Die Construction, welche ich über diese Finsterniss nach Lambertischer Methode entworfen habe, stimmt sehr gut mit dieser Rechnung überein, so dass sich dadurch die Richtigkeit derselben bestätigte. Ich habe unterdessen dabey den Halbmesser der Erde nur mit dem Unterschied der Parallaxe des Mondes unter dem Aequator und der Sonnenparallaxe beschrieben, und auch die Vergrösserung des Mondhalbmessers in seiner Höhe aus der Acht gelassen, welches freylich kleine Unterschiede von einigen Secunden verursachen kann, welche zum Theil schon aus dem Erfolge sich ergeben. Ferner hätte die abgeplattete Figur der Erde; die ungleiche Bewegung des Mondes in seiner Bahn; die nicht unendliche Entfernung der Sonne und die Veränderung des Positions-Winkels am Meridian, mit in Betrachtung müssen gezogen werden, um die Resultate so genau zu haben, als es nur immer die mit Fleiss angestellte mechanische Operation zulässt; man lässt aber diese kleinen Veränderungen und Ungleichheiten bey der Construction gemeiniglich aus der Acht, weil solche zusammen genommen sehr wenig austragen, und weil die Tafeln und die Rechnungen selbst nicht zuverläsiger sind.

Ich fand nach der Construction:

Den Anfang der Finsterniss um		4 Uhr	45′, 7		
Das Mittel	- -	5	-	31, 4	die Grösse 4 Zoll 34 Min.
Das Ende	- -	6	-	13, 9	

Welche nun aufs höchste um etwas über ½ Min. von dem, was die Rechnung giebt, abgehen.

Einige trigonometrische Anmerkungen
von Herrn *Lambert*.

I.

Die gewöhnlichen Tafeln der Sinus und Tangenten, dergleichen die von *Vlacq*, *Sherwin*, *Wolf* und andere sind, gehen nur bis auf 7 Decimalstellen. Dieses hat nun in Absicht auf die Genauigkeit der Berechnungen den Erfolg, dass der einem Sinus zukommende Bogen nicht mehr bis auf eine Secunde gefunden wird, so bald dieser Bogen grösser als 88°. 49′ ist, weil für grössere Bögen die in bemeldten Tafeln angegebene Sinus um weniger

weniger dann 0, 0000060 von einander verschieden sind. In Ansehung der Logarithmen muss der Bogen kleiner als 87°. 18′ seyn, weil für grössere Bögen die Logarithmen der Sinus um weniger dann 0, 0000060 von einander verschieden sind.

Es giebt nun zwar sowohl Tafeln als Formeln, die weiter als auf 7 Decimalstellen gehen. Aber die Tafeln sind selten zu haben, und die Formeln beym Gebrauche etwas weitläuftig. Damit entsteht nun immer die Frage, was in solchen Fällen zu thun sey, wenn man die Rechnung bis auf einzelne Secunden richtig haben will? Die Antwort hierauf ist nun überhaupt, dass die ganze Rechnung anders müsse eingerichtet werden. Wie nun dieses geschehen könne, das wird sich am füglichsten durch die Anwendung auf einige besondere Fälle zeigen lassen.

Von diesen Fällen ist einer der ofte vorkömmt, wenn man nämlich aus der Länge, Breite und Abweichung des Mondes oder eines Planeten oder auch eines Sterns seine gerade Aufsteigung sucht, und der Ort des Sterns oder des Mondes ganz nahe bey 0 ♈ oder 0 ♎ ist.

Es sey λ die Länge oder der Abstand vom nächsten Aequinoctialpunct auf der Ecliptic genommen; α eben dieser Abstand auf dem Aequator; δ die Abweichung und β die Breite; so hat man überhaupt

$$\cos\alpha.\ \cos\beta = \cos\delta.\ \cos\lambda.$$

Hier kann es sich nun zutragen, dass alle diese Bögen viel zu klein sind, als dass α bis auf Secunden könnte nach dieser Formel genau gefunden werden.

In solchen Fällen ist es besser, wenn man diese Formel in folgende verwandelt

$$(1-2\sin\tfrac{1}{2}\alpha^2).\ (1-2\sin\tfrac{1}{2}\beta^2) = (1-2\sin\tfrac{1}{2}\delta^2).\ (1-2\sin\tfrac{1}{2}\lambda^2)$$

denn hieraus folgt sodann

$$s\tfrac{1}{2}\alpha^2 + s\tfrac{1}{2}\beta^2 - 2.\ s\tfrac{1}{2}\alpha^2.\ s\tfrac{1}{2}\beta^2 = s\tfrac{1}{2}\delta^2 + s\tfrac{1}{2}\lambda^2 - 2\ s\tfrac{1}{2}\delta^2.\ s\tfrac{1}{2}\lambda^2$$

demnach

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{s\tfrac{1}{2}\delta^2 + s\tfrac{1}{2}\lambda^2 - s\tfrac{1}{2}\beta^2 - 2\ s\tfrac{1}{2}\delta^2.\ s\tfrac{1}{2}\lambda^2}{1-2\ s\tfrac{1}{2}\beta^2}\right)}$$

oder nach einer leichten Verwandlung

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{s\tfrac{1}{2}\delta^2.\ \cos\lambda + s\frac{\lambda+\beta}{2}.\ s\frac{\lambda-\beta}{2}}{\cos\beta}\right)}$$

Diese

Diese Formel ist nach aller Schärfe richtig. Sind nun aber die Bogen δ, λ, ϵ nur von 1 oder 2 Gr. so kann man sie sehr merklich abkürzen, weil man mit zureichender Genauigkeit folgende

$$\alpha = \sqrt{(\delta^2 + \lambda^2 - \epsilon^2)}$$

gebrauchen, und demnach mit den Bögen selbst die Rechnung vornehmen kann.

