Leipziger Magazin für reine und angewandte Mathematik.

Zweytes Stück, 1786.

I.

Theorie der Parallellinien, von Joh. Heinr. Lambert *).

1) Vorläufige Betrachtungen.

§. 1.

Gegenwärtige Abhandlung betrift eine Schwierigkeit, die in den ersten Anfängen der Geometrie vorkömmt, und schon seit Euklid's Zeiten denjenigen anstössig gewesen, welche die Lehren dieser Wissenschaft nicht bloß andern nachglauben, sondern aus Gründen davon überzeugt seyn, und diejenige Schärfe, die sie in den meisten Beweisen fanden, nirgends missen wollten. Diese Schwierigkeit fällt Jedem, der Euklid's Elemente liefet, gleich anfangs in die Augen, weil sie sich nicht erst unter den Lehrsätzen, sondern selbst unter den Grundsätzen findet, die Euklid dem ersten Buche vorsetzt. Von diesen Grundsätzen nimmt der 11te als etwas für sich Klares und keines Beweises bedürftiges an,

*) Aufgesetzt im Septemb. 1766.

an, daß, wenn zwo Linien CD, BD (Fig. I.) von einer dritten BC durchschnitten werden, und die beyden innern Winkel DCB, DBC zusammen genommen, kleiner als zween rechte Winkel sind, die beyden Linien CD, BD gegen D, oder auf der Seite, wo diese Winkel sind, zusammen laufen.

§. 2. Dieser Grundsatz ist unstreitig lange nicht so klar und einleuchtend als die übrigen; und der Eindruck, den er natürlicher Weise macht, ist, daß man nicht nur einen Beweis davon verlangt, sondern gewissermassen empfindet, daß er keines Beweises fähig sey, oder daß es einen Beweis davon geben müsse. Dieses ist, soviel ich mir die Sache vorstelle, der erste Eindruck. Lieset man aber im Euklid weiter fort: so muß man nicht nur die Sorgfalt und Schärfe seiner Beweise, und eine gewisse edle Einfalt in seinem Vortrage bewundern; sondern man wird über seinen 11ten Grundsatz noch um desto mehr stutzig, wenn man sieht, daß Euklid Sätze beweist, die man viel leichter würde ohne Beweis zugegeben haben. Man giebt zwar vor, Euklid habe dieses gethan, um seine Lehren auch gegen die spitzfindigsten Einwürfe der damaligen Sophisten in Sicherheit zu setzen. Allein wenn dieses ist: so gestehe ich, daß ich mir von diesen Sophisten keinen Begriff machen kann, wenn Euklid voraussetzen konnte, daß sie ihm seinen 11ten Grundsatz würden unangefochten gelten lassen, weil mit demselben der größte Theil der geometrischen Lehrsätze wegfällt. Man sollte vielmehr gedenken, daß Euklid und die Sophisten, wenn je diese zu Euklids Zeiten nichts eingewandt haben, andre Maximen zur Beurtheilung der Grundsätze und des Vortrags der geometrischen Beweise müssen gehabt haben, als verschiedene von denen, die in den folgenden Zeiten über diese Sache gedacht, oder Schwierigkeiten wider die etwan

von

von andern versuchten Beweise gemacht haben. Von diesen Schwierigkeiten oder Einwendungen sind mir solche vorgekommen, wobey ordentlich vorausgesetzt werden muß, daß man, um den Euklidischen Grundsatz zu beweisen, oder überhaupt die Geometrie festzusetzen, weder sehen noch sich von der Sache selbst eine **Vorstellung** machen dürfe. Es ist unstreitig, daß man bey einer solchen Foderung den 12ten Euklidischen Grundsatz, **daß zwo gerade Linien keinen Raum schliessen**, ebenfalls wird anfechten können.

§. 3. Es ist aber auch eben so unstreitig, daß die Sophisten zu **Euklid's** Zeiten minder strenge gewesen seyn, und die **Vorstellung der Sache** müßten zugegeben haben. Mit dieser Voraussetzung aber läßt sich **Euklid's** Vortrag, wenigstens in Ermangelung eines andern und mindern Schwierigkeiten unterworfenen, ganz ordentlich rechtfertigen. Man kann nämlich den 11ten Grundsatz aufgeschoben seyn lassen, bis man zu der Prop. XXIX des ersten Buchs kömmt. Inzwischen lernt man ganz gewiß die Sache selbst, wovon in dem Grundsatze die Rede ist, **kennen**, und das, was an dem Grundsatze und dessen Vorstellung zu mangeln scheint, auch wenn man es nicht mit Worten ausdrücken kann, noch hinzudenken. In den beyden nächst vorhergehenden Prop. XXVII und XXVIII lernt man, daß, wenn die Winkel FCB + CBD = 180 Gr. oder die Winkel FCB = CBA sind, die Linien AB, CF weder gegen F noch gegen G zusammen laufen. Man lernt dadurch, daß die 34ste Definition nicht ein Unding oder leeres Hirngespinnst angiebt; sondern daß nichtzusammenlaufende gerade Linien im Reiche der Wahrheit wirklich vorkommen. Denn bis dahin blieb diese Definition ausgestellt; und bis dahin konnte man auch den Grundsatz ausgestellt seyn lassen, weil derselbe doch mit den Parallellinien in enger Verbindung stehet, und so zu reden zwischen Parallellinien und zusammenlaufenden Linien die Gränze bezeichnet. Was man sich nun, um sich von der Richtigkeit und **Gedenkbarkeit** des Grundsatzes zu versichern, noch ferner **vorstellt**, kömmt meines Erachtens darauf an: Man stellt sich CF, AB nach der Prop. XXVII oder XXVIII als nichtzusammenlaufend vor, und gedenkt sich eine jede durch den Winkel BCF gezogene **gerade** Linie CD: und so weiß man, daß, so klein auch der Winkel DCF seyn mag, nothwendig DBC + BCD < 180 Gr. ist, und demnach der Bedingung des Grundsatzes Genüge geschieht. Soll man sich nun die Folge, daß CD, BD zusammen laufen, ebenfalls vorstellen: so wird allerdings erfordert, daß man sich die Linien CF, CD, AD als **gerade** Linien **vorstelle**. Durch diese Vorstellung erhält man, daß CD verlängert, sich nicht nur von CF immer weiter entfernt, sondern auch sich gegen AD dergestalt nähert, daß sie dieselbe nothwendig in irgend einer Entfernung BD durchschneiden muß. Wer hiebey den Einwurf macht, CD könnte sich vielleicht gegen AD auf eine asymptotische Art nähern, wie z. E. die Hyperbel und andre asymptotische krumme Linien, der ändert meines Erachtens das, was man in der Vernunftlehre *statum quaestionis* heißt, oder er weicht davon ab, daß bey **Eukliden** nicht von **Beweisen**, sondern von der **Vorstellung** und der **Gedenkbarkeit der Sache** die Rede ist; weil man es **Eukliden** ganz sicher zutrauen kann, daß er sonst seinen Satz nicht würde unter die **Grundsätze** gezählet oder gesetzt haben. Kömmt es aber auf die **Vorstellung der Sache** an: so sehe ich nicht, wie sich bey der Vorstellung **gerader** Linien Einwürfe von Hyperbeln hernehmen lassen, weil man auf eine ganz gleiche Art würde anstehen können, ob zwo gerade Linien nicht dergestalt könnten aneinander gelegt werden, daß sie einen Raum einschließen; weil es doch mit zween gleich

gros-

grossen Cirkelbogen, wenn man ihre Hölung gegen einander kehrt, angeht. Ich führe dieses nur an, um zu zeigen, daß sich mit Voraussetzung von der wirklichen Vorstellung der Sache, und wenn man nicht schlechthin nur Worte fordert, Euklid's Verfahren rechtfertigen lasse; um so mehr, da sein Vortrag, so viel mir bekannt ist, noch bis dermalen weniger Schwierigkeiten hat, als sich bey allen seit Euklid's Zeiten angestellten Versuchen, die Sache anders vorzutragen, gefunden haben. Man kann hierüber eine kurze und sehr bündig geschriebene akademische Dissertation von Hrn. Klügel nachlesen, worin die in solchen Versuchen zurücke gebliebenen Mängel und öfters mit untergelaufene logische Cirkel, Lücken, Sprünge, Paralogismen, unrichtig gebrauchte und gratis angenommene Definitionen und Grundsätze mit vielem Scharfsinn und vieler Mäßigung angezeigt werden.

