SUR

LA DENSITÉ DE L'AIR.

PAR M. LAMBERT.

§. 1.

La denſité des matieres s'exprime ordinairement par le poids d'un certain volume, par ex. d'un pied cubique, ou par le rapport de ce poids à celui d'un même volume d'une matiere très connue, p. ex. de l'eau de pluie. C'eſt dans ce dernier ſens qu'on dit que l'air eſt environ 850 fois moins denſe que l'eau, & que l'eau eſt près de 14 fois moins denſe que le vif argent. D'où il ſuit que l'air eſt près de 12000 fois moins denſe que le vif argent. Dans ces énoncés on entend que c'eſt l'air tel qu'on l'a peſé, & tel qu'il ſe trouve près de la ſurface de la Terre & dans des endroits peu élevés au-deſſus de la mer. C'eſt un air comprimé par le poids de toute l'atmoſphere, d'une température moyenne & rempli ou chargé de vapeurs & de toutes ſortes de matieres étrangeres. C'eſt un air tel qu'il eſt naturellement, & que pour cet effet je nommerai *air naturel* ou *air commun* pour le diſtinguer de ce qui doit être appellé *air pur* ou air proprement tel.

§. 2.

Il y a différens phénomenes qui dépendent de la denſité de l'air, & où il n'eſt pas indifférent que ce ſoit la denſité de l'air naturel ou de l'air pur. Quand on donne une théorie de ces ſortes de phénomenes, il eſt naturel qu'on l'aſſujettiſſe à l'épreuve de l'expérience, laquelle ſouvent ne répond pas à l'attente, uniquement parce que l'air pur ſe confondoit avec l'air naturel. Il n'y a que l'air naturel dont nous puiſſions déterminer la denſité par des expériences immédiates. Si donc ces théories préſuppoſent un air pur, il eſt clair que l'air naturel y ſeroit très mal appliqué. Dans ces cas il vaut mieux mettre la théorie pour baſe, l'examiner bien par elle-même, & l'employer enſuite pour déterminer la denſité de l'air pur.

§. 3.

C'eſt ce que j'ai fait dans le Mémoire *ſur la viteſſe du ſon*, que j'ai lu à l'Académie en 1768, & le réſultat en a été *que l'air pur eſt tout au moins un tiers moins denſe que l'air naturel, de ſorte qu'un tiers du poids d'un pied cube d'air naturel conſiſte en particules étrangeres, dont l'air eſt ordinairement chargé.* C'eſt l'air tel qu'il eſt aſſez près de la ſurface de la mer en Europe, & nommément dans les endroits où on a fait des expériences, tant ſur la viteſſe du ſon, que ſur la denſité de l'air naturel.

§. 4.

Cependant la viteſſe du ſon n'eſt pas le ſeul phénomene qui nous faſſe voir clair dans ce qui regarde la denſité de l'air pur. Les réfractions de la lumiere dans l'atmoſphere peuvent répandre là-deſſus un plus grand jour, & c'eſt dans ce deſſein que je me ſuis occupé à les examiner avec toute l'attention requiſe. Je dirai d'abord que j'ai eu des précurſeurs dans cette carriere, en particulier Mr. *Simpſon* & Mr. *Bouguer*. L'un & l'autre trouvent que les réfractions ne ſuivent pas les décroiſſemens de la denſité de l'air qu'ils appellent air groſſier, ou que je nomme ſimplement air naturel. Mr. *Simpſon* trouve qu'en ſuppoſant l'air naturel, la réfraction horizontale iroit à plus de 50′, tandis qu'elle n'eſt que de 32 ou 33 minutes. Cela le porte à ſuppoſer une matiere réfractive, qui décroiſſe uniformément en montant. Cette hypotheſe emporteroit la conſéquence, que la matiere réfractive ne s'étend qu'à une certaine hauteur, puiſqu'au-deſſus de cette hauteur elle deviendroit négative. Mr. *Bouguer* paroit admettre une ſuppoſition aſſez ſemblable, puiſqu'il prétend qu'à une hauteur qui va au-deſſus de 5158 toiſes ſur la mer, les réfractions ſont nulles. J'ai déjà remarqué autre-part, que de la façon dont Mr. *Bouguer* infere cette conſéquence, on peut en inférer telle autre qu'on voudra, & qu'ainſi il prouve beaucoup au-delà de ce qu'il falloit prouver. Je m'en tiendrai donc, non à ces ſortes d'autorités, mais à ce que je pourrai faire voir moi-même.

§. 5.

§. 5.

La premiere queſtion eſt de ſavoir ſi les matieres étrangeres qui nagent continuellement plus ou moins dans l'air, influent ſur les réfractions. A cet égard je dis *qu'elles n'y influent qu'entant que les couches d'air ne ſont point planes, mais ſphériques, & ſimplement entant que par leur poids elles augmentent la denſité de l'air pur en le comprimant.* Voici comment j'argumente pour démontrer cet énoncé. Les matieres étrangeres qui nagent dans l'air ſont des particules hétérogènes & diſſéminées, c'eſt à dire qu'elles ne font point continuité avec l'air pur. Elles interceptent la lumiere qui y tombe, elles l'abſorbent en partie, & en partie elles la réfléchiſſent. Si ce ſont des bullules ou véſicules d'eau, ou des globules d'eau, ou des particules glaciales ou ſalines tranſparentes, la lumiere s'y briſe en ſorte qu'elle nous préſente des couleurs d'iris, ſous différente forme. En tout cela il n'y a rien qui influe dans les réfractions. Elles ſuppoſent l'uniformité & la continuité de l'air pur, & la diminution de ſa denſité d'une couche quelconque à celle qui lui eſt contiguë. A cet égard les particules hétérogenes dans l'air ſont comme la pouſſiere ſur la ſurface d'un priſme de verre. Le priſme en paroit moins tranſparent, mais la lumiere non interceptée s'y briſe ſous les mêmes angles, comme ſi la pouſſiere n'y étoit pas. Il en eſt de même des petites bulles d'air qui ſe trouvent au dedans du priſme. Elles interceptent la lumiere & troublent la ſéparation des rayons colorés qui y tombent. Mais ceux qui paſſent ſans rencontrer ni pouſſiere ni bulles d'air ni particules ſabloneuſes, ſuivent les mêmes loix qu'ils ſuivroient dans un priſme d'une même eſpece de verre, mais parfaitement tranſparent & bien nettoyé.

§. 6.

J'infere de là que *les particules étrangeres n'influent pas par elles-mêmes dans la quantité de la réfraction.* Mais nonobſtant cela *elles y influent en ce que par leur poids elles compriment l'air pur & le rendent plus denſe.* Si donc à cet égard la denſité des particules étoit partout proportionelle à l'air pur, l'effet en ſeroit le même que ſi l'air pur étoit en ſoi-même plus denſe, ou ſi les particules de l'air pur étoient en elles-mêmes plus peſantes.

Ce cas avoit lieu, du moins à très peu près, dans l'expérience par laquelle M. *Hawksbee* fit voir que la réfraction de l'air diminuoit en même raiſon que ſa denſité. C'étoit de l'air naturel qu'il y employa & il eſt clair qu'en le dilatant par l'évacuation il dilatoit en même tems les particules étrangeres. On ſait qu'en pompant l'air il paroit d'abord un brouillard dans le verre qu'on vuide, & qu'à meſure qu'on continue d'exténuer l'air ces particules commencent à tomber peu à peu dans le fond du verre, l'air exténué n'ayant plus aſſez de force pour les ſoutenir toutes dans ſes interſtices. Obſervons cependant qu'en pompant l'air s'exténue, parce qu'on aggrandit l'eſpace dans lequel il peut ſe répandre. L'air ſe retire de la cloche dans le canon de la machine pneumatique, & il n'eſt pas douteux qu'en s'y retirant il n'emporte une partie des matieres étrangeres qu'il renfermoit dans ſes interſtices. Cette partie ſeroit proportionelle à la quantité de l'air qui ſe retire, ſi l'inertie de ces matieres n'y mettoit pas obſtacle & ſi l'air exténué étoit auſſi propre à les ſoutenir que l'air condenſé. Alors la denſité des particules étrangeres reſteroit proportionelle à la denſité qui reſteroit dans l'air. Mais comme avec tout cela le brouillard qu'on voit dans la cloche après les premiers coups de piſton, tombe peu à peu au fond de la cloche, il ſemble que la denſité des particules étrangeres diminue plus fortement & plus vite que la denſité de l'air. Ce qui eſt ſûr c'eſt que les particules plus peſantes ſont les premieres à tomber.

§. 7.

J'ai dit, en troiſieme lieu, *que les particules étrangeres influent dans les réfractions entant que les couches de l'atmoſphere ſont ſphériques.* Elles compriment l'air pur par leur poids. Cela fait que les couches ſe rapprochent de la ſurface ou bien du centre de la Terre. Par là ces couches ſont des ſpheres d'un moindre diametre, & cela fait que dans les couches ſupérieures tous les angles d'inclinaiſon & de réfraction ſont plus grands, & par-là la réfraction devient elle-même plus grande. Juſques-là donc Mr. *Simpſon* a raiſon de dire que dans l'air naturel, c'eſt à dire chargé de matieres étrangeres, les réfractions que donne la théorie devroient être au delà de la moitié plus grandes que l'obſervation ne les donne. C'eſt auſſi ce que je vais faire voir à ma façon, ſurtout pour les réfractions que la lumiere ſouffre près de la ſurface de la Terre. Il s'enſuivra que la denſité de l'air, telle que les réfractions l'exigent, je dirai même telle qu'elle eſt en effet, décroît plus lentement que celle qu'on ſuppoſe être proportionelle aux hauteurs barométriques.

§. 8.