Es sey Z. E. $\delta = 2^\circ$, $\lambda = 2^\circ$, $\epsilon = 1^\circ$, so ist nach dieser letzten Formel

$$\alpha = \sqrt{(4 + 4 - 1)} = 2^\circ, 64575$$
$$= 2^\circ.\ 38'.\ 44'', 7.$$

Nach der ganz genauen Formel aber ist

2. log. sin 1° =	6,4837106	l. sin $1\frac{1}{2}^\circ$ =	8,4179190
log. cos 2° =	9,9997354	l. sin $\frac{1}{2}^\circ$ =	7,9408419
	16,4834460		6,3587609
l. cos 1°. =	9,9999338	l. cos 1° =	9,9999338
	6,4835122		6,3588271

Diese beyden Logarithmen geben

$$\begin{array}{rl} & 0,0003044474 \\ & 0,0002284689 \\ \hline \text{Summe} = & 0,0005329163 \end{array}$$

$$\text{Quadratwurzel} = 0,0230850 = \sin \tfrac{1}{2}\alpha.$$
$$\tfrac{1}{2}\alpha = 1^\circ.\ 19'.\ 22''$$
$$\alpha = 2.\ 38.\ 44$$

welches bis auf einige Decimaltheile von Secunden dem vorhin gefundenen Werthe gleich ist.

Uebrigens ist hiebey anzumerken, dass die hier betrachteten Fälle gerade diejenigen sind, wo es sehr nöthig ist, sich eine Figur zu zeichnen, um sicherer entscheiden zu können, ob der Werth α von dem Aequinoctialpunct vor- oder rückwärts gerechnet werden muss. Eine solche Zeichnung erspart zugleich die Mühe, die man sonst nehmen müsste, die verschiedenen Fälle, die vorkommen können, vorzuzählen, und den, der jedesmal vorkömmt, darunter auszusuchen.

Man sieht überdiess ohne Mühe, dass die Formel

$$\alpha^2 + \epsilon^2 = \delta^2 + \lambda^2$$

vier Aufgaben enthält, weil jeder der Werthe α, ϵ, δ, λ als der zu suchende angesehen werden kann. Diese Formel begreift dem-

demnach ausser dem hier betrachteten Fall, wo α gesucht wird, noch drey andere unter sich. Es ist aber unnöthig, jeden besonders zu betrachten. Denn man sieht aus der allgemeinen Gleichung

$$\cos\alpha . \cos\zeta = \cos\delta . \cos\lambda$$

dass die Werthe α, ζ, δ, λ für einander gesetzt werden können, und daher nur ihre Bedeutung zu ändern ist, wenn man jedesmal die gesuchte Grösse α, die drey gegebenen ζ, δ, λ nennen, folglich jede der aus dieser Gleichung hergeleiteten Formeln, so wie sie hier ausgedrückt worden, gebrauchen will.

II.

Ich werde demnach einen andern Fall vornehmen, und dieses ist derjenige, wo auf der Erde der Abstand zweener Oerter oder am Himmel der Abstand zweener Sterne sehr geringe ist, und aus der gegebenen Entfernung vom Pole und dem Unterschiede der Länge oder der geraden Aufsteigung gefunden werden soll.

Es sey der gesuchte Abstand = x, ein Bogen des grössten Circuls, so durch beyde Oerter oder Sterne geht; die Entfernungen vom Pole seyn c, $\varkappa$, der Unterschied der Länge oder der geraden Aufsteigung = λ; so giebt die Trigonometrie folgende Gleichung

$$\cos x = \cos c . \cos\varkappa + \sin c . \sin\varkappa . \cos\lambda$$

Ist nun x sehr geringe, so reicht cos x so nahe an den Halbmesser, dass sich der Bogen x mittelst der gewöhnlichen Tafeln nicht bis auf eine Secunde genau bestimmen lässt. Indessen kann es Z. E. Fälle geben, wo man die Theile eines Micrometers mittelst der Distanzen von sehr nahe neben einander stehenden Sternen zu prüfen wünschte, sofern man nämlich voraussetzen kann, dass ihre Lage in Absicht auf die Länge und Breite oder auch in Absicht auf die Abweichung und gerade Aufsteigung in den Sternverzeichnissen richtig angegeben ist, und die Sterne nahe genug beym Scheitelpuncte stehen, um von der Stralenbrechung nichts zu besorgen zu haben.

Es

Es läßt sich nun aber die erst angegebene Gleichung leicht in folgende verwandeln

$$1 - 2 \sin \tfrac{1}{2} x^2 = \cos c.\ \cos \varkappa + s\, c.\ s\, \varkappa - 2\, s\, c.\ s\, \varkappa.\ s\, \tfrac{1}{2} \lambda^2$$

oder

$$1 - 2\, s\, \tfrac{1}{2} x^2 = \cos (c - \varkappa) - 2\, s\, c.\ s\, \varkappa.\ s\, \tfrac{1}{2} \lambda^2$$

oder

$$1 - 2\, s\, \tfrac{1}{2} x^2 = 1 - 2 \sin \left(\frac{c - \varkappa}{2}\right)^2 - 2\, s\, c.\ s\, \varkappa.\ s\, \tfrac{1}{2} \lambda^2$$

oder endlich

$$s\, \tfrac{1}{2} x = \sqrt{} \left(s\, \frac{c - \varkappa^2}{2} + s\, c.\ s\, \varkappa.\ s\, \tfrac{1}{2} \lambda^2\right)$$

Diese Formeln sind noch alle genau richtig. Sind nun aber die Werthe $c - \varkappa$ und λ kaum von 1 oder 2 Gr. so kann statt der letzten Formel folgende

$$x = \sqrt{} \left(\lambda^2.\ s\, c.\ s\, \varkappa + (c - \varkappa)^2\right)$$

gesetzt werden. Diese ist nun so weit genau, als man den Unterschied zwischen der Länge eines Bogens und dessen Chorde als unerheblich geringe ansehen kann. Wenn aber $\lambda = 0$ ist, oder die beyden Oerter oder Sterne unter einerley Mittags- oder Breitenkreise liegen, so giebt diese Formel $x = c - \varkappa$, welches vollkommen richtig ist. Für den Fall, wo $c = \varkappa$ oder die beyden Oerter oder Sterne unter einerley Parallelkreise liegen, giebt diese Formel den Werth $x = \lambda \sin c = \lambda \sin \varkappa$, folglich statt des Bogens eines gröſsten Circuls den Bogen des Parallelkreises, jedoch in Graden eines gröſsten Circuls ausgedrücket, und demnach dessen wahre Länge, die aber immer etwas zu groſs ist, dafern die beyden Oerter nicht 90 Gr. vom Pole entfernt sind.

III.

Es können übrigens selbst aus den gemeinen trigonometrischen Tafeln die Sinus, Tangenten, Secanten und Cosinus der kleinen Bögen viel genauer berechnet werden, als sie in diesen Tafeln angegeben sind, wenn man die darinn angegebenen Cotangenten und Cosecanten derselben zu Hülfe nimmt. Es sey Z. E. der Sinus und Cosinus von 1 Minute zu suchen; so hat man

$$\sin 1' = \frac{1}{\operatorname{cosec.} 1'}$$

$$\cos 1' = 1 - \frac{1}{2 (\operatorname{cosec.} 1')^2} - \frac{1}{8 (\operatorname{cosec.} 1')^4} - \&c.$$

Setzt man nun den Halbmesser = 1, so ist die Cosecante von 1′ = 3437, 74682. Damit erhält man

$$\sin 1' = 0,000290\ 888204\ 5$$
$$\cos 1' = 0,999999\ 957692\ 0$$

bis auf 13 Decimalstellen, wobey aber die 13te Stelle ungewiss ist. Ferner ist

$$\sec 1' = \frac{1}{\cos 1'} = 1,000000\ 042308\ 0$$

$$\tan 1' = \frac{1}{\cot 1'} = 0,000290\ 888216\ 7$$

wobey ebenfalls die 13te Decimalstelle ungewiss ist. Will man übrigens auf diese Art die Sinus, Cosinus, Tangenten und Secanten für Bögen suchen, die 10, 100 bis 1000 mal grösser sind, so reicht man nicht bis auf so viele Decimalstellen. Z. E. $\sin 2^\circ = \frac{1}{\operatorname{cosec.} 2^\circ} = 0,0348994968$. Hiebey ist nun schon die 10te Decimalstelle unzuverlässig.

Einige Anmerkungen über die Kirchenrechnung von Herrn *Lambert*.

Es kommen bey Berechnung der Wochentage und der beweglichen Festtage einige Aufgaben vor, die eben dadurch, dass sie sich auf ganze Zahlen einschränken, von besonderer Art und gewissermassen diophantisch sind, und sich nicht füglich durch analytische Formeln ausdrücken lassen. Wenigstens muss man mehrentheils dabey erinnern, was eigentlich bey der Anwendung solcher Formeln wegzulassen oder beyzubehalten ist. Der gregorianische und der verbesserte Calender haben noch mehrere Verwickelungen, als der viel einfachere julianische. Es wird daher nicht undienlich seyn, den julianischen zuerst zu betrachten.

Es sey demnach für ein beliebiges Jahr der Sonntagsbuchstabe des Julianischen Calenders zu finden. Die Angaben hiezu sind folgende:

1. Die