficile de meſurer ces enfoncemens avec quelque exactitude, la surface du sable s'élevant à l'entour du parallélipipede. Faisant cependant $b = \frac{1}{6}$, la formule se change en $\xi = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sqrt{(1 + 12H)}$, & donne les valeurs suivantes

H	ξ calc.	ξ exp.
$0'''$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
144	$7\frac{1}{10}$	7
288	10	10
432	$12\frac{1}{6}$	12
576	14	14
720	$15\frac{2}{3}$	$15\frac{1}{2}$

§. 16. Comme dans ces dernieres expériences le parallélipipede tombant de 5 pieds de haut s'enfonça de $15\frac{1}{2}$ lignes, tandis que b n'est que $\frac{1}{6}$ ligne, on n'aura qu'à diviser $15\frac{1}{2}$ par $\frac{1}{6}$, & le quotient 93 indiquera que le parallélipipede enfoncé de $15\frac{1}{2}'''$ fait équilibre à son poids pris 93 fois, & ainsi à un poids de $1\frac{3}{32}$ fois $93 = 101\frac{3}{4}$ onces. Car $b = \frac{1}{6}$ ligne est la profondeur à laquelle le sable fait équilibre au parallélipipede lorsqu'il n'est chargé d'aucun poids (§. 11), & le poids doit être augmenté en raison simple de l'enfoncement (§. 4, 7).

§. 17. Les expériences que je viens de rapporter, répondent à la théorie autant que je pouvois le souhaiter. Je n'ai pas cru en devoir rester là. On voit sans peine que le parallélipipede en s'enfonçant perd successivement la vitesse qu'il avoit acquise en tombant, en sorte qu'à la profondeur $= \xi$ il a encore la vitesse qu'il pourroit acquérir en tombant librement d'une hauteur $= h$; tandis que sa vitesse initiale est celle qui est due à la hauteur $= H$. Or la formule (§. 12.)

$$bh = bH + b\xi - \tfrac{1}{2}\xi\xi$$

nous donne

$$H = \frac{bh - b\xi - \frac{1}{2}\xi\xi}{b}.$$

Ainsi les valeurs b, ξ étant prises à volonté, on peut toujours déterminer la hauteur H de laquelle la vitesse initiale dépend.

§. 18. Supposons donc les quantités h, ξ données, il s'agit de trouver la profondeur ξ', à laquelle le parallélipipede s'enfoncera lorsqu'à la profondeur ξ sa vitesse répond à la hauteur h. La formule générale (§. 12) nous donne

$$\xi' = b + \sqrt{(bb + 2bH)}.$$

Substituant donc dans cette formule la valeur

$$H = \frac{bh - l\xi + \frac{1}{2}\xi\xi}{b}.$$

nous aurons

$$\xi' = b + \sqrt{(bb + 2bh - 2b\xi + \xi\xi)}.$$

§. 19. Cette formule s'abrege en faisant

$$\xi = b + x, \qquad \& \qquad \xi' = b + x'$$

de sorte que x exprime la profondeur au-dessous de celle où le sable fait équilibre au parallélipipede. Substituant donc ces valeurs nous aurons

$$x' = \sqrt{(2bh + xx)}.$$

§. 20. Je viens de supposer qu'à la profondeur $\xi = b + x$ la vitesse du parallélipipede soit celle qui est due à la hauteur h. Or il est entierement indifférent de quelle part lui vient cette vitesse. Ainsi nous pourrons également supposer qu'elle soit communiquée au parallélipipede par un choc, comme cela se fait dans le pilotage. Le résultat en est toujours qu'il s'enfoncera jusqu'à la profondeur $\xi' = x' + b = b + \sqrt{(2bh + xx)}$.

§. 21. Nous voici donc en état de déterminer l'enfoncement répondant à un nombre quelconque de chocs consécutifs. Examinons d'abord le cas le plus simple, en mettant pour base que d'abord le parallélipidede soit enfoncé jusqu'à la profondeur $= b$, où le sable lui fait équilibre, & que chacun des chocs lui communique un même degré de vitesse. Nous aurons donc d'abord

$$x = 0 \qquad \& \text{ ainsi } \quad x' = \sqrt{2(b\dot{h})}.$$

Ensuite

Enſuite

$$x = \sqrt{(bh)} \quad \& \text{ ainſi } \quad x' = \sqrt{(2bh)}$$

$$x = \sqrt{(2bh)} \quad - \; - \; - \quad x' = \sqrt{(3bh)}$$

&c.

Donc les enfoncemens croîtront comme les racines quarrées des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5 &c.

§. 22. Cette égalité des chocs, & des viteſſes qui en réſultent, dépend ſimplement de ce qu'on laiſſe tomber ſur le parallélipipede un même poids & d'une même hauteur. Je me ſuis ſervi pour cet effet d'un marteau mobile autour de l'extrémité du manche, & que je pouvois abaiſſer à meſure que le parallélipipede s'enfonçoit. Voici maintenant les expériences que j'ai faites.

§. 23. Je pris le même parallélipipede dont je m'étois ſervi dans les expériences précédentes, mais du ſable moins fin, quoique criblé. Appuyant le marteau ſur le parallélipipede, je l'approchai doucement de la ſurface du ſable, & le laiſſant s'enfoncer librement je vis qu'il s'enfonça de 4 lignes, & qu'à deux lignes de profondeur le ſable lui fit équilibre. Je laiſſai le parallélipipede à cette profondeur, en le tenant légerement appuyé de la main. J'y fis tomber le marteau de la hauteur de 3 pouces, & j'obſervai combien le parallélipipede s'enfonçoit d'avantage à chaque coup de marteau. Cet enfoncement ſe trouva être ſucceſſivement de 3, $4\frac{1}{4}$, $5\frac{1}{3}$, $6\frac{1}{2}$, $7\frac{1}{2}$, $8\frac{1}{4}$, $8\frac{2}{3}$, $9\frac{1}{4}$, $9\frac{3}{4}$, $10\frac{1}{3}$, 11, $11\frac{1}{2}$ lignes, ſuivant l'ordre des 12 coups de marteau. Je dois remarquer que les ſecouſſes que le ſable & le vaſe reçurent de ces coups, remirent la ſurface du ſable de niveau, de ſorte que l'enfoncement pouvoit être aſſez facilement meſuré après les deux premiers coups de marteau. Or par ce que je viens d'établir, les enfoncemens doivent être en raiſon des racines quarrées du nombre des coups de marteau. Faiſant donc ce nombre $= n$, j'ai trouvé que je pouvois faire

$$x = \tfrac{10}{3} . \sqrt{n}.$$

Voici la comparaison

n	x calc.	x exp.	diff.
1	3, 3	3	+ 0, 3
2	4, 7	$4\frac{1}{3}$	+ 0, 4
3	5, 8	$5\frac{1}{3}$	+ 0, 5
4	6, 7	$6\frac{1}{2}$	+ 0, 2
5	7, 7	$7\frac{1}{2}$	+ 0, 2
6	8, 2	$8\frac{1}{4}$	0
7	8, 8	$8\frac{2}{3}$	+ 0, 1
8	9, 1	$9\frac{1}{4}$	— 0, 1
9	10, 0	$9\frac{3}{4}$	+ 0, 2
10	10, 5	$10\frac{1}{3}$	+ 0, 1
11	11, 1	11	0
12	11, 5	$11\frac{1}{2}$	0

