achtung Beobachtung war. Diese zween Circul werden die Ebenen BSM, CSN vorstellen, und da wo sie den durch die beyden äussersten Oerter des Cometen gezogenen grösten Circul durchschneiden, werden die Oerter seyn, wo man den Comet zur Zeit der 2ten und 3ten Beobachtung würde gesehen haben, wenn derselbe in m, n und die Erde in b, c gestanden hätte. Dann aber würde die Bewegung sowohl des Cometen als der Erde geradelinicht, und wo nicht vollkommen doch bis auf einen unerheblichen Unterschied gleichförmig gewesen seyn.

Uebrigens muss auch hier der Bogen PQ oder AD nicht allzugross seyn. Dass er aber auch nicht gar zu klein seyn müsse, erhellet daraus, weil die Beobachtungen selbst nicht immer so genau sind, dass die geringen Unterschiede, worauf es hiebey ankommt, nicht merklich dadurch sollten verfälscht werden.

Anmerkungen über die Stralenbrechung.

Von Herrn *Lambert*.

Mayer hat in der Erklärung seiner nach England geschickten und daselbst nach erhaltenem Preise durch den Druck bekannt gemachten Mondtafeln, zur Bestimmung der astronomischen Stralenbrechung eine Formel gegeben welche sehr genau mit den Beobachtungen eintreffen soll. Auch soll sie nach der Theorie, wo nicht als ganz richtig, doch wenigstens als der Wahrheit sehr nahe kommend bewiesen werden können.

Den Beweis selbst hat *Mäyer* zurückbehalten. Wir haben also nur die Formel an und für sich, und so entsteht die Frage, ob oder wiefern sich aus derselben diejenige Theorie herleiten lasse, auf welche sie gegründet ist.

Die Formel selbst ist folgende:

1. Man drücke die Barometerhöhe in Pariser Zollen und deren Decimaltheilen aus, und setze sie $= b$.
2. Der Grad des Reaumurschen Thermometers über dem Frierpunct sey $= g$.
3. Der scheinbare Abstand eines Sterns vom Scheitelpunct werde durch γ ausgedrückt.

4.

4. Endlich sey für diesen Abstand die Stralenbrechung in Secunden eines Grades $= z$.

5. Dieses vorausgesetzt, ist

$$z = \frac{70'',71 \,.\, b \,.\, \sin\gamma}{(1 + 0{,}0046\,g)^{3:2}} \,.\, \left[- \frac{16{,}5 \,.\, \cos\gamma}{\sqrt{(1 + 0{,}0046 \,.\, g)}} + \sqrt{\left(1 + \frac{(16{,}5 \,.\, \cos\gamma)^2}{1 + 0{,}0046 \,.\, g}\right)} \right].$$

Dieses ist die Meyersche Formel.

Vorerst wollen wir die Coefficienten verständlicher und der einfachern Theorie gemässer machen, und zu diesem das Gewicht der Luft bey der Barometerhöhe von 28 Pariser Zollen (welches am Meere die mittlere Höhe ist), $= 1$, das Gewicht bey einer beliebigen Barometerhöhe b, $= p$ setzen. Dadurch wird der Coefficient $70'',71 \,.\, b$ in $28 \,.\, 70,71 \,.\, p = 1979'',88 \,.\, p$ verwandelt.

Ferner sey bey gleichem Drucke die Dichtigkeit der Luft für den Frierpunct $= 1$, für den Reaum. Grad $= c$, so wird

$$1 + 0{,}0046\,g = c$$

seyn. *Mayer* setzt nemlich, dass für jeden Reaumurschen Grad des Thermometers die Luft um 0,0046 Theil mehr ausgedehnt werde, und sagt, dass er es durch sehr genaue Versuche so gefunden. Man kann bey *Micheli du Crest* und *de Luc* nachsehen, wie misslich es um das Reaumursche Thermometer aussieht, und wie wenig die Grade der Ausdehnung der Luft, des Weingeistes und des Quecksilbers nach beständigem Verhältnisse fortgehen. Ich übergehe einige andere Anmerkungen, die sich hier machen lassen. Es ist inzwischen genug, dass bey einer gewissen Eintheilungsart des Reaumurschen Thermometers die Verhältniss 0,0046 wirklich statt findet, und dass wenn alles übrige bey der Mayerschen Formel richtig ist, dieser Coefficient und die Art ihn nach einem beliebigen Thermometer zu ändern, keine Schwürigkeit machen wird. Diese wird auch dadurch gehoben, dass ich mittelst des Buchstabs c, die Formel von dem Reaumurschen Thermometer frey mache, weil doch der Ausdruck $1 + 0{,}0046 \,.\, g$ eigentlich nur die durch die Wärme verursachte Ausdehnung der Luft anzeigt, und daher füglicher und unmittelbarer an dessen Stelle c gesetzt wird.