Pour cet effet ſoit C le centre de la Terre, AF une partie de ſa ſurface, LBA un rayon de lumiere qui tombe horizontalement en A. La réfraction que ce rayon ſouffre en paſſant de B en A eſt égale à la courbure de ſa route depuis B juſqu'en A. Soit DB une droite qui touche le rayon en B, & ſoit abaiſſée ſur cette droite du centre de la Terre la perpendiculaire CD, j'ai fait voir dans les *Routes de la lumiere* qu'en ce cas CD eſt à CA comme le ſinus d'inclinaiſon eſt au ſinus de réfraction lorſque la lumiere paſſe immédiatement de l'air tel qu'il eſt en B dans l'air tel qu'il eſt en A. Et dans le même Ouvrage j'ai fait voir encore que lorſque l'angle ACB n'eſt que très petit ou que la hauteur FB n'eſt pas fort grande, on peut ſubſtituer à la courbe BC ſon cercle oſculateur, & que le centre E de ce cercle E eſt 7 fois plus éloigné de A que ne l'eſt le centre de la Terre, de ſorte que $AE = 7 . AC$. Cette proportion eſt la moyenne, car du reſte elle eſt variable, quoiqu'entre certaines limites. Pl. V. Fig. 1

§. 9.

Tirons maintenant CP parallele à DB ou perpendiculaire ſur EB, & faiſons $AC = 1$, $AE = R$, & l'angle $AEC = ACD = \varrho$. Cet angle ſera égal à la réfraction que la lumiere ſouffre en paſſant de B en A, & nous aurons

$$CP = DB = (R - 1) \sin \varrho$$
$$CD = BP = BE - PE = R - (R - 1) \cos \varrho.$$

Donc

$$GD = CD - AC = (R - 1) . (1 - \cos \varrho) = 2 (R - 1) (\sin \tfrac{1}{2} \varrho)^2$$

&

$$CB = \sqrt{(CD^2 + DB^2)} = \sqrt{[(R-1)^2 \sin \varrho^2 + (R-(R-1)\cos \varrho)^2]}$$
$$= \sqrt{[1 + 4R(R-1) \sin \tfrac{1}{2}\varrho^2]}$$

c'eſt à dire à très peu près

$$CB = 1 + 2R(R-1) \sin \tfrac{1}{2}\varrho^2$$

l'angle ϱ n'étant que de quelques minutes.

§. 10.

Nous aurons donc

$$DG = 2(R-1) \cdot \sin \tfrac{1}{2}\varrho^2$$
$$BF = 2(R-1) \cdot \sin \tfrac{1}{2}\varrho^2$$

& par conſéquent

$$BF = R \cdot DG$$

& en poſant

$$R = 7$$

il s'enſuit que la hauteur BF eſt 7 fois plus grande que la différence entre les perpendiculaires $CD - CA$, ou que $BF = 7 \cdot DG$.

§. 11.

Cette différence entre les perpendiculaires, ou le logarithme de $\frac{CD}{CA}$, eſt proportionel à la denſité de l'air en A diviſée par la denſité de l'air en B. Or ſi le point B étoit à l'extrémité de l'atmoſphere, on auroit $CD - CA = \frac{1}{3300}$, plus ou moins, car cela dépend de la denſité abſolue de l'air en A. Mais le point B étant pris pres de la ſurface de la Terre, la différence $CD - CA$ doit être à $\frac{1}{3300}$ dans le rapport de la différence des denſités en A & B à la denſité en A. Voilà donc juſqu'où la théorie conduit.

§. 12.

Il s'agit maintenant d'évaluer la denſité de l'air en A & en B; & pour cet effet je la ſuppoſerai proportionelle aux hauteurs barométriques, uniquement en forme d'hypotheſe & pour en examiner enſuite le réſultat. Or on trouve qu'en montant de la ſurface de la mer de 73 toiſes ou 438 pieds, le barometre de 28 pouces deſcend à 27 pouces 6 lignes; de ſorte que la denſité de l'air diminueroit d'une $\frac{1}{56}$ partie, ſi elle étoit proportionelle aux hauteurs barométriques. Donc la différence $CD - CA$ ſeroit la $\frac{1}{56}$ partie de $\frac{1}{3300}$, & par conſéquent on auroit

$$CD - CA = \frac{1}{196000}.$$

§. 13.

Mais la théorie de la réfraction demande que $CD - CA = DG$ ſoit la $\frac{1}{7}^{me}$ partie de la hauteur BF. (§. 10.) Cette hauteur étant de 73 toiſes, ſera $\frac{1}{44871} \cdot AC$, & ainſi on aura

$$CD - CA = \frac{1}{314097}.$$

On voit que cette valeur n'eſt que la $\frac{7}{12}^{me}$ partie de celle que donnent les hauteurs barométriques, & que par conſéquent *il s'en faut de beaucoup que la denſité de l'air telle que les réfractions l'exigent, ſoit proportionelle aux hauteurs barométriques.* Car ſuivant ces hauteurs les denſités en A & B ſeroient comme 55 à 56, tandis que ſuivant les réfractions ces denſités ne ſont que comme 95 à 96.

§. 14.

En tout cela il n'y a rien qui doive étonner. C'eſt une ſuppoſition très gratuite que de faire les denſités de l'air proportionelles aux hauteurs barométriques. Ces hauteurs ſont ſans contredit proportionelles au poids de l'atmoſphere, & par conſéquent à l'élaſticité de l'air qui eſt toujours égale au poids comprimant. Mais tout cela n'a rien de commun avec la denſité de l'air. Car quoique cette denſité augmente en raiſon du poids comprimant, cela n'eſt vrai que lorſque le degré de chaleur reſte le même. Or ce n'eſt pas le cas qui exiſte dans l'atmoſphere. On ſait que la chaleur diminue à meſure qu'on s'éleve. On ſait que la région des nuées eſt la région où ſe forment la neige & la grele, tant ſous la ligne équinoxiale que dans nos climats tout au milieu des jours caniculaires. On voit donc que la ſuppoſition des denſités proportionelles aux hauteurs barométriques n'eſt pas un article qui puiſſe renverſer la théorie des réfractions. Tout au contraire il faudra plutôt mettre cette théorie pour baſe & en déduire ce qu'on peut véritablement appeller *denſité de l'air.* Pour la pouvoir bien évaluer il ne ſuffit pas d'établir qu'elle décroît en raiſon du poids comprimant. Car dans ce poids comprimant ſont compriſes toutes les particules étrangeres dont l'air de l'atmoſphere eſt chargé, & il s'agit de ſavoir ſuivant quelle loi la denſité de ces particules diminue en montant. Il s'agit encore de connoître la loi de la diminution de la chaleur dans les parties ſupérieures de l'air. Ce ne ſera qu'alors qu'on pourra trouver plus exactement l'accord qu'il y a entre les denſités de l'air & les réfractions. C'eſt un but qu'on peut ſe propoſer d'atteindre, mais où tout chemin qu'on voudra choiſir ne conduira pas. Il faut une combinaiſon bien choiſie & bien arrangée des phénomenes & des théories pour en inférer ce qui eſt requis pour que les phénomenes puiſſent être ce qu'ils ſont. Dans le cas dont il s'agit nous n'avons que très peu d'expériences, & la plupart de celles qui réſoudroient le plus immédiatement toutes les difficultés ne ſont point encore faites. Voici maintenant comment je crois devoir enchaîner celles que nous avons, pour répandre quelque jour ſur ce qui regarde la denſité de l'air rélativement aux trois cauſes qui y influent.

§. 15.

D'abord je mets pour baſe ce qu'un grand nombre d'expériences a fait voir, c'eſt que *les logarithmes des hauteurs barométriques ſont à très peu près proportionels aux élevations des endroits.* C'eſt la loi trouvée par Mrs. *Mariotte* & *Halley.* Elle auroit lieu exactement ſi la chaleur étoit la même dans toute la hauteur de l'atmoſphere, & ſi l'air étoit pur, ou ſi du moins les vapeurs & les autres particules étrangeres étoient répandues proportionellement aux différens degrés des denſités de l'air. Tout cela n'eſt pas. La chaleur diminue en montant, & les vapeurs tout de même. Par là l'effet de l'une & des autres ſe compenſe du moins en partie; il faut même dire à très peu près, puiſque non-obſtant cette double cauſe les logarithmes des hauteurs barométriques ne laiſſent pas d'être du moins à très peu près proportionels aux élévations des endroits.

§. 16.

Je commencerai à ſuppoſer que cette proportionalité a lieu exactement ou en toute rigueur, afin de voir ce qui en réſulte rélativement à la chaleur & aux vapeurs. Soit donc A la ſurface de la mer, AM une hauteur quelconque. Que les ordonnées de la courbe Bb repréſentent les hauteurs barométriques, celles de la courbe Pp les denſités de l'air pur, celles de Vv les denſités des vapeurs & enfin celles de la courbe Cc les degrés de la chaleur, de ſorte qu'on ait Fig. 2.

	à la ſurface	à la hauteur
	de la mer $= 0$	$AM = x$
la hauteur du barometre	$AB = Y$	$Mb = y$
la denſité de l'air pur	$AP = P$	$Mp = p$
la denſité des vapeurs	$AV = V$	$Mv = v$
le degré de chaleur	$AC = C$	$Mc = c$

J'entens par denſité la hauteur d'une colonne d'air pur ou de vapeurs qui faſſe équilibre à une colonne de vif argent dont la hauteur ſoit $= 1$.

§. 17.

Or la courbe des hauteurs barométriques Bb étant ſuppoſée logarithmique, ſoit ſa ſoutangente $= \theta$, & nous aurons d'abord l'équation

$$e^{-x:\theta} = \frac{y}{Y}$$

où le logarithme hyperbolique de e eſt cenſé être $= 1$. La ſoutangente ſe trouve être d'environ 24000 ou 25000 toiſes.

§. 18.

Enſuite par la nature de la denſité de l'air nous avons l'équation

$$p\,dx + v\,dx = -\,dy$$

qui en ſubſtituant la valeur de dy donne

$$\theta p + \theta v = e^{-x:\theta}\,.\,Y.$$

§. 19.