§. 24. Je répétai la même expérience en laissant tomber le marteau de la hauteur de 4 pouces. Voici le résultat comparé au calcul.

n	x calc.	x exp.	diff.
1	3, 8	$3\frac{1}{2}$	+ 0, 3
2	5, 3	$5\frac{2}{3}$	— 0, 3
3	6, 4	$6\frac{3}{4}$	— 0, 3
4	7, 6	$7\frac{1}{2}$	+ 0, 1
5	8, 5	$8\frac{1}{2}$	0
6	9, 3	$9\frac{1}{3}$	0
7	10, 0	10	0
8	10, 7	$10\frac{2}{3}$	0
9	11, 3	$11\frac{1}{3}$	0
10	12, 0	12	0

La seconde colonne est calculée au moyen de l'équation

$$x = 3,78 . \sqrt{n}.$$

§. 25. Voyant ainsi que ces deux expériences répondoient à la théorie (§. 20) autant que je pouvois le souhaiter, je m'occupai à les comparer ensemble, rélativement à la chûte du marteau, qui étoit de 3 & de 4 pouces. Or les valeurs de h étant, tout au moins à très peu près, proportionelles à ces hauteurs, les formules (§. 21) indiquent que les enfoncemens doivent être proportionels aux racines quarrées de h, & par conséquent aussi de la chûte du marteau. Or il se trouve que les coëfficiens dans les deux équations

$$x = \tfrac{10}{3}. \sqrt{n}$$
$$x = 3,78. \sqrt{n}$$

sont à très peu près dans le rapport de $\sqrt{3}$ à $\sqrt{4}$. Car

$$\sqrt{4} : \sqrt{3} = 3,78 : 3,27 \quad \text{au lieu de } 3\tfrac{1}{3}.$$

Ainsi la différence est une bagatelle, dont il n'est gueres possible de tenir compte dans ces sortes d'expériences.

§. 26. Je répétai encore cette expérience en employant un fil de laiton de la longueur de 10 pouces, & de $1\frac{3}{4}$ lignes de diametre, pesant 370 grains, poids de Berlin. Ce fil tout seul s'enfonça de 3 lignes dans le sable, & de 10 lignes lorsqu'il étoit chargé du poids du marteau, de sorte qu'à 5 lignes de profondeur le sable lui fit équilibre. Je le laissai à cette profondeur, & le marteau y tomba de la hauteur de 4 pouces. Je continuai l'expérience jusqu'au 24me coup de marteau. Voici le résultat comparé avec le calcul au moyen de l'équation

$$x = \tfrac{17}{2}. \sqrt{n}$$

n	x calc.	x exp.	diff.
1	8, 5	8'''	+ 0, 5
2	12, 0	12	0
3	14, 7	15	— 0, 3
4	17, 0	$16\frac{1}{2}$	+ 0, 5
5	19, 0	$18\frac{1}{2}$	+ 0, 5
6	20, 8	$20\frac{1}{2}$	+ 0, 3
7	22, 5	22	+ 0, 5
8	24, 0	24	0
9	25, 5	$25\frac{1}{2}$	0
10	26, 9	27	— 0, 1
11	28, 2	$28\frac{1}{2}$	— 0, 3
12	29, 4	30	— 0, 6
16	34, 0	$34\frac{1}{2}$	— 0, 5
20	38, 0	$37\frac{1}{2}$	+ 0, 5
24	41, 6	41	+ 0, 6

§. 27. Dans cette expérience chaque enfoncement devoit être mesuré, parce que le fil de laiton n'étoit pas divisé en pouces & lignes comme le pied ou le parallélipipede employé dans les expériences précédentes. Cela m'empêcha de pousser la mesure jusqu'à des $\frac{1}{3}$ & des $\frac{1}{4}$ de ligne. Et de là vient que les différences entre le calcul & l'expérience sont presque toujours d'une demi-ligne. Mais comme elles sont indifféremment positives & négatives, elles ne sont d'aucune conséquence. Je vais donc encore comparer le coëfficient de l'équation

$$x = \tfrac{17}{2}.\sqrt{n}$$

avec celui de la précédente expérience (§. 24)

$$x = 3,78.\sqrt{n}.$$

La chûte du marteau ayant été la même, ces coëfficiens sont simplement en raison de la racine quarrée de b, & par conséquent en raison réciproque de la racine quarrée des bases, les poids, y compris celui du marteau, ayant été à très peu près les mêmes. Or le diametre du fil de laiton est de $\frac{7}{4}$ ligne, donc l'aire de sa base de 2,41 lignes. Et la base du parallélipipede étoit de 15 lignes quarrées (§. 4). Cela donne à très peu près

$$\sqrt{(15)} : \sqrt{(2,41)} = 5 : 2$$

&

$$5 : 2 = \tfrac{17}{2} : 3,40 \quad \text{au lieu de } 3,78,$$

ce qui differe environ d'une $\frac{1}{10}$ partie, ou dans le rapport de 9 à 10, différence qui peut très bien provenir de quelque inégalité des coups de marteau, ou même de quelques grains de sable, qui par leur position plus ou moins embarrassée pouvoient retarder ou faciliter l'enfoncement. Car en répétant la même expérience j'ai toujours vu que les succès étoient plus ou moins différens.

§. 28. Avant que de passer à quelques autres expériences, j'ajouterai ici quelques réflexions sur la vitesse que le choc communique à un corps enfoncé dans le sable. Les trois expériences que je viens de rapporter, confirment ce que j'avois établi au §. 22, savoir que le marteau tombant d'une même hauteur, communique au parallélipipede un même degré de viteſſe, quel que puiſſe être l'enfoncement dans le ſable. Il s'agit donc d'examiner juſqu'à quel point cette viteſſe peut être déterminée par les loix connues du choc des corps. Ces loix ne regardent ordinairement que les corps qui ont une élaſticité parfaite & ceux qui en ſont entierement privés. Cela fait qu'elles ne paroiſſent pas être applicables au cas dont il s'agit. Car encore que le marteau étant d'acier puiſſe être regardé comme élaſtique, le parallélipipede de bois de buis l'eſt dans un moindre degré. J'ai auſſi remarqué dans ces expériences, que le marteau ne rebondiſſoit ordinairement qu'après que le parallélipipede étoit déjà enfoncé de pluſieurs lignes. C'eſt qu'alors il ne s'enfonçoit plus beaucoup, au lieu qu'aux premiers coups de marteau le parallélipipede cédoit plus facilement, & le marteau, au lieu de rebondir, pouvoit ſuivre le mouvement du parallélipipede, qui, pour avoir eu 10 à 12 fois moins de maſſe, devoit, pour peu qu'il fût élaſtique, avoir après le choc plus de viteſſe que le marteau n'en avoit acquis en tombant. En tout cela il n'y a rien encore qui ne ſoit fort naturel & fort conforme aux loix du choc.