Die Mayersche Formel erhält demnach folgende Gestallt

$$z = \frac{1979'',88 \,.\, p \,.\, \sin\gamma}{c^{3:2}} \left[- \frac{16{,}5 \,.\, \cos\gamma}{\sqrt{c}} + \sqrt{\left(1 + \frac{(16{,}5 \,.\, \cos\gamma)^2}{c}\right)} \right].$$

Man

Man setze nun für die Stralenbrechung am Horizonte, $\gamma = 90^\circ$, und diese Stralenbrechung $= Z$; so ist schlechthin

$$Z = \frac{1979{,}88 \cdot p}{c^{3:2}}.$$

Das will also sagen:

> Die horizontale Stralenbrechung ist in gerader Verhältniss des Gewichts der Luft, oder der Barometerhöhe; und in gerader Verhältnis der Quadratwurzel von dem Cubus der Wärme.

Dieses Vorgeben mag hier dahin gestellt bleiben. Wir erhalten inzwischen

$$z = Z . \sin\gamma \left[- \frac{16{,}5 . \cos\gamma}{\sqrt{c}} + \sqrt{\left(1 + \frac{(16{,}5 . \cos\gamma)^2}{c}\right)} \right].$$

Diese Formel giebt nun an, wie für jeden Werth von γ die Stralenbrechung z von der in einerley Umständen statt findenden horizontalen Stralenbrechung Z abhängt. Der Werth von γ ist allein nicht hinreichend jene aus dieser zu bestimmen, sondern die Wärme c kömmt annoch mit in Betrachtung. Dieses ist an sich richtig. Nur fällt hier die Quadratwurzel $\sqrt{c}$ eben so auf wie vorhin die Quadratwurzel vom Cubus von c.

T.V Fg.3 Eine dieser Formel ganz ähnliche, die ich in den *Routes de la Lumiere par les airs* (§. 93) gegeben, gab mir den nächsten Anlass die Mayersche, so wie sie hier verwandelt und in eine geschmeidigere Form gebracht ist, folgender maßen zu construiren.

1. Die Linien KA, AG durchschneiden sich rechtwinklicht.
2. Man mache

$$AG = Z \text{ der horizontalen Strahlenbrechung.}$$

$$AK = \frac{16{,}5}{\sqrt{c}} . Z.$$

3. Aus dem Mittelpunct K mit dem halbmesser KG beschreibe man den Circulbogen GMB.
4. Ist nun überhaupt der Winkel

$$BAM = \gamma$$

und man zieht MP auf KAB senkrecht, so wird

$$PM = z$$

seyn.

Denn vermöge der Construction ist

$$KM^2 = KG^2 = AM^2 + AK^2 + 2\, AM . AK . \cos\gamma$$

folglich

folglich

$$AM = -AK \,.\, \cos\gamma + \sqrt{}(KG^2 - AK^2 + AK^2 \cos\gamma^2)$$
$$= -AK \,.\, \cos\gamma + \sqrt{}(AG^2 + AK^2 \,.\, \cos\gamma^2)$$

und demnach

$$PM = -AK \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos\gamma + \sin\gamma \,.\, \sqrt{}(AG^2 + AK^2 \,.\, \cos\gamma^2)$$

Setzt man in dieser Formel die angegebenen Werthe von AK, AG, so verwandelt sie sich in

$$PM = -\frac{16{,}5}{\sqrt{c}} \,.\, Z\sin\gamma \,.\, \cos\gamma + \sin\gamma\, \sqrt{}\left(Z^2 + \frac{16{,}5^2 \,.\, \cos\gamma^2}{c} \,.\, Z^2\right)$$

oder

$$PM = Z\sin\gamma \left[-\frac{16{,}5}{\sqrt{c}} \,.\, \cos\gamma + \sqrt{}\left(Z^2 + \frac{(16{,}5 \,.\, \cos\gamma)^2}{c} \,.\, Z^2\right)\right].$$

Da dieses nun gerade der Mayersche reducirte Ausdruck für z ist, so folgt

$$PM = z.$$

Und dieses war zu beweisen.