§. 4. Ungeachtet, wie es auch in dieser Dissertation erzählt wird, in gegenwärtigem Jahrhundert verschiedene solcher gewagten Versuche im Drucke herausgekommen: so ist doch gar kein Zweifel, daß es, besonders in Deutschland, nicht viel mehrere sollte gegeben haben, wenn Wolf, welcher in einem Zeitraum von 40 und mehr Jahren, in Absicht auf die herausgekommenen geometrischen Schriften, Dux gregis war, und es allerdings aus vielen guten Gründen zu seyn verdiente; wenn Wolf, sage ich, vorbemeldte Schwierigkeit, theils besser empfunden, vornehmlich aber in seinen Anfangsgründen mehr rüge gemacht hätte. Letzteres hätte aus leicht begreiflichen Gründen eine Menge Schriften darüber zum Vorschein gebracht. Ersteres würde, so viel ich mir die Sache vorstelle, selbst auf Wolfens Weltweisheit einen sehr merklichen Einfluß gehabt haben. Es liegt nicht an dem, daß Wolf nicht ganz ordentlich wußte, daß **willkürlich zusammengesetzte Begriffe müssen erwiesen werden.** Er schärft es in seinen beyden

Vernunftlehren, und selbst auch in seinen Vorberichten von der mathematischen Methode, ein, und erläutert es durch Beyspiele aus der Geometrie. Ich folgere aber daraus, **Wolf** müsse seine Definition von den Parallellinien nicht als einen **willkürlich zusammengesetzten Begriff** angesehen haben, weil ich ihm zutraue, er würde sonst auf einen Beweis ihrer Möglichkeit gedacht, oder wenigstens erinnert haben, daß noch etwas zurück bleibe; oder er hätte **Euklid's** Verfahren beybehalten, und so wäre die Schwierigkeit wie bey **Eukliden** in die Augen gefallen. Untersuche ich aber, warum **Wolf**, ohne an etwas Willkürliches zu denken, sich begnügt habe, die Parallellinien *aequidistantes* zu nennen: so muß ich voraussetzen, er habe diesen Begriff nach seiner andern Methode Begriffe zu finden, das will sagen, durchs **Abstrahiren aus einzelnen Beyspielen** gefunden. Von solchen Begriffen und Definitionen sagt er, daß sie keines fernern Beweises bedürfen. Ich gebe es zu. Aber im **Vortrage** muß man sodann allerdings auch gegen die Leser die Billigkeit haben, daß man ihnen vorzeige, wie man den Begriff abstrahirt habe. Sonst können sich die Leser das Recht anmassen, zu vermuthen, es möchte ein *Vitium subreptionis* vorgegangen oder mit untergelaufen seyn. Denn Begriffe, die man aus Beyspielen abstrahirt, sind in soferne allemal auch à posteriori; und man kann sie nur alsdann à priori ansehen, wenn sie, nachdem man sie gefunden, für sich gedenkbar, das will sagen, einfach sind. Widrigenfalls muß man die Beyspiele den Lesern vorweisen, und von allen Behutsamkeiten bey dem Abstrahiren Rechnung geben, wenn man allen Verdacht eines *Vitii subreptionis* von sich ablehnen will. **Bülfinger** empfand die Nothwendigkeit dieses Verfahrens sehr wohl, und war eben dadurch besser als **Wolf** selbst im Stande, die wider die Wolfische Weltweisheit erregten Schwierigkeiten merklich zu ver-

vermindern. Es wäre aber zu wünschen gewesen, daß **Wolf** selbst in den Hauptstücken seiner beyden Vernunftlehren, wo er theils vom Definiren, theils vom schriftlichen Vortrage dogmatischer Sätze handelt, die Nothwendigkeit und die Art ausführlich und mit allem Nachdrucke gezeigt hätte, wie man den Verdacht des Vitii subreptionis bey Definitionen, die durchs Abstrahiren gefunden worden, im Vortrage derselben von sich ablehnen müsse.

§. 5. Dieses wäre nun bey der Definition der Parallellinien schlechthin nicht angegangen. Denn so viel man sich auch solche vorzeichnen will: so bleiben doch zwo merkliche Unvollständigkeiten zurück. Einmal fehlt bey dem Vorzeichnen die geometrische Schärfe. Sodann ist es schlechthin unmöglich, sie beyderseits ins Unendliche fortzuziehen. Und so reicht man à posteriori und mit dem Abstrahiren nicht aus; und die Definition, oder besser zu sagen, die Möglichkeit der Sache muß aus andern und einfachern Gründen erwiesen werden, die für sich gedenkbar sind. **Wolf** hat unstreitig diese Betrachtungen nicht gemacht. Man findet auch bey ihm solche Spuren, woraus sich nicht undeutlich schließen läßt, daß er den Definitionen zu viel eingeräumt, und aus dem Grunde, daß er sie der Sache gemäß einrichten wollte, die Schwierigkeiten, die in der Sache sind, in die Definitionen gebracht habe. Daß sie darin mehrentheils versteckter waren, als sonst in der Sache selbst, könnte man, in Absicht auf die Parallellinien, wenigstens daraus schließen, daß in solchen Zeiten, wo eine allgemeine Demonstrirsucht die herrschendste Mode war, mehr Wesens wäre daraus gemacht worden, wenn **Wolf** in seinen Anfangsgründen der Meßkunst den Euklidischen Vortrag beybehalten hätte.

§. 6. Ich sagte erst, Wolf habe den Definitionen zu viel eingeräumt. Dieses ist nun vielmehr in der That selbst, als mit ausdrücklichen Worten geschehen; und es wurde bey vielen unvermerkt Mode, daß sie von einer Sache gar keinen Begriff zu haben glaubten, dafern nicht der Name derselben definirt wurde. Selbst allen Grundsätzen mußten Definitionen vorgehen, ohne welche sie nicht sollten können verstanden werden. Dabey war es nun kein Wunder, wenn der Satz, daß eine jede Definition, ehe sie bewiesen ist, eine leere Hypothese sey; wenn dieser Satz, den Euklid so genau wußte und so durchgängig beobachtete, darüber, wo nicht verloren gieng, doch sehr vergessen wurde. Ich merke dieses hier um so mehr an, weil es in Absicht auf den Vortrag, der philosophischen Wissenschaften sehr nachtheilige Folgen hatte; ingleichem, weil es eben das ist, worin Wolf, als er seine Methode aus Eukliden abstrahirte, noch zurück geblieben; und endlich, weil eben die Parallellinien das augenscheinlichste Beyspiel geben, daß eine vorausgeschickte Definition, bis sie nicht selbst erwiesen ist, nichts beweise.

§. 7. Es ist falsch, daß Euklid irgend eine seiner Definitionen, ehe er die Möglichkeit der Sache erwiesen, anders als eine blosse Hypothese gebrauche, oder sie als ein categorisches *Principium demonstrandi* ansehe. Der Ausdruck *per definitionem* gilt bey ihm nicht mehr als der Ausdruck *per hypothesin*. Sieht man auch genauer nach: so nimmt er das Categorische in seinen Lehrsätzen nicht von den Definitionen, sondern eigentlich und vornehmlich von den *Postulatis*. Von diesen gilt es eigentlich, wenn Cicero sagt: Si dederis, danda sunt omnia. Unter den Grundsätzen finde ich vornehmlich nur den 11ten, der eine positive und die Figuren unmittelbar betreffende Categorie enthält.

hält. Aber eben derselbe ist auch der Einzige, den man nicht will gelten lassen. Das Categorische darin sollte aus den Postulatis durch Schlüsse herausgebracht werden. Die übrigen betreffen größtentheils nur den Begriff der **Gleichheit** und **Ungleichheit**, und gehören eben darum, weil sie **Verhältnißbegriffe** betreffen, nicht zu der **Materie**, sondern eigentlich zu der **Form der Schlüsse**, die **Euklid** in seinen Beweisen macht, und in welchen sie immer nur als Obersätze vorkommen. Der 12te Grundsatz, **daß zwo gerade Linien keinen Raum schließen**, ist verneinend, und wird von **Eukliden** eben so wie der 9te, **daß das Ganze grösser ist als sein Theil**, da gebraucht, wo der Beweis **apagogisch** ist, oder die Wahrheit des Satzes aus der Unmöglichkeit des Gegentheils erwiesen wird.