§. 29. J'ai dit encore au §. 22. que pour communiquer au parallélipipede le même degré de viteſſe, le même marteau ou poids devoit tomber d'une même hauteur. *Je ſais bien qu'on établit communément qu'il ſuffit* que le poids ſoit en raiſon réciproque de la hauteur d'où il tombe. Mais cet énoncé eſt un peu trop général & trop peu déterminé. Il s'enſuivroit que la hauteur de la chûte étant infiniment petite, le poids devroit être infiniment grand, ce qui, dans le cas dont il s'agit, n'a pas lieu, parce qu'encore que la chûte du poids ſur le parallélipipede ſoit nulle, ce poids n'a pas beſoin d'être infiniment grand pour qu'il enfonce le parallélipipede d'une quantité quelconque donnée. Dans ce cas le poids conjointement avec celui du parallélipipede s'enfonce par la ſimple action de la peſanteur, & ſans que le choc y contribue, puiſqu'il ne ſe fait point de choc.

§. 30. Voici d'abord le calcul pour ce cas où le poids dont on charge le parallélipipede enfoncé juſqu'à une certaine profondeur p, l'enfonce encore d'avantage par la ſimple action de la gravité, & ſans choc. Il ne s'agit que de déterminer la conſtante dans la formule générale (§. 11.)

$$bh = b\xi - \tfrac{1}{2}\xi\xi + \text{Conſt.}$$

Or dans cette formule on a $\xi > p$, & b eſt la profondeur à laquelle le ſable fait équilibre au parallélipipede chargé du poids donné, & non pas au parallélipipede tout ſeul. Mais h doit être $= 0$, lorſque $\xi = p$. Cela donne

$$bh = b(\xi - p) - \tfrac{1}{2}(\xi\xi - pp),$$

équation qui détermine la valeur de h pour un enfoncement ξ quelconque. Or à la fin h doit être $= 0$, parce que le parallélipipede perd entierement ſa viteſſe. Nous avons donc

$$0 = b(\xi - p) - \tfrac{1}{2}(\xi\xi - pp)$$

ce qui donne les deux valeurs

$$\xi - b = \pm (p - b).$$

La premiere de ces valeurs, en prenant le ſigne poſitif, donne $\xi = p$, c'eſt à dire, la profondeur initiale du parallélipipede. La ſeconde valeur, en prenant le ſigne négatif, donne

$$\xi = 2b - p$$

& c'eſt la profondeur terminale. On voit qu'elle eſt d'autant plus grande que la profondeur initiale p eſt plus petite, & qu'elle devient $= 2b$ lorſque $p = 0$, ou que l'enfoncement ſe fait depuis la ſurface du ſable (§ 13). Obſervons encore, à l'égard du ſable, que p ne ſauroit être pris $> b$. Cela feroit $\xi < b$, & le parallélipipede remonteroit. Or j'ai déjà dit que la fluidité du ſable ne s'accorde avec celle des liquides qu'entant qu'il rallentit l'enfoncement (§. 10).

§. 31. Si le parallélipipede ſe trouve préciſément enfoncé juſqu'à la profondeur où le ſable lui fait équilibre, il s'enfoncera encore d'avantage dès qu'on le charge de quelque poids. S'il eſt moins enfoncé, il s'enfoncera d'avantage par ſon propre poids. Mais s'il eſt plus enfoncé, alors pour l'enfoncer d'avantage il faut que le poids dont on le charge ſoit plus grand que celui qui ſuffit pour que le ſable lui faſſe équilibre. Il n'en eſt pas de même du choc, dont l'effet eſt toujours tel que le parallélipipede s'enfonce d'avantage.

§. 32. Soit la maſſe du marteau ou du corps dont la chûte ſur le parallélipipede produit le choc, $= M$. La maſſe du parallélipipede $= m$, la viteſſe de la maſſe M avant le choc ſoit $= V$, celle du parallélipipede avant le choc $= 0$, après le choc $= c$. Nous aurons

$$c = \frac{(1 + \mu) . M . V}{M + m}.$$

Dans cette formule on a pour les corps non-élaſtiques $\mu = 0$, pour les corps parfaitement élaſtiques $\mu = 1$, & pour les corps qui n'ont pas une parfaite élaſticité μ eſt une fraction > 0 & < 1, qu'il faut dans chaque cas particulier déterminer par l'expérience.

§. 33. Mais pour donner à cette formule plus de généralité, ſuppoſons la viteſſe du parallélipipede, avant le choc, $= v$, & nous aurons ſa viteſſe, après le choc,

$$c = \frac{(1 + \mu) M V + (m - \mu M) v}{M + m}.$$

§. 34. Soit maintenant, comme ci-deſſus, b la profondeur à laquelle le ſable fait équilibre au parallélipipede. Suppoſons que le parallélipipede n'eſt encore enfoncé qu'à la profondeur p; il pourra s'enfoncer d'avantage quand encore ſa viteſſe à la profondeur p eſt $= 0$. Mais ſuppoſons qu'il ait la viteſſe $= v$, & que dans le même inſtant, au moyen du choc, cette viteſſe ſe change en

$$c = \frac{(1 + \mu) M V + (m - \mu M) v}{M + m},$$

§. 35. Cela poſé, voici les deux cas qui peuvent avoir lieu.

I°. Si la maſſe M en tombant ſur le parallélipipede rebondit après le le choc, & qu'on l'empêche d'y retomber une ſeconde fois, alors la valeur de la lettre b eſt celle qui répond ſimplement au poids du parallélipipede.

II°. Mais ſi la maſſe M ne rebondit pas, de ſorte qu'elle reſte & continue de peſer ſur le parallélipipede, alors la valeur de b doit être priſe plus grande en raiſon de la maſſe m à la ſomme des maſſes $m + M$. En échange il ſemble que dans ce dernier cas la valeur de μ eſt ou très petite ou $= 0$, tandis que dans le premier elle ſera $= 1$ ou approchera du moins fort de l'unité. Mais quoi qu'il en ſoit, il nous ſuffira de laiſſer ces valeurs de b & de μ indéterminées.

§. 36. Ainſi, à la profondeur donnée $= p$, la viteſſe du parallélipipede eſt $= v$, & après le choc $= c$. C'eſt avec cette viteſſe que le parallélipipede continue de s'enfoncer en ſorte qu'à la profondeur $= \xi$ la viteſſe qui lui reſte eſt due à la hauteur $= h$, & qu'on a (§. 11.)

$$bh = b\xi - \tfrac{1}{2}\xi\xi + \text{Conſt.}$$

Soit a la hauteur de la chûte qui produit la viteſſe $= c$, & il eſt clair qu'en faiſant $\xi = p$, il faut que h ſoit $= a$. Cela donne

$$bh = ba + b(\xi - p) - \tfrac{1}{2}(\xi\xi - pp).$$

§. 37. Faiſons maintenant $h = 0$, pour avoir la profondeur entiere à laquelle le parallélipipede s'enfonce, & cette profondeur ſera

$$\xi = b + \sqrt{(2ba + (b - p)^2)}.$$

§. 38. Subſtituons aux viteſſes V, v, c les hauteurs A, α, a, & nous aurons (§. 34.)

$$\sqrt{a} = \frac{(1 + \mu)M . \sqrt{A} + (m - \mu M)\sqrt{\alpha}}{M + m}$$

valeur qui peut être ſubſtituée dans l'équation

$$\xi = b + \sqrt{(2ba + (b - p)^2)}$$

que nous venons de trouver.

