REMARQUES

ſur le tempérament en Muſique.

PAR MR. LAMBERT.

I.

La difficulté d'accorder auſſi exactement qu'il eſt poſſible les quintes & les tierces dans l'octave a de tout tems exercé les muſiciens tant théorétiques que pratiques. Avant l'invention des logarithmes il n'étoit gueres poſſible de réſoudre méthodiquement ce probleme. On tâcha d'y parvenir en tâtonnant & ſans être toujours fort ſatisfait de ce qu'on avoit trouvé. *Pythagore* n'employa que les nombres premiers 1, 2, 3, c'eſt à dire les octaves & les quintes. *Ariſtoxene* ſentant la beauté des tierces trouva le ſyſteme de *Pythagore* trop imparfait pour la pratique, & prétendit qu'il falloit s'en remettre au jugement de l'oreille. L'uſage du nombre 5 introduit depuis, ſervit à exprimer très exactement les tierces, mais la difficulté de les faire quadrer avec les quintes dans le ſyſteme de l'octave au moyen des mêmes tons ſubſiſtoit encore preſque entierement. Outre cela le triton p. ex. s'exprime beaucoup plus ſimplement par $\frac{7}{5}$ ou $\frac{10}{7}$ & beaucoup plus exactement par $\frac{99}{70}$ ou $\frac{140}{99}$, que par $\frac{45}{32}$, de ſorte que ſi ce triton avoit l'avantage d'être une conſonante, les nombres premiers 7, 11 &c. ne tarderoient pas d'être employés dans les calculs numériques de la muſique, comme ils le ſont dans la muſique naturelle des cors & des trompettes.

II.

Une des raiſons les plus eſſentielles qu'on peut avoir eues de s'en tenir aux nombres premiers 1, 2, 3, 5 eſt que ce ſont les ſeuls qui puiſſent être employés lorſqu'on veut accorder les inſtrumens de muſique par la ſimple ouïe. Ces nombres donnent les uniſſons, les octaves, les quintes & les tierces. C'eſt au moyen de ces conſonances que les inſtrumens doivent être montés pour l'uſage de la pratique. Et comme ces mêmes conſonances ſont l'ame de toute l'harmonie, c'eſt une raiſon de plus pourquoi on donne excluſivement la préférence aux nombres premiers 1, 2, 3, 5, & à leurs produits, quelque droit que les autres nombres premiers puiſſent avoir d'être introduits dans la muſique artificielle, comme ils le ſont dans la muſique naturelle.

III.

La queſtion eſt donc d'exprimer un ſon ou un rapport quelconque donné a au moyen des nombres 2, 3, 5, en ſorte que la formule

$$a = 2^m \cdot 3^n \cdot 5^p$$

puiſſe être réſolue, ſoit exactement, ſoit avec un degré donné de préciſion, les expoſans m, n, p étant des nombres entiers poſitifs ou négatifs.

IV.

On voit ſans peine que ce probleme eſt de la nature de ceux de Diophante, mais qu'il n'eſt pas généralement réſoluble en nombres rationels. Cela n'arrive que lorſque a eſt un nombre entier ou une fraction rationelle, dont le numérateur & le dénominateur n'eſt diviſible que par 2, 3, 5. Dans tous les autres cas le probleme n'eſt réſoluble que par approximation. Et c'eſt pour cetté raiſon que j'ai joint la condition d'un degré donné de préciſion. J'obſerve encore que la quantité a dans la muſique ſe renferme entre les limites 1 & 2, ou $\frac{1}{2}$ & 1. Cela eſt toujours poſſible, puiſqu'on a le choix de prendre pour m tel nombre qu'on voudra.

V.

En employant les logarithmes la formule propoſée ſe change en

$$m \log 2 + n \log 3 + p \log 5 = \log a.$$

Or les logarithmes des nombres 2, 3, 5 étant irrationels dans le ſyſteme ordinaire, on pourra changer ce ſyſtême en ſorte qu'on faſſe $\log 2 = 1$, & alors on aura

log

$$\log 2 = 1,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$$
$$\log 3 = 1,\ 584\ 962\ 500\ 721\ 156$$
$$\log 5 = 2,\ 321\ 928\ 094\ 887\ 362.$$

VI.