§. 8. Dieses ist nun in einem kurzen Entwurfe der Geist der Euklidischen Methode, und zugleich dasjenige, wovon ich in **Wolfs** Vernunftlehren wenig oder nichts, in seinem Verfahren und Vortrage sehr oft das Gegentheil finde. So z. E. glaubte **Wolf** mit mehrern andern, daß man die Schwierigkeit, die **Euklids** 11ten Grundsatz drückt, dadurch heben könne, wenn man seine Definition der Parallellinien änderte. Sie wird aber dadurch weder gehoben, noch vermieden, noch auf eine geschickte Art umgegangen, und gleichsam von hinten her weggehoben. Sie wird vielmehr, wenn auch Alles richtig geht, nur **von dem Grundsatze weg**, und in **die Definition gebracht**; und zwar, so viel ich sehe, ohne daß sie dadurch leichter könnte gehoben werden. In der That auch läßt sich **Euklids** Definition ohne Rücksicht auf seinen 11ten Grundsatz beweisen. **Wolfs** Definition hingegen kann entweder ohne diesen Grundsatz nicht bewiesen werden; oder wenn sie bewiesen werden kann, so ist dieser Grundsatz so gut als zugleich mit erwiesen. Es kömmt aber eigentlich auf die Definition gar nicht an. Man kann sie bey Euklides ganz weglassen; und so wird man in der Prop. XXVII und XXVIII von selbst anstatt parallelae lineae den Ausdruck lineae sibi non coincidentes setzen. Man wird, aus Betrachtung, daß dieses ein merkwürdiger Umstand ist, sodann von selbst darauf verfallen, auf eine kurze und schickliche Benennung zu denken, oder solchen Linien, die nicht zusammen laufen, so viel man sie auch auf beyden Seiten verlängert, einen Namen zu geben. Und man wird dazu noch mehr verleitet werden, wenn man im Folgenden darauf verfällt, daß eben diese Linien noch überdies durchaus in gleicher Entfernung von einander bleiben. Dies ist die eigentlich synthetische Art zu verfahren; und man denkt dabey erst dann auf die Benennung, wenn die Sache herausgebracht und erheblich genug ist, einen besondern Namen zu verdienen. Beyspiele davon kommen in der Mathematik unzähliche vor, und sollen auch in allen denen Wissenschaften, wo man à priori gehen kann oder zu gehen gedenkt, nicht selten seyn.

§. 9. **Proklus**, welchem **Euklid's** 11ter Grundsatz ebenfalls anstössig war, fordert deswegen einen Beweis davon, **weil derselbe, wenn man ihn umkehrt, erweisbar ist.** In der That findet sich der umgekehrte Satz in der Prop. XVII. Libr. I. erwiesen. Mir kömmt es ebenfalls ganz richtig vor, daß es bey einem Grundsatze für sich klar seyn müsse, was es mit demselben gerade oder umgekehrt für eine Bewandtniß habe. Denn, nach aller Schärfe betrachtet, soll ein Grundsatz aus lauter einfachen, und daher für sich gedenkbaren Begriffen bestehen; und es muß, ob und wiefern sie mit einander verbunden werden können, unmittelbar aus der Vorstellung der Begriffe erhellen. So z. E. ist der achte Euklidische Grundsatz, **daß ausgedehnte Grössen, die auf einander passen, einander gleich**

sind;

sind; (Quae sibi mutuo congruunt, sunt aequalia) dieser Satz ist für sich gedenkbar. Es ist aber auch eben so für sich gedenkbar, daß er nur bey geraden Linien und Winkeln umgekehrt gilt, bey Figuren aber noch eine Bestimmung, und zwar die von der Aehnlichkeit, hinzukommen müsse, wenn er dabey umgekehrt anwendbar seyn soll.

§. 10. Um nun nach diesen allgemeinen Betrachtungen näher zu der Theorie der Parallellinien zu kommen, wodurch ich sowohl die Schwierigkeiten deutlich zu machen, als auch sie zu heben gedenke: so werde ich vorerst den eigentlichen statum quaestionis feste setzen. Die Frage selbst betrift nehmlich erstlich weder die **Wahrheit** noch die **Gedenkbarkeit des Euklidischen Grundsatzes**. Es hätte um den größten Theil der Geometrie bisher übel ausgesehen, wenn dieses die Frage seyn sollte. Ich habe in Absicht auf die **Gedenkbarkeit** bereits oben (§. 3.) angezeigt, nach welcher Ordnung sie bey dem Durchlesen des **Euklides** entstehe. Daß der Grundsatz dadurch zugleich auch als **wahr** gedacht werde, ist für sich klar. Es wird aber die Wahrheit desselben auch aus allen Folgen, die in allen Absichten daraus gezogen werden, dergestalt erwiesen, einleuchtend und nothwendig, daß man diese Folgen, zusammengenommen, als eine auf vielfache Arten vollständige **Induction** ansehen kann. Sodann findet sich auch bey vielen Versuchen, die man anstellen kann, um diesen Grundsatz zu beweisen, daß er, um bewiesen zu werden, fast immer sich selbst voraussetzt, und auf sehr vielerley Arten eine Folge von sich selbst ist, auf keine Art aber umgestossen wird. Dieses mag auch ein Grund mit seyn, warum **Euklid** denselben, in Ermanglung eines Beweises, unter die Grundsätze genommen; zumal da er diejenige Definition gewählt, die ohne Rücksicht auf diesen Grundsatz erweisbar war, und sich mit demselben am unmit-

unmittelbarsten verbinden ließ. Denn man sieht ganz offenbar, daß seine Prop. XXIX, wo dieser Grundsatz gebraucht wird, vornehmlich nur dient zu beweisen, daß es, ausser denen in den beyden Prop. XXVII und XXVIII erwiesenen Parallellinien, keine andern mehr gebe. Und in dieser Absicht wird dadurch eine in der That sehr kleine Lücke ausgefüllt, weil man sich ohne Mühe vorstellen kann, daß nur noch solche Linien aus der Zahl der nichtzusammenlaufenden auszuschliessen blieben, die mit CF (Fig. 1.) einen kleinern Winkel machen, als alle diejenigen Linien CD, Cd, deren Durchschnitt D, d gegeben werden kann, das will sagen, der eine endliche Entfernung von A hat. Denn, wenn man CF um den Punkt C herunter gegen D dreht: so merkt Hr. Prof. Kästner mit Recht an, daß sich der erste Durchschnittspunkt nicht angeben lasse, weil, wo man ihn immer auf AD hinaus setzen wollte, noch ein entfernterer genommen werden kann: Dieses hat aber meines Erachtens den Erfolg, daß, wo die Winkel DCF, dCF sehr klein sind, die Entfernungen AD, Ad in umgekehrter Verhältniß der Winkel DCF, dCF, oder einer davon nicht viel verschiedenen Funktion derselben, zunehmen müssen. Denn in gerader Verhältniß der Winkel ACD, ACd, oder einer Funktion derselben, können sie deswegen nicht zunehmen, weil sonst CF, auch wo DAC + ACF = 180 Gr. oder gar noch grösser ist, die Linie AD in einer endlichen Entfernung von A schneiden müßte; welches der Prop. XXVIII. Libr. I. des Euklides zuwider wäre. Indessen glaube ich nicht, daß sich die Sache auf diese Art erörtern lasse; ungeachtet sich's, wenn die Sache einmal berichtigt ist, leicht erweisen läßt, daß man, um jeden Winkel DCF zu halbiren, nur Dd = DC zu machen habe. So giebt es auch noch andre Arten, sich die Sache vorzustellen. Wer z. E. die beyden nichtzusammenlaufenden Linien CF, AD so ansieht, daß sie einen

Win-

Winkel machen, der $= 0$ ist: der wird leicht beweisen können, daß jede Linie Cd mit Ad einen Winkel mache, der > 0 ist, und daß demnach diese beyden Linien sich irgendwo schneiden. Der Beweis ist eben der, wodurch man zeigt, daß $CDA > CdA$ sey (Prop. XVI. Libr. I. Euclid.). Denn dreht man CD um den Punkt C aufwärts: so wird der Winkel CDA immer kleiner, und endlich vollends negativ, sobald CD über CF hinaus kömmt. Er muß demnach irgend $= 0$ werden; und daß dieses in der Lage CF geschehe, folgt meines Erachtens aus der **Vorstellung**, daß AD, CF **gerade Linien** sind, womit die Vorstellung von einer **asymptotischen Näherung** nicht bestehen kann. Ob sich aber diese Betrachtung von negativen Winkeln, und von solchen die $= 0$ sind, in das erste Buch des **Euklides** schicke, das ist eine ganz andre Frage, die man leicht verneinen, und behaupten wird, ein solcher Vortrag sey mehr algebraisch als geometrisch.