§. 39. Le cas le plus ordinaire étant celui où $\alpha = 0$, ce qui rend le choc plus efficace, nous aurons pour ce cas

$$\sqrt{a} = \frac{(1 + \mu) . M}{M + m} . \sqrt{A}$$

ce

ce qui donne

$$\xi = b + \sqrt{\left(2b\left(\frac{1+\mu}{M+m}\right)^2 M^2 . A + (b-p)^2\right)}.$$

§. 40. Si donc dans ce cas il ne se fait point de choc, on aura $A = 0$, & par conséquent

$$\xi = 2b - p$$

précisément comme nous l'avons trouvé ci-dessus (§. 30). On voit donc comment dans cette formule générale (§. 39), l'effet du choc se joint à celui de la simple pression, qui résulte du poids.

§. 41. Comme cette formule comprend les cas du pilotage, il ne sera pas hors de propos de l'y appliquer plus particulierement: m est le poids du pieu, M celui du mouton, & A la hauteur de laquelle on le laisse tomber. Or comme il faut toujours faire remonter le mouton, cela demande du tems & les forces d'un certain nombre d'ouvriers. C'est d'après ces forces qu'il faut estimer le produit MA rélativement au tems qu'ils y emploient. A cet égard le nombre d'ouvriers étant donné, la quantité MA est constante; car il leur faut autant de tems pour faire monter la masse M par la hauteur A, qu'il leur en faut pour élever la masse vM à la hauteur $A : v$. Jusques-là donc il n'y a rien à gagner. Mais voyons quel sera l'effet.

§. 42. Soit donc MA = Const. = C, & la formule se change en

$$\xi = b + \sqrt{\left[2b(1+\mu)^2 . \frac{MC}{(M+m)^2} + (b-p)^2\right]}.$$

Dans cette formule la partie variable est

$$\frac{M}{(M+m)^2}$$

& nommément la masse M. Or ξ augmente à mesure que cette quantité augmente. Ainsi il ne s'agit que de voir si cette quantité

$$\frac{M}{(M+m)^2}$$

peut être un *maximum*. Nous aurons donc

$$o = \frac{dM}{(M + m)^2} - \frac{2M \cdot dM}{(M + m)^3}$$

ce qui donne

$$M = m.$$

§. 43. *Donc* M, *de même que* ξ, *devient un* maximum *lorſque le poids du mouton eſt égal à celui du pieu qu'il doit enfoncer.* Je dis un *maximum;* car en faiſant $M = m \pm z$, on a

$$\frac{M}{(M + m)^2} = \frac{m \pm z}{(2m \pm z)^2} = \frac{1}{4m} - \frac{zz}{4m(2m \pm z)^2}.$$

Ainſi, ſoit qu'on prenne z poſitive ou négative, le quotient eſt toujours plus petit que lorſqu'on fait $z = o$.

§. 44. Dans ce calcul j'ai fait abſtraction du tems que le mouton emploie à tomber. Ainſi la conſéquence n'eſt à proprement parler applicable qu'aux cas où le tems qu'on emploie pour faire remonter le mouton eſt beaucoup plus long, comme cela arrive lorſqu'on remonte le mouton au moyen d'une machine, & non à force de bras, comme cela ſe fait dans les machines à piloter ordinaires, où le mouton monte à peu près auſſi vite qu'il tombe. Je ne décide pas ſi ce dernier cas eſt fort différent du premier. Je dis ſimplement qu'il n'eſt pas compris dans le calcul que je viens de faire. Je me bornerai donc à dire, *que dans les cas où le mouton monte beaucoup plus lentement qu'il ne tombe, l'effet eſt le plus avantageux quand le poids du mouton eſt égal à celui du pieu qu'il doit enfoncer.* C'eſt alors qu'avec un même nombre d'ouvriers & dans un même intervalle de tems le pieu s'enfonce le plus.

§. 45. On ſavoit généralement parlant de tout tems, qu'il doit y avoir un certain rapport entre le poids du mouton & celui des pieux. Rien n'étoit plus facile que de s'appercevoir que c'étoit perdre du tems & des forces que de vouloir enfoncer un petit clou au moyen d'un marteau peſant pluſieurs quintaux & qui écraſeroit tout. Et réciproquement on ſavoit que c'étoit perdre du tems & ne point faire aſſez uſage de ſes forces que de vouloir enfoncer un pieu peſant pluſieurs quintaux en y frappant de la main ou avec un marteau pesant quelques onces. De là rien de plus facile que d'éviter ces deux excès dans la disproportion entre la force & l'effet. On se rapprocha assez facilement du milieu, & comme pour enfoncer des pieux d'un pied d'épaisseur les coups de marteau n'étoient d'aucun effet, on mit en œuvre des moutons pesant 5, 10 ou plus de quintaux. On fit même une différence entre mouton & mouton, pour les proportionner plus ou moins au poids & à la masse du pieu qu'il s'agissoit d'enfoncer. Tout cela se fit parce qu'on s'y vit comme obligé, sans cependant en entrevoir clairement la raison. Ce qu'il restoit donc à faire c'étoit de déterminer au juste le rapport entre la masse du mouton & celle du pieu. Nous venons de voir que ce rapport est celui d'égalité, & il me semble qu'en général & sans le savoir on s'en approche fort dans la pratique, tant dans l'usage des moutons que dans celui des marteaux de différente grandeur.

§. 46. Je passerai maintenant à considérer les cas où le corps qu'il faut enfoncer est pointu, ou de figure conique ou pyramidale. Soit ce corps AB, la surface du sable D, $AE = b$, $AD = \xi$, h la hauteur qui répond à la vitesse du coin lorsqu'il est enfoncé jusqu'en ξ. La force retardatrice du sable sera $= (b^3 - \xi^3) : b^3$ & ainsi on aura Fig. 1.

$$dh = \frac{b^3 - \xi^3}{b^3} . d\xi$$

ce qui donne

$$hb^3 = b^3\xi - \tfrac{1}{4}\xi^4 + \text{Const.}$$

§. 47. Si donc le coin pour s'enfoncer dans le sable tombe de la hauteur $= H$, on aura $h = H$, lorsque $\xi = 0$, & par conséquent

$$b^3 h = b^3 H + b^3 \xi - \tfrac{1}{4}\xi^4$$

ce qui pour l'enfoncement total, ou $h = 0$, donne

$$\xi^4 - 4b^3\xi = 4b^3 H.$$

§. 48. Si le coin pour s'enfoncer ne tombe que depuis la surface du sable on a $H = 0$, & ainsi

$$\xi = b . \sqrt[3]{4}.$$

§. 49. Réciproquement, on a en général

$$H = h - \xi + \tfrac{1}{4}\xi^4 : b^3$$

ce qui eſt la hauteur de laquelle le coin doit tomber pour qu'à la profondeur ξ il ait encore la viteſſe qui répond à la hauteur h.