Enfin la denſité de l'air pur s'exprime encore par l'équation

$$p = \frac{yC}{Yc} \cdot P = \frac{CP}{c} \cdot e^{-x:\theta}$$

puiſqu'elle eſt en raiſon directe du poids comprimant & en raiſon réciproque de la chaleur. Subſtituant cette valeur dans les équations du §. précédent on a

$$\frac{yC}{Yc} \cdot P\mathrm{d}x + v\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$$

&

$$\frac{yC}{Yc} \cdot \theta P + \theta v = e^{-x:\theta} \cdot Y$$

ou bien

$$\theta v + \frac{\theta CP}{c} \cdot e^{-x:\theta} = Y \cdot e^{-x:\theta}$$

§. 20.

Cette derniere équation donne

$$v = e^{-x:\theta} \cdot \left(\frac{Y}{\theta} - \frac{CP}{c}\right).$$

Or quelle que ſoit la loi ſuivant laquelle la denſité des vapeurs décroît, il eſt du moins ſûr *qu'elle ne devient pas négative.* Cela fait qu'il faut néceſſairement poſer

$$\frac{Y}{\theta} > \frac{CP}{c}.$$

De là réſulte

$$c > \frac{\theta PC}{Y}$$

ce qui emporte la conſéquence, que *la chaleur en montant ne ſe réduit pas à zéro, mais qu'elle décroît aſymtotiquement, puiſqu'elle ne ſauroit devenir plus petite que* $\theta PC : Y$.

§. 21.

J'ai fait voir dans le Mémoire *ſur la viteſſe du ſon*, que vers la ſurface de la mer la denſité V eſt environ la moitié de la denſité P,

ou

ou bien le tiers de la denſité de l'air naturel, qui ſe trouve être en général

$$= -\frac{dY}{dx} = \frac{Ye^{-x:\theta}}{\theta}$$

& par conſéquent à la ſurface de la mer $= \frac{Y}{\theta}$. Nous aurons donc

$$2V = P$$

$$3V = \frac{Y}{\theta}$$

ou bien

$$Y = \tfrac{3}{2}\theta P = 3\theta V.$$

Subſtituant cette valeur de P & de Y dans l'expreſſion

$$c > \frac{\theta P}{Y} \cdot C$$

elle donne

$$c > \tfrac{2}{3}C$$

de ſorte que *même au haut de l'atmoſphere la chaleur ne laiſſe pas d'être encore environ les deux tiers de celle qui a lieu à la ſurface de la mer.* Mais comme cette évaluation pourroit être trop particuliere, je poſerai plus généralement

$$\theta P = \mu Y$$

d'où réſulte

$$\theta V = (1 - \mu) Y.$$

§. 22.

Subſtituant ces valeurs dans l'équation

$$v = e^{-x:\theta}\left(\frac{Y}{\theta} - \frac{CP}{c}\right)$$

on a

$$v = \frac{V}{1-\mu}\left(1 - \frac{\mu C}{c}\right)e^{-x:\theta}$$

d'où l'on déduit

$$c > \mu C.$$

§. 23.

Voilà donc ce qui découle généralement parlant de la ſuppoſition, que la courbe des hauteurs barométriques eſt logarithmique dans toute la rigueur poſſible. Comme il ne s'en faut pas de beaucoup, ces concluſions ne laiſſent pas d'être fort approchantes de celles qu'on déduiroit de la véritable nature de cette courbe. Voyons maintenant de quelle maniere on pourra enviſager la loi ſuivant laquelle la chaleur décroît en montant.

§. 24.

Avant toute choſe il s'agit de ſavoir d'où vient que la chaleur monte. Ici je ne ſai d'autre raiſon ſinon que le feu eſt ſpécifiquement plus léger que l'air. En conſéquence les particules de feu doivent monter avec une viteſſe accélérée, la viteſſe initiale étant celle avec laquelle elles s'élancent par leur propre élaſticité. La force accélératrice eſt cette même légéreté ſpécifique. Il eſt difficile de la bien déterminer. Cependant dans l'air je ne balance pas à la ſuppoſer proportionelle à la denſité de l'air. Il eſt poſſible que l'air, tandis qu'il fait monter les particules de feu par ſa preſſion, oppoſe d'un autre côté quelque obſtacle à leur viteſſe. Car il eſt ſûr que la chaleur monte incomparablement moins vite dans l'eau que dans l'air, quoique dans l'eau la légéreté ſpécifique des particules du feu ſoit pluſieurs centaines de fois plus grande, & qu'ainſi elles puſſent y monter avec incomparablement plus de viteſſe. Il faut donc que la denſité de l'eau y mette obſtacle à beaucoup plus forte raiſon, puiſque les particules de feu, quoique ſollicitées avec plus de force, y montent avec bien moins de viteſſe qu'elles ne montent dans l'air, où la force accélératrice eſt beaucoup moins grande. Il faut, réciproquement, que l'air ne s'oppoſe que très peu à leur viteſſe. La viteſſe initiale avec laquelle elles s'élancent ne peut être que très grande, & ſi l'air y mettoit fortement obſtacle, cette viteſſe, au lieu de s'accroître en montant, iroit en diminuant. Ces particules ſeroient donc plus denſes au haut de l'atmoſphere qu'elles ne le ſont à la ſurface de la mer. Or la denſité de ces particules étant la meſure de la chaleur, les parties ſupérieures de l'air ſeroient plus échauffées que les inférieures, ce qui eſt tout à fait contraire à l'expérience.

§. 25.

Je ſuppoſerai donc ſimplement, que la force accélératrice décroît en même raiſon que la denſité p. Soit u la viteſſe des particules de feu à la hauteur x, & U celle qu'elles ont à la ſurface de la mer. Nous aurons l'équation

$$2udu = pdx.$$

Or u eſt en raiſon réciproque de la chaleur, donc

$$u = \frac{CU}{c}.$$

De plus nous avons

$$p = \frac{CP}{c}.e^{-x:\theta}.$$

Subſtituant ces valeurs, l'équation différentielle ſe change en

$$-\frac{2U^2Cdc}{cc} = P.e^{-x:\theta}dx$$

d'où l'on tire

$$\frac{2U^2C}{c} = -\theta Pe^{-x:\theta} + \text{Conſt.}$$

c'eſt à dire

$$\frac{C}{c} - 1 = \frac{\theta P}{2U^2}(1 - e^{-x:\theta})$$

équation pour laquelle je poſerai ſimplement

$$\frac{C}{c} - 1 = n(1 - e^{-x:\theta}).$$

Et il s'agit de déterminer le coëfficient n.

§. 26.

Pour cet effet je ſubſtitue cette valeur de $\frac{C}{c}$ dans l'équation

$$p = \frac{C}{c}.P.e^{-x:\theta}$$

& elle ſe transforme en

$$\frac{p}{P} = (1 + n - ne^{-x:\theta}).e^{-x:\theta}$$

ce qui donne

$$-\frac{dp}{P} = \frac{(1+n)}{\theta}e^{-x:\theta}dx - \frac{2n}{\theta}.e^{-2x:\theta}dx.$$

§. 27.

Or j'ai fait voir ci-dessus (§. 13.) que le décroissement de la densité $-\frac{dp}{P}$ à la surface de la mer ne fait que les $\frac{7}{12}$ parties du décroissement des hauteurs barométriques $-dy:Y$, de sorte que

$$\frac{dp}{P} = \frac{7}{12}.\frac{dy}{Y}.$$

Mais à la surface de la mer, où $x = 0$, nous avons

$$-\frac{dp}{P} = \frac{1-n}{\theta}dx$$

$$-\frac{dy}{Y} = \frac{1}{\theta}.$$

Substituant ces valeurs on trouve

$$1-n = \frac{7}{12}$$

$$n = \frac{5}{12}$$

& par conséquent

$$\frac{C}{c} = \frac{17}{12} - \frac{5}{12}.e^{-x:\theta}$$

$$\frac{p}{P} = \left(\frac{17}{12} - \frac{5}{12}e^{-x:\theta}\right).e^{-x:\theta}$$

& en posant $\mu = \frac{2}{3}$ (§. 21.)

$$\frac{v}{V} = \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}e^{-x:\theta}\right)e^{-x:\theta}$$

de sorte que voilà le décroissement de la chaleur, de la densité de l'air pur & de la densité des vapeurs déterminé, du moins à très peu près.

§. 28.

Il nous reste encore un autre moyen de parvenir au même but. Nous avons trouvé ci-dessus (§. 22.) l'équation

$$v = \frac{V}{1-\mu}\left(1 - \frac{\mu C}{c}\right)e^{-x:\theta}.$$

En y ſubſtituant la valeur (§. 25.)

$$\frac{C}{c} = 1 + n - ne^{-x:e}$$

nous aurons

$$v = \frac{V}{1-\mu}(1 - (1+n)\mu + \mu n e^{-x:e})\, e^{-x:e}.$$

Or ſuivant ce que j'ai remarqué au §. 6. la denſité des vapeurs approche beaucoup plus vite de zéro que la denſité de l'air pur, ou le poids de l'air. Cela exige qu'on faſſe

$$1 - (1+n)\mu = 0.$$

Car ſi on faiſoit $1 - (1+n)\mu > 0$, la denſité des vapeurs, ſurtout au haut de l'atmoſphere, décroîtroit en même raiſon que le poids de l'air. Et ſi on faiſoit $1 - (1-n)\mu < 0$ ou négative, la denſité de l'air au haut de l'atmoſphere deviendroit négative, ce qui ſeroit abſurde. Nous aurons donc

$$1 = (1+n)\mu.$$

De cette maniere ces deux coëfficiens n, m ſe déterminent mutuellement, en ce que

$$\mu = \frac{1}{n+1}$$

ou réciproquement

$$n = \frac{1}{\mu} - 1.$$

De là nous tirerons le moyen de voir ſi les valeurs

$$\mu = \frac{2}{3}$$
$$n = \frac{5}{12}$$

s'accordent, du moins à très peu près. Nous avons déduit la premiere de la viteſſe du ſon, & la ſeconde des réfractions, & par conſéquent chacune a été trouvée indépendamment de l'autre. Subſtituant donc $n = \frac{5}{12}$ dans l'équation

$$\mu = \frac{1}{1+n}$$

nous aurons

$$\mu = \tfrac{12}{17}$$

ce qui ne differe de $\mu = \frac{2}{3}$ que de $\frac{12}{17} - \frac{2}{3} = \frac{2}{51}$. Cette différence eſt aſſez petite pour pouvoir être réputée $= 0$. Car les données, dont les valeurs de μ, n ont été déduites, ne ſont gueres plus exactes.