§. 11. Ich mag es auch gelten lassen; und merke nun ferner an, daß es bey den Schwierigkeiten über **Euklid's** 11ten Grundsatz eigentlich nur die **Frage** ist, ob **derselbe aus den Euklidischen** *Postulatis* **mit Ziehung seiner übrigen Grundsätze in richtiger Folge hergeleitet werden könne? Oder, wenn diese nicht hinreichend wären, ob sodann noch andre** *Postulata* **oder Grundsätze, oder Beydes könnten vorgebracht werden, die mit den Euklidischen gleiche Evidenz hätten, und aus welchen sein 11ter Grundsatz erwiesen werden könnte?** Bey dem ersten Theile dieser Frage kann man nun von Allem, was ich im Vorhergehenden **Vorstellung der Sache** genennt habe, abstrahiren. Und da **Euklid's** Postulata und übrigen Grundsätze einmal mit Worten ausgedrückt sind: so kann und soll gefordert werden, daß man sich in dem Beweise nirgends auf die

Sache

Sache selbst berufe, sondern den Beweis durchaus symbolisch vortrage — wenn er möglich ist. In dieser Absicht sind Euklid's Postulata gleichsam wie eben so viele algebraische Gleichungen, die man bereits vor sich hat, und aus welchen x, y, z, &c herausgebracht werden soll, ohne daß man auf die Sache selbst zurücke sehe. Da es aber nicht ganz solche Formeln sind: so kann man allerdings die Vorzeichnung einer Figur als einen Leitfaden, um den Beweis zu führen, dabey zugeben. Hingegen würde es bey dem andern Theile der Frage ungereimt seyn, wenn man die Betrachtung und Vorstellung der Sache dabey untersagen, und fordern wollte, die neuen Postulata und Grundsätze müßten, ohne an die Sache zu denken, und gleichsam aus dem Stegreife gefunden werden. Ich sehe aber auch nicht, wie man gegen Euklіden billiger ist, wenn man seinen Grundsatz verwirft, ohne die Frage darüber so zu stellen, wie ich sie zu Anfang des gegenwärtigen Paragraphs gestellt habe. Denn da Euklid seinen Satz einmal unter die Grundsätze rechnet: so setzt er unstreitig dabey die Vorstellung der Sache voraus; und man kann es ihm zutrauen, daß er, wenigstens in Ermangelung des noch dermalen zu findenden Vortrages, den seinigen mit Bewußtseyn gewählt habe. Ich zweifle auch nicht, daß Euklid nicht selbst sollte auf Mittel gedacht haben, seinen 11ten Grundsatz unter die Lehrsätze zu bringen. Wenigstens kommen im ersten Buche seiner Elemente einige Spuren vor, woraus es sich nicht undeutlich abnehmen läßt. Wie leicht folgt z. E. seine Prop. XVII aus Prop. XXXII, wenn diese einmal erwiesen ist! Indessen beweist Euklid jene besonders, vermuthlich um zu zeigen, wie weit sich, ohne Zuziehung des 11ten Grundsatzes, etwas von den Winkeln eines Triangels bestimmen läßt.

a) Vor-

2) Vortrag einiger Sätze, die für sich betrachtet werden können.

Nach der Festsetzung dessen, was in Absicht auf den 11ten Euklidischen Grundsatz eigentlich die Frage ist, könnte ich nun die Theorie der Sache selbst vortragen. Ich werde aber erst den 3ten Abschnitt dieser Abhandlung dazu widmen, inzwischen aber einige Sätze beybringen, die sich, ohne Rücksicht auf diese Theorie, für sich betrachten lassen. Ich setze dabey voraus, daß man wisse, oder wenigstens ohne Mühe finden könne, welche Sätze in dem ersten Buche der Euklidischen Elemente von dessen 11ten Grundsatze abhängen; daß z. E. bis auf die Proposit. XXIX, Alles ohne Zuziehung dieses Grundsatzes erwiesen sey, von da an aber bis zum Ende Alles mittelbar oder unmittelbar davon abhänge, wohin besonders die Bestimmung der Summe der 3 Winkel eines jeden Triangels, und Alles was von Parallelogrammen, Rectangeln und Quadraten gesagt wird, gehört. In den folgenden Büchern trägt Euklid hin und wieder noch einige Sätze vor, die von seinem 11ten Grundsatze unabhängig sind. Es sind aber auch viele von denen, die auf diesem Grundsatze beruhen, von der Art, daß, wenn sie für sich erwiesen werden können, sie den Beweis des Grundsatzes selbst nach sich ziehen, so, daß man auf diese Art bey dem Aufsuchen eines Beweises für diesen Grundsatz mehr als Eine Wahl hat, wo man anfangen könne. So z. E. ist man mit dem Beweise des Grundsatzes bald fertig, wenn man, ohne Zuziehung desselben, erweisen kann, daß in jedem Triangel die Summe der 3 Winkel zween rechten Winkeln gleich ist; daß eine gerade Linie entweder von keiner oder von allen Parallellinien durchschnitten werde; u. s. w. Da es unnöthig ist, das, was Euklid in seinem ersten Buche ohne Zuziehung des 11ten Grundsatzes erwiesen, hier von neuem zu beweisen: so werde ich dasselbe als bekannt voraussetzen, und, wo es nöthig, die Propositionen, die ich gebrauche, citiren.

§. 13. Es sey nun (Fig. I.) ACB ein in A rechtwinklichter Triangel; und, indem man die Seite AB verlängert, ziehe man durch C jede Linie ECD, welche AB schneide: so wird die Summe der beyden spitzen Winkel des Triangels

$$ACB + ABC > ACD,$$

und

$$ACB + ABC < ACE$$

seyn. Denn erstlich mache man FCB = CBA, und ziehe FCG: so ist

$$ACB + ABC = ACF;$$

und die Linie GF läuft mit HD auf keiner Seite zusammen. (Prop. XXVII.) Da nun CD mit HD gegen D zusammen läuft: so ist

$$ACD < ACF;$$

demnach auch $ACD < ACB + ABC,$

oder $ACB + ABC > ACD.$

Ferner trage man AD aus A in H, und ziehe HCI durch H, C gerade. Da nun ICH mit AH auf der Seite H zusammenläuft, FCG aber nicht: so ist wiederum

$$GCA > HCA;$$

und hingegen $ICA > ACF.$

Nun ist $ECA = ICA,$

weil, wenn man die Figur nach der Linie AC zusammenlegt, ECD auf ICH fällt. Demnach ist

$$ACF < ECA,$$

und daher auch $ACB + ABC < ECA.$

§. 14. Dieser Lehrsatz zeigt nun genauer, wie weit man mit der Prop. XVII. Euclid. in Absicht auf die Bestimmung der Summe der drey Winkel eines Triangels zurücke bleibt. Denn einmal ist bey jedem rechtwinklichten Triangel ACB diese Summe grösser, als die Summe, welche entsteht, wenn man zu 90 Gr. jeden

spitzen

spitzen Winkel ACD addirt. Hingegen ist sie kleiner, als die Summe von einem rechten und jedem stumpfen Winkel ECA. Eben dieses gilt von jedem schiefwinklichten Triangel bCA; jedoch mit dem Unterschied, daß die Summe seiner drey Winkel grösser, als jeder spitze Winkel ACD doppelt genommen, und hingegen kleiner als jeder stumpfe Winkel ACE, doppelt genommen, gefunden wird. Man kann sich auch leicht versichern, daß das Mittel aus diesen beyden Schranken genau 180 Gr. ist, weil ECA + ACD = 180 Gr. demnach das Mittel davon 90 Gr. und das Doppelte von 90 Gr. = 180 Gr. ist. Ferner findet sich, daß, wenn D weiter hinaus, z. E. in d genommen wird, die beyden Schranken einander, jede um gleich viel, näher kommen, und sich daher dem Mittel gleichförmig nähern. Endlich kann man sich leicht wenigstens **vorstellen**, daß der Winkel DCF desto kleiner wird, je weiter man den Punkt D von A hinwegrückt. Und eben dadurch erhält man Schranken, die ungemein nahe zusammen treffen; und man kann daraus schließen, daß, wenn auch die Summe der drey Winkel eines Triangels nicht genau 180 Gr. seyn sollte, sie dennoch bey jedem Triangel gar nicht viel davon verschieden seyn könne. Dieses ist aber auch Alles, was hieraus folgt; und es wird sich dabey schwerlich weiter gehen lassen. Indessen ist der Satz eben nicht ganz unerheblich.