Daß man mittelst dieser Construction die astronomischen Stralenbrechungen sehr genau, wiewohl bey den niedrigen Höhen eben nicht so ganz biß auf einzelne Secunden, vorstellen könne, das habe ich in den *Routes de la Lumiere* §. 99, längst schon angemerkt. Ich begnügte mich aber zu sagen, daß die Stralenbrechungen in Verhältnis der Senkstriche PM sind. AG ist demnach die horizontale, PM eine beliebige andere Stralenbrechung. Legt man diese aus wirklichen Beobachtungen zum Grunde, so kann K gefunden werden, ohne auf den Zustand der Luft Rücksicht zu nehmen, oder deren Beschaffenheit zu untersuchen. Denn die Construction wird gerade für denjenigen Zustand seyn, in welchem die Luft war, als die zwo Stralenbrechungen AG, PM durch unmittelbare Beobachtung bestimmt worden. Und da versteht es sich, daß dieses nicht zu verschiedenen Zeiten, sondern zu einerley Zeit geschehen seyn muß, weil die Luft von einer Zeit zur andern sich ändert.

Ich hatte übrigens einige Jahre ehe ich die *Routes de la Lumiere* schrieb, eine Veranlassung auf diese Construction zu verfallen. Ich sahe nemlich aus den Refractionstafeln daß die Stralenbrechungen in stärkerer Verhältniß als nach dem Maaße des Winkels γ oder des Abstandes vom Scheitelpunct zunehmen, und daß sie eher den Tangenten dieses Winkels proportional sind. Um zu sehen wie weit dieses gehen würde nahm ich eine Construction vor, und fand, daſs die Tangentenlinie, wenn γ über 50 Gr. war, merklich muſste anfangen herunter gebogen zu werden, und folglich ſtatt einer geraden Linie eine krumme BMG zu nehmen ſey. Ob man ſtatt derſelben ihren Krümmungskreis gebrauchen könne; das gab mir Anlaſs zu den in den *Routes de la Lumiere* darüber angeſtellten Betrachtungen, und zur ſchärfern Vergleichung mit den Beobachtungen.

Ich laſſe nun dahin geſtellt, ob *Mayer* bey ſeiner Formel auf die erſt angegebene Conſtruction Rückſicht genommen. Es klärt aber dieſe Conſtruction das in ſeiner Formel liegende Hauptgeſetz, nemlich die Art wie, ohne Rückſicht auf die Beſchaffenheit der Luft, z mit γ zunimmt ſo auf, daſs es vergebens iſt mehr Klarheit zu ſuchen: ſo dunkel auch noch die von p, c abhängende Nebengeſetze bleiben mögen.

Wir können inzwiſchen auch dieſe in Abſicht auf die Conſtruction betrachten. Zu dieſem Ende haben wir

$$AG = Z = \frac{1979,88}{c^{3\cdot 2}} \cdot p.$$

Man ſetze $p = 1$, $c = 1$, ſo wird

$$Z = 1979'',88 = \zeta,$$

ſo daſs alſo ζ die horizontale Stralenbrechung iſt, wenn $b = 28$ Pariſer Zoll, und $g = 0$ iſt. Dieſes giebt

$$AG = \frac{\zeta p}{c^{3\cdot 2}}$$

Und eben ſo auch

$$AK = \frac{16,5}{\sqrt{c}} \cdot Z = \frac{16,5 \cdot \zeta p}{cc}.$$

Hier iſt nun ζ eine beſtändige Gröſse, p das Gewicht der Luft, c das Maaſs der Wärme. Alſo wenn p zunimmt, nimmt ſowohl AG als AK in gleicher Verhältniſs zu. Wenn aber c zunimmt, ſo nimmt AG, und noch mehr AK viel ſtärker ab. Das möchte ſeyn. Ob aber dieſe Verhältniſſe durch $c^{3\cdot 2}$ und c^2 ausgedrückt werden müſſen, das möchte wohl in der Mayerſchen Formel dem meiſten Zweifel unterworfen ſeyn.

Nimmt man die Strahlenbrechungen zunächſt bey dem Scheitelpunct, ſo daſs γ unendlich klein wird; ſo verwandelt ſich die Formel

$$BM = -AK \cdot f\gamma \cdot cof\gamma + f\gamma \sqrt{(AG^2 + AK^2 \, cof\gamma^2)}$$

in

in

$$PM = \gamma \cdot \frac{AG^2}{2AK}.$$

Man kann aber leicht beweisen, dass die Stralenbrechungen zunächst beym Scheitelpunct für einerley Winkel γ sich in Verhältniss von $\frac{p}{c}$ verändern. Also muss

$$\frac{AG}{AK} = \frac{p}{c} \cdot \alpha$$

gesetzt werden, wo α einen beständigen Werth hat.