Ce ſyſteme de logarithmes eſt aſſez propre à exprimer le rapport des ſons à l'octave; mais comme dans ces calculs il s'agit ſurtout des petites différences que les nombres 2, 3, 5 produiſent entre les 12 demi-tons de l'octave qu'on emploie dans la muſique moderne, il vaudra mieux poſer $\log 2 = 12$. Alors on aura

$$\log 2 = 12,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000$$
$$\log 3 = 19,\ 019\ 550\ 008\ 653\ 870$$
$$\log 5 = 27,\ 863\ 137\ 138\ 648\ 344.$$

Dans ce ſyſteme l'octave eſt repréſentée par 12, & chaque demi-ton du tempérament égal eſt repréſenté par l'unité. Par là on trouve très facilement de combien tout autre tempérament differe du tempérament égal. Soit, par exemple, le rapport 45 : 32, qui approche fort du triton, ou bien du ſixieme demi-ton de l'octave. On aura $45 = 3 . 3 . 5$. Donc

$$\begin{array}{rcl} 2 \log 3 & = & 38,\ 039100017307740 \\ \log 5 & = & 27,\ 863137138648344 \\ \hline \log 45 & = & 65,\ 902237155956084 \\ \log 32 = 5 \log 2 & = & 60,\ 000000000000000 \\ \hline & & 5,\ 902237155956084 \\ \text{or le triton moyen} & = & 6,\ 000000000000000 \\ \hline \text{différence} & = & 0,\ 097762844043916. \end{array}$$

Cette différence eſt à très peu près la 10me partie d'un demi-ton.

VII.

Je vais employer ces logarithmes pour comparer enſemble les quintes & les tierces; & pour avoir un terme de comparaiſon fixe & conſtant je mettrai le tempérament moyen pour baſe. Dans ce cas j'aurai pour les quintes

$$
\begin{array}{rcl}
\log 3 & = & 19,\ 01955000865387 0 \\
\log 2 & = & 12, \\
\hline
\log (3:2) & = & 7,\ 01955000865387 0 \\
\text{La quinte moyenne} & = & 7, \\
\hline
\text{différence} & = & 0,\ 01955000865387 0.
\end{array}
$$

En multipliant cette différence par 12 on trouve l'excès de 12 quintes pures sur autant de moyennes, ou bien sur 7 octaves

$$= 0,\ 234600103846440.$$

Ce logarithme est la mesure du comma ditonique 531441 : 524288.

VIII.

Quant aux tierces majeures on trouve pareillement

$$
\begin{array}{rcl}
\log 5 & = & 27,\ 863137138648344 \\
\log 4 & = & 24, \\
\hline
\log (5:4) & = & 3,\ 863137138648344 \\
\text{la tierce moyenne} & = & 4, \\
\hline
\text{différence} & = & 0,\ 136862861351656.
\end{array}
$$

Ainsi la tierce majeure reste en défaut, tandis que la quinte manque par excès, mais beaucoup moins que la tierce. Et comme la tierce mineure $\frac{6}{5}$ est la différence entre la quinte & la tierce majeure, on trouve sans peine qu'elle manque par excès, & que cet excès est la somme de l'excès de la quinte & du défaut de la tierce majeure. Cela fait que les tierces mineures n'ont pas besoin d'un calcul particulier, & qu'il suffit de nous en tenir à la quinte & à la tierce majeure, qui font les nombres 2, 3, 4, 5.

IX.

Les quintes manquant donc par excès & les tierces majeures par défaut, on voit que l'excès d'un certain nombre de quintes peut être compensé plus ou moins par le défaut d'un certain nombre de tierces majeures. Pour cet effet il n'y a qu'à exprimer par une fraction continue le rapport entre

l'excès de la quinte - - - - = 0, 019550008653870

& le défaut de la tierce majeure = 0, 136862861351656.

Cette fraction continue ſe trouve être

$$= \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1527 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{30 + \&c.}}}}}$$

& ſa valeur exacte eſt

$$= \frac{28.\log 2 - 12.\log 5}{12.\log 3 - 19.\log 2}$$

de ſorte qu'elle peut être continuée à l'infini.

X.

On tire de cette fraction les rapports ſuivans entre le nombre des quintes & celui des tierces majeures qui ſe compenſent:

Tierces majeures	Quintes
1 - - - - - - - -	- 7
1527 - - - -	10690
4582 - - - -	32077
6109 - - - -	42767
187852 - - -	1295087
&c.	&c.

c'eſt à dire que l'excès de 7 quintes ſe compenſe par le défaut d'une tierce majeure, à très peu près. Car ſi l'on fait le défaut de la tierce $= 1$, on aura pour l'excès de la quinte

$$\frac{1}{7} - \frac{1}{7.\,10690} + \frac{1}{10690.\,32077} - \frac{1}{32077.\,42767} + \frac{1}{42767.\,1295087} - \&c.$$

de ſorte que ce n'eſt que ſur 1527 tierces majeures ou ſur 7 fois 1527 $=$ 10689 quintes qu'il faut prendre une quinte de plus. Comme dans la muſique pratique on n'a que faire d'un ſi grand nombre de tierces ou de quintes, le rapport de 1 à 7 pourra être plus que ſuffiſant, l'erreur qui en réſulte étant imperceptible, quand même pour monter un inſtrument on auroit beſoin des 10689 quintes, & qu'on omettroit la quinte qu'il faudroit alors prendre de plus. Car le défaut d'une quinte n'eſt que la $\frac{1}{12}$ partie du comma ditonique, ou environ la $\frac{1}{100}$ partie d'un ton entier. Voici maintenant l'uſage que nous pourrons faire de cette approximation.

