SUR

LE FROTTEMENT

entant qu'il rallentit le mouvement & s'y oppose.

PAR M. LAMBERT.

SECOND MÉMOIRE.

§. 1.

Les expériences qu'on a faites pour trouver les loix du frottement présentent tant de paradoxes & même de bisarreries, qu'en les examinant on est tenté de renoncer à toute recherche ultérieure, à moins qu'on ne regarde la plus grande partie de ces expériences comme fort mal imaginées & très mal faites. D'abord on s'est contenté de s'assurer du poids requis uniquement pour vaincre le frottement, & on en a inféré, un peu trop précipitamment, que ce poids étoit toujours le tiers de celui du corps qu'on traîne sur un plan horisontal, comme si l'inégalité des surfaces n'y avoit aucune influence. Ensuite on a examiné quel est le mouvement qui a lieu lorsqu'un corps est poussé avec plus de force qu'il ne faut pour vaincre le frottement. Dans ces expériences les machines employées étoient ordinairement très petites & le mouvement duroit trop peu de tems pour qu'on en pût tirer quelque résultat bien exact. D'ailleurs on manquoit à cet égard d'une bonne théorie, & par-là même les expériences ne se trouvoient que très rarement arrangées conformément à ce que la théorie auroit exigé. De tout cela il faut conclure qu'on peut & qu'on doit même faire abstraction de la plupart de ces expériences & en faire d'autres qui soient mieux entendues. Celles de M. *Schober*, que j'ai examinées dans mon premier Mémoire, font voir qu'il suffit que les expériences soient convenablement faites, pour que la théorie y réponde au delà même de ce qu'on pouvoit attendre.

§. 2. Comme les expériences, telles qu'il nous les faut, sont encore en fort petit nombre, j'ai cru devoir rapporter ici celles que je fis le 31 Octobre 1774, conjointement avec Mrs. *Guillaume* & *Schulze*. La machine étoit un Carrousel, dont la premiere Figure représente le quart du profil. *AB* est un arbre haut de 9 piés de Rhin, large & épais de $9\frac{1}{3}$ pouces, ce qui fait 9408 pouces cubiques de volume. *CD* sont deux barres de bois paralleles entr'elles, ayant 13 piés 2 pouces de longueur, 4 pouces 9 lignes de largeur, & 5 pouces de hauteur; ce qui donne $3752\frac{1}{2}$ pouces cubiques pour chacune. Or il y en a deux de chaque côté de l'arbre, ce qui fait donc en tout 30020 pouces cubiques. *FG* est une barre qui sert d'appui aux barres *CD*. Il y en a deux de chaque côté de l'arbre. Leur longueur est de 9 piés, leur largeur de 5 pouces & leur épaisseur de $4\frac{3}{4}$ pouces, ce qui fait 2565 pouces cubiques pour chacune, & en tout 20520 pouces cubiques. *ED* est une planche, sur laquelle est affermi un cheval de bois, au moyen de barres de fer. Les planches se trouvoient encore de chaque côté de l'arbre, mais il n'y avoit plus que deux chevaux. Enfin *HI* est une barre de bois, par le moyen de laquelle on fait tourner la machine à une distance de $8\frac{1}{2}$ piés. En comptant & pour le bois & pour le fer 27 pouces cubiques par livre, les $9408 + 30020 + 20520 = 59948$ pouces cubiques trouvés ci-dessus donneront 2220 livres de poids, auxquelles il faut ajoûter 200 livres pour les 4 plan-

Pl. I. Fig. 1.

ches & 240 livres pour les deux chevaux, & on aura 2662 livres pour le poids de toute la machine. Je mettrai nombre rond 2700 ou même 2800 livres, la pluie ayant rendu le bois humide. Le tourillon en *A*, ſur lequel toute la machine repoſe & tourne, avoit 6 pouces de circonférence. Il étoit de fer & tournoit ſur une pierre. Une force de 2 livres appliquée au bout *D* ſuffiſoit pour faire tourner la machine, de ſorte que la force qui fait équilibre au frottement eſt au deſſous de deux livres de poids.