Dieser Gleichung geschieht nun Genügen, wenn man überhaupt

$$AG = \alpha p^m : c^n$$
$$AK = \alpha p^{2m-1} : c^{2n-1}$$

annimmt.

Mayer setzt $n = 1$, $m = \frac{3}{2}$ und handelt also wenigstens dieser allgemeinen Bedingung nicht zuwieder. In so fern kann seine Formel die Stralenbrechung in grössern Höhen für jeden Zustand der Luft richtig angeben.

Wir haben also noch zu sehen, was bey geringern Höhen statt findet. Denn eben hier äussert sich in allen Absichten die gröste Schwürigkeit, wenn man ohne für die Abnahme der Dichtigkeit der Luft in verschiedenen Höhen über der Erdfläche ein bestimmtes Gesetz anzunehmen, mit ganz allgemeinen Betrachtungen fortkommen will.

Es sey D der Mittelpunct der Erde, AN ein Bogen von ihrem Umkreise, MA ein Lichtstral, welcher in A die Erdfläche berührt, und demnach daselbst horizontal ist. Fig. 4.

In der Höhe M sey die Dichtigkeit der Luft gegen der Dichtigkeit an der Erdfläche in bestimmter Verhältnis, so dass wenn das Licht unmittelbar aus der Dichtigkeit in N oder A kommen sollte, die Stralenbrechung $= (1+k) : 1$ ebenfalls beständig seyn würde.

Man ziehe die zwo Tangenten AG, MG, und durch deren Durchschnittspunct G die Linie CG, so habe ich in den *Routes de la Lumiere* (§. 14.) erwiesen, dass

$$\sin DGM : \sin AGC = (1+k) : 1$$

ist, die Krümmung des Bogens AM mag beschaffen seyn wie sie will.

Um nun zu sehen, was zunächst bey der Erdfläche vorgeht, werden wir die Höhe NM sehr geringe, und statt des Bogens AM dessen Krümmungskreis annehmen. Es sey demnach

$$CA = 1$$
$$SM = SA = R,$$

der Halbmesser dieses Krümmungskreises.

Man ziehe CT auf MG senkrecht, so ist

$$CT : CA = (1 + k) : 1$$
$$CT = 1 + k.$$

Und ACT = ASM wird der Stralenbrechung des Bogens AM gleich seyn.

Die Bedingung daſs die Dichtigkeit der Luft in M zur Dichtigkeit in N oder A ein beständiges Verhältniſs habe, hat nun den Erfolg

1°. Daſs $CT = 1 + k$ beständig ist.

2°. Daſs hingegen wenn die Wärme der Luft sich ändert, nothwendig auch die Höhe $NM = y$ sich ändert, so daſs

$$y \backsim c$$

seyn wird. Damit ändert sich auch der Winkel TCM.

Wir werden demnach

$$y = \eta . c$$

setzen; so daſs für $c = 1$, $y = \eta$ wird.

Es sey nun die Stralenbrechung $ACT = ASM = \phi$; so ist

$$SL = R . \sec\phi.$$
$$CL = R \sec\phi - R + 1$$
$$CT = R - R \cos\phi + \cos\phi = 1 + k$$

folglich

$$k = (R - 1) . (1 - \cos\phi).$$

Ferner giebt der Triangel CSM die Gleichung

$$(1 + \eta c)^2 = (R - 1)^2 + R^2 - 2 R (R - 1) \cos\phi$$

woraus

$$1 + 2\eta c + \eta^2 c^2 = 2 R (R - 1) . (1 - \cos\phi) + 1$$

folglich

$$2\eta c + \eta^2 c^2 = 2R (R - 1) (1 - \cos\phi)$$

oder vermöge der für k gefundenen Gleichung

$$2\eta c + \eta^2 c^2 = 2Rk$$

rd.

wird. Hier ist nun η und k beständig. Folglich giebt diese Gleicung ein bestimmtes Verhältniss zwischen R und c; so dass

$$R = \frac{2\eta c + \eta^2 c^2}{2k}$$

ist. Wird dieser Ausdruck in der Gleichung

$$k = (R - 1)(1 - \cos \phi)$$

gesetzt, so erhält man

$$2kk = (2\eta c + \eta^2 c^2 - 2k)(1 - \cos \phi)$$

demnach

$$\sin \tfrac{1}{2}\phi = \frac{k}{\sqrt{(2\eta c + \eta^2 c^2 - 2k)}}.$$

Hier haben wir demnach ebenfalls ein bestimmtes Verhältnis zwischen der Wärme c und der dem Bogen AM oder der Höhe ηc zukommenden Stralenbrechung ϕ. Da diese sehr geringe ist, so können wir füglich

$$\phi = \frac{2k}{\sqrt{(2\eta c + \eta^2 c^2 - 2k)}}$$

setzen.

Es ist nun NM nur ein Theil der ganzen Höhe der Luft. Da aber wenn die Wärme zunimmt, diese wie jener mehr anwächst; so wird auch die ganze horizontale Stralenbrechung eben so wie der Theil ϕ, in umgekehrter Verhältniss von $\sqrt{(2\eta c + \eta\eta cc - 2k)}$ können gesetzt werden. Und wenn wir, da η, k selbst für die ganze Höhe der Luft, so weit nemlich die Stralenbrechung merklich bleibt, sehr klein ist, dafür nur $\sqrt{2\eta c}$ setzen, so wird füglicher

$$Z \backsim \frac{1}{\sqrt{c}}$$

gesetzt werden können, als aber $Z \backsim \frac{1}{c^{3:2}}$, wie es die Mayersche Formel angiebt.

Ich habe mit Vorbedacht den horizontalen Lichtstral AM und zwar den niedrigsten Theil desselben gewählt, weil dieser zu der beträchtlichen Grösse und zur Veränderlichkeit der horizontalen Stralenbrechung das meiste beyträgt, weil die Winkel AGC, DGM von 90° so gar wenig verschieden sind, dass so klein auch das Verhältnis $(1 + k) : 1$ ist, es dennoch zwischen diesen Winkeln einen Unterschied von mehrern Minuten herfürbringen kann.

Wenn bey unveränderter Wärme das Gewicht der Luft sich ändert, so wird die Dichtigkeit der Luft sowohl in N als in M grösser, das Verhältniss aber bleibt und die Höhe NM bleibt daher ebenfalls unverändert. Es leiden daher auch die Gleichungen

$$R = \frac{2\eta c + \eta^2 c^2}{2k}$$

$$\varphi = \frac{2k}{\sqrt{(2\eta c + \eta^2 c^2 - 2k)}}$$

keine Veränderungen. Da aber die Schwere der Luft durch deren Aufhäufung vermehrt wird, so wird die ganze Höhe der Luft grösser, und damit ist die beständig bleibende Höhe NM ein geringerer Theil derselben, und eben aus diesem Grunde ist auch die von dem Bogen AM herrührende Stralenbrechung φ ein geringerer Theil von der ganzen Z. Es folgt aber hieraus noch nicht, dass Z ∞ p gesetzt werden könne, wie es *Mayer* gethan hat.

Weiter werde ich diese Betrachtungen über die Mayersche Formel nicht verfolgen, sondern noch einige andere beyfügen.

Fig. 5. Es sey C der Mittelpunct der Erdfläche AnN so wie auch einer beliebigen Luftschichte DmM. Der Lichtstral MA treffe in einer horizontalen Richtung in A, und ein anderer Lichtstral mA unter einem beliebigen Winkel MAD $= \gamma$. Man ziehe die Tangenten AG, GM und Ag, gm. so haben die Puncte G, g die oben aus den *Routes de la Lumiere* (§. 14.) angeführte Eigenschaft, dass wenn aus C durch G, g gerade Linen gezogen werden, allemale

$$(1 + k) : 1 = \sin EGM : \sin AGC = \sin egm : \sin AgC$$

ist, die Krümmung der Bogen AM, Am mag beschaffen seyn wie sie will, genug dass die Dichtigkeit der Luft aller Orten in gleicher Höhe um gleich viel abnimmt, und $(1 + k) : 1$ das Verhältniss der Sinus ist; wenn das Licht aus der Dichtigkeit in mM in die Dichtigkeit in AnM einfällt.

Nun liegen die Puncte G, g alle in einer krummen Linie GgB, für welche man, da ihre Krümmung von B bis G kaum einige Grade beträgt, ohne allen merklichen Fehler ihren Krümmungskreis setzen kann. Der Mittelpunct desselben liegt nothwendig auf der Linie CA irgend in K, weil CB nothwendig in die Axe der Linie BG, und diese sich auf beyden Seiten von CB ähnlich ist. Es folgt hieraus dass zween Puncte g, G genug sind diesen Bogen BG, und dessen Mittelpunct zu bestimmen. Die Formeln so ich in den *Routes de la Lumiere* dafür gefunden, sind folgende.

1. Die horizontale Stralenbrechung sey $= Z$.
2. Die von dem Bogen Am sey $= z$.
3. Der Halbmesser AC $= 1$,

so

so ist überhaupt

$$Ag = (k \operatorname{cosec} z + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} z) \,.\, \sin\gamma - \cos\gamma.$$

und demnach für $\gamma = 90°$,

$$AG = (k \operatorname{cosec} Z + \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} Z).$$

Hieraus folgt sodann

$$AK = \frac{(AG + Ag) \,.\, (AG - Ag)}{2\, Ag \,.\, \cos\gamma}.$$

Demnach ist AK durch γ, z, Z bestimmt.

Nun setze ich der Winkel γ sey von 90° nur um einen unendlich kleinen Theil $d\gamma$, und daher auch z von Z nur um dz verschieden. Ist nun R der dem Punct A des Bogens AM zukommende Halbmesser der Krümmung = AS, so wird man

$$dz = \frac{d\gamma}{R - 1}$$

haben (*). Es ist daher ferner

$$\gamma = 90° - dy$$
$$z = Z - d\gamma : (R - 1).$$

Und so wird

$$Ag = \frac{k}{\sin (Z - d\gamma) : (R - 1)} + \operatorname{tang} \frac{Z - d\gamma : (R - 1)}{2} - d\gamma,$$

oder nach den behörigen Reductionen

$$Ag = \frac{k}{\sin Z} + t \tfrac{1}{2} Z + \frac{k \cos Z \,.\, d\gamma}{\sin Z^2 \,.\, (R - 1)} - \frac{d\gamma}{2 (\cos \tfrac{1}{2} Z)^2 \,.\, (R - 1)} - d\gamma.$$

Wird dieser Ausdruck nebst dem von AG, in der für AK gefundenen Gleichung gesetzt; so erhält man nach den behörigen Reductionen

$$AK = 1 - \frac{k \,.\, \cos Z}{\sin Z^2 \,.\, (R - 1)} + \frac{1}{2 (\cos \tfrac{1}{2} Z)^2 \,.\, (R - 1)}$$

Ist nun AK gefunden, so erhält man hinwiederum für jeden Winkel $gAB = \gamma$.

$$Ag = -AK \cos\gamma + \sqrt{(AG^2 + AK^2 \cos\gamma^2)}$$

(*) *Routes de la Lumiere* §. 106. wo aber anstatt $AK = d\gamma$, eigentlich $AK = d\gamma + \frac{Ag}{AE}$ gesetzt, und das übrige darnach geändert werden muss, welches in der Deutschen Uebersetzung wirklich geschehen.

Da nun auch für eben den Winkel γ

$$z = \frac{\cos\gamma + Ag - \sqrt{[(\cos\gamma + Ag)^2 - 2k\sin\gamma^2]}}{\sin\gamma}$$

oder

$$z\sin\gamma = 1 - \sqrt{\left[1 - \frac{2k \cdot \sin\gamma^2}{(\cos\gamma + Ag)^2}\right]}$$

ist, so wird hiedurch die Stralenbrechung für jeden Winkel γ bestimmt.

Diese Bestimmung hängt also von drey Stücken ab, welche gegeben seyn müssen.

1. Von k. Der Werth des Buchstabens ist ungefehr $\frac{1}{3000}$, und verändert sich in gerader Verhältniss von p, und in umgekehrter Verhältnis von c.
2. Von R. Der Werth dieses Buchstabens ist ungefehr $= 7$, und verändert sich nach der oben gefundenen Formel

$$R = \frac{2\eta c + \eta^2 c^2}{2k}$$

oder weil hier η unendlich klein ist, und zu k ein beständiges Verhältniss hat, so wird R mit c in gleicher Verhältniss grösser oder kleiner.
3. Nach Z als der horizontalen Stralenbrechung. Diese hängt auf eine sehr verwickelte Art von p, c ab.

Wir können diese Verwicklung auf folgende Art vorstellig machen.

Erstlich werden wir genau genug

$$AG = \frac{k}{Z} + \tfrac{1}{2}Z$$

$$AK = \frac{2R - 1}{2(R-1)} - \frac{k}{ZZ(R-1)}$$

annehmen, um die Rechnung einfacher zu machen.

Sodann nehmen wir für γ einen bestimmten sehr kleinen Werth, und dadurch wird für diesen Winkel die entsprechende Stralenbrechung sehr nahe

$$z = \frac{k \cdot \sin\gamma}{(1 + Ag)^2}$$

Und ebenfalls sehr nahe

$$Ag = \frac{AG^2}{2AK}$$

folglich

folglich

$$z = \frac{4k.AK^2.\sin\gamma}{(2AK + AG^2)^2}$$

oder wenn die Werthe von AG, AK gesetzt werden,

$$z\left[\frac{2R-1}{R-1} - \frac{2k}{ZZ(R-1)} + \left(\frac{k}{Z} + \tfrac{1}{2}Z\right)^2\right]$$

$$= 4k\sin\gamma.\left[\frac{2R-1}{2(R-1)} - \frac{k}{ZZ(R-1)}\right]^2.$$

Es sey nun für den Fall, wo $c = 1$, $p = 1$ ist,

$k = k'$ $\quad z = z'$

$R = R'$

γ aber behalte seinen Werth; so sind k', R', z' beständige Grössen, die sich auf einen bestimmten Zustand der Luft beziehen; und man erhält

$$k = \frac{p}{c}k'.$$

$$R = cR'.$$

$$z = \frac{p}{c}.z'.$$

demnach

$$\frac{p}{c}z'\left[\frac{2cR'-1}{cR'-1} - \frac{2pk'}{cZZ(cR'-1)} + \left(\frac{pk'}{cZ} + \tfrac{1}{2}Z\right)^2\right]$$

$$= \frac{pk'}{c}.\sin\gamma\left[\frac{2cR'-1}{(cR'-1)} - \frac{2pk'}{cZZ(cR'-1)}\right]^2.$$

Da demnach in dieser Gleichung z', R', k', γ bestimmte Werthe haben, so bleibt nur c, p, Z veränderlich. Diese Gleichung giebt demnach an, wie sich die horizontale Stralenbrechung c, p verändert.

Um nun zu sehen, ob etwa ein Glied von dieser Gleichung wegbleiben kann, wird es genug seyn die Werthe der sämtlich darinn vorkommenden Buchstaben beyläufig anzunehmen, und demnach

$p = c = 1$

$R' = 7$

$Z = \frac{1}{100}$

$k' = \frac{1}{3000}$

$z = k'\sin\gamma$

zu setzen. Dadurch findet es sich ohne Mühe, daſs

$$\frac{2cR'-1}{cR'-1}=\frac{13}{8}$$

$$\frac{2pk'}{cZZ\,(cR'-1)}=\frac{10}{9}$$

$$\left(\frac{pk'}{cZ}+\tfrac{1}{2}Z\right)'=\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{200}\right)^2$$

demnach dieses Glied mehrere 100 mal kleiner als die andern ist. Es mag demnach wegbleiben, und dann erhält man auf eine viel einfachere Art

$$Z=\sqrt{\left[\frac{2pk'}{2cR'-1-(cR'-1)\,z':k'\sin\gamma}\right]}$$

Da nun z' von k' sin γ sehr wenig abgeht, so wird man ziemlich genaue

$$Z=\sqrt{\frac{kp'}{cR'}}$$

und folglich

$$Z \backsim \sqrt{\frac{p}{c}}$$

erhalten. Daſs $Z \backsim \frac{1}{\sqrt{c}}$ sey habe ich oben auf eine von dieser sehr verschiedene Art gefunden. Hier aber zeigt es sich zugleich, daſs man auch $Z \backsim \sqrt{p}$ setzen könne. Ist demnach für $c=1$, $p=z$,

$$Z=Z'$$

so wird überhaupt

$$Z=Z':\sqrt{\frac{p}{c}}$$

Und da

$$R=R':c$$

$$k=k'.\frac{p}{c}$$

so hat man nur durch genaue Beobachtungen Z', R', k' zu bestimmen, und man wird für einen jeden andern Zustand der Luft, auch Z, R, k und damit auch die jedem Winkel γ zukommende Stralenbrechung bestimmen können.

Ich

Ich habe nun für einen Zustand der Luft, der von $p = 1$, $c = 1$ nicht sehr verschieden seyn kann, $R = 7$, $k = 0{,}0003$, $Z = 33'$ angenommen, um wenigstens ein Beyspiel zu berechnen. Dadurch wird

$$Ag = -0{,}54073096 . \cos\gamma + V(0{,}00129977 + 0{,}29238998 . \cos\gamma^2)$$

oder

$$Ag = -0{,}54073096 . \cos\gamma + V(0{,}1474948 + 0{,}1461950 . \cos 2\gamma)$$

und

$$z = \frac{Ag + \cos\gamma - V[(Ag + \cos\gamma)^2 - 0{,}0006 . \sin\gamma^2]}{\sin\gamma}$$

γ	Ag	z
90	0, 0360522	33° 0′
89	0, 0278310	24 47
88	0, 0218073	19 6
87	0, 0175326	15 3
86	0, 0144591	12 27
85	0, 0113607	10 35
84	0, 0105192	9 1
83	0, 0092182	7 52
82	0, 0081899	6 59
81	0, 0073537	6 14
75	0, 0045686	3 47
45	0, 0016960	1 2
&c	&c.	&c.

Ueberdiess fand sich

$$AK = 0{,}54073096$$
$$KG = 0{,}54193150$$
$$AB = 0{,}00120050$$
$$BKG = 3^\circ\, 52'$$

daraus erhellet, dass die Krümmung des Bogens nicht 4 Grade austrägt, und daher statt desselben dessen Krümmungskreis sicher gesetzt werden konnte. Ich habe übrigens bereits schon in den Routes de la lumiere (§. 92.) angemerkt, dass von dem Bogen BG eigentlich nur der Theil, so zu nächst bey G ist, seiner Lage nach genauer bestimmt werden müsse. Dieses ist auch der Grund, warum ich g unendlich nahe bey G angenommen, und daher statt des eigentlichen Krümmungskreises denjenigen Circulbogen genommen habe, dessen Halbmesser KG die dem Punct G zukommende Normallinie ist. Die Rechnung wird dadurch noch genauer.

Sollte die in diesem Beyspiele angenommene Werthe $R = 7$, $k = 0{,}0003$, $Z = 33'$ mit $p = 1$, $c = 1$ in der That genaue zusammentreffen, so kann man Kürze halber $p = 1 + v$ und $c = 1 + w$ setzen. Und dann wird man nach den behörigen Reductionen überhaupt

$$AG = 0{,}0360522 \, . \, \sqrt{\frac{1+v}{1+w}}$$

$$AK = \frac{0{,}5407310 - \frac{7}{6} w}{1 - \frac{7}{6} w} + \frac{0{,}0000237\,(1+v)}{1 - \frac{1}{6} w - \frac{7}{6} w^2}$$

haben. Man sieht demnach wie sich AG und AK nach v, w oder p, c richten. Sodann hat man wie vorhin

$$Ag = -AK \, . \, \cos\gamma + \sqrt{(AG^2 + AK^2 \cos\gamma^2)}$$

und

$$z = \frac{\cos\gamma + Ag - \sqrt{[(\cos\gamma + Ag)^2 - 0{,}0006 \, . \, \sin\gamma^2]}}{\sin\gamma}$$

Diese Formeln sind nun von allen physischen Hypothesen über die Abnahme der Dichtigkeit der Luft in grössern Höhen frey. Sie gründen sich schlechterdings nur darauf dass die astronomischen Stralenbrechungen sehr klein sind und selbst am Horizonte sich wenig über $\frac{1}{2}$ Gr. belaufen, und dass statt der krummen Linie BgG ein Circulbogen gesetzt werden könne, welcher seinen Mittelpunct da hat wo die Normallinie GK auf CA eintrift.

Auszug aus einem französischen Schreiben

des Herrn Ritter *Wargentin*, an Herrn *Bernoulli*.
Dat. Stockholm, d. 11 März 1777.

— — Hiebey überschicke ich Ihnen die verglichenen Beobachtungen der Jupiters-Trabanten für die Jahre 1774 und 1775, die sie von mir begehrt haben; ich rathe Ihnen aber nur erst die von 1774 in die Ephemeriden einzurücken, weil ich für 1775 noch mehrere erwarte, und demnach diese Reihe vollständiger liefern zu können, hoffe. Die Beobachtungen ' ersten Trabanten sind mit dem in des Herrn *de la Lande Astronomie* hera gegebenen Tafeln verglichen worden, aber die vom zweyten und dritten, 1 Tafeln die noch im Manuscripte liegen, und von den gedruckten etwas ve schieden sind. Dann die Beobachtungen geben noch immerfort zu klein Verbesseruugen Anlass, insonderheit was die Neigung der Bahnen und c

Bew