XI.

Je déſignerai par l'unité l'excès d'une quinte & alors le défaut d'une tierce majeure ſera à très peu près $= -7$. On pourroit à toute rigueur faire ce défaut $= -7 - y$, afin de tenir compte de la petite quantité y, qui n'eſt que $\frac{1}{1527}$ de l'unité que je viens de mettre pour baſe. L'octave étant toujours ſuppoſée exacte, ſon excès ou ſon défaut eſt $= 0$, & à cet égard elle n'entre pas en conſidération.

XII.

Soit donc l'expreſſion générale des nombres & des rapports harmoniques

$$2^m \cdot 3^n \cdot 5^p = a.$$

Cette expreſſion renferme n quintes & p tierces majeures. On aura donc

pour n quintes l'excès - - - - $+ n$
pour p tierces majeures le défaut $- 7p$.

Donc cette expreſſion a differe de ce que donne le tempérament moyen de

$$+ n - 7p = \Delta a$$

unités, ou $(n - 7p)$ fois l'excès d'une quinte.

Or une quinte étant de 7, & une tierce majeure de 4 demi-tons, il eſt clair qu'en comptant de ſuite n quintes & p tierces majeures on aura en tout

$$7n + 4p = 12Q + q \text{ demi-tons.}$$

J'entens ici par Q le nombre d'octaves qui ſont renfermées dans le nombre $7n + 4p$.

XIII.

Ce nombre Q, de même que q, se détermine par le rapport donné a & par l'exposant m, en sorte qu'on pose généralement

$$\frac{3^n \cdot 5^p}{2^{n+2p}} = a \cdot 2^Q.$$

Si donc a est plus grand que le binaire, on en prend le logarithme, & on divise ce logarithme par log 2. Le quotient sera $= Q$ & le résidu $= q$. Ce résidu étant encore divisé par $\frac{1}{12}$ log 2, aura pour quotient le nombre de demi-tons que le rapport a renferme au delà de Q octaves; en divisant le reste par le logarithme du comma ditonique, le quotient donnera encore le nombre des comma que le rapport a renferme au delà des octaves & des demi-tons. Si enfin le dernier résidu est divisé par $\frac{1}{12}$ log. du comma diatonique, on aura pour quotient le nombre des $\frac{1}{12}$mes du comma que le rapport a renferme de plus. Il suffira de pousser la rigueur jusqu'à ces douziemes parties du comma ditonique, ces parties étant les unités que nous venons de mettre pour base. On peut employer pour ces calculs les logarithmes ordinaires ou tel autre systeme de logarithmes qu'on voudra. Celui que j'ai indiqué ci-dessus (§. 6.) ne laisse pas d'avoir quelque avantage. Je continuerai de l'employer.

XIV.

Soit le rapport $a = 7$, & qu'il s'agisse de l'exprimer très exactement par des octaves, des quintes & des tierces majeures. On aura

$$\log 7 = 33,68825906$$

ce qui donne 33 demi-tons, ou 2 octaves & 9 demi-tons & 0,68825906 parties décimales d'un demi-ton. En divisant ces parties par l'excès de la quinte (§. 9.)

$$0,0195500865 \text{ \&c.}$$

on aura pour quotient 35 unités ou excès de la quinte. Si nous laissons le nombre des octaves indéterminé, ces données nous fournissent les deux équations

$$n - 7p = 35$$
$$7n + 4p = 12Q + 9.$$

le nombre 7 renfermant un excès de 35 unités au delà d'un certain nombre d'octaves, & 9 demi-tons. En éliminant de ces deux équations la lettre n, on obtient

$$12Q = 236 + 53p.$$

Cette équation doit être résolue en nombres entiers, de sorte que

$$Q = 20 - \frac{4 - 53p}{12} = \text{nombre entier.}$$

Les moindres valeurs qu'on trouve par p sont

$$p = -4 \qquad\qquad p = +8.$$

De là on déduit

$$Q = +2 \qquad\qquad Q = +55.$$
$$n = +7 \qquad\qquad n = +91.$$

Suivant la premiere solution il faudra donc 7 quintes moins 4 tierces majeures. Cela fait

$$\left(\frac{3}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{3^7 \cdot 2}{5^4} = \frac{4374}{625} = 7 - \frac{1}{625},$$

ou

$$\begin{array}{rrl} & \log 2 + 7\log 3 = & 145,\ 13685006 \\ & 4\log 5 = & 111,\ 45254855 \\ \hline & & 33,\ 68430151 \\ \text{Mais} & \log 7 = & 33,\ 68825906 \\ \hline & & 0,\ 00395755. \end{array}$$

Cette différence n'est que la $\frac{1}{252}$ partie d'un demi-ton ou la $\frac{1}{52}$ partie du comma ditonique.