§. 3. La première expérience n'avoit pour but que de voir comment, après qu'on auroit donné à la machine une aſſez grande viteſſe, le mouvement ſe rallentiroit enſuite. Pour cet effet M. *Guillaume* s'occupa à mettre la machine en mouvement, M. *Schulze* comptoit les ſecondes, & je marquois moi le tems que prenoit chaque demi-tour, & à la fin chaque quart de tour.

	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	Tours.
	''	2''	''	5''	1
		8		11	2
		14		$17\frac{1}{2}$	3
		21		$24\frac{1}{2}$	4
Tems		28		32	5
		3[illegible]		41	6
		46		$50\frac{1}{2}$	7
		56		61	8
		68	72	75	9
	78	82	86	90	10
	94	99	$104\frac{1}{2}$	$110\frac{1}{2}$	11
	117	124	134	$145\frac{1}{2}$	12
	168				

Ainſi le mouvement ceſſa après que la machine eut fait $12\frac{1}{4}$ tours, ce qui arriva au bout de 168 ſecondes. Le moment où le mouvement ceſſa fut très ſenſible, quoiqu'il s'en fallût de beaucoup qu'il eût ceſſé bruſquement; ce ne fut qu'au moment où la viteſſe du point extreme *D* commença à devenir imperceptible.

§. 4. Là-dessus je proposai à M. *Guillaume* de mettre la machine en mouvement en employant une force médiocre, en sorte que nonobstant l'accélération successive il pût toujours pousser la manivelle *I* avec la même force, du moins autant qu'il étoit possible. Car il s'agissoit de savoir jusqu'à quel point on est en état de pousser un objet qui fuit, & dont la vitesse va en augmentant. Il est clair que la vitesse qu'on peut successivement imprimer à la machine en poussant la manivelle *I*, ne sauroit être plus grande & doit même être un peu moins grande que celle qu'on a en courant de toute sa force, & que dans ce cas il n'y a plus gueres moyen de pousser la manivelle qu'avec autant de force qu'il en faut pour empêcher que le mouvement ne retarde. M. *Guillaume* se mit donc à essayer cet emploi de ses forces. M. *Schulze* compta le nombre des secondes, & je marquai le tems employé pour chaque demi-tour, non seulement pendant que M. *Guillaume* tourna, mais encore après qu'il eut cessé, jusqu'au moment où le mouvement, après s'être rallenti, cessa tout à fait. Voici le résultat de cette seconde expérience.

	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	Tours.	
	—	—	—	12	1	
	—	18	—	22	2	
	—	26	—	30	3	La machine étant poussée.
	—	34	—	37	4	
	—	40	—	43	5	
	—	46	—	48	6	
	—	51	—	54	7	
	—	56	—	59	8	
Tems.	—	$62\frac{1}{2}$	—	$65\frac{1}{2}$	9	
	—	69	—	$72\frac{1}{2}$	10	
	—	76	—	80	11	
	—	84	—	$88\frac{1}{2}$	12	La machine allant toute seule.
	—	93	—	98	13	
	—	103	—	108	14	
	111	114	117	120	15	
	124	127	$130\frac{1}{2}$	134	16	
	138	143	147	152	17	
	$157\frac{2}{1}$	163	170	177	18	
	186	197	$212\frac{1}{3}$	237	19	Il manquoit encore $\frac{1}{10}$ tour,

M. *Guillaume* cessa de pousser la manivelle après que la machine eut fait $6\frac{1}{2}$ tours. Elle continua d'aller depuis la 51^{me} seconde jusqu'à la 237^{me}, où elle s'arrêta, après avoir fait en tout $18\frac{9}{10}$ tours en $237''$ de tems, ou toute seule $12\frac{2}{5}$ tours en $186''$ de tems. On voit que le premier tour ayant demandé $12''$ de tems, le sixieme n'en demanda qu'environ 5. C'est donc en 5 secondes de tems que M. *Guillaume* parcourut un cercle de 53 piés de circonférence, ce qui fait $10\frac{3}{5}$ piés par seconde. C'est une vitesse assez grande, quoiqu'elle n'approche pas encore de celle que M. *Guillaume* auroit pu avoir en courant librement & de toute sa force.

§. 5. La même expérience étant répétée donna les résultats suivans.

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	Tours.	
—	8	—	12	1	
—	15	—	17	2	
—	20	—	22	3	
—	25	—	27	4	La machine étant poussée.
—	30	—	33	5	
—	37	—	40	6	
—	43	—	46	7	
—	49	—	51	8	
—	54	—	57	9	
—	60	—	63	10	
—	66	—	70	11	
—	73	—	77	12	
—	81	—	85	13	La machine allant seule.
—	89	91	94	14	
96	99	101	104	15	
107	109	112	115	16	
$118\frac{1}{2}$	122	$125\frac{1}{2}$	129	17	
133	138	142	146	18	
$151\frac{1}{2}$	157	163	170	19	
178	188	201	230	20	Il manquoit encore 10 degrés.

M. *Guillaume* cessa de pousser la manivelle après avoir fait $7\frac{1}{2}$ tours, ce qui arriva au bout de $49''$ de tems. Après cela la machine fit d'elle-même encore $12\frac{17}{36}$ tours avant de rentrer dans le repos, ce qui prit $230 - 49 = 181$ secondes de tems.

§. 6. Ces expériences ont l'avantage d'avoir été faites avec une machine réelle & non en petit. Leur durée fut d'un aſſez grand nombre de ſecondes pour qu'une demi-ſeconde de plus ou de moins pût n'être d'aucune conſéquence. L'inégalité des ſurfaces reſtant la même, on comprend que les irrégularités doivent influer beaucoup plus dans le mouvement d'une petite machine que dans celui d'une grande. Cela eſt cauſe que ce qu'on trouve en petit doit différer très conſidérablement de ce qu'on trouve en grand. Auſſi dans nos trois expériences il étoit amuſant de voir que le mouvement, bien loin de ſe rallentir & de s'arrêter comme par ſaut, ſe rallentiſſoit avec une uniformité frappante & ne ceſſoit qu'au point où la viteſſe alloit devenir inſenſible, quoique du reſte on pût très bien obſerver le moment où le mouvement ceſſoit tout à fait. Voyons maintenant comment nous appliquerons la théorie.

§. 7. D'abord je ſuppoſerai égale à un poids p la force appliquée à la manivelle, & entant que cette force étoit variable, le poids p eſt cenſé variable dans le même rapport. De ce poids p il faut ſouſtraire une partie q, qui eſt requiſe pour faire équilibre au frottement. L'expérience fit voir que ce poids eſt au deſſous de 2 livres, lorſqu'il eſt appliqué à l'extrémité D. Il ne ſera donc pas de 3 livres, lorſqu'il eſt appliqué à la manivelle I, le rapport de CD à HI étant à tres peu près celui de 3 à 2. Nous aurons donc $p - q$ pour la partie du poids ou de la force appliquée en I, qui produit l'effet de mettre la machine en mouvement.

§. 8. Or la maſſe de la machine doit également être réduite au point I. Cette réduction ſe fait en raiſon réciproque du quarré des diſtances. Ainſi les deux chevaux de bois & les quatre planches ED peſant enſemble 440 livres, ce poids réduit en I eſt $= 440 \cdot \left(\frac{CK}{HI}\right)^2 = 440 \left(\frac{148''}{102}\right)^2 = 926$ livres. Les barres $CD = 30020$ pouces cubiques $= 1112$ livres, deviennent $= \frac{1112}{3} \cdot \left(\frac{CD}{HI}\right)^2 = \frac{1112}{3} \cdot \left(\frac{158}{102}\right)^2 = 893$ livres. Les appuis $FG = 20520$ pouces cubiques $= 760$ livres, deviennent ſimplement $= \frac{20520}{3}$ pouces cubiques ou $\frac{760}{3} =$

253

253 livres. L'arbre $AB = 9408$ pouces cubiques $= 348$ livres se réduit à $348 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4\frac{2}{3}}{102}\right)^2 = \frac{1}{2}$ livre; & la barre HI à environ 2 livres. La somme sera donc $= 926 + 893 + 253 + \frac{1}{2} + 2 = 2074\frac{1}{2}$ livres, ou bien, nombre rond, $= 2100$ livres. Voilà donc la masse que la force $p - q$ devoit mettre en mouvement. Je la supposerai $= Q$. Cela donne la force accélératrice

$$= \frac{p-q}{Q}.$$

Si cette force agissoit sans autre empêchement, il suffiroit de poser $= \mathrm{d}x$ le chemin parcouru par le point I pendant le tems $\mathrm{d}\tau$. Et faisant la vitesse de ce point $= c$, & la hauteur due à cette vitesse $= h$, on auroit tout simplement

$$\mathrm{d}h = \frac{p-q}{Q} \cdot \mathrm{d}x$$

& le mouvement seroit uniformément accéléré tant que le poids $p - q$ resteroit le même.

§. 9. Cette accélération uniforme n'a point lieu, parce que le frottement s'y oppose de telle sorte qu'enfin la vitesse devient constante. Soit C cette vitesse terminale; & comme le frottement s'oppose en raison du quarré de la vitesse, nous aurons

$$\mathrm{d}h = \frac{p-q}{Q} \cdot \mathrm{d}x - \frac{p-q}{Q} \cdot \frac{cc}{CC} \cdot \mathrm{d}x,$$

parce que, pour $\mathrm{d}h = 0$, il faut que $c = C$, & que ce n'est que dans ce cas que l'accélération devient $= 0$. Il convient encore de remarquer que si $p - q$ est variable, le quarré CC l'est aussi & dans le même rapport. Donc, pour retenir CC comme une quantité constante, nous poserons pour $p - q$ une force ou un poids constant P, ce qui nous donnera

$$\mathrm{d}h = \frac{p-q}{Q} \cdot \mathrm{d}x - \frac{P}{Q} \cdot \frac{cc}{CC} \cdot \mathrm{d}x.$$

Voilà donc la formule qui pourra nous aider à découvrir comment dans les deux dernieres expériences la force p a varié, pendant que par la pression la viteſſe de la machine alloit en croiſſant. Mais il eſt plus à propos de voir d'abord comment, après que la preſſion ceſſa, le mouvement ſe rallentit.

§. 10. Il eſt clair que pour le cas du ſimple rallentiſſement il faut faire $p = 0$. Cela nous donne

$$\mathrm{d}h = -\frac{q}{Q}\,\mathrm{d}x - \frac{P}{Q}\cdot\frac{cc}{CC}\cdot\mathrm{d}x,$$

ou bien, en faiſant $g = \frac{1000}{64}$ piés de Rhin, on aura

$$h = \frac{16cc}{1000} = \frac{cc}{4g}$$

$$\mathrm{d}h = \frac{2c\mathrm{d}c}{4g}$$

ce qui donne

$$-\frac{2c\mathrm{d}c}{4g} = \left(\frac{q}{Q} + \frac{Pcc}{QCC}\right)\mathrm{d}x$$

$$x = -\frac{CCQ}{4gP}\cdot\log\left[cc + \frac{qCC}{P}\right] + \text{Conſt.}$$

En comptant l'eſpace parcouru depuis le point où la preſſion ceſſa, on fera pour $x = 0$, la viteſſe $c = V$. Cela donne

$$x = \frac{CCQ}{4gP}\cdot\log\left(\frac{VVP + CCq}{ccP + CCq}\right).$$

Or le mouvement ceſſant on a $c = 0$, ce qui donne l'eſpace parcouru total

$$X = \frac{CCQ}{4gP}\cdot\log\left(\frac{VVP + CCq}{CCq}\right)$$

d'où l'on voit *que le chemin total X eſt une quantité finie.*

§. 11. La formule que nous venons de trouver pour x nous donne réciproquement

$$cc = \frac{VVP + CCq}{P}\cdot e^{-4gPx:CCQ} - \frac{CCq}{P}.$$

Cela donne

$$\frac{\mathrm{d}x}{c} = \mathrm{d}\tau = \frac{e^{2gPx:CCQ}\cdot\mathrm{d}x}{V\left(\frac{VVP+CCq}{P}\right)\cdot V\left[1 - \frac{CCq}{VVP+CCq}\cdot e^{4gPx:CCQ}\right]}$$

d'où l'on tire l'intégrale

$$\tau = \frac{CQ}{2g\,V(Pq)} \cdot \left[\text{Arc. fin}\left(\frac{CVq}{V(VVP+CCq)} \cdot e^{2gPx:CCQ}\right) - \text{Arc. fin}\,\frac{CVq}{V(VVP+CCq)}\right]$$

où la conftante eft ajoûtée en forte que $\tau = 0$, lorfque $x = 0$.

§. 12. Cette formule peut être repréfentée fort fimplement par

$$\tau = \alpha \cdot [\text{Arc. fin}\,(\beta \cdot e^{\gamma x}) - \text{Arc. fin}\,\beta].$$

Et comme le finus $(\beta \cdot e^{\gamma x})$ ne fauroit croître au delà de l'unité, on voit qu'on aura le tems total

$$T = \alpha\left[\tfrac{1}{2}\pi - \text{Arc. fin}\,\beta\right].$$

Ainfi le mouvement fe réduit à zéro dans un tems fini. Nous avons déja vu que cela arrive auffi dans un *efpace fini.* Tout cela ne feroit pas fi on faifoit $q = 0$. Si donc, même à l'égard de la *réfiftance des fluides*, le mouvement ceffe dans un tems fini & dans un efpace fini, comme l'expérience le fait voir, il faut en inférer réciproquement, *qu'encore à l'égard des fluides on ne doit pas faire* q $= 0$, *mais qu'il faut exprimer par* q *la partie de la force requife pour vaincre la ténacité du fluide.*

§. 13. Pour appliquer à nos expériences l'équation que nous venons de trouver entre x, y, nous pourrons d'abord nous en tenir à la formule

$$\tau = \alpha\left[\text{Arc. fin}\,\beta \cdot e^{\gamma x} - \text{Arc. fin}\,\beta\right]$$

où il s'agit de déterminer les trois coëfficiens α, β, γ. Pour cet effet le meilleur parti fera d'employer les trois données V, T, X, c'eft à dire la viteffe initiale, & le tems & l'efpace total. Cela nous donne les trois équations

$$\beta = e^{-\gamma X}$$

$$T = \alpha\left[\tfrac{1}{2}\pi - \text{Arc. fin}\,\beta\right]$$

$$V = \frac{V(1-\beta\beta)}{\alpha\beta\gamma}.$$

Car lorſque $x = X$, on a $\beta \cdot e^{\gamma x} = 1$, & on a $V = \frac{dx}{d\tau}$ pour le cas où $x = 0$. Faiſant pour plus de brièveté $\beta = \sin \varepsilon$, ces trois équations donneront

$$-\frac{VT}{X} = \frac{\frac{1}{2}\pi - \varepsilon}{\operatorname{tang}\varepsilon \cdot \log.\sin\varepsilon}.$$

Or ε étant trouvée on aura

$$-\gamma = \frac{1}{X} \cdot \log.\sin\varepsilon$$

$$a = \frac{1}{\gamma \cdot \operatorname{tang}\varepsilon}.$$

§. 14. Dans la ſeconde expérience nous avons $X = 12\frac{1}{2}$ tours, $T = 187$, $V = \frac{5}{26}$ tours. Cela donne

$$\alpha = 163''$$
$$\beta = 0{,}4094$$
$$\varepsilon = 0{,}4218$$
$$\gamma = \frac{1}{14},$$

& par conſéquent

$$\tau = 163''.[\text{Arc.}\sin 0{,}4094 \cdot e^{x:14} - 0{,}4218].$$

Cette formule donne la Table ſuivante

x	τ calc.	τ expér.
1	5'',3	5
2	11,4	11,5
3	18,0	18
4	25,2	25
5	32,7	33
6	42,1	42
7	52,1	52
8	63,4	63
9	76,8	76
10	92,4	92
11	113,2	112
12	144,0	146
$12\frac{1}{2}$	187,0	186

On voit par-là que la formule eſt tout auſſi exacte que les expériences elles-mêmes. Il convient cependant de remarquer que, pour peu qu'on change les données V, T, X, les valeurs α, γ, δ changent fort conſidérablement. Car ayant d'abord poſé $V = \frac{28}{5}$ au lieu de $V = \frac{26}{5}$, je trouvai

$$\tau = 175''.[\text{Arc. ſin } 0{,}4794 \,.\, e^{x:17} - 0{,}5000]$$

au lieu de

$$\tau = 163''.[\text{Arc. ſin } 0{,}4094 \,.\, e^{x:14} - 0{,}4218].$$

Et en faiſant $V = \frac{26}{5}$, $T = 186$, $X = 12\frac{2}{5}$, je trouvai

$$\tau = 161\,.[\text{Arc. ſin } 0{,}4035 \,.\, e^{0{,}07318 \,.\, x} - 0{,}4154].$$

§. 15. Ayant donc les valeurs α, β, γ, V, on aura les trois équations

$$\alpha = \frac{CQ}{2g\,\sqrt{(Pq)}} = 163''$$

$$\beta = \frac{C\sqrt{q}}{\sqrt{(VVP + CCq)}} = 0{,}4094$$

$$\gamma = 2gP : CCQ = \tfrac{1}{14}.$$

D'où ſuit

$$\alpha\gamma = \frac{1}{C}\,.\,\sqrt{\left(\frac{P}{q}\right)}$$

$$\frac{P}{q} = (\alpha\gamma C)^2$$

$$\frac{Q}{q} = 2\alpha^2\gamma g.$$

Ce qui, en faiſant $g = \frac{1000}{64}$ piés $= \frac{1000}{64 \cdot 53}$ tours du point I, $Q = 2100$ livres, donne $q = 1{,}88$ livre; de ſorte que la force qui fait équilibre au frottement n'eſt que $1{,}88 = 1\frac{8}{9}$ livre. Et comme on a le choix de prendre pour C telle valeur qu'on voudra, P croiſſant dans le même rapport que CC, nous poſerons $C = V = \frac{5}{26}$. Par-là nous aurons $P = q\,.(\alpha\gamma C)^2 = 9{,}42$ livres. Si donc on fait mouvoir la machine par un poids de $9{,}42$ livres appliqué en I, ce point aura la viteſſe terminale $= \frac{5}{26}$ tours $= \frac{5}{26}\,.\,53 = 10{,}2$ piés.

§. 16. Pour voir maintenant avec quelle force la machine a été successivement poussée, nous retournerons à la formule du §. 8.

$$dh = \frac{p-q}{Q}dx - \frac{P}{Q}\cdot\frac{cc}{CC}\cdot dx$$

qui donne

$$p = q + \frac{Q.dh}{dx} + \frac{Pcc}{CC}$$

ou bien

$$p = q + \frac{Qcdc}{2g.dx} + \frac{Pcc}{CC}$$

Cette équation ne se résout qu'avec peine. Il faut d'abord construire une ligne courbe dont les abscisses soient x & les ordonnées τ. Cette courbe se construit d'après les nombres que donne l'expérience. Ensuite on aura $c = \frac{dx}{d\tau}$, & on trouvera pour chaque abscisse x la vitesse répondante c, moyennant la position des tangentes de la courbe. On construira ensuite une nouvelle courbe dont les abscisses soient x & les ordonnées c. Et moyennant la position des tangentes de cette courbe on déterminera pour chaque abscisse x le rapport $\frac{dc}{dx}$ ou bien la sounormale $\frac{cdc}{dx}$. Après quoi prenant les valeurs q, Q, P, C telles que nous venons de les trouver, la formule donnera pour chaque abscisse x le poids p, qui dénote la force avec laquelle la machine a été poussée. J'ai essayé de faire toutes ces opérations; mais après avoir construit les ordonnées τ répondantes aux abscisses x, telles que les donne la seconde expérience, je vis que pour que la courbe fût assez réguliere, l'ordonnée 12″, qui répond à $x = 1$, devoit être augmentée environ d'une unité. Cela provient d'une petite inégalité de la force avec laquelle la machine fut poussée pendant le premier tour. Toutes les autres ordonnées suivoient une loi assez réguliere, surtout celles qui répondent aux tours entiers. Quant aux autres, une partie d'une seconde de plus ou de moins les rendoit également régulieres. La courbe que je construisis ensuite pour les vitesses étoit encore assez réguliere depuis l'abscisse $x = 1$, mais je ne pus gueres la construire avec assez de certitude pour les $x < 1$. J'essayai donc de chercher une formule qui pût représenter assez exactement les rapports entre x & τ, & je trouvai qu'en faisant

$$\tau = \sqrt{\left(\tfrac{333}{4}.x + 94.x^2 - \tfrac{117}{16}x^3\right)}$$

cette formule ne différoit de l'expérience que pour le cas $x = 1$, où elle donne $\tau = 13'',1$ au lieu de $\tau = 12$. J'ai déja dit que je ne m'arrêterai pas à cette irrégularité.

§. 17. Faisant donc

$$\Phi = \tfrac{333}{4}x + 94.x^2 - \tfrac{117}{16}x^3$$

$$\psi = \frac{d\Phi}{dx} = \tfrac{333}{4} + 188x - \tfrac{351}{16}x^2$$

$$\omega = \frac{d\psi}{dx} = 188 - \tfrac{351}{8}x$$

on aura

$$c = \frac{dx}{d\tau} = \frac{2\sqrt{\Phi}}{\psi}$$

$$\tau = \sqrt{\Phi}$$

$$\frac{cdc}{dx} = \frac{2}{\psi} - \frac{4\Phi\omega}{\psi^3}$$

&

$$p = q + \frac{Q}{2g}\left(\frac{2}{\psi} - \frac{4\Phi\omega}{\psi^3}\right) + \frac{P}{CC}\cdot\frac{4\Phi}{\psi\psi}.$$

Ce qui en faisant (§. 15)

$$Q = 2109 \qquad 2g = \frac{1000}{32\cdot 53}$$

$$P = 9{,}42 \qquad C = \tfrac{5}{26} \qquad q = 1{,}9$$

donne

$$p = 1{,}9 + \frac{7124}{\psi} - \frac{14248.\Phi\omega}{\psi^3} + \frac{1018{,}8.\Phi}{\psi^2}.$$

§. 18. Ces formules donnent les valeurs ſuivantes.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
x tours.	φ	ψ	ω	p	c tours.	$\tau = V\varphi$.	τ obſ.	c piés.
0	0,0	83,3	188,0	87,5	0,000	0″,0	0″	0,0
$\frac{1}{4}$	26,6	128,9	177,0	27,5	0,080	5,2	—	4,2
$\frac{1}{2}$	64,2	171,7	166,1	15,6	0,094	8,0	—	5,0
1	169,9	249,3	144,1	10,8	0,105	13,1	12	5,6
2	484,0	371,5	100,3	10,2	0,119	22,0	22	6,3
3	898,3	449,8	56,4	14,3	0,133	30,0	30	7,0
4	1371,0	484,8	14,5	20,1	0,150	37,0	37	8,0
5	1852,0	474,8	— 21,4	30,5	0,181	43,0	43	9,6
6	2310,0	421,5	— 75,2	65,1	0,228	48,0	48	12,1

§. 19. En comparant la cinquieme colonne de cette Table avec la neuvieme, on voit ſans peine que la force p employée pour mettre la machine en mouvement n'a pas un rapport fort marqué avec la viteſſe. La force initiale étant de $87\frac{1}{2}$ livres, indique que c'eſt plutôt par un choc que par une ſimple preſſion qu'on a commencé à donner le branle à la machine, quoique du reſte un homme s'appuyant fortement contre un obſtacle, puiſſe très bien le faire avec une force égale à $87\frac{1}{2}$ livres. Cette forte preſſion cependant ne dura pas longtems. En 5 ſecondes de tems la viteſſe étant de $4\frac{1}{5}$ piés, elle ne fut plus que de $27\frac{1}{2}$ livres. Après cela elle décrut de telle ſorte qu'elle n'étoit plus que de $10\frac{1}{5}$ livres, la viteſſe étant d'environ $6\frac{1}{3}$ piés. Depuis ce point elle recommença à augmenter très conſidérablement, quoiqu'encore la viteſſe allât en augmentant. C'eſt ce qu'il y a de plus paradoxe. Cependant on en entreverra ſans peine la raiſon. Qu'on eſſaye de s'appuyer moitié couché contre une manivelle qu'on met en mouvement, & de faire par ſeconde un chemin de 8, 10 à 12 piés, c'eſt à dire de faire des ſauts plutôt que des pas. Cela ne ſauroit ſe faire à moins qu'on n'appuie très fortement les piés contre la terre, & la poſition inclinée fait que les mains ſont appuyées avec tout autant de force contre la manivelle. Ainſi il eſt très poſſible d'employer une force de 65 livres en faiſant

ſant

ſant 12 piés de chemin par ſeconde. Mais auſſi c'eſt un travail qu'on ne ſoutiendra pas fort longtems.

§. 20. En multipliant la force p par la viteſſe c, on aura le produit pc qu'on appellé le *moment ſtatique*. Notre expérience fait voir que ce *moment* varie extremement. Voici les réſultats.

x	p	c	pc
0	87,5	0,0	—
$\frac{1}{4}$	27,5	4,2	115,5
$\frac{1}{2}$	15,6	5,0	78,0
1	10,8	5,6	60,5
2	10,2	6,3	64,3
3	14,3	7,0	100,1
4	20,1	8,0	160,8
5	30,5	9,6	293,8
6	65,1	12,1	787,8

§. 21. Cette Table nous fait voir que le *moment ſtatique* a un *minimum*, & que ce *minimum* eſt $= 60$ ou $60\frac{1}{2}$, la force étant de 10,8 livres, & la viteſſe de 5,6 piés. Cette viteſſe eſt celle d'un homme qui marche un peu vîte, comme feroit un voyageur. L'on comprend que cette marche peut durer pluſieurs heures de ſuite ſans qu'elle ſoit trop fatigante, même lorſqu'il faut pouſſer ou traîner avec une force de 10 à 11 livres de poids.

§. 22. On voit encore par cette Table que la force a été un *minimum* lorſque la viteſſe étoit la viteſſe naturelle d'un homme qui marche comme un voyageur ou comme un homme affairé. Il ſemble que cette viteſſe naturelle de l'homme eſt celle que demande le poids de ſon propre corps, & que par cette raiſon la force qu'il emploie pour pouſſer, ſe réduit à ſon moindre terme, en devenant un *minimum*. Il n'y emploie, pour ainſi dire, que le reſte de ſes forces, & nommément le même reſte qu'il emploieroit s'il ſe mettoit à courir plus vîte ſans porter ni pouſſer quoi que ce ſoit, & ſans trop ſe fatiguer.

§. 23. Tout ce que je viens de faire voir en détail a été déduit de la seconde expérience. Il est inutile d'entrer dans le même détail à l'égard des deux autres expériences. Il suffit de les comparer avec la seconde, pour s'assurer que les résultats doivent être à très peu près les mêmes. Dans la troisieme expérience la machine fut poussée avec des forces plus égales ou bien moins grandes vers la fin. Les tems employés pour chaque tour sont 12, 5, 5, 5, 6, 6, 7, de sorte que le mouvement fut retardé après le quatrieme tour. Aussi Mr. *Guillaume* me dit-il avoir senti que la machine l'avoit entraîné, & que quand elle alloit une fois grand train il n'y avoit plus moyen d'en modérer le mouvement, comme il avoit voulu le faire, surtout dans la troisieme expérience.

§. 24. Voilà donc ce que j'avois à dire sur nos expériences, entant qu'il s'agissoit de les comparer avec la théorie. On voit que le rapport entre la force P & la vitesse C ne peut encore être déterminé que par les expériences elles-mêmes, & qu'il faudroit faire beaucoup d'autres expériences, avant que de pouvoir établir une loi générale. J'en dirai autant par rapport à la force q, qui fait équilibre au frottement. Toutes ces expériences doivent être faites en grand, par les raisons que j'ai rapportées ci-dessus.