§. 15. Ich werde nun noch einen andern beyfügen. Die Summe der Winkel eines Triangels mag nun genau = 180 Gr. oder um etwas davon verschieden seyn: so können wir dieselbe z. E. (Fig. II) bey dem Triangel ACB = 180 + a Grade setzen. Man ziehe nun durch einen der Winkel eine beliebige Linie AD: so entstehen zween Triangel ACD, ADB, und damit 6 Winkel. Die zween Winkel C, B bleiben wie vorhin. A wird auf beyde Triangel vertheilt; und die neu hinzugekommenen

Winkel CDA, ADB machen zusammen 180 Gr. (Prop. XIV) Demnach ist in beyden Triangeln die Summe aller 6 Winkel nur $180° + 180° + a$. Man hätte denken sollen, sie würde $= 180° + 180° + a + b$ seyn. Wird von diesen Triangeln wiederum Einer, z. E. DAB durch eine Linie DE getheilt: so entstehen drey Triangel; und die Summe ihrer Winkel ist wiederum nur $= 180 + 180 + 180 + a$ Grade. Fährt man weiter fort: so kömmt zu jedem neuen Triangel nur immer wiederum 180 Gr. hinzu. Man sollte allerdings daraus die Folge ziehen können, es müsse $a = 0$ seyn. Denn da man die Linien AD, DE, &c nach Belieben und nach unendlich vielerley Abwechselungen ziehen kann: so kömmt es eben so heraus, als wenn man in einer Reihe

$$A = a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c$$

A beständig, und x veränderlich setzt. Denn da werden alle Coefficienten b, c, d, &c $= 0$; und es bleibt $A = a$, das will sagen: In jedem Triangel ist die Summe der Winkel $= 180$ Gr. Ich führe dieses nur im Vorbeygehen an, weil daraus erhellet, daß man noch nicht alle Mittel aufgesucht hat, die Schwierigkeit der Parallellinien zu heben.

§. 16. Ich finde ferner, daß Hr. Prof. **Kästner** angemerkt hat, diese Schwierigkeit komme nicht so wohl auf die Winkel, als vielmehr auf die Größe der Linien und auf die Entfernung der Parallellinien an. Wenn z. E. (Fig. III) F ein rechter Winkel ist: so mag AGF, so wenig man will, von einem rechten Winkel verschieden, und kleiner als derselbe seyn, und es läßt sich auf GA kein Punkt angeben, aus welchem nicht sollten Perpendicularen auf GF gefällt werden können. Ob sich aber hinwiederum durch GF keine senkrechte Linie FA ziehen lasse, die nicht auch GA in irgend einem Punkte A durchschneide, das ist allerdings eine andre Frage, welche nicht bejahet werden kann, dafern man sie nicht entweder

dire-

directe beweist, oder umgekehrt zeigt, daß sich aus den Punkten A der Linie GA Perpendicularen AF auf GF fällen lassen, welche in jeder beliebigen Entfernung von G auffallen. Ließe sich aber für jeden Fall, wo die Summe der Winkel AGF + GFA < 180 Gr. ist, ohne Rücksicht auf die Größe der Linie GF. beweisen, der Winkel GAF sey > 0, das will sagen, in der That ein angeblicher Winkel; so sehe ich nicht, wie man an der Wirklichkeit des Durchschneidens einigen Anstand haben könnte. Denn, wie sich von selbst versteht, so fällt die Frage, ob zwo Linien sich durchschneiden, ganz weg, und findet nicht statt, sobald sich der Winkel angeben läßt, unter welchem sie sich durchschneiden. Non entis nulla sunt praedicata.

§. 17. Nun kömmt, so viel ich mir die Sache vorstelle, in der Prop. XVI. Libr. III. Etwas vor, das hieher dienen kann. Daselbst wird, ohne Rücksicht auf den controversirten 11ten Grundsatz erwiesen, daß, wenn Ab (Fig. V.) auf den Diameter AP eines Cirkels senkrecht gezogen wird, so daß diese Linie durch den Endpunkt des Diameters gehe, dieselbe ausser den Cirkel falle, oder den Cirkel ausserhalb in einem einigen Punkte berühre; und daß zwischen der Linie Ab und dem Cirkelbogen AB keine andre gerade Linie könne durchgezogen werden, die nicht den Cirkel in zween Punkten, z. E. A, B, schneide, so lange der Winkel BAb nicht kleiner, als jeder vorgegebene Winkel ist. Denn in diesem Fall würde er = 0 seyn, und daher AB auf Ab fallen, demnach nicht zwo, sondern nur eine Linie seyn. Der Beweis, den Euklid giebt, kömmt schlechthin darauf an, daß die aus dem Mittelpunkt O auf AB fallende Perpendiculare ausser den Cirkel fallen, und demnach grösser als AO seyn müßte; welches seiner Prop. XVIII. Libr. I. zuwider ist. Demnach setzt dieser Beweis weder die Größe des Diameters, noch die Größe von AB, noch

 die

die von der Perpendiculare, noch die Verhältniß zwischen AB und AP, sondern schlechthin nur den Satz voraus, daß die Perpendiculare auf die Seite des spitzen Winkels OAB falle, und daß sie nicht grösser als AO seyn könne, sondern vielmehr kleiner seyn müsse, so groß oder klein alle diese Linien an sich auch immer seyn mögen.

§. 18. Nun läßt sichs weiter gehen und zeigen, daß, so lange BAb nicht kleiner als jeder vorgegebene Winkel ist, auch AOB nicht kleiner als jeder vorgegebene Winkel seyn könne, und demnach > 0 seyn müsse. Denn da BAb > 0 ist: so läßt sich durch den Winkel BAb jede beliebige Linie AQ ziehen; und es wird auch QAb > 0 seyn. Da demnach, vermöge des erst angeführten Euklidischen Satzes, AQ nicht ausser den Cirkel fallen kann: so giebt es zwischen AB einen Durchschnittspunkt q. Dieses könnte aber nicht seyn, wenn AOB kleiner als jeder vorgegebene Winkel wäre. Demnach muß nothwendig AOB > 0, das will sagen, ein Winkel von angeblicher Grösse seyn. Bey AOB $= 0$ würde BO auf AO, und demnach AB auf Ab fallen; und so wäre BAb $= 0$, der Voraussetzung BAb > 0 zuwider. Man sieht ohne Mühe, daß auch dieser Beweis von der Grösse des Diameters AP und der Chorde AB ganz unabhängig ist; und daß demnach der Durchschnittswinkel > 0 ist, so groß oder klein AB und der Winkel BAb immer angenommen wird, nur daß BAb > 0 sey, und demnach OAB ein spitzer Winkel bleibe. Da nun OB $=$ OA: so ist auch OBA $=$ OAB, und demnach OAB $+$ OBA < 180 Gr. Eben so, wenn Oq auf AB senkrecht fällt, ist Ar $=$ rB, und OAr $+$ OrA < 180 Gr. Demnach mag bey dem rechten Winkel OrA der Winkel OAr, so wenig man will, kleiner als 90 Grade seyn: so wird der Durchschnittswinkel AOr > 0, und daher in der That ein Durchschnitt seyn.

§. 19.

§. 19. Dieses ist nun zum Beweise des Euklidischen Grundsatzes meines Erachtens mehr als hinreichend, weil es sich leicht eben so allgemein machen läßt. Ich werde es aber hier nicht ausführen, sondern nur bemerken, daß, wenn man OBD = ODB = ODF = OFD = &c = OBA = OAB, und BD = DF = &c = AB macht, dieses eben so viel ist, als wenn die Chorde AB aus B in D, aus D in F, und so weiter, im Cirkel herumgetragen wird. Man wird auf beyderley Arten nicht nur Einmal, sondern so vielmal man will, im Cirkel ganz herumkommen, weil AOB > o ist, demnach nothwendig auch ein Multiplum von AOB > 360 Grad, und, so vielmal man will, grösser als 360 Grad seyn muß.

§. 20. Sind demnach (Fig. IV) die Winkel aAB, bBA einander gleich und kleiner als 90 Grad; so läßt sich auf erst angezeigte Art die gleichseitige und gleichwinklichte Figur GECABDFH zeichnen; und wenn man fortfährt; so wird man damit im Kreise, so vielmal man will, herum kommen. Die Punkte G, E, C, A, B, D, F, H, &c werden sämtlich in dem Umkreise eines Cirkels liegen, dessen Mittelpunkt O der gemeinsame Durchschnittspunkt aller Linien Gg, Ee, Cc, Aa, &c seyn wird. Demnach kömmt auch hiebey die Frage, ob Aa, Bb sich durchschneiden, gleichsam zu späte und unschicklich vor.

§. 21. Es giebt ferner mehrere Arten, einen Beweis des Euklidischen Grundsatzes so weit zu treiben, daß das, was daran noch etwan zurücke bleibt, nicht nur augenscheinlich richtig ist, sondern auch allen Anschein hat, daß es nachgeholt, und der Beweis dadurch ergänzt werden könne. Einige Beyspiele werden dieses ganz offenbar machen. Es seyn (Fig. VI) die beyden Winkel aAB, bBA spitze und einander gleich: so sollen die Linien Aa, Bb zusammen laufen und sich durchschneiden.