La feconde folution demande 91 quintes & 8 tierces majeures. Cela donne

$$\begin{array}{rcr} 91 \log 3 & = & 1730,\ 7790507876 \\ -\ 8 \log 5 & = & -222,\ 9050971092 \\ \hline & & 1953,\ 6841478968 \\ 160 \log 2 & = & 1920, \qquad\qquad\quad \\ \hline & & 33,\ 6841478968 \\ \text{Or} \quad \log 7 & = & 33,\ 6882590613 \\ \hline & & 0,\ 0041111645. \end{array}$$

Cette différence revient à très peu près à celle que donne la premiere folution. La raifon pourquoi elle n'eft pas abfolument la même, eft que d'un côté en évaluant l'excédent du log 7 au deffus de 33 demi-tons, nous avons pris nombre rond 35 unités ou excès de quinte, & que de l'autre côté le défaut de tierce majeure eft d'une petite partie plus grand que le feptuple de l'excès de quinte. En tenant compte de cette double omiffion, le calcul fe trouve jufte. J'en ai fait l'effai, pour m'affurer qu'il n'y a pas là quelque erreur de calcul. Du refte la premiere folution eft préférable, parce qu'elle ne demande qu'un petit nombre de quintes & de tierces.

XV.

Après ce que nous venons de faire voir, on réfoudra fans aucune difficulté le probleme de donner au clavecin le tempérament égal, en n'employant que les octaves, les quintes & les tierces majeures. On aura

$$n - 7p = 0$$
$$7n + 4p = 12Q + q.$$

En éliminant n, on obtient

$$53p = 12Q + q \qquad .$$

ou bien

$$Q = \frac{53p - q}{12} = 4p + \frac{5p - q}{12} = \text{nombre entier},$$

d'où l'on déduit les valeurs fuivantes, qui font les plus petites de toutes.

Quintes n	Tierces majeures p	demi-tons. q	ton.
o	o	o	*C*
+ 7	+ 1	+ 5	*F*
+ 14	+ 2	+10	*B*
+ 21	+ 3	+ 3	*Dis*
+ 28	+ 4	+ 8	*Gis*
+ 35	+ 5	+ 1	*Cis*
+ 42	+ 6	+ 6	*Fis*
— 7	— 1	+ 7	*G*
— 14	— 2	+ 2	*D*
— 21	— 3	+ 9	*A*
— 28	— 4	+ 4	*E*
— 35	— 5	+11	*H*
— 42	— 6	+ 6	*Fis*

XVI.

Pour faire uſage de cette Table on commence par un ton quelconque & on accorde de ſuite les 7 quintes ſuivantes, en retournant par octaves toutes les fois qu'il en ſera beſoin,

C . . . . G . . . . D . . . . A . . . . E . . . . H . . . . Fis . . . . Cis

& en prenant encore la tierce majeure

Cis . . . . F

ce ton *F* aura le tempérament égal. C'eſt par ce ton qu'on recommence à prendre 7 quintes & une tierce majeure, & on parviendra au ton *B*, qui aura également le tempérament moyen. En continuant de cette maniere 6 fois de ſuite, on aura ſucceſſivement les tons *C*, *F*, *B*, *Dis*, *Gis*, *Cis*, *Fis*, qui auront l'accord du tempérament moyen. Enſuite en recommençant par *C* on prendra de même les quintes & les tierces majeures en retrogradant, & on aura les autres tons *G*, *D*, *A*, *E*, *H*, montés ſur le tempérament moyen. Voici tout le procédé repréſenté dans une Table.

C	*G*	*D*	*A*	*E*	*H*	*Fis*	*Cis*	*F*
F	*C*	*G*	*D*	*A*	*E*	*H*	*Fis*	*B*
B	*F*	*C*	*G*	*D*	*A*	*E*	*H*	*Dis*
Dis	*B*	*F*	*C*	*G*	*D*	*A*	*E*	*Gis*
Gis	*Dis*	*B*	*F*	*C*	*G*	*D*	*A*	*Cis*
Cis	*Gis*	*Dis*	*B*	*F*	*C*	*G*	*D*	*Fis*
C	*F*	*B*	*Dis*	*Gis*	*Cis*	*Fis*	*H*	*G*
G	*C*	*F*	*B*	*Dis*	*Gis*	*Cis*	*Fis*	*D*
D	*G*	*C*	*F*	*B*	*Dis*	*Gis*	*Cis*	*A*
A	*D*	*G*	*C*	*F*	*B*	*Dis*	*Gis*	*E*
E	*A*	*D*	*G*	*C*	*F*	*B*	*Dis*	*H*

Il convient de remarquer que ſi ſuivant cette méthode le tempérament égal doit être exécuté, il eſt bon que le clavier ſoit double, parce qu'un ton tempéré étant trouvé ſur le premier il doit tout de ſuite être transféré ſur le ſecond. On mettra le *C* de chaque clavier à l'uniſſon, & en cherchant ſur le premier les tons tempérés ou moyens *F*, *B*, *Dis*, *Gis*, *Cis*, *Fis*; *G*, *D*, *A*, *E*, *H*, on y accorde le ſecond clavier à meſure que ces tons ſont trouvés. Mais ſi le clavier n'eſt pas double, après avoir trouvé chacun des tons moyens *F*, *B* &c. on en prend les octaves.

XVII.

Le tempérament égal pour 24 quarts de tons donne les deux équations ſuivantes, où p, q, n dénotent des quarts de ton.

$$n - 7p = 0$$
$$14n + 8p = 24Q + q,$$

d'où l'on déduit

$$Q = 4p + \frac{10p - q}{24} = \text{nombre entier.}$$

Cette condition ne pouvant avoir lieu que lorſque q eſt un nombre pair, il eſt clair que de cette maniere on ne trouve que le 2, 4, 6 - - - - 22 quart de ton, c'eſt à dire les demi-tons de l'octave. Ainſi pour trouver les 1, 3, 5, 7 - - - - 23^mes quarts de tons, il faudra s'y prendre autrement.

XVIII.

D'abord donc au lieu des équations proposées on peut faire, & même beaucoup plus exactement,

$$n - (7 + \tfrac{1}{1527})p = 0$$

$$14n + 8p = 24Q + q,$$

d'où suit

$$\tfrac{53449}{5345}p = 24Q + q$$

ou bien, en posant $p = 5345r$,

$$53449r = 24Q + q,$$

ce qui donne

$$Q = 2227r + \frac{r - q}{24} = \text{nombre entier.}$$

Il suffit donc de faire $r = q$, & de donner à chacune de ces lettres les valeurs $\pm 1, 2, 3, 4, \text{-----} 12$. On aura dans ce cas

Quintes n	Tierces majeures p	Quarts de ton q
$+ 10690$	$+ 1527$	$+ 1$
$+ 21380$	$+ 3054$	$+ 2$
$+ 32070$	$+ 4581$	$+ 3$
&c.		
$- 10690$	$- 1527$	$- 1$
$- 21380$	$- 3054$	$- 2$
$- 32070$	$- 4581$	$- 3$
&c.		

Ce systeme, quelque exact qu'il soit, n'est d'aucun usage pour la pratique, vu le grand nombre de quintes & de tierces qu'il exige.

XIX.

Il reste un autre moyen de rendre la pratique plus facile. Nous poserons Δa égale à un quart de ton. Cela fait $\Delta a = 26$ nombre rond;

car à toute rigueur il faudroit faire $\Delta a = 25,575 \ldots$ & ainsi nous pourrons employer les équations

$$n - 7p = 26$$
$$7n + 4p = 12Q + q$$

où les lettres n, p, q marquent des demi-tons. En éliminant n, on a

$$Q = 4p + 15 = \frac{5p - q + 2}{12}.$$

Par là on trouve

Demi-tons	Quintes	Tierces majeures	Quarts de ton
q	n	p	$2(q + \frac{1}{2})$
0	+ 40	+ 2	1
1	+ 75	+ 7	3
2	+ 26	+ 0	5
3	+ 61	+ 5	7
4	+ 12	− 2	9
5	+ 5	− 3	11
6	− 2	− 4	13
7	+ 33	− 1	15
8	+ 68	+ 6	17
9	+ 19	− 1	19
10	+ 54	+ 4	21
11	− 9	− 5	23

Lorsqu'un de ces quarts de ton est trouvé, on peut le mettre pour base, & en comptant de là 7 quintes & une tierce, en déduisant les octaves lorsqu'il le faut, on aura la quarte du ton qu'on a mis pour base. Depuis cette quarte on recommence à compter 7 quintes & une tierce majeure, & on aura la quarte de cette quarte. Si l'on répete cette opération 11 fois on aura tous les quarts de ton proprement tels, c'est à dire qui ne font pas un nombre entier de demi-tons. Quant à ceux-ci on les trouve de la maniere que j'ai indiquée ci-dessus. (§. 16.)

XX.

Comme ce ſyſteme de 24 quarts de ton n'eſt plus en uſage je retourne au ſyſteme moderne, qui eſt de 12 demi-tons. Ceux qui rejettent le tempérament égal comme trop uniforme, n'auront qu'à décider de combien d'excès de quintes ils ſouhaitent que chaque demi-ton de l'octave ſoit plus haut ou plus bas que dans le tempérament égal. Les formules

$$n - 7p = \Delta a$$

$$Q = 4p \pm \frac{5p - q + 7 \cdot \Delta a}{24} = \text{nombre entier}$$

ſerviront à trouver le nombre des quintes & des tierces majeures qu'il faudra compter en deſſus ou en deſſous pour monter chaque corde ſur le ton qu'ils déſirent. Suppoſons p. ex. que les quintes *F*, *C*, *G*, *D*, *A*, *E*, *H*, *Fis* doivent être pures, c'eſt à dire dans le rapport exact $3 : 2$, on trouvera ſans peine que les autres cinq quintes doivent être diminuées ſucceſſivement des 6 excès que donnent les ſix premieres quintes. C'eſt à quoi l'on parvient de la maniere ſuivante:

	C	*cis*	*D*	*dis*	*E*	*F*	*fis*	*G*	*gis*	*A*	*B*	*H*
$\Delta a =$	$+0$	$+5$	$+2$	$+2$	$+4$	-1	$+6$	$+1$	$+3$	$+3$	$+0$	$+5$.

En ſubſtituant ces valeurs dans les deux équations on trouvera pour les moindres valeurs de p & de n:

	Δa	q	p	n
C	0	0	0	0
cis	5	1	-2	-9
D	2	2	$+0$	$+2$
dis	2	3	$+1$	$+5$
E	4	4	$+0$	$+4$
F	-1	5	-0	-1

	Δa	q	p	n
fis	6	6	$+0$	$+6$
G	1	7	-0	$+1$
gis	3	8	-5	-32
A	3	9	$+0$	$+3$
B	0	10	$+2$	$+14$
H	5	11	$+0$	$+5$

Dans ce ſyſteme les 7 quintes *F*, *C*, *D*, *A*, *E*, *H*, *Fis* ſont juſtes, les autres ne s'écartent en moins que tout au plus d'un quart du comma ditonique. Il y a encore une grande variété dans les tierces majeures. Elles ſont toutes plus ou moins renforcées; mais il n'y en a que quatre qui ayent un comma ſyntonique de trop.

XXI.

Les quintes juſtes dans ce ſyſteme ſont celles des toniques, dont l'uſage eſt ou a été le plus fréquent. Mais c'eſt préciſément cette juſteſſe qui fait que les tierces majeures

$$CE,\ D\,Fis,\ FA,\ GH$$

ſe trouvent trop fortes d'un comma ſyntonique, ou de 11 excès de quintes. Il ſemble donc que pour garder quelque milieu il vaille mieux laiſſer ces quintes un peu en défaut, afin de pouvoir encore amener ces tierces majeures plus près de leur juſte valeur. C'eſt ce qui arrivera en montant les cordes ainſi:

	C	cis	D	dis	E	F	fis	G	gis	A	B	H
$\Delta a =$	0	—5	0	—3	—2	—1	—4	1	—4	—1	—2	—3.

Dans ce ſyſteme les quintes *G*, *D*, *A*, *E*, *H*, *fis* ſe trouvent rabaiſſées chacune de $\frac{1}{6}$ comma ditonique, les autres ſont juſtes. Les tierces majeures ſont toutes renforcées: celles de *G*, *D*, *A* ne le ſont que d'un quart du comma ditonique, celles de *C* & *E* de $\frac{5}{12}$, les autres le ſont davantage; mais il n'y en a aucune qui le ſoit au delà de $\frac{11}{12}$ du comma ditonique, ou au delà d'environ un comma ſyntonique. Pour accorder le clavier avec ce ſyſteme on aura

	p	n	q		p	n	q
G	+ 0	+ 1	7	Cis	+ 0	— 5	1
C	+ 0	+ 0	0	Fis	+ 2	+ 10	6
F	+ 0	— 1	5	H	+ 4	+ 25	11
B	+ 0	— 2	10	E	+ 6	+ 40	4
Dis	+ 0	— 3	3	A	— 4	— 29	9
Gis	+ 0	— 4	8	D	— 2	— 14	2

XXII.

Mais ſi on veut avoir les tierces majeures

$$FA,\ CE,\ GH,\ D\,Fis$$

égales, en ſorte qu'elles reſtent auſſi peu en défaut qu'il eſt poſſible, eu égard aux quintes, il faudra chercher un autre tempérament. Soit *t* le nombre d'excès de quintes dont chacune de ces tierces doit être plus foible que dans le tempérament égal. Soit encore y, z, x le nombre d'excès de quintes dont les tons F, G, D different de leur valeur moyenne. Rangeons les 12 demi-tons de l'octave ſuivant l'ordre des quintes, & nous aurons

Demi-tons	C	G	D	A	E	H	Fis	Cis	Gis	Dis	B	F
$\Delta a =$	0	z	x	$y - t$	$-t$	$z - t$	$x - t$					y

Ici on voit que les quintes depuis Fis juſqu'en F peuvent être aſſez différentes de celles qui vont depuis F juſqu'en Fis. Il s'agit même de voir ſi celles-ci peuvent être égales entr'elles. Or cela peut avoir lieu. Car l'excès de la quinte CG étant $= z$, cet excès ſera le même pour les autres en faiſant

$$\begin{array}{lll} \text{pour } FC \ldots . z = -y & & \\ \text{pour } GD \ldots . z = x - z, & & \text{donc } x = 2z \\ \text{pour } DA \ldots . z = y - t - x, & & \text{donc } t = -4z. \end{array}$$

Ces valeurs ſatisfont encore aux quintes $A\,E\,H\,Fis$; ainſi rien n'empêche de faire ces quintes égales, quoique du reſte cela ne ſoit pas abſolument néceſſaire. En les faiſant égales nous aurons

C	G	D	A	E	H	Fis	Cis	Gis	Dis	B	F
0	z	$2z^2$	$3z^3$	$4z^4$	$5z^5$	$6z^6$					$-z$

& en diſtribuant la différence entre Fis & F également

	C	G	D	A	E	H	Fis	Cis	Gis	Dis	B	F
$\Delta a =$	0	z	$2z$	$3z$	$4z$	$5z$	$6z$	$4,6 . z$	$3,2 . z$	$1,8 . z$	$0,4 . z$	$-z$

Il reſte donc à déterminer la valeur de z. J'obſerve d'abord qu'elle doit être négative, à cauſe de $t = -4z$. Enſuite on veut que les quintes ſoient plutôt trop foibles que trop fortes. Cela fait que la différence de chacune des cinq dernieres quintes doit être tout au plus $= 1$. Cela donne

$$-1,4z = 1$$
$$z = -\tfrac{5}{7}.$$

Donc on aura le tempérament

	C	*G*	*D*	*A*	*E*	*H*	*Fis*	*Cis*	*Gis*	*Dis*	*B*	*F*
$\Delta a =$	0	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{10}{7}$	$-\frac{15}{7}$	$-\frac{20}{7}$	$-\frac{25}{7}$	$-\frac{30}{7}$	$-\frac{23}{7}$	$-\frac{16}{7}$	$-\frac{9}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$+\frac{5}{7}$

ou bien pour éviter les fractions

0	− 1	− 1	− 2	− 3	− 4	− 4	− 3	− 2	− 1	0	+ 1

Dans ce système

les quintes *Fis*, *Cis*, *Gis*, *Dis*, *B*, *F* sont pures

Les autres sont en défaut d'un $\frac{1}{12}$ ou tout au plus d'un $\frac{1}{6}$ comma.

les tierces *FA*, *CE*, *GH*, *D Fis* sont trop fortes d'un $\frac{1}{3}$ comma.

L'excès des autres va depuis $\frac{1}{2}$ jusqu'à $\frac{11}{12}$ comma.

On trouve pour ce tempérament les valeurs suivantes.

	C	*G*	*D*	*A*	*E*	*H*	*Fis*	*Cis*	*Gis*	*Dis*	*B*	*F*
$q =$	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
$\Delta a =$	0	− 1	− 1	− 2	− 3	− 4	− 4	− 3	− 2	− 1	0	+ 1
$p =$	0	− 2	− 3	− 5	+ 5	+ 3	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2
$n =$	0	−15	−22	−37	+32	+17	+10	+11	+12	+13	+14	+15

XXIII.

Comme dans les systêmes que je viens d'exposer il y a des tons qui ne s'accordent au juste que par un assez grand nombre de quintes & de tierces majeures, cela m'a engagé à examiner quel seroit le tempérament qui pour chacun des douze demi-tons de l'octave demanderoit le moindre nombre de quintes & de tierces majeures, & qui nonobstant cela différeroit assez peu du tempérament égal. Pour cet effet on prend dans la formule

$$\frac{5p - q + 7 \cdot \Delta a}{12} = \text{nombre entier}$$

pour q successivement les valeurs 0, 1, 2, 3 . . . . 11, & on détermine Δa & p, en sorte que ces valeurs soient les moindres nombres entiers, positifs ou négatifs, qui satisfassent à la condition de donner pour quotient un nombre entier. Après quoi on trouvera n moyennant l'équation $n = 7p + \Delta a$. Voici les valeurs que j'ai trouvées.

q	Δa	p	n
0	0	0	0
1	-3	$+2$	$+11$
2	0	-2	-14
...	$+1$	-1	-6
...	$+2$	0	$+2$
3	-1	$+2$	$+13$
...	-2	$+1$	$+5$
...	-3	0	-3

q	Δa	p	n
4	$+3$	-1	-4
5	0	$+1$	$+7$
...	-1	0	-1
...	-2	-1	-9
6	± 3	∓ 3	∓ 18
7	0	-1	-7
...	$+1$	0	$+1$
...	$+2$	$+1$	$+9$

q	Δa	p	n
8	-2	$+2$	$+12$
...	-3	$+1$	$+4$
9	$+1$	-2	-13
...	$+2$	-1	-5
...	$+3$	0	$+3$
10	0	$+2$	$+14$
...	-1	$+1$	$+6$
...	-2	0	-2
11	$+2$	-3	-19
...	$+3$	-2	-11

En prenant les cas où n est aussi petite qu'il est possible, on aura le systeme suivant.

	C	G	D	A	E	H	Fis	Cis	Gis	Dis	B	F
$\Delta a =$	0	1	$+2$	$+3$	$+3$	$+3$	*	-3	-3	-3	-2	-1
$p =$	0	0	0	0	-1	-2	*	$+2$	$+1$	0	0	0
$n =$	0	1	$+2$	$+3$	-4	-11	*	$+11$	$+4$	-3	-2	-1

J'ai laissé les valeurs pour le sixieme demi-ton *Fis* indéterminées, parce que pour abréger l'opération, ce ton se détermine sans peine au moyen des quintes *H Fis Cis*. Outre cela tout l'arrangement de ce systeme demande que pour *Fis* on pose $\Delta a = 0$, de sorte que ce ton doit répondre au tempérament égal. De cette maniere les quintes *Dis B F C G D A* sont pures, c'est à dire dans le rapport exact $2 : 3$. Les quintes *H Fis Cis* sont en défaut d'un tiers de comma; & les autres quintes *A E H*, *Cis Gis Dis*, d'un $\frac{1}{12}$ comma. Les tierces *A Cis*, *E Gis*, *H Dis* ne sont trop fortes que d'un $\frac{1}{12}$ comma, les autres le sont d'avantage, quoiqu'il n'y en ait aucune où l'excès sur la tierce pure $4 : 5$ soit d'un comma ditonique.

* * *

Ce Mémoire avoit déja été lu à l'Académie lorsque Mr. le Conseiller de Guerre *Marpurg*, qui est grand amateur de musique & très connu par plusieurs ouvrages dans ce genre, me proposa de rechercher comment au moyen des

des consonances pures on pourroit produire un température tel que les quintes *C G*, *A E*, *Fis Cis*, *Dis B* restent en défaut de $2\frac{1}{2}$ excès de quinte, & la quinte *F C* de 2 excès, les autres quintes restant pures. Ce probleme donne la tablature

C	*Cis*	*D*	*Dis*	*E*	*F*	*Fis*	*G*	*Gis*	*A*	*B*	*H*	*c*
o	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+1\frac{1}{2}$	-1	$+1$	$+1$	$-1\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	o	o	o

qui fait voir de combien d'excès de quinte chaque demi-ton doit différer du tempérament moyen. Car alors on aura, en arrangeant ces tons suivant l'ordre des quintes,

	C	*G*	*D*	*A*	*E*	*H*	*Fis*	*Cis*	*Gis*	*Dis*	*B*	*F*	*c*
	o	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	-1	o	$+1$	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$+1\frac{1}{2}$	o	$+1$	o
Différence		$-1\frac{1}{2}$	$+1$	$+1$	$-1\frac{1}{2}$	$+1$	$+1$	$-1\frac{1}{2}$	$+1$	$+1$	$-1\frac{1}{2}$	$+1$	-1

Or j'ai déja trouvé que 22 tierces majeures pures donnent 85 demi-tons — 0,01098294973643 2 demi-ton moyen; ce qui fait à très peu près 7 octaves + 1 demi-ton — $\frac{1}{2}$ excès de quinte. Donc en prenant depuis *C* 22 tierces majeures pures, on tombera sur la touche *E*; mais cette corde n'aura que le ton *Cis* moyen diminué d'un $\frac{1}{2}$ excès de quinte. Ainsi on n'aura qu'à donner ce même ton à la corde *Cis*, & elle sera montée conformément à ce que le probleme demande.

Quant aux autres cordes il n'y a point de difficulté. Car le tempérament des cordes *C*, *B*, *H* sera moyen & s'accordera par conséquent suivant les regles données ci-dessus. Ensuite les quintes *B F*, *H Fis*, *Cis Gis*, *Gis Dis* étant pures, on aura encore les tons *F*, *Fis*, *Gis*, *Dis*. De plus, de *Cis* en *Dis* il y a un demi-ton moyen. Donc en prenant depuis *Cis* 35 quintes pures + 5 tierces majeures pures, on aura le ton *D*. Enfin les quintes *G D*, *D A* étant pures, on aura encore les tons *G*, *A* au moyen du ton *D*.