§. 50. Cette viteſſe pouvant également être communiquée au coin par un choc, nous n'avons qu'à poſer $= \xi'$ la profondeur à laquelle le coin pénétrera, & nous aurons

$$\dot{\xi}^4 - 4b^3\dot{\xi} = 4b^3h - 4b^3\xi + \xi^4$$

de ſorte que h, ξ étant données on trouve ξ'.

§. 51. Suppoſons, comme ci-deſſus (§. 38), que le choc ſe faſſe par la chûte d'une maſſe $= M$, de la hauteur A, & ſoit m la maſſe du coin, nous aurons

$$\sqrt{h} = \left(\frac{1 + \mu}{M + m}\right) . M . \sqrt{A}$$

& ainſi

$$\dot{\xi}^4 - 4b^3\dot{\xi} = 4b^3 . \left(\frac{1 + \mu}{M + m}\right)^2 . M^2 . A - 4b^3\xi + \xi^4$$

ce qui en général veut dire

$$\Phi\xi' = B + \Phi\xi$$

où Φ dénote une même fonction de ξ', & de ξ.

§. 52. Si donc on a d'abord $\xi = 0$, on aura ſucceſſivement

$$\Phi\xi' = B$$
$$\Phi\xi'' = 2B$$
$$\Phi\xi''' = 3B$$
&c.

& pour le n^{me} choc

$$\Phi\overset{n}{\xi} = nB,$$

ce qui veut dire

$$\overset{n}{\xi^4} - 4b^3\overset{n}{\xi} = 4nb^3A \,.\, M^2\left(\frac{1+\mu}{M+m}\right)^2.$$

Dans cette formule les chocs sont supposés égaux.

§. 53. Je fis une pyramide de bois longue de 2 pouces; la base étoit un rectangle de 7 lignes de longueur & de $4\frac{5}{7}$ lignes de largeur. Ayant chargé ce coin du même marteau dont je me suis servi ci-dessus, je trouvai que le sable lui fit équilibre lorsqu'il étoit enfoncé de $8\frac{1}{2}$ lignes $= b$. Voici le résultat de l'expérience que j'ai faite en laissant toujours tomber le marteau de la hauteur de 3 pouces.

n	ξ	$\xi - b$	Constr.	diff.
0	$8\frac{1}{2}'''$	0	0	0
1	12	4, 5	5, 3	0, 8
2	15	6, 5	7, 0	0, 5
3	$16\frac{1}{2}$	7, 5	8, 3	0, 8
4	$17\frac{1}{2}$	9, 0	9, 3	0, 3
5	$18\frac{1}{4}$	9, 7	10, 1	0, 4
6	19	10, 5	10, 8	0, 3
7	$19\frac{1}{2}$	11, 0	11, 4	0, 4
8	$20\frac{1}{4}$	11, 7	11, 9	0, 2
9	$20\frac{3}{4}$	12, 3	12, 4	0, 1
10	$21\frac{1}{4}$	12, 7	13, 0	0, 3
11	$21\frac{3}{4}$	13, 2	13, 5	0, 3
12	$22\frac{1}{3}$.	13, 7	13, 9	0, 2
13	$22\frac{2}{3}$	14, 2	14, 3	0, 1
14	23	14, 5	14, 6	0, 1
15	$23\frac{1}{3}$	14, 8	14, 8	0, 0
16	$23\frac{2}{3}$	15, 2	15, 0	0, 2
17	24	15, 5	15, 3	0, 2

Les nombres de la pénultieme colonne sont ceux que j'ai trouvés en construisant la courbe

$$\xi^4 - 4b^3\xi \backsim n;$$

par là je me dispensai de résoudre 17 équations du quatrieme degré. Les différences de la derniere colonne sont presque toutes positives, de sorte qu'en changeant tant soit peu le coëfficient dont je devois me servir pour proportionner la construction aux nombres que donna l'expérience, ces différences auroient été encore plus petites.

§. 54. Je répétai cette expérience en enfonçant un clou fort pointu dans du bois de sapin le long des fibres longitudinales, au moyen du même marteau que j'y laissai tomber de la hauteur de 4 pouces. En voici le résultat.

Nombre des coups n	Enfoncemens lignes ξ
1	1, 9
2	3, 0
3	3, 7
4	4, 2
5	4, 5
6	4, 8
7	5, 0
8	5, 2
9	5, 4
10	5, 6
11	5, 7
12	5, 9
13	6, 0
24	7, 0
37	8, 0
52	9, 0
68	10, 0
96	11, 0
134	12, 0

§. 55. Or en faisant $\xi - b = x$ l'équation (§. 52.) se change en

$$x^4 + 4bx^3 + 6b^2x^2 = \varrho n.$$

Et comme l'expérience donne

$$\text{pour} \quad n = 13 \qquad x = 6$$
$$n = 134 \qquad x = 12$$

nous aurons

$$\varrho = 260$$
$$b = 1,688$$

& par conséquent

$$x^4 + 6,752x^3 + 17,094x + 260n,$$

ce qui pour chaque ligne d'enfoncement donne

x	n calc.	n exp.	diff.
1	——	——	——
2	0, 5	1	— 0, 5
3	1, 6	2	— 0, 4
4	3, 7	3, 6	+ 0, 1
5	7, 3	7	+ 0, 3
6	——	13	——
7	21, 4	24	— 2, 6
8	33, 3	37	— 3, 7
9	49, 9	52	— 2, 1
10	71	68	+ 3
11	98	96	+ 2
12	——	134	——

Les différences sont, généralement parlant, assez petites pour que le moindre défaut dans la mesure des enfoncemens ait pu les produire. Mais la valeur $b = 1,688$, trouvée par le calcul, est plus grande que celle que l'expérience me donna immédiatement; car le clou chargé simplement du poids du marteau ne s'enfonça gueres plus que de $\frac{1}{4}$ ligne.

§. 56. Je répétai la même expérience en enfonçant le même clou dans du plomb, au moyen du même marteau que j'y laissai tomber de la hauteur de 4 pouces. Voici le résultat, comparé avec le calcul fait moyennant l'équation

$$x^4 + 16,86\,x^3 + 106,64\,x = 127n.$$

x	n calc.	n exp.	diff.
1	1	1	0
2	4, 5	6 —	— 1, 5
3	11, 7	11	+ 0, 7
4	——	24	——
5	42, 5	48	— 5, 5
6	61, 1	80	— 10, 9
7	105, 7	113	— 7, 3
8	——	152	——

§. 57. Vers la fin de l'expérience le clou commença à se plier, ce qui, joint à ce que vers la fin il eût fallu diviser une ligne en 30 ou 40 parties pour juger si en effet l'enfoncement avoit augmenté d'une ligne, peut très naturellement avoir produit les différences qui se trouvent entre le calcul & l'expérience. Du reste encore ici la valeur de b, trouvée par le calcul, est $= 4''', 216$ & par conséquent encore plus grande que dans l'expérience précédente. Mais outre que le clou n'étoit pas pointu dans la rigueur géométrique il s'en faut de beaucoup que le bois & le plomb, quoique fort mous, puissent, à l'égard de la fluidité, être comparés au sable. Aussi n'ai-je fait les deux dernieres expériences que pour voir jusqu'à quel point la formule (§. 52.) y seroit applicable. Les deux Tables (§§. 55. 56.) font voir que la différence entre le calcul & les expériences est assez petite pour pouvoir être regardée comme nulle. Ainsi il n'y a que la lettre b & le coëfficient ϱ qui semblent avoir une valeur & une signification un peu différentes de celles qu'ils ont à l'égard du sable & des liquides.

§. 58. Ce que je puis dire à ce sujet c'est que les corps mous, tels que le plomb, peuvent plus ou moins être comprimés & par là être condensés, & cette condensation peut avoir lieu indépendamment de la profondeur des particules au-dessous de la surface. Ce sont les forces de cohésion qui entrent ici en ligne de compte, & dont la loi n'est pas encore suffisamment connue. Du reste en enfonçant un clou dans du plomb, l'enfoncement se fait toujours d'autant plus difficilement qu'il y a plus de particules à déplacer.

§. 59.

§. 59. Les mêmes remarques ſe préſentent à faire à l'égard du terrain marécageux, qui peut plus ou moins différer du ſable, quoique toujours beaucoup moins que n'en different le bois & le plomb. Les expériences que j'ai rapportées dans ce Mémoire, me ſemblent mériter d'être faites en grand. On peut à cet égard ſe ſervir des occaſions qu'offre le pilotage, ſurtout dans un terrain égal, parce qu'il ſuffit d'avoir attention à ce que le mouton tombe toujours d'une même hauteur, ce qui n'eſt pas difficile pour peu que la machine à piloter ſoit arrangée en conſéquence. Les moyens de meſurer l'enfoncement du pieu ſont également fort ſimples & faciles, parce qu'il ſuffit de le diviſer en pieds & pouces, en notant les diviſions avec de la craie. On voit ſans peine que ces ſortes d'expériences, faites avec quelque ſoin, aboutiroient à nous donner des meſures juſtes de la ſolidité du terrain. C'eſt ainſi par ex. qu'on pourroit évaluer le poids que pourra porter un pieu enfoncé à une certaine profondeur, ſans que ce poids dont il ſeroit chargé, l'enfonçât d'avantage. Par là on détermineroit le nombre des pieux, leur épaiſſeur & la profondeur à laquelle il faudroit les enfoncer pour qu'ils puſſent porter un édifice ou quelqu'autre ouvrage d'architecture d'un poids donné. Et comme le terrain marécageux & ſpongieux, à force de pilotis qu'on y enfonce, ſe reſſerre, & contribue par là à augmenter la force des pieux, il eſt clair que c'eſt encore là un article qui mériteroit d'être examiné par des expériences faites avec ſoin, & dans le but de répandre du jour ſur la théorie de la ſolidité du terrain & de la ſtabilité des ouvrages d'architecture.

§. 60. J'ajouterai encore quelques conſidérations ſur le cas où le corps qui s'enfonce eſt ſphérique. C'eſt le cas des bombes & des boulets de canon. Soit donc la boule A enfoncée juſqu'en D, & que ſa viteſſe Fig. 4.
réponde à la hauteur $= h$. Que le terrain faſſe équilibre lorſque la boule eſt enfoncée juſqu'en E, de ſorte que $AE = b$. Faiſons $AD = \xi$, la force retardatrice pour l'enfoncement ξ ſera

$$= 1 - \frac{3D\xi^2 - 2\xi^3}{3Db^2 - 2b^3}.$$

De là nous aurons

$$dh = d\xi - \frac{3D\xi^2 - 2\xi^3}{3Db^2 - 2b^3} \cdot d\xi$$

& en intégrant

$$h = \xi - (D\xi^3 - \tfrac{1}{2}\xi^4) : (3Db^2 - 2b^3) + \text{Conft.}$$

§. 61. Soit $h = H$ lorfque $\xi = 0$, on aura

$$h = H + \xi - (D\xi^3 - \tfrac{1}{2}\xi^4) : (3Db^2 - 2b^3).$$

§. 62. Pour appliquer cette formule à des cas particuliers il y a deux cas qu'il faut diftinguer. Car h peut devenir $= 0$, ou avant que la boule foit entierement enfoncée, ou après qu'elle l'eft déjà. Dans le premier cas, on trouvera l'enfoncement total en faifant fimplement $h = 0$. Cela donne

$$0 = H + \xi - (D\xi^3 - \tfrac{1}{2}\xi^4) : (3Db^2 - 2b^3)$$

d'où l'on tire

$$0 = \xi^4 - 2D\xi^3 + (6D - 4b)b^2\xi + (6D - 4b)b^2H.$$

§. 63. En laiffant tomber une boule de plomb dans du fable, j'ai trouvé qu'elle s'enfonçoit de la moitié de fon diametre lorfqu'elle tomboit de la hauteur de 50 de fes diametres. Pofant donc $D = 1$, $H = 50$, $\xi = \frac{1}{2}$, on trouve $b = \frac{1}{40}$. Cette valeur, de même que celle de D, étant fubftituée, on a

$$H = -271{,}2\,\xi^4 + 542{,}4\,\xi^3 - \xi.$$

Voici donc comment la boule s'enfonce à mefure qu'elle tombe d'une plus grande hauteur.

ξ	H	volume.
0, 1	0, 42	0, 028
0, 2	3, 71	0, 104
0, 3	14, 25	0, 216
0, 4	27, 37	0, 352
0, 5	50, 35	0, 500
0, 6	71, 44	0, 648
0, 7	118, 78	0, 784
0, 8	165, 83	0, 896
0, 9	216, 71	0, 926
1, 0	270, 20	1, 000

§. 64. Dans cette Table la premiere colonne marque l'enfoncement en parties décimales du diametre de la boule; la feconde la hauteur de la chûte en diametres de la boule & leurs parties centéfimales; la troifieme indique le volume de la partie enfoncée de la boule, le volume entier étant exprimé par l'unité. J'ai ajouté cette troifieme colonne, parce que dans les difputes fur les forces vives on a cru pouvoir démontrer, & par la théorie & par l'expérience, que ces forces font proportionelles aux cavités formées par l'enfoncement, & par conféquent aux nombres de la troifieme colonne. Ainfi ces nombres devoient encore être proportionels aux nombres répondans de la feconde colonne. Mais on voit qu'il y a une énorme différence.

§. 65. L'équation que nous venons de trouver ne s'étend qu'aux cas où $\xi < D$, c'eft à dire où la boule ne s'enfonce qu'en partie. Mais fi elle tombe d'une plus grande hauteur, en forte qu'après s'être entierement enfoncée elle ait encore affez de viteffe pour s'enfoncer d'avantage, alors il faut commencer à déterminer cette viteffe, ou la hauteur due à cette viteffe. Cela fe fait en pofant dans l'équation (§. 61.)

$$h = H + \xi - (D\xi^3 - \tfrac{1}{2}\xi^4) : (3Db^2 - 2b^3)$$

$\xi = D$. Par là on obtient

$$h' = H + D - \frac{D^4}{2bb(3D - 2b)}$$

ce qui eft la hauteur due à la viteffe que la boule a encore lorfqu'elle commence à être entierement enfoncée.

§. 66. Cette viteſſe ſe perd uniformément. Car la boule étant entierement enfoncée, la force retardatrice commence à être conſtante

$$= 1 - \frac{D^3}{(3D - 2b)bb} = - \frac{D^3 - 3Db^2 + 3b^3}{3Db^2 - 2b^3},$$

ce qui, pour un plus grand enfoncement ξ, donne en général

$$h = h' - \frac{D^3 - 3Db^2 + 2b^3}{3Db^2 - 2b^3} \cdot (\xi - D).$$

§. 67. Pour trouver l'enfoncement total il faut faire $h = 0$, ce qui donne

$$0 = h' - \frac{D^3 - 3Db^2 + 2b^3}{3Db^2 - 2b^3} \cdot (\xi - D)$$

ou bien

$$\xi = D + \frac{h'(3Db^2 - 2b^3)}{D^3 - 3Db^2 + 2b^3}.$$

§. 68. Je ne puis rapporter ici qu'une ſeule expérience faite en grand près de *Strasbourg* par Mr. *du Moutier*. Ce Capitaine d'Artillerie fit dreſſer verticalement une piece de canon de 24 livres de balle, & chargée d'abord de 12 livres, enſuite de 16 livres de poudre. La premiere fois le boulet reſta dans l'air pendant 51 ſecondes de tems, l'autre fois il employa 53″ pour monter & redeſcendre. L'une & l'autre fois en retombant il s'enfonça d'environ 28 pouces en terre, à une diſtance de 300 & de 367 toiſes du canon.

§. 69. J'entens que le boulet étoit de fer, ce qui fait que ſon diametre eſt à très peu près $\frac{9}{20}$ pied de Paris. Je poſerai encore ſa gravité ſpécifique 5365 fois plus grande que celle de l'air & je ferai la chûte des corps, qui dans le vuide répond à une ſeconde de tems, = 15,096 pieds. Appliquant donc à ce cas les formules que j'ai données dans les *Mémoires de l'Académie* 1765, je trouve la viteſſe terminale, c'eſt à dire la plus grande que ce boulet puiſſe acquérir en tombant = 190,91 pieds; le tems de la montée dans la premiere expérience = 18″,9; le tems de la deſcente = 32″,1; la viteſſe initiale avec laquelle le boulet ſortit du canon = 1282,5 pieds par ſeconde; la viteſſe avec laquelle il retomba à terre $=$ 188,8 pieds; la hauteur à laquelle le boulet monta $=$ 4621,2 pieds.

§. 70. Or ici il suffit de nous en tenir à la vitesse avec laquelle le boulet retomba à terre & qui est $=$ 188,8 pieds; ce qui donne la hauteur due à cette vitesse

$$H = 590,3 \text{ pieds} = 1312 \text{ diametres de la boule.}$$

Le boulet s'enfonça de 28 pouces, ce qui donne

$$\xi = \tfrac{140}{27} \text{ diam. de la boule.}$$

Posant donc le diametre $= 1$, & substituant ces valeurs dans les équations (§§. 67. 65.)

$$\xi = D + \frac{h'(3Db^2 - 2b^3)}{D^3 - 3Db^2 + 2b^3}$$

$$h' = H + D - \frac{D^4}{2bb(3D - 2b)}$$

nous en déduirons l'équation

$$0 = b^3 - \tfrac{3}{2}b^2 + \frac{1}{629,44}.$$

Cette équation a trois racines réelles & positives. La plus grande, qui est à très peu près $b = \frac{3}{2}$, est exclue, parce qu'elle feroit $b > D$. Les deux autres sont $b = 0,0329$ & $b = 0,0322$, de sorte que b est à très peu près $= \frac{1}{30}$ du diametre du boulet; ce qui dans un terrain mou, tel que seroit celui d'un champ labouré, peut très bien avoir lieu. Car pour le sable & des boulets de plomb j'ai trouvé $b = \frac{1}{40}$ (§. 64.)

§. 71. Si le même boulet, au lieu d'être tiré verticalement en haut, avoit été tiré contre terre à plomb, il se feroit enfoncé bien d'avantage. Car sa vitesse étoit $=$ 1282,5 pieds. La hauteur qui répond à cette vitesse est $=$ 27239 pieds $=$ 60531 diametres du boulet. Faisant donc

$$b = \tfrac{1}{30}$$

$$D = 1$$

$$H = 60531$$

on trouve (§. 65. 67.)

$$h' = 60379$$
$$\xi = 198.$$

Ainſi le boulet s'enfonceroit de 198 de ſes diametres, ou de 89 pieds. Cet enfoncement croît ou décroît à très peu près comme le quarré de la viteſſe. Si donc la viteſſe n'eſt que de 500 pieds par ſeconde, il ne s'enfoncera que de 20 pieds. Et ſi la viteſſe n'eſt que de 400 pieds, il ne s'enfoncera que de 14 pieds. Or la viteſſe des boulets qui viennent frapper les remparts n'eſt gueres plus grande que de 400 pieds par ſeconde, vû que la réſiſtance de l'air la diminue fort conſidérablement. Voilà donc pourquoi on exige pour le parapet près de 20 pieds d'épaiſſeur.

§. 72. Dans les calculs précédens j'ai fait abſtraction de ce qu'on peut appeller la *réſiſtance* du ſable ou du terrain, entant qu'elle dépend du plus ou du moins de viteſſe. La retardation du mouvement qui en réſulte eſt fort petite en comparaiſon de celle qui vient de ce que j'ai nommé ci-deſſus (§. 9.) la force hydroſtatique du ſable ou du terrain. Mais elle peut entrer en ligne de compte lorſqu'un corps ſe meut ſous terre dans une direction plus ou moins horizontale, quoiqu'encore dans ce cas elle ſe combine & ſe confonde avec la force hydroſtatique. Suppoſons un boulet qui ſous terre ſe meuve horizontalement. Il eſt clair qu'à meſure qu'il avance, il trouve de la terre à déplacer. Cela ſe fait en ce qu'il ſouleve la terre, & à cet égard l'effort qu'il doit faire dépend de ſa profondeur au-deſſous de la ſurface du terrain où il ſe meut. Il ſoulevera plus facilement la terre qu'il touche par en haut que celle qu'il touche par en bas. Cette derniere ſera en partie déprimée, & ne pouvant pas céder elle oblige le boulet à courber ſon chemin & à remonter vers la ſurface. Cette courbure peut encore être regardée comme un effet de la force hydroſtatique, d'autant plus qu'elle a encore lieu dans les liquides.

§. 73. Une bombe de 10", 63 du pied de Rhin, & 4078 fois plus pesante qu'un même volume d'air, fut jettée sous un angle de 45 degrés. Elle retomba à terre à une distance de 1650 pieds de Rhin. On la trouva enfoncée de $13\frac{1}{2}$ pouces sous terre, & à 35 pouces de distance horizontale de l'endroit où elle avoit commencé à s'enfoncer. Le chemin qu'elle parcourut sous terre étoit une ligne courbe, qui à la fin avoit une direction entierement horizontale. Cette courbure est simplement un effet de la force hydrostatique du terrain, qui étoit celui d'un champ labouré & sablonneux.

§. 74. En ajoutant aux $13\frac{1}{2}$ pouces d'enfoncement le diametre de la boule 10,63, on a l'enfoncement total $\xi = 24'', 13$, qui par conséquent est $= 2,27$ diametres de la bombe.

§. 75. Or par la théorie de la résistance de l'air je trouve que cette bombe tomba à terre sous un angle d'incidence de $48\frac{1}{3}$ degrés, avec une vitesse de 212 pieds de Rhin par seconde. Cela donne la vitesse verticale $= 159$ pieds, & la hauteur due à cette vitesse est $= 401$ pieds $=$ 453 diametres de la boule. Faisant donc

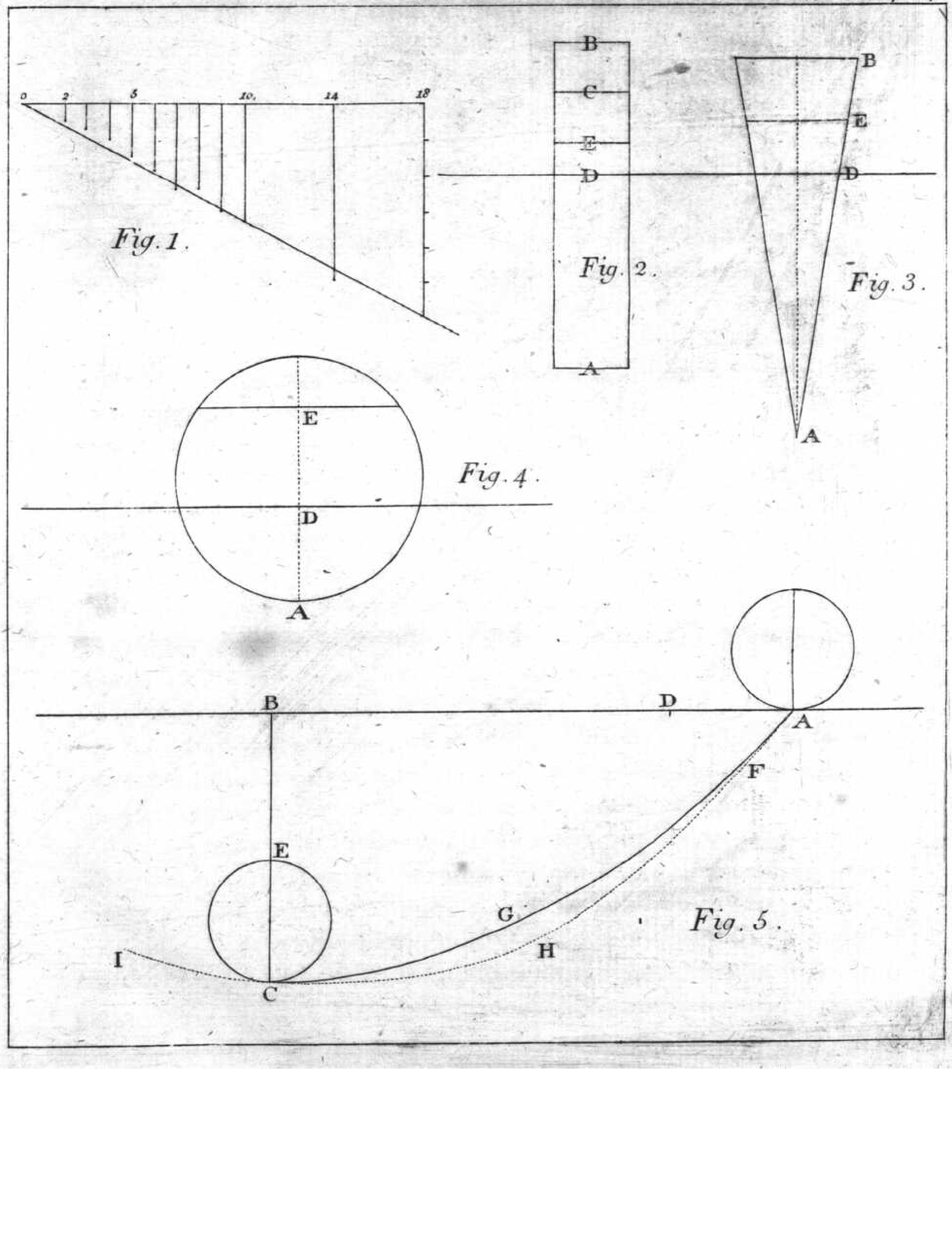
$$\begin{aligned} \xi &= 2,27 \\ H &= 453 \\ D &= 1 \end{aligned}$$

on trouve $b = \frac{1}{28}$. Cette valeur peut très bien avoir lieu dans un terrain labouré, mou & sablonneux.

§. 76. Soit AB la surface du terrain, $BD = 35$ pouces, Fig 5.
$BE = 13\frac{1}{2}$ pouces, $DA = EC$ le diametre de la bombe $=$ 10,63 pouces, on aura $BD = 45,6$ pouces, $BC = 24,1$ pouces. La bombe commença à toucher la terre en A, & le point A parcourut la courbe AC. L'angle d'incidence en A, qui étoit de $48\frac{1}{3}$ degrés, devoit diminuer un peu pendant que la bombe entroit en terre. Or je trouve que la courbe AC est à très peu près parabolique. Car en

diviſant $2BC = 48{,}2$ par $AB = 45{,}6$ le quotient $1{,}057$ eſt la tangente de l'angle DAF, ce qui fait cet angle $= 46^\circ.\ 36'$, un peu plus petit que n'étoit l'angle d'incidence. Cependant en regardant de plus près le chemin que la bombe avoit parcouru ſous terre, il m'a paru être plus courbé, de ſorte qu'au lieu d'être une parabole AGC, c'étoit une autre courbe AHC; ce qui peut très bien provenir de la réſiſtance du terrain. Il arrive encore quelquefois que la bombe, après s'être d'abord enfoncée, commence à remonter vers I, lorſque dans le point le plus bas C elle n'a pas encore perdu toute ſa viteſſe.

SUITE


0
2
5
10.
14
18
Fig. 1.
B
C
E
D
A
Fig. 2.
B
E
D
A
Fig. 3.
E
D
A
Fig. 4.
B
D
A
F
E
G
H
I
C
Fig. 5.