Man mache bBC = cCB = bBA, und BC = AB: so wird aABb auf cCBb passen, wenn die Figur längst der Linie bB zusammen gelegt wird. Es werde ferner AC gezogen, und cCD = dDC = cCA, und CD = CA gemacht: so wird ebenfalls wiederum aACc auf dDCc passen, wenn man sich die Figur längst der Linie cC zusammengelegt vorstellt. Man ziehe ferner AD; und wenn man eben so fortfährt, wird aADd auf eEDd passen. Man kann auch leicht beweisen, daß bey Q, R, S, &c rechte Winkel sind. Daß aber von den Winkeln CAB, DAC, EAD, &c jeder doppelt so groß als der nächst vorhergehende ist, das ist zwar wahr; allein ohne die vorgängige Berichtigung des Euklidischen Grundsatzes wird es sich schwerlich erweisen lassen. Doch ich verlange hierbey nicht so viel. Es wird mir genug seyn, wenn ohne Zuziehung des Euklidischen Grundsatzes erwiesen werden kann, daß DAC grösser als CAB, und auf gleiche Art EAD > DAC, &c sey. So weit fällt die Sache in die Augen; und an sich betrachtet, sollte es leichter seyn zu beweisen, daß unter den Winkeln CAB, DAC, EAD, &c jeder folgende grösser ist, als wenn man beweisen sollte, jeder sey genau doppelt so groß, als der nächst vorhergehende. Sollte es sich aber, ohne Rücksicht auf die Schwierigkeit der Parallellinien, erweisen lassen, daß die Winkel CAB, DAC, EAD der Ordnung nach immer grösser werden: so wird auch nothwendig folgen, daß von den Linien AC, AD, AE, &c Eine anfängt ausserhalb Aa zu fallen; wie denn dieses in dem Beyspiele der Figur bereits schon bey der dritten dieser Linien, AE, geschieht. Dieses hat aber den Erfolg, daß die Linien Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, &c sich nothwendig in einem Punkte durchschneiden, welcher innerhalb dem Triangel ADE liegt. Denn so muß Aa, verlängert, nothwendig die Seite ED durchschneiden; und ehe dieses geschieht, muß sie bereits schon DdS durchschnitschnitten haben. Daß aber alle die Linien Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, &c sich in Einem und eben dem Punkte durchschneiden, folgt aus der Art, wie die Figur längst den Linien bB, cC, dD, &c zusammen gelegt worden, ohne Mühe; so, daß ich mich dabey eben nicht aufhalten werde. Man sieht demnach, daß hier nur noch zu beweisen bleibt, daß wenigstens die Winkel CAB, DAC, EAD, &c immer grösser werden. Uebrigens läßt sichs eben so wie vorhin zeigen, daß die Punkte A, B, C, D, E, &c sämtlich in dem Umkreise eines Cirkels liegen, dessen Mittelpunkt der gesuchte Durchschnittspunkt der Linien Aa, Bb, &c ist.

§. 22. Noch ein Beyspiel. Es seyn (Fig. VII) die Winkel aAB, bBA spitze und einander gleich. Man ziehe durch den Winkel aAB jede Linie AT; und es ist, ohne Zuziehung des oft bemeldten Euklidischen Grundsatzes, zu beweisen, daß, wenn aus der Mitte von AB die Linie Cc senkrecht aufgerichtet wird, immer der abgeschnittene Theil SR kleiner als AS sey. Kann dieses erwiesen werden; so erhält man damit so viel, daß, wenn $ST = AS$ gemacht wird, der Punkt T ausserhalb der Linie Bb falle. Und daraus läßt sich sodann herleiten, daß die Linien Aa, Bb einander nothwendig durchschneiden. Nun läßt sich der Beweis auf folgende Art vornehmen. Man ziehe aus A mit dem Halbmesser AB einen Cirkelbogen Bd, und mit dem Halbmesser AC einen Cirkelbogen Cm. Da nun $ABb < 90$ Gr. ist; so wird Bb den erstern dieser Cirkelbogen in zween Punkten B, d schneiden. Durch Ad werde die Linie AD gezogen, und $MD = AM$ gemacht. Da nun $AC = CB$; so ist auch $Am = md$. Folglich:

$$AM = Am + mM.$$
$$Md = md - mM.$$
$$= Am - mM.$$

Demnach $AM > Md$.

Macht man nun MD = AM: so fällt der Punkt D ausserhalb Bb, weil MD > Md ist. Nun beschreibt man ferner die Cirkelbogen De, Mn aus dem Mittelpunkte A. Und indem man durch e die Linie AE zieht, und NE = AN macht: so wird auf gleiche Art erwiesen, daß der Punkt E ausserhalb Bb falle, indem NE > Ne gefunden wird. Auf eben diese Art läßt sich mit Ziehung neuer Cirkelbogen Ef, Np weiter fortfahren. Daß nun jeder andre Punkt T, wenn ST = AS gemacht wird, ausserhalb Bb falle, wird leicht erwiesen.

Denn es ist $As = sr$

Demnach $AS = As + sS.$

$SR = sr - sS - Rr.$

$= AS - 2.\, sS - Rr.$

Und folglich $AS > SR;$

und damit auch $ST > SR.$

Nun bleibt noch zu beweisen, daß die, der Ordnung nach, gefundenen Linien Ad, Ae, Af, &c der Linie Aa nicht nur näher kommen, sondern daß Eine derselben anfängt, ausserhalb Aa zu fallen. Die Sache an sich ist richtig. Aber sie muß ohne Zuziehung des 11ten Euklidischen Grundsatzes erwiesen werden. Kann dieses geschehen: so erhält man auf allen ausserhalb Aa fallenden Linien einen Punkt, der eben so wie die Punkte D, E, &c ausserhalb Bb fällt. Und zieht man aus diesem Punkt eine Linie in B: so hat man einen Triangel, welcher die beyden Linien Aa, Bb, und zugleich ihren Durchschnittspunkt in sich schließt oder umgiebt. Um nun aber zu beweisen, daß die Linien Ad, Ae, Af, &c sich in der That auf vorbemeldte Art gegen Aa nähern, und endlich ausserhalb Aa fallen, ziehe man AK mitten durch den Winkel DAB; und da wird es genug seyn, wenn man zeigen kann, daß jeder der Winkel eAd, fAe, &c grösser ist als der Winkel DAK oder KAB. Zum Behuf dieses Beweises läßt sichs noch ferner anmerken, daß jeder der

Punkte

Punkte B, D, T, E, &c von Cc gleich weit entfernt ist. Dieses kann ohne Mühe erwiesen werden, weil überhaupt AS = ST, AC = CB, und in C ein rechter Winkel ist. Ferner läßt sich aus dem Mittelpunkte A der Cirkelbogen kb durch k ziehen; und so wird Ab < AB seyn. Nun soll noch bewiesen werden, daß, wenn man aus jedem der Punkte D, E, &c z. E. aus D eine Linie in b zieht, der Winkel DbA stumpf sey, und demnach die aus D an den Cirkel kb zu ziehende Tangente unterhalb b falle. Denn so wird man zween gleiche und ähnliche oder auf einander passende Triangel Aek, ADt erhalten, und daher die Winkel

$$eAk = DAt,$$

Demnach $\quad eAD = kAt,$

und folglich $\quad eAD > kAB$

haben. Ich habe aber nicht finden können, daß sichs, ohne die vorgängige Berichtigung des Euklidischen Grundsatzes, erweisen ließe, daß DbA > 90 Gr. sey; ungeachtet es ohne diesen Grundsatz erweisbar ist, daß sich durch Cc eine Menge von Perpendikularen ziehen lassen, welche die Linie Db unter einem schiefen Winkel schneiden, weil die aus D auf Cc fallende Perpendikulare = CB und demnach > Cb ist.

§. 23. Um dieses noch zu zeigen, so seyn (Fig. III.) in B, D rechte Winkel, und CB < DE. Man ziehe die Punkte C, E durch eine gerade Linie zusammen, und richte aus der Mitten von BD die Linie FG senkrecht auf. Man mache Dc = BC, und ziehe Gc. Wird nun die Figur längst der Linie GF zusammen gelegt: so fällt B auf D, C auf c, demnach GC auf Gc; und es ist cGF = CGF = IGE. Da nun EGc > 0 ist: so sind die Winkel cGF, IGE, CGF sämtlich spitze. Demnach ist auf der Linie CE wenigstens ein Punkt G gefunden, wo dieselbe die Perpendikulare GF unter einem schiefen Winkel schneidet. Ich merke noch im Vorbeygehen an, daß

 sich

sich der Satz umkehren läßt, indem man, wenn CGF < 90 Gr. ist, leicht zeigen kann, daß CB < DE sey. Denn wird die Figur längst der Linie GF zusammen gelegt: so fällt der Winkel CGF auf cGF, und CB auf Dc. Da nun FGC = IGE kleiner als 90 Gr. ist: so ist FGC + IGE < 180 Gr. Demnach EGc > 0; demnach auch Ec > 0, und ED > Dc, oder ED > BC.