§. 29.

Or en faiſant

$$1 - (1 + n)\mu = 0$$

la formule

$$v = \frac{V}{1 - \mu}(1 - (1 + n)\mu - n\mu e^{-x:l})\, e^{-x:l}$$

ſe change en

$$v = V . e^{-2x:l}$$

ce qui revient à

$$\frac{v}{V} = \left(\frac{y}{Y}\right)^2$$

de ſorte que *la denſité des vapeurs décroît comme le quarré du poids de l'atmoſphere, ou bien comme le quarré de l'élaſticité de l'air*, l'élaſticité étant toujours en raiſon du poids comprimant.

§. 30.

Cette conſéquence paroit être aſſez vraie par elle-même. Elle eſt d'ailleurs aſſez remarquable pour que je m'y arrête un peu d'avantage. L'élaſticité dépend de la denſité & de la chaleur. Conſidérons d'abord l'effet de chacune de ces cauſes ſéparément. En ſuppoſant la chaleur conſtante, l'élaſticité eſt proportionelle à la denſité. Concevons donc un volume d'air naturel. Que l'eſpace s'élargiſſe du double, la denſité & l'élaſticité ſeront réduites à la moitié. Dans l'eſpace $= 1$, il n'y aura plus que la moitié des vapeurs, comme il n'y a plus que la moitié de l'air pur. Cette moitié de l'air pur avant l'expanſion faite, ſupportoit cette moitié de vapeurs. Mais après l'expanſion ſa force eſt réduite à la moitié. Il eſt naturel qu'il ne porte plus que la moitié de cette moitié, c'eſt à dire le quart des vapeurs. L'autre quart tombera au fond, & la denſité des vapeurs ſera réduite à ſa quatrieme partie. Si l'expanſion ſe fait par un eſpace $= n$, la denſité des vapeurs ſera réduite à ſa $\frac{1}{n}^{me}$ partie, c'eſt à dire que dans l'eſpace primitif il n'y aura plus que la n^{me} partie d'air pur. Cette n^{me} partie d'air pur portoit la $\frac{1}{n}^{me}$ partie des vapeurs. Mais après l'expanſion faite l'élaſticité eſt pareillement réduite à ſa $\frac{1}{n}^{me}$ partie. Donc l'air qui reſte dans l'eſpace $= 1$ ne porte plus que la $\frac{1}{nn}^{me}$ partie des vapeurs; donc la denſité de l'air diminuant comme 1 à $\frac{1}{n}$, la denſité des vapeurs qu'il peut porter diminue comme 1 à $\frac{1}{nn}$.

§. 31.

Il n'en eſt pas de même lorſque l'air ſe dilate par la chaleur, le poids comprimant reſtant le même. Car ſi la dilatation ſe fait par un eſpace $= n$, il eſt bien ſûr que la denſité de l'air pur auſſi bien que celle des vapeurs ſe réduit à ſa $\frac{1}{n}^{me}$ partie. Mais l'élaſticité reſte la même. Donc la $\frac{1}{n}^{me}$ partie de l'air pur continuera de porter la $\frac{1}{n}^{me}$ partie des vapeurs comme auparavant. Auſſi des expériences faciles à faire montrent que dans ce cas il ne ſe voit point de vapeurs, comme on en voit dans le cas de l'évacuation de l'air. Qu'on faſſe entrer dans un long tuyau de thermometre une petite colonne de vif argent juſques bien près de la boule, ce qui peut ſe faire avec un fil de fer deux fois plus mince que le canal du tuyau. Qu'on chauffe la boule au feu pour que l'air ſe dilate, ſi l'on veut, juſqu'au double. On ne verra point de vapeur, ni lorſque l'air ſe dilate, ni lorſqu'enſuite on le laiſſe refroidir. Si au contraire on avoit dilaté l'air au moyen de la machine pneumatique, les vapeurs auroient été très viſibles & ſeroient tombées au fond.

§. 32.

Si en dilatant l'air par la chaleur on le retient dans le même état de compreſſion, comme cela ſe fait dans la machine de *Papin*, cet air peut devenir plus élaſtique du quadruple & au-delà. Il portera donc quatre fois plus & même davantage de vapeurs qu'il ne portoit ou qu'il ne pouvoit porter avant l'échauffement. Tout ce ſurplus de vapeurs retombe au fond lorſqu'on laiſſe refroidir le vaſe.

§. 33.

Du reſte il faut remarquer que dans ces raiſonnemens on fait la ſuppoſition, que l'air eſt chargé de vapeurs autant qu'il peut l'être naturellement. Cela demande quelque éclairciſſement. D'abord il eſt certain que l'air n'eſt pas toujours également chargé de particules aqueuſes. Mais il eſt certain auſſi que dès qu'il en porte moins qu'il ne peut naturellement porter ou qu'il ne porte dans ſon état moyen, il ne tarde pas de s'en procurer. On ſait que dans un air ſec le deſſéchement ſe fait bien vite, tandis que dans un air humide le deſſéchement eſt ou nul ou même négatif. C'eſt ainſi que vers l'hyver l'humidité s'attache à tout ce qu'on expoſe au plein air. Enſuite il faut obſerver que l'air peut être extremement chargé de particules aqueuſes, ſans qu'il paroiſſe être fort humide. Car pour qu'il ne paroiſſe pas humide il ſuffit que les particules aqueuſes ne s'attachent pas aux corps, & qu'au lieu d'être dans l'air en forme de petites gouttes ou véſicules, elles y ſoient ſimplement en forme de particules aqueuſes, iſolées, élaſtiquès &c. C'eſt ainſi que quelquefois l'air devient humide comme dans un inſtant & dans un tems fort calme. L'humidité ne vient pas de fort loin. Il ſuffit que les particules aqueuſes qui juſques là étoient iſolées s'approchent les unes des autres, pour former de petites maſſes, qui s'attachent facilement aux corps. Il ſuit de là que la denſité des particules aqueuſes qui nagent dans l'air ne doit pas être eſtimée d'après l'humidité entant qu'elle eſt ſenſible, c'eſt à dire entant qu'elle s'attache aux corps.

§. 34.

Si donc nous établiſſons que dans l'état moyen de l'atmoſphere la denſité des vapeurs eſt en raiſon du quarré de ſon élaſticité, nous pourrons

maintenant

maintenant reprendre le calcul pour voir quelle ſera la nature de la courbe des hauteurs barométriques. Juſqu'ici nous l'avons regardée comme étant logarithmique, & la denſité des vapeurs proportionelle au quarré de l'élaſticité en a été une conſéquence. En retournant donc la queſtion on peut prévoir que la courbe des hauteurs barométriques ne ſera pas fort différente d'une logarithmique.

§. 35.

Voici les équations qu'il s'agit de réſoudre

$$\text{I}^\circ. \qquad \frac{v}{V} = \frac{y^2}{Y^2} \qquad (\S.\ 29.)$$

$$\text{II}^\circ. \qquad 2u\,du = p\,dx \qquad (\S.\ 25.)$$

$$\text{III}^\circ. \qquad u = \frac{CU}{c} \qquad (\S.\ 25.)$$

$$\text{IV}^\circ. \qquad p = \frac{CPy}{cY} \qquad (\S.\ 19.)$$

$$\text{V}^\circ. \qquad p\,dx + v\,dx = -\,dy \qquad (\S.\ 18.)$$

La 2, 3, & 4^{me} de ces équations donnent

$$-\frac{2C^2U^2\,dc}{c^3} = p\,dx = \frac{CPy\,dx}{cY}$$

d'où réſulte d'abord

$$-\frac{2CU^2\,dc}{cc} = \frac{P}{Y}\cdot y\,dx$$

ou bien

$$dx = -\frac{2CYU^2\,dc}{Pccy}$$

donc moyennant la premiere équation

$$v\,dx = \frac{Vy^2}{Y^2}\cdot dx = -\frac{2CVU^2y\,dc}{PYcc}.$$

Et puiſque

$$p\,dx = -\frac{2C^2U^2\,dc}{c^3}$$

nous aurons moyennant la cinquieme équation

$$p\,dx + v\,dx = -\,dy = -\frac{2C^2U^2\,dc}{c^3} - \frac{2CVU^2y\,dc}{PYcc}.$$

Posons pour plus de briéveté

$$\frac{2VU^2}{PY} = \lambda$$

nous aurons

$$2U^2 = \frac{\lambda PY}{V}$$

& en substituant ces valeurs, nous obtiendrons

$$dy = \frac{C^2\lambda PY}{V}\cdot\frac{dc}{c^3} + \frac{C\lambda y\,dc}{cc}$$

dont l'intégrale est

$$\frac{y}{Y} = Ae^{-\lambda C:c} - \frac{CP}{cV} + \frac{P}{\lambda V}$$

ou bien

$$\frac{y}{Y} = Ae^{-\lambda C:c} - \frac{P}{V}\left(\frac{C}{c} - \frac{1}{\lambda}\right).$$

Dans cette équation A est la constante que l'intégration demande, & qui tout comme le coëfficient λ doit être déterminée par les conditions particulieres du probleme.

§. 36.

L'équation entre y & c étant trouvée, on n'a qu'à substituer cette valeur de y dans les équations

$$p = \frac{CPy}{cY}$$

$$v = \frac{y^2V}{Y^2}$$

& les densités p, v seront également déterminées par c, savoir

$$\frac{p}{P} = \frac{CA}{c}\cdot e^{-\lambda C:c} - \frac{PC}{Vc}\left(\frac{C}{c} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\frac{v}{V} = \left[Ae^{-\lambda C:c} - \frac{P}{V}\left(\frac{C}{c} - \frac{1}{\lambda}\right)\right]^2.$$

§. 37.

Mais pour trouver le rapport de ces ordonnées c, p, v, y aux abſciſſes, il faudra avoir recours à l'équation

$$-\frac{CU^2\,dc}{cc} = \frac{Py}{Y}\,dx$$

en y ſubſtituant la valeur de y, que nous venons de trouver. Par là nous aurons

$$-\frac{CU^2\,dc}{cc} = \left[Ae^{-\lambda C:c} - \left(\frac{C}{c} - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{P}{V}\right] P\,dx,$$

ou puiſque

$$U^2 = \frac{\lambda PY}{V}$$

$$-\frac{C\lambda Y\,dc}{Vcc} = \left[Ae^{-\lambda C:c} - \left(\frac{C}{c} - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{P}{V}\right].\,dx.$$

Dans cette équation les variables ſont ſéparées, mais elle n'en eſt pas plus intégrable. On peut l'abréger encore en faiſant

$$\frac{C}{c} - \frac{1}{\lambda} = \varkappa.$$

Car par là elle devient

$$\frac{\lambda Y}{V}.\,d\varkappa = \left(A.\,e^{-1-\lambda\varkappa} - \frac{\varkappa P}{V}\right)dx$$

ou bien

$$\frac{V}{\lambda Y}.\,dx = \frac{e^{\lambda\varkappa}\,d\varkappa}{Ae^{-1} - \frac{P}{V}\varkappa e^{\lambda\varkappa}}.$$

Mais il faudra toujours avoir recours aux ſuites infinies.

§. 38.

Je vais donc reprendre les deux équations

$$-\frac{2CU^2\,dc}{cc} = \frac{P}{Y}.\,y\,dx$$

$$\frac{y}{Y} = Ae^{-\lambda C:c} - \frac{P}{V}\left(\frac{C}{c} - \frac{1}{\lambda}\right).$$

Subſtituant dans la premiere la valeur

$$2U^2 = \frac{\lambda P Y}{V}$$

elle ſe change en

$$-\frac{\lambda Y^2 C}{V} \cdot \frac{dc}{cc} = y\,dx$$

d'où l'on a

$$\int y\,dx = \frac{\lambda Y^2}{V}\left(\frac{C}{c} - \text{Conſt.}B\right).$$

Or quand $x = 0$, on a $\int y\,dx = 0$, $C = c$, donc il faut faire $B = 1$, & par conſéquent

$$\int y\,dx = \frac{\lambda Y^2}{V}\left(\frac{C}{c} - 1\right)$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\lambda C}{c} = \frac{V}{Y^2}\int y\,dx + \lambda.$$

Cette valeur étant ſubſtituée dans la ſeconde équation

$$\frac{y}{Y} = Ae^{-\lambda C:c} - \frac{P}{V}\left(\frac{C}{c} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

donne

$$\frac{y}{Y} = A \cdot e^{-V\int y\,dx:YY - \lambda} - \frac{P}{\lambda YY}\int y\,dx - \frac{P}{V}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right).$$

Or pour $x = 0$, on a $\int y\,dx = 0$, $y = Y$, ce qui donne

$$1 = Ae^{-\lambda} - \frac{P}{V}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)$$

& par conſéquent

$$\frac{y}{Y} = \left(1 + \frac{P}{V} - \frac{P}{\lambda V}\right)e^{-V\int y\,dx:YY} - \frac{P}{\lambda YY}\int y\,dx - \frac{P}{V} + \frac{P}{\lambda V}.$$

Cette équation nous ſervira à faire voir que y décroît à très peu près en même raiſon que $\int y\,dx$.

§. 39.

Pour cet effet nous poſerons $Y = P + V$, & nous avons vu ci-deſſus (§. 21.) que $P = 2V$. Prenant donc l'équation (§. 35.)

$$\frac{y}{Y} = Ae^{-\lambda C:c} - \frac{P}{V}\left(\frac{C}{c} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

& en y ſubſtituant la valeur (§. 37.)

$$A = e^{\lambda} + e^{\lambda}.\frac{P}{V}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)$$

elle ſe transforme en

$$\frac{y}{Y} = \left(1 + \frac{P}{V} - \frac{P}{\lambda V}\right)e^{\lambda(1 - C:c)} - \frac{P}{V}\left(\frac{C}{c} - \frac{1}{\lambda}\right)$$

ou bien

$$\frac{y}{Y} = \left(3 - \frac{2}{\lambda}\right)e^{\lambda\left(1 - \frac{C}{c}\right)} - \frac{2C}{c} + \frac{2}{\lambda}.$$

Or ſuivant ce que nous avons trouvé ci-deſſus, la chaleur au haut de l'atmoſphere n'eſt environ que les $\frac{3}{4}$ de celle qui a lieu près de la ſurface de la mer. Faiſant donc pour ce cas

$$y = 0, \qquad \frac{c}{C} = \frac{3}{4}$$

nous aurons

$$0 = \left(3 - \frac{2}{\lambda}\right)e^{-\lambda:3} - \frac{8}{3} + \frac{2}{\lambda}$$

ce qui donne

$$\lambda = 1,062.$$

Par là l'équation trouvée au §. 38. devient numérique & on a

$$\frac{y}{Y} = 1,117.e^{-\frac{1}{3}\int y\,dx} - 0,117 - 0,628.\int y\,dx.$$

Je vais maintenant la conſtruire.

§. 40.

Soit dans la troiſieme Figure $AE = 0,117$, $AC = 1,117$, CD une logarithmique, dont l'aſymtote ſoit AB, la ſoutangente $= 3$. Soit enfin tang $GEH = 0,628$, & pour une abſciſſe quelconque

$$AP = EQ = \int y\,dx$$

on aura l'ordonnée

$$y = MN.$$

Car

$$PN = 1,117 \cdot e^{-\frac{1}{2}\int y\,dx}$$
$$PQ = 0,117$$
$$QM = 0,628 \cdot \int y\,dx.$$

Donc

$$y = PN - PQ - QM = MN.$$

On voit par là que $y = MN$ devient $= 0$ dans le point G. Abaiſſant de ce point l'ordonnée GF, on trouve que $AF = EH = \lambda = 1,062$. Car pour $y = 0$ nous aurons $\frac{C}{c} = \frac{4}{3}$, & l'équation (§. 38.)

$$\frac{\lambda C}{c} = \frac{V}{Y^2} \cdot \int y\,dx + \lambda$$

ſe change en

$$\lambda = \int y\,dx$$

d'où il ſuit que

$$\lambda = AF = EH = 1,062.$$

Comme donc cette abſciſſe AF eſt à peine le tiers de la ſoutangente, la courbure CG eſt fort petite. Or ſi elle étoit nulle on auroit

$$\frac{y}{Y} = NM = \frac{CF \cdot FP}{AF} = \frac{\lambda - \int y\,dx}{\lambda}$$

d'où réſulteroit

$$\frac{dY}{Y} = -\frac{y\,dx}{\lambda}$$
$$\frac{x}{\lambda} = \log\frac{Y}{y}$$

de ſorte qu'à la petite différence près qu'il y a entre la droite CG & la logarithmique CNG, la courbe des hauteurs barométriques eſt logarithmique. Je continuerai de la prendre pour telle, en retournant aux formules trouvées ci-deſſus.

§. 41.

Ces formules font

$$\frac{y}{Y} = e^{-x:\theta}$$

$$\frac{v}{V} = \frac{1}{1-\mu}\left(1 - \frac{\mu C}{c}\right)e^{-x:\theta}$$

$$\frac{C}{c} = 1 + n - ne^{-x:\theta}$$

$$\frac{p}{P} = \frac{C}{c}\cdot e^{-x:\theta} = (1 + n - ne^{-x:\theta})\cdot e^{-x:\theta}$$

$$n = \frac{1}{\mu} - 1$$

d'où réſulte

$$\frac{v}{V} = \left(\frac{y}{Y}\right)^2 = e^{-2x:\theta}$$

$$\frac{C}{c} = \frac{1}{\mu}\left(\frac{1}{\mu} - 1\right)e^{-x:\theta}$$

$$\frac{p}{P} = \left(\frac{1}{\mu} - \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)e^{-x:\theta}\right)e^{-x:\theta}$$

§. 42.

En faiſant (§. 28.) $n = \frac{5}{12}$, $\mu = \frac{12}{17}$, & en poſant la denſité de l'air naturel au niveau de la mer $= 1$, de ſorte que $P = \frac{12}{17}$, $V = \frac{5}{17}$, nous aurons

$$\frac{C}{c} = \frac{17}{12} - \frac{5}{12}e^{-x:\theta}$$

$$p = (\tfrac{17}{12} - \tfrac{5}{12}e^{-x:\theta})\cdot e^{-x:\theta}\cdot P = (1 - \tfrac{5}{17}e^{-x:\theta})e^{-x:\theta}$$

$$v = V\cdot e^{-2x:\theta} = \tfrac{5}{17}\cdot e^{-2x:\theta}$$

d'où l'on déduit

$$\int y\,dx = \frac{V\theta}{2}(1 - e^{-x:\theta};$$

& puiſque $V\theta = \frac{5}{17}Y$, on aura le poids de toute la maſſe des vapeurs $= \frac{5}{34}Y$, ce qui revient à $\frac{5}{34}\cdot 28 = 4\frac{2}{17}$ pouces de mercure. En faiſant $\theta = 4200$ toiſes, ce qui répond à une température moyenne de l'air, ces formules nous donnent la Table ſuivante, d'après laquelle la Figure eſt conſtruite.

$\frac{x}{\theta}$	$\frac{y}{Y}$	$\frac{v}{V}$	$\frac{p}{P}$	$\frac{c}{C}$	p	v	x toiſes
0, 0	1, 0000	1, 0000	1, 0000	1, 0000	0, 7059	0, 2941	0
0, 1	0, 9048	0, 8187	0, 9485	0, 9618	0, 6640	0, 2408	420
0, 2	0, 8187	0, 6703	0, 8805	0, 9298	0, 6216	0, 1971	840
0, 3	0, 7408	0, 5488	0, 8208	0, 9025	0, 5794	0, 1614	1260
0, 4	0, 6703	0, 4493	0, 7624	0, 8792	0, 5382	0, 1321	1680
0, 5	0, 6065	0, 3679	0, 7059	0, 8591	0, 4983	0, 1082	2100
0, 6	0, 5488	0, 3013	0, 6520	0, 8410	0, 4602	0, 0886	2520
0, 8	0, 4493	0, 2019	0, 5525	0, 8134	0, 3900	0, 0593	3360
1, 0	0, 3679	0, 1353	0, 4648	0, 7915	0, 3281	0, 0398	4200
1, 5	0, 2231	0, 0498	0, 2952	0, 7555	0, 2084	0, 0147	6300
2, 0	0, 1353	0, 0183	0, 1841	0, 7351	0, 1299	0, 0054	8400

§. 43.

La colonne $c : C$ marque le rapport qu'il y a entre les degrés de chaleur répondans à différentes hauteurs. J'ai trouvé par diverſes expériences qu'un degré du thermometre de Réaumur équivaut à 0,0046 de ces parties. Comme donc à la hauteur de 2520 toiſes, cette Table donne $\frac{c}{C} = 0,8410$, la chaleur y eſt de $1,0000 - 0,8410 = 0,1590$ parties moins grande qu'à la mer. Diviſant ces 0,1590 parties par 0,0046, on obtient $34\frac{1}{2}$ degrés de Réaumur. Ce calcul répond aſſez aux obſervations faites au Pérou. Car la chaleur à la mer, & nommément la plus grande, y a été obſervée de 29 degrés. Souſtrayant de ces 29 degrés les $34\frac{1}{2}$ que nous venons de trouver, nous aurons $5\frac{1}{2}$ degrés au deſſous du terme de la glace, pour le moindre froid qui ait lieu à la hauteur de 2520 toiſes au-deſſus de la mer. Cette hauteur eſt de 100 toiſes au-deſſus du terme de la neige permanente, où la neige dans des chaleurs même extraordinaires ne fond plus, & où par conſéquent le thermometre doit déjà être de quelques degrés au-deſſous du terme de la congélation.

A cent toises au-dessus il est naturel qu'il soit encore de quelques degrés plus bas.

§. 44.

Comme à la surface de la mer les quantités C, P, V, Y sont assez variables, il s'ensuit que cette Table ne répond qu'à un certain état de l'atmosphere. Un thermometre à air, qui en marque les dilatations en milliemes parties du volume ou de la densité de l'air tempéré, & dont j'ai observé les variations pendant quelques années, m'a fait voir que sa variation annuelle pouvoit aller de 930 degrés jusqu'à 1070. La différence est de 140 degrés, & elle équivaut à 35 degrés du thermometre de Réaumur, que j'ai observé en même tems. Je dois remarquer à cet égard que l'air dans ce thermometre soutenoit une colonne de mercure égale à son élasticité, & que dans ces cas il se dilate un peu moins que dans les cas où il peut se dilater plus librement, puisqu'alors un degré de Réaumur répond à 0,0046 degrés de dilatation, ce qui au lieu des 140 degrés mentionnés donne 161 degrés. Quoi qu'il en soit de ces variations, les coëfficiens n, λ employés dans les calculs précédens paroissent devoir être les mêmes dans tous les cas, à moins que l'élasticité des particules de feu ne soit variable.

§. 45.

Quant à la densité des vapeurs nous avons trouvé ci-dessus (§. 29.) qu'elle est en raison doublée de l'élasticité ou du poids de l'air. Mais cette loi ne regarde directement que la façon dont les vapeurs se distribuent suivant les différentes élévations. Cependant nous avons fait voir que l'élasticité de l'air est toujours la mesure pour la quantité des vapeurs qu'il peut soutenir dans ses interstices, & qu'il en absorbe jusqu'à ce point de saturité, si son élasticité n'est point diminuée par quelque cause accidentelle. Faisant donc abstraction de ces causes qui souvent ne sont que journalieres, & considérant les choses comme dans leur état de permanence naturel, il semble que même au niveau de la mer il faut poser V proportionelle au quarré de l'élasticité de l'air, ou au quarré de son poids. Voyons d'abord ce qui en résulte.

§. 46.

Exprimons par l'unité le poids de l'atmoſphere au niveau de la mer, de même que ſa chaleur, dans un certain état moyen. Soit dans cet état moyen la ſoutangente $\theta = 1$, la denſité de l'air pur $= \mu$, celle des vapeurs $= 1 - \mu$, celle de l'air naturel $= 1$. Ce qui étant poſé, les lettres Y, C, θ ne ſeront que les rapports du poids & de la chaleur de l'air à ces unités pour un autre état quelconque de l'atmoſphere. Par les mêmes raiſons je poſerai la denſité de l'air pur $= P\mu$, celle des vapeurs $= V(1 - \mu)$, & les lettres P, V ſeront de ſimples rapports. Nous aurons donc

$$\theta(P\mu + (1 - \mu)V) = Y$$

$$P\mu = \frac{\mu . Y}{C}$$

$$(1 - \mu)V = (1 - \mu)Y^2$$

donc

$$\frac{\theta\mu Y}{C} + \theta(1 - \mu)Y^2 = Y$$

ou bien

$$\theta\mu + \theta(1 - \mu)CY = C$$

ce qui donne

$$\theta = \frac{C}{\mu + (1 - \mu)CY}.$$

Cette formule peut être examinée par des expériences, puiſque θ eſt en raiſon réciproque de la différence entre les hauteurs barométriques de deux endroits qui ſont à différentes élévations au-deſſus du niveau de la mer. Si cette différence varie de façon qu'elle ſuive toujours le rapport

$$\frac{\mu}{C} + (1 - \mu)Y$$

la poſition $V = Y^2$ ſera par là confirmée, & on déterminera encore la valeur de μ. Mais ces expériences doivent être arrangées & faites avec beaucoup de ſoin, & la maniere dont on en fait l'application n'eſt pas indifférente, puiſqu'il faut avoir égard à tout ce qui ne dérive que de quelque cauſe accidentelle.

§. 47.

En ſubſtituant la valeur

$$\theta = \frac{C}{\mu + (1 - \mu) C Y}$$

dans la premiere équation

$$\theta (P\mu + (1 - \mu) V) = Y$$

on obtient

$$\frac{Y}{C} = \frac{P\mu + (1 - \mu) V}{\mu + (1 - \mu) C Y}$$

d'où il ſuit que ſi Y, C reſtent les mêmes, P ne ſauroit augmenter à moins que V ne diminue, & réciproquement, ſi V augmente il faut que P diminue. Cela ne ſauroit avoir lieu que par des cauſes accidentelles & de peu de durée. Car ſi la denſité de l'air pur augmente, il peut abſorber plus de vapeurs & il les abſorbera à moins qu'il ne ſurvienne quelque cauſe externe. Il s'enſuit donc que pour un poids de l'atmoſphere donné & pour un degré de chaleur donné, l'état de permanence ne ſauroit avoir lieu, à moins que la denſité de l'air pur n'ait à la denſité des vapeurs un rapport déterminé. Je ne vois rien dans cette conſéquence qui puiſſe renverſer la poſition $V = Y^2$, ne l'ayant admiſe que pour ces ſortes d'états de permanence. Si le barometre monte ou deſcend beaucoup en peu de tems, ces variations ſubites indiquent toujours un équilibre levé & un état plus ou moins-anomal de l'atmoſphere. Ce ſont auſſi les cas où la courbe des hauteurs barométriques peut différer & même aſſez irrégulierement d'une logarithmique. Il eſt clair que dans ces cas les formules données ci-deſſus ceſſent d'être applicables, puiſqu'elles ne déterminent l'état de l'atmoſphere que lorſqu'il eſt tel que les loix générales de l'élaſticité, de la diſtribution des vapeurs & de la chaleur l'exigent.

§. 48.

La viteſſe du ſon dépend de la valeur θ & de la denſité de l'air pur $P\mu = \frac{\mu Y}{C}$. Pour l'exprimer en pieds de Paris j'obſerve que dans 2 ſecondes de tems les corps tombent par un eſpace de 60, 384 pieds. En-

R 2

ſuite pour l'état moyen de l'air la ſoutangente θ eſt environ de 25200 pieds. Par là nous aurons en général pour le niveau de la mer

$$\theta = \frac{25200 \,.\, C}{\mu + (1 - \mu) C Y},$$

ou en faiſant $\mu = \frac{12}{17}$ (§. 28.)

$$\theta = \frac{428400 \,.\, C}{12 + 5 C Y}.$$

Cette valeur étant diviſée par $2 P \mu = \frac{2 \mu Y}{C}$, donne

$$\frac{303450 \,.\, CC}{12 Y + 5 C Y Y}$$

pour la hauteur due à la viteſſe du ſon. Cette hauteur étant multipliée par 60,384, la racine quarrée du produit exprimera la viteſſe du ſon

$$s = \sqrt{\left(\frac{18313330 CC}{12 Y + 5 C Y Y}\right)}.$$

Pour la hauteur moyenne du barometre = 28 pouces, on a $Y = 1$, & pour la température moyenne $C = 1$. Ces valeurs étant ſubſtituées, donnent $s = 1038$. Mais ſi en faiſant $Y = 1$, on fait $C = 1{,}080$, ce qui eſt pour les grandes chaleurs d'été, on trouve $s = 1108$. Cette viteſſe eſt de 70 pieds plus grande que celle que nous avons trouvée pour l'air tempéré. On la trouvera de 70 pieds plus petite pour les grands froids de l'hyver, où elle ne ſera que de 970 pieds. Poſant $C = 1$, $Y = \frac{29}{28}$, on trouve $s = 1015$, plus petite de 23 pieds que lorſque $Y = 1$. Mais lorſque $Y = \frac{27}{28}$, la viteſſe du ſon ſera de 23 pieds plus grande que pour $Y = 1$. De tout cela il s'enſuit qu'à un degré de Réaumur il répond une accélération de 4 pieds, lorſque la chaleur va en augmentant, & qu'à une ligne du barometre il répond une retardation de 2 pieds par ſeconde: le tout au niveau de la mer, & l'atmoſphere étant dans un état de permanence (§. 49); car les formules données ci-deſſus ne ſont pas pour les anomalies journalieres ou accidentelles.

§. 49.

Comparons ces résultats aux expériences. Mrs. *Cassini*, *Picard*, *Huygens* & *Roemer* en 1677 trouverent que le son dans une seconde de tems parcourut 1097 pieds. C'étoit le 23 Juin, ainsi au milieu de l'été, où le thermometre est à plusieurs degrés au-dessus du tempéré. J'ignore à quel degré il étoit alors & quelle étoit la hauteur du barometre. Mais cela n'empêche pas que je n'infere que la vitesse du son devoit être beaucoup plus grande que la moyenne, qui est d'environ 1040 pieds par seconde. Nous avons vu que cette vitesse va à 1100 & au-delà, lorsque $C = 1{,}080$ (ce qui revient environ au 28^e^ degré de Réaumur), & $Y = 1$. Si la chaleur avoit été moins grande, il faudroit rabattre de ces 1100 pieds, & si le barometre étoit au-dessous de 28 pouces (ce qui est très possible, sa hauteur moyenne à Paris n'étant que d'environ $27\frac{2}{3}$ pouces) la vitesse du son en devoit être plus grande. A Paris le barometre au mois de Juin monte rarement au-dessus de $28''.\ 2'''$. Ces deux lignes au-dessus de 28 pouces réduisent la vitesse moyenne du vent 1038 pieds, à 1034. Soustrayant ces 1034 de 1097, qui est la vitesse observée, & divisant le reste 63 par 4, le quotient, qui est $15\frac{3}{4}$, étant ajouté à 10 degrés, donne $25\frac{3}{4}$ degrés du thermometre de Réaumur. Si donc le 23 Juin 1677 le barometre avoit été à $28''.\ 2'''$ le thermometre devoit être à $25\frac{3}{4}$ au-dessus du terme de congélation. On trouve réciproquement que si le barometre n'avoit été qu'à $27''.\ 2'''$, le thermometre devoit n'être qu'à $19\frac{3}{4}$ degrés au-dessus du terme de la glace. Enfin si le barometre étoit à sa hauteur moyenne de $27''.\ 8'''$, le thermometre devoit être à $22\frac{3}{4}$ degrés. En tout cela il n'y a rien qui ne puisse très bien avoir lieu, & à cet égard la vitesse du vent observée de 1097 pieds au mois de Juin n'a rien qui répugne à nos formules.

§. 50.

Il y a une autre observation faite dans de grandes chaleurs & dans des circonstances moins douteuses. C'est celle de Mr. *de la Condamine* en Cayenne au mois de Février 1740, c'est à dire pendant que le Soleil passe près du zénith de cette île, & que la chaleur va bien au-delà de 20 ou

24 degrés du thermometre de Réaumur. Le barometre n'y varie que de quelques lignes. C'eſt donc le cas pour lequel nous avons trouvé la viteſſe du ſon égale à 1108 pieds. M. *de la Condamine* la trouva de 1101 pieds.

§. 51.

En 1738 Mrs. *Maraldi*, *de la Caille* & *Caſſini de Thury* firent aux environs de Paris pluſieurs obſervations ſur la viteſſe du ſon, ſurtout rélativement à la viteſſe du vent. Les endroits étoient à très peu près ſitués dans la direction de la méridienne de l'obſervatoire. Ces obſervations furent arrangées en ſorte qu'on pouvoit en même tems meſurer la viteſſe du ſon allant du Midi au Nord, & du Nord au Midi. C'eſt le moyen de connoître l'effet du vent favorable & contraire. Après avoir repaſſé ces obſervations voici la Table que j'en ai déduite.

1738 Mars.	Viteſſe du ſon.		Thermometre.	Barometre à Paris.	Barometre à Nuremberg.	État du Ciel.
	du Nord au Sud.	du Sud au Nord.				
13	1070	——	——	——	$26''. 8\frac{4}{10}'''$	Vent du Nord très fort.
14	$1040\frac{1}{2}$	$1040\frac{1}{2}$	——	——	$26. 9\frac{6}{10}$	Pluie, calme.
16	1040	1042	——	27. 11	$26. 11\frac{3}{10}$	Serein, vent d'Oueſt-Nord-Oueſt.
19	——	1089	+ 6	——	$26. 10\frac{5}{10}$	Vent du Sud très fort.
20	1005	1075	——	——	$26. 6\frac{7}{10}$	Vent du Sud.
21	——	1036	——	$27. 2\frac{1}{4}$	$26. 5\frac{1}{10}$	Vent du Nord foible.
22	——	996	——	——	26. 4	Vent du Nord très fort.
25	1058	1026	——	——	$26. 6\frac{1}{2}$	Vent de Nord-Eſt.

Le thermometre pendant ces obſervations, c'eſt à dire entre 9 & 10 heures du ſoir, n'avoit varié que de 4 à 6 degrés au-deſſus du terme de la glace. Le barometre n'étant marqué que le 16 & le 21, j'ai ſuppléé à ce défaut en marquant l'état du barometre obſervé pendant les mêmes jours à Nuremberg par Mr. *Doppelmayer*. La hauteur moyenne du barometre à Nuremberg eſt de 26''. 11''', & les variations ne ſont que les trois quarts de celles du barometre à Paris.

§. 52.

Ce qui réſulte le plus immédiatement de cette Table c'eſt l'influence du vent dans la viteſſe du ſon. Le 20 par ex. le vent contraire réduiſit cette viteſſe à 1005, & le vent favorable la porta jusqu'à 1075. Je dois cependant remarquer que ces viteſſes ne ſont pas déterminées avec un même degré de préciſion. Celle de 1005 eſt déduite de ce que le ſon employa $17\frac{1}{2}$ ſecondes pour paſſer de Montmartre jusqu'à l'obſervatoire de Paris. On voit bien que ſur $17\frac{1}{2}$ ſecondes $\frac{1}{4}$ de ſeconde de plus ou de moins produit dans la viteſſe du ſon une différence de 15 pieds. Cette incertitude fait que je n'ai garde d'inférer des viteſſes 1005, 1075 la viteſſe $\frac{1005 + 1075}{2} = 1040$, qui ſeroit pour le calme. Je fais également abſtraction des viteſſes obſervées le 13, 19, 21, 22, parce qu'elles ne ſont, pour ainſi dire, qu'*unilatérales*. L'obſervation du 25 Mars differe de toutes les autres en ce que la viteſſe 1026 eſt celle du ſon allant de Montmartin à Dammartin, où on n'avoit point fait d'obſervations les jours précédens. La direction étoit donc vers Nord-Eſt & le vent étoit directement contraire. L'autre viteſſe 1058 eſt celle du ſon allant de Montmartre à Montlehery, c'eſt du Nord au Sud, où le vent n'étoit favorable qu'en partie, c'eſt à dire environ pour la moitié, ou même pas autant. Mais ſuppoſons la moitié, & nommons a la viteſſe du ſon pour le calme, x la viteſſe du vent, nous aurons

$$a - x = 1026$$
$$a + \tfrac{1}{2}x = 1058.$$

Ces équations donnent $x = 21\frac{1}{3}$, $a = 1047\frac{1}{3}$. Cette viteſſe eſt de 9 à 10 pieds plus grande que la viteſſe moyenne 1038, & peut très bien provenir de ce que le barometre étoit de 9 à 10 lignes au-deſſous de 28 pouces, le thermometre étant pareillement de quelques degrés au-deſſous du tempéré. Cependant je n'inſiſterai pas ſur cette ſuppoſition, les données n'étant pas aſſez déterminées. Il ſuffit qu'il en réſulte en général, que la viteſſe du ſon ne pouvoit alors être fort différente de la viteſſe moyenne.

§. 53.

Il reſte donc encore les obſervations du 14 & 16 Mars, où le tems étoit à peu près calme. La viteſſe du ſon ſe trouva alors 1040 jusqu'à

1042 pieds. Le barometre fut le 14 environ 4‴, le 16 une ligne au-dessous de 28 pouces, & le thermometre de quelques degrés au-dessous du tempéré, de sorte que le son ne pouvoit différer que de quelques pieds de sa vitesse moyenne. C'est aussi ce qu'il suffit de conclure généralement de ces observations.

§. 54.

Je ne me rappelle pas que la vitesse du son ait jamais été observée dans les grands froids de l'hyver, où le thermometre descend à 15 & plus de degrés au-dessous du terme de congélation, ou bien à 25 & plus de degrés au-dessous du tempéré. C'est pourtant le cas où la vitesse du son peut être suivant notre théorie de 100 pieds & au-delà plus petite que dans l'air tempéré. Mr. *Bianconi* en 1740 compara la vitesse du son observée au Mois d'Août dans une chaleur de 20 degrés de Réaumur, & au mois de Février 1741, le thermometre étant $1\frac{1}{5}$ degré au-dessous du terme de la glace. Il trouva que le 18 Août 1740 le son employa dans un tems calme 76″ de tems pour parvenir d'un certain couvent jusqu'à Bologne, & que le 6 Février 1741 il y employa $78\frac{1}{2}$″, quoique secondé d'un vent un peu fort. Le barometre fut à une ligne près à une même hauteur. Divisant $78\frac{1}{2}$ par 76 on trouve 1,033, de sorte que sur 1000 pieds la vitesse du vent fut de 33 pieds plus grande le 18 Août 1740 que le 6 Fév. 1741. Elle devoit encore être plus grande, puisque le 6 Février le vent aida le son. Le 12 Février, où le thermometre étoit sur 0, le barometre de 10 lignes plus haut, ou de 28″. 4‴, Mr. *Bianconi* trouva que le son n'employa que 77″ de tems, pendant que l'air étoit calme. C'est une marque que l'air n'étoit pas dans son état d'équilibre.

§. 55.

Quant aux endroits fort élevés au-dessus de la mer il n'y a, que je sache, que la plaine de Quito sur les Cordelieres où on ait fait des observations sur la vitesse du son. Elle s'y trouve être de 1050 pieds ou 175 toises. La hauteur moyenne du barometre est de 20 pouces, $\frac{1}{4}$ ligne, & le thermometre y varie du 8 jusqu'au 18ᵉ degré de Réaumur. Il n'y a gueres moyen de rien conclure de ces données. La plaine de *Quito* & les obser-

vations

vations qu'on y a faites ſur l'état de l'air, ne peuvent pas être immédiatement comparées à un air également élevé mais fort éloigné des montagnes. Cet air libre ſera plus froid. Voyons d'abord quelle y ſeroit la viteſſe du ſon dans ſa conſtitution moyenne. C'eſt à quoi nous ſervira la formule (§. 42)

$$p = (1 - \tfrac{5}{17} e^{-x:\theta})\, e^{-x:\theta}$$

qui pour une hauteur x quelconque donne la ſoutangente de la courbe des denſités de l'air pur

$$\vartheta = \frac{p\,dx}{dp} = \theta \,.\, \frac{17 - 5e^{-x:\theta}}{17 - 10e^{-x:\theta}};$$

or dans le cas dont il s'agit nous avons

$$\frac{y}{Y} = e^{-x:\theta} = \frac{20''.\ 0\tfrac{1}{4}'''}{28''.\ 0} = 0{,}715$$

& en faiſant comme ci-deſſus

$$\theta = 25200 \text{ pieds}$$

ces valeurs étant ſubſtituées donnent

$$\vartheta = 34345,$$

d'où ſuit la viteſſe du ſon

$$s = \sqrt{(30{,}194 \,.\, \vartheta)} = 1018 \text{ pieds.}$$

Cette viteſſe eſt bien plus petite que celle qu'on a obſervée à Quito & qui eſt $= 1050$. Mais auſſi l'air de cette ville eſt beaucoup moins froid que ce calcul ne le ſuppoſe. Car moyennant la formule (§. 42.)

$$\frac{C}{c} = \frac{17 - 15 \,.\, e^{-x:\theta}}{12}$$

on trouve

$$\frac{c}{C} = 0{,}893$$

tandis qu'à Quito le thermometre de Réaumur eſt de 11 degrés plus bas qu'il n'eſt à la ſurface de la mer du Sud, en ſorte qu'on a

$$\frac{c}{C} = \frac{1060}{1110} = 0,954.$$

Divifant donc 0,954 par 0,893, on trouve 1,068, ce qui eft le rapport dans lequel la foutangente ϑ doit être augmentée. Par là la viteffe du fon eft augmentée en raifon de la racine quarrée de 1,068. Elle fera donc

$$s = 1018 \sqrt{1,068} = 1052 \text{ pieds}$$

ce qui répond affez à l'obfervation, qui donne 1050 pieds.

§. 56.

Il fera bon d'examiner par des expériences bien choifies & même fouvent répétées tout ce que je viens de dire fur la viteffe du fon. Quelque incomplette que foit cette théorie, on voit qu'elle ne laiffe pas de concilier les expériences qu'on a faites, du moins autant qu'on en connoit bien les circonftances.

§. 57.

Les réfractions tant aftronomiques que terreftres font un autre point qui ne fera bien difcuté que lorfqu'on connoîtra bien les loix de la denfité de l'air pur & de fes variations. J'ai fait voir ci-deffus (§. 13.) qu'en montant elle ne décroît pas en même raifon que les hauteurs barométriques. Les formules (§. 42.)

$$p = (1 - \tfrac{5}{17} e^{-x:\theta}) e^{-x:\theta}$$

$$\frac{y}{Y} = e^{-x:\theta}$$

donnent

$$p = \frac{y}{Y} - \frac{5y^2}{17Y^2}$$

ce qui fait voir que p décroît moins vite que y, furtout près de la furface de la Terre.

§. 58.

En regardant l'équation (§. 42.)

$$\frac{p}{P} = \frac{17 - 5e^{-x:\theta}}{12} \cdot e^{-x:\theta}$$

comme très approchante de la vérité dans l'état moyen de l'atmosphere, on en déduira sans peine l'équation différentielle pour les réfractions. Soit γ l'angle de la distance au zénith. Que la lumiere en passant de la couche $x + dx$ dans la couche x soit brisée en sorte que le rapport des sinus soit $= q + dq : q$, & que $1 + m : 1$ soit ce même rapport, lorsque la lumiere passe immédiatement du vuide dans l'air tel qu'il est au niveau de la surface de la mer, on aura pour la réfraction

$$dz = \frac{\sin\gamma \cdot dq}{\sqrt{[1 + 2x + xx - q^2 \sin\gamma^2]}}$$

&

$$\log. q = \frac{17e^{-x:\theta} - 5e^{-2x:\theta}}{12} \cdot m$$

ce qui, en omettant les puissances supérieures de m, donne

$$dz = \frac{m \sin\gamma \cdot dx}{12\theta}\left[\frac{17e^{-x:\theta} - 10e^{-2x:\theta}}{\sqrt{(\cos\gamma^2 + 2x + xx)}} + \frac{289e^{-2x:\theta} - 255e^{-3x:\theta} + 50e^{-4x:\theta}}{12(\cos\gamma^2 + 2x + xx)^{3:2}} \cdot \sin\gamma^2 \cdot m\right].$$

Dans cette équation le demi-diametre de la Terre est $= 1$, la valeur de $m = \frac{1}{3300}$ (§. 11.) & celle de $\theta = 4200$ toises $= \frac{1}{808}$ (§. 42.)

§. 59.

S'il ne s'agissoit que des réfractions terrestres, cette formule se simplifieroit extremement, puisqu'on pourroit omettre les puissances supérieures de x, & on auroit

$$z = \tfrac{1}{7} x \tang \gamma + \tfrac{1}{23100} x \tang \gamma^3.$$

Cette valeur eſt la ſomme des deux réfractions terreſtres, dont chacune, pour être peu différente de l'autre, eſt la moitié. En omettant le ſecond membre à cauſe de ſa petiteſſe, la formule

$$z = 2\varsigma = \tfrac{1}{7}\, x \,\mathrm{tang}\, \gamma$$

fait voir que la réfraction terreſtre ς eſt la $\frac{1}{14}$ partie de l'angle au centre de la Terre. Ce qui, comme je l'ai fait voir dans les *Routes de la lumiere*, répond très bien aux obſervations.

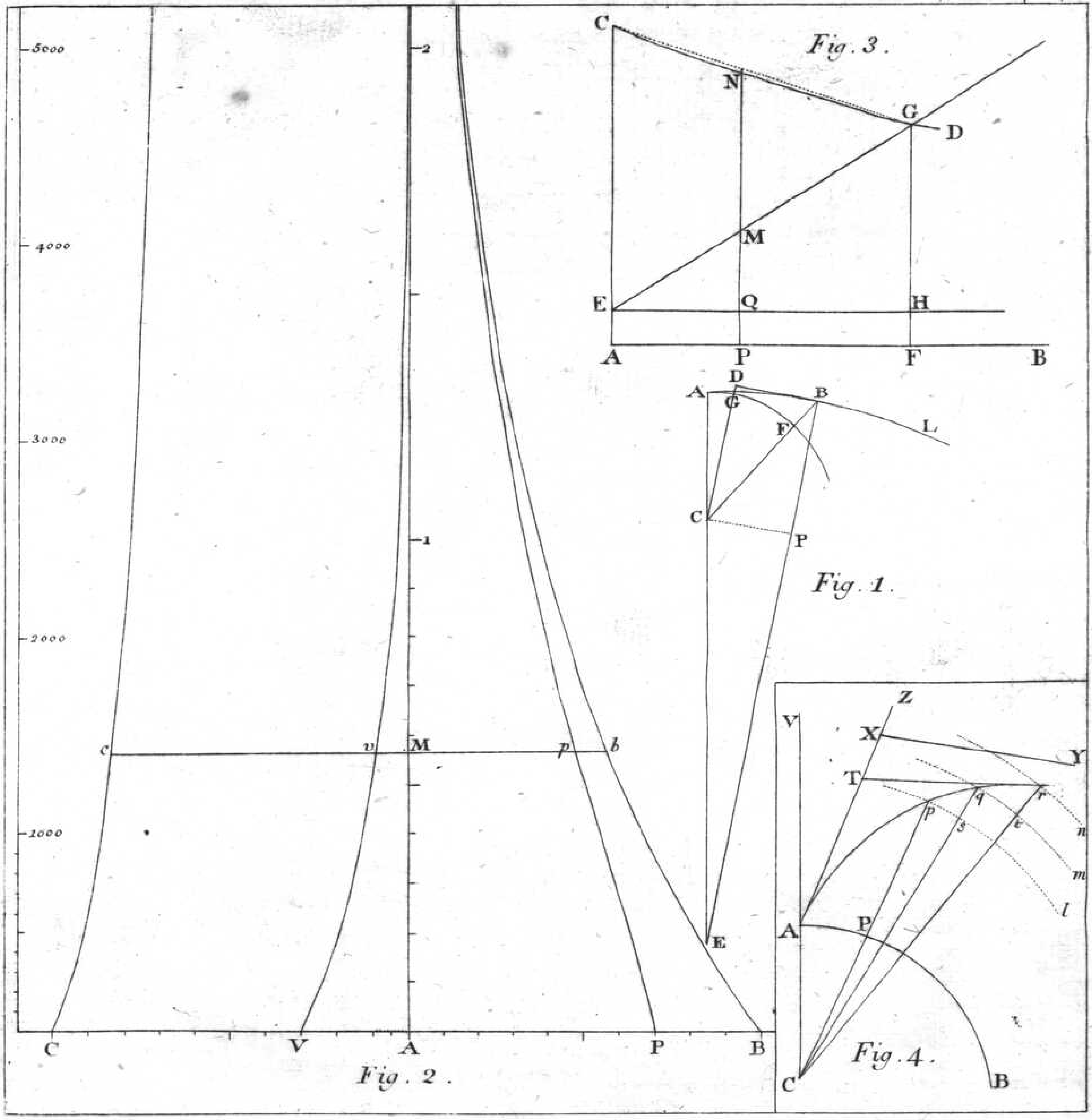

Fig. 3.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 4.