§. 24. Wiederum seyn (Fig. VIII.) in C, c rechte Winkel, und CB > cb. Man trage CB aus C in A, und cb aus c in a, und ziehe die Linien Ab, Ba, Aa, Bb: so läßt sich die Figur längst der Linie CH zusammen legen; und es wird A auf B, a auf b, demnach Ab auf Ba fallen; und so muß der Durchschnittspunkt dieser beyden Linien E auf der Linie CH seyn. Man mache ferner CM = Ec, und CN = cb, und ziehe NM: so werden die Winkel NMC = bEc seyn; demnach auch NMC = AEC. Da nun auf diese Art die Linien NM, AE nicht zusammen laufen, und CN < CA ist: so ist nothwendig auch CM < CE; demnach auch Ec < EC. Trägt man nun CE aus E in H, und zieht HI auf CH senkrecht: so wird HI = AC, und EI = EA seyn. Da demnach auch HI = CB ist: so darf man nur durch E die Linie FEK senkrecht ziehen, und indem man IB zieht: so wird man in K rechte Winkel haben. Denn wird die Figur längst der Linie FK zusammen gelegt: so fällt H in C, I in B, und damit KI in KB; und es wird IKE = BKE demnach = 90 Gr., und so müssen die Winkel in G, so wie auch die in F, schiefe Winkel seyn. Also ist auch hierdurch wiederum ein Punkt G gefunden, wo die senkrechte Linie GE mit Bb schiefe Winkel macht. Es ist auch wiederum HL < HI; folglich HL < CB. Und so läßt sich der Beweis fortsetzen. Man kann diesen Satz ebenfalls umkehren. Es sey nämlich EGb < 90 Gr. so fälle man aus jedem Punkt B auf CH die Linie BC senkrecht, und mache CA = CB. Aus A ziehe man

man Ab durch E, und fälle aus B die Perpendikulare bc auf CH: so wird bc < BC seyn. Denn setzte man bc = BC: so würde b in I und G in K fallen, demnach bGE = 90 Grad seyn. Und eben so würde bGE > 90 Grad gefunden werden, wenn man bc > BC setzen wollte. Beydes der Bedingung bGE < 90 Gr. zuwider.

§. 25. Es seyn nun (Fig. IX.) in A rechte Winkel, und DBA < 90 Gr. Die Linie AB werde, so viel man will, verlängert. Da nun DBA < 90 Gr. ist: so fällt aus jedem Punkt E die senkrechte Linie EF auf die Seite BD. Da nun in A rechte Winkel sind: so ist EGA und damit auch FGH < 90 Gr. Demnach fällt aus F die senkrechte Linie FH gegen C. Da nun DFE = 90 Gr. so ist DFH < 90 Gr. Wiederum, da eBf < 90 Gr. ist: so fällt aus jedem Punkt e die senkrechte Linie ef auf die Seite Bf, und verlängert macht sie egA < 90 Gr., weil in A rechte Winkel sind. Demnach fällt aus f die senkrechte fh zwischen Ag. Da nun Bfg = 90 Gr. so ist Bfh < 90 Gr. Der Anstand, als ob ef verlängert mit Ag nicht zusammen laufe, hat hiebey nichts zu sagen. Denn da fh auf Ag trift: so wird um desto ehender noch Bfh < 90 Gr. So viel also aus jeden Punkten der Linie eE Perpendikularen auf DI können gefällt werden, so viele schiefe Winkel DFh, Dfh finden sich auch, demnach allerdings unzähliche. Dieses war nun, in Absicht auf das zu Ende des §. 22. gesagte, zu beweisen. Ich habe übrigens nicht finden können, daß man ohne Zuziehung des Euklidischen Grundsatzes damit ausreiche.

§. 26. Ließ es sich aber ohne diesen Grundsatz erweisen, daß, so oft ein Winkel DBA < 90 Gr. ist, auch jeder andere Winkel DFH < 90 Gr. sey, wo auch immer der Punkt F auf der Linie DF angenommen wird: so kann auch ohne viele Mühe erwiesen werden; daß alle die

die Winkel DFH, DBA, Dfh, &c einander gleich sind. Denn man setze, in der 3ten Figur in F seyen rechte Winkel, und CGF < 90 Gr. Man mache nach Belieben BF = FD, und richte in B, D, Perpendikularen auf. Oder, indem man den Punkt E nach Belieben annimmt: so fälle man aus demselben die Linie ED auf FD senkrecht, trage FD aus F in B, und richte in B die Perpendikulare BH auf. Wird nun die Figur längst der Linie FG zusammen gelegt: so wird FB auf FD, BC auf Dc fallen; und es wird CGF = IGE = cGF seyn. Man setze nun, die Winkel ACB, AED seyn ungleich: so sind auch GcE, GEc, und damit auch die Seiten GE, Gc ungleich. Dieses hat aber den Erfolg, daß, wenn GK durch FG senkrecht, oder welches einerley ist, mitten durch den Winkel EGc gezogen wird, die Winkel in K schief seyn werden. Damit aber würden auch die Winkel in D schief seyn. Es sind aber vermöge der Construktion, in D rechte Winkel. Demnach geht es nicht an, daß man die Winkel ACB, AED ungleich setze; und so muß ACB = AED seyn. Damit erhält man aber Gc = GE = GC; ingleichen EKG = cKG = CHG = 90 Grad, und BHKD ist ein Rectangel rc. Ich setze diesen ohnehin kurz vorgetragenen Beweis nicht weiter fort, weil man leicht sieht, daß derselbe auf dem Satze beruhet, daß man wo KGF, DFG rechte Winkel sind, aus dem schiefen Winkel in K auf den schiefen Winkel in D schließen könne. Dieses ist es aber eben, wovon noch ein von dem Euklidischen 11ten Grundsatze unabhängiger Beweis gefunden werden soll. Kann derselbe aber gefunden werden: so erhellet aus dem erstgesagten, daß damit zugleich auch die Gleichheit der Winkel ACB, AED und die Winkel eines Rectangels rc bestimmt und erörtert sind.

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Stücke d. M.)

II.

II.

Theorie der Parallellinien; von Johann Heinrich Lambert. Fortsetzung.*)

3. Theorie der Parallel-Linien.

§. 27.

Die Theorie der Parallellinien, die ich hier zu geben mir vorgenommen, findet ihre Stelle unmittelbar nach der Prop. XXVIII. Libr. I. der Elemente des Euklids, weil bis dahin der 11te Grundsatz nicht gebraucht wird, und auch hier nicht gebraucht werden soll. Dieses bestimmt den Gesichtspunkt, aus welchem nachfolgende Theorie anzusehen ist; und man wird sich eben deswegen damit nicht aufhalten, wenn ich sehr bekannte Sätze, wie z. E. die durchaus gleiche Entfernung der Parallellinien rc als unbekannt und sehr zweifelhaft werde anzusehen haben. Auch dieses habe ich noch voraus zu erinnern, daß ich nicht bloß gedenke, solche Sätze zu beweisen, sondern zugleich auch die dawider gemachten Schwierigkeiten deutlich ins Licht zu setzen. Daraus wird sichs zeigen, daß sich die ganze Sache auf eine dreyfache Hypothese reduciren läßt, von welchen jede einer besondern Theorie fähig ist, und wovon zwo nur in ihren entferntern Folgen umgestoßen werden können; so daß auch von den unmöglichen Hypothesen eine ziemliche An-

*) Der Anfang steht im zweyten Stück dieses Jahrgangs von S. 137—164.

Anzahl von Sätzen können und zum Theil müssen erwiesen werden, bis es sich zeigt, daß sie nicht bestehen. Auf gleiche Art werden selbst von der wahren Hypothese mehrere Sätze ex hypothesi erwiesen, ehe es sich zeigen läßt, daß sie wirklich die wahre ist. In der Geometrie schien mir ein solches Verfahren sehr unerwartet. Da es aber darin vorkömmt: so kann es zugleich die Art, mit physischen Hypothesen umzugehen, wie durch ein Beyspiel erläutern. In dieser Absicht kann es leicht seyn, daß ich aus den beyden irrigen Hypothesen mehrere Folgen ziehe, als es, bloß um sie umzustossen, nöthig wäre.

§. 28. Daß sich auf einer ebenen Fläche gerade Linien ziehen lassen, die, so viel man sie auch auf beyden Seiten verlängert, nicht zusammenlaufen, wird durch die Prop. XXVII und XXVIII ausser allen Zweifel gesetzt. Hingegen bleibt dabey unausgemacht, ob es ausser den daselbst angegebenen nicht noch andre giebt. Und selbst von denen in bemeldten beyden Propositionen erwiesenen bleiben noch mehrere Eigenschaften und Symptomata zu bestimmen. Hiebey werde ich nun den Anfang machen.

§. 29. Es seyn (Fig. X.) in A und B rechte Winkel; oder, indem man AC durch AB senkrecht gezogen, werde AB nach Belieben angenommen, und der Winkel ABD ebenfalls = 90 Gr. gemacht: so sind, vermöge erstbemeldter Prop. XXVII, XXVIII; BD, AC Linien, die beyderseits, soviel man will, verlängert, nicht zusammenlaufen. Ferner läßt sichs leicht zeigen, daß, wenn die Figur längs der Linie AB zusammengelegt wird, der Winkel dBA auf DBA, ingleichen cAB auf CAB, und demnach Bd auf BD, und Ac auf AC fällt, weil in A, B alles rechte Winkel sind. Die Linien dD, cC sind demnach auf beyden Seiten des Striches AB einander durchaus gleich und ähnlich, so daß, was von der einen Seite erwie-

erwiesen wird, mit Beybehaltung eben der Bedingungen auch auf der andern Seite statt findet.

§. 30. So z. E. wenn man Ac = AC macht, und in c, C Perpendikularen cd, CD aufrichtet: so wird cd = CD, Bd = BD, cdB = CDB seyn.

§. 31. Eben so, wenn Bd = BD gemacht wird, und man fällt aus d, D senkrechte Linien dc, DC auf cC: so wird cA = AC, cdB = CDB, und cd = CD seyn.

§. 32. Wiederum, wenn man cA = CA, und dB = BD macht: so wird man ebenfalls cd = CD, Acd = ACD, und BDC = Bdc haben.

§. 33. Wenn es demnach noch mehrere Arten von nicht zusammenlaufenden geraden Linien geben sollte: so wird diejenige, wo A, B rechte Winkel sind, immer wegen der vollkommenen Gleichheit und Aehnlichkeit auf beyden Seiten von AB etwas voraus haben. Der Umstand, daß dD, cC nicht zusammenlaufen, läßt noch unbestimmt, ob die Entfernungen cd, CD immer gleich sind, oder grösser oder kleiner werden. Wie dem aber auch immer sey: so weiß man, daß es auf beyden Seiten von AB durchaus einerley Beschaffenheit damit habe.

§. 34. Man kann aber auch vermittelst schiefer Winkel gerade Linien ziehen, die nicht zusammenlaufen; und da ist allerdings die Frage, ob diese nicht von der erst betrachteten Art verschieden sind? Es seyn z. E. (Fig. XI.) die Winkel BAC = ABE, oder FAK = EBA, oder EBA + FAB = 180°: so folgt aus vorhin bemeldten Prop. XXVII und XXVIII, daß die Linien ED, FC ebenfalls nicht zusammenlaufen, so viel oder wenig schief die Winkel in A und B seyn mögen. Wollte man nun auch hier die Figur längs der Linie AB zusammenlegen: so würde man nichts Congruirendes erhalten, weil keine

Linie

Linie auf die andre und kein Winkel auf den andern passen würde. Und man würde höchstens daraus schliessen können, daß sich EB gegen FA eben so, wie AC gegen BD, verhalte; so daß z. E. wenn sich EB gegen FA näherte, sich eben so AC gegen BD nähern würde ꝛc.

§. 35. Man theile aber AB in zween gleiche Theile AG, GB. Aus G fälle man GH auf AC, und GI auf BE senkrecht: so wird man IG = GH, und AH = IB, und AGH = BGI erhalten. Und da AGB eine gerade Linie ist: so werden AGH = BGI Scheitelwinkel, und demnach IGH auch eine gerade Linie seyn. Da nun in I, H rechte Winkel sind: so läßt sich die Figur längs der Linie IH zusammenlegen; und es wird EI auf DI, und FH auf CH passen. Dadurch läßt sich also diese, vermittelst der schiefen Winkel A, B, gezogene Art von nicht zusammenlaufenden geraden Linien auf die vorhin betrachtete reduciren; weil hier in Absicht auf IH eben das gilt, was bey der 10ten Figur in Absicht auf AB gesagt worden. Man kann auch den Fall umkehren. Denn man setze, daß Anfangs ED, FC durch IH senkrecht wären gezogen worden: so darf man nur IG = GH machen, und durch G jede Linie AB ziehen; so wird man allemal auch AG = GB, und GAH = GBI erhalten.

§. 36. Es ist hiebey angenommen worden, daß sich aus AG = GB, GAH = GBI, und H = I = 90 Gr. auf die Gleichheit und Aehnlichkeit der beyden Triangel AGH, BGI schließen lasse. Dieses hat keinen Anstand. Denn man darf nur den Winkel GBI dergestalt auf GAH legen, daß GB auf GA falle: so wird G auf G, B auf A, und BE auf AC passen. Nun läßt sich aus G auf AC nur eine Perpendikulare GH ziehen, weil man sonst einen Triangel mit zween rechten Winkeln erhalten würde. Demnach fällt nicht nur die Linie BE auf AC, sondern insbesondre auch der Punkt I auf den Punkt H.

Und

Und so sind die Triangel AGH, BGI durchaus auf einander passend.

§. 37. Uebrigens hätte in dem §. 35 auch schlechthin nur GH auf AC senkrecht gezogen und gegen I verlängert werden können. Denn so würde man AG = BG, GAH = GBI, und AGH = BGI gehabt haben. Und damit wäre ebenfalls GIB = GHA = 90 Gr. und GH = GI gewesen. (Prop. XXVI. Libr. I. Elem. Euclid.)

§. 38. Da demnach in Absicht auf die Linie IH eben das gilt, was in der 10den Figur in Absicht auf die Linie AB gesagt worden: so sind die Linien ED, FC (Fig. 11.) in der That nicht von einer von den Linien dD, cC (Fig. 10.) verschiedenen Art. Dadurch wird aber allerdings die Theorie der Parallellinien abgekürzt, weil die Eigenschaften und Symptomata, so sich in Absicht auf die 10de Figur erweisen lassen, ohne Mühe auf die 11te Figur angewandt werden können.

§. 39. Ich werde demnach zu der 10den Figur zurück kehren, und die Voraussetzung, daß in A, B rechte Winkel sind, beybehalten. Es seyn nun in C ebenfalls rechte Winkel: so laufen erstlich auch AB und CD nicht zusammen. Die Frage kömmt nun eigentlich auf die Winkel in D an; und da müssen wir nothwendig drey Hypothesen annehmen. Denn es könnte

I°. BDC = 90 Gr.
II°. BDC > 90 Gr.
III°. BDC < 90 Gr.

seyn. Diese drey Hypothesen werde ich der Ordnung nach annehmen, und Folgen daraus ziehen. Es wird sich zeigen, daß diese Folgen ziemlich weit können und theils müssen getrieben werden, ehe man auf ein Quod est absurdum oder Quod est contra hypothesin verfällt. Der dritte Ausdruck Quod est contra Definitionem, oder auch per Definitionem, wird dabey gar nicht vorkommen, weil die Definition selbst wegbleibt, und, wenn man sie auch gebrauchen wollte, nichts beweisen würde.

Erste Hypothese.

§. 40. Es seyn demnach (Fig. XII.) AC, BD, AB, CD gerade Linien, und A, B, C, D rechte Winkel: so wird AB = CD, und AC = BD seyn. Man theile AC in AE = EC, und richte in E die Linie EF senkrecht auf: so läßt sich die Figur längs der Linie EF zusammenlegen, so daß EA auf EC, EAB auf ECD fällt. Setzt man nun, es seyn AB, CD nicht gleich: so ist entweder AB < CD, oder AB > CD. Im ersten Fall mache man Cb = AB, und ziehe Fb: so wird FbC = FDC = 90 Gr.; demnach werden in dem Triangel bFD zween rechte Winkel D, b seyn, welches ungereimt ist. (Prop. XVII.) Demnach kann nicht AB < CD seyn. Wäre nun ferner AB > CD: so würde b oberhalb D fallen, und wiederum einen Triangel von zween rechten Winkeln geben. Demnach kann auch nicht AB > CD seyn. Demnach ist nothwendig AB = CD. Und so fällt b auf D; und es ist zugleich auch BFE = DFE = 90°. Demnach auch AB = EF. Auf eben diese Art wird erwiesen, daß BD = AC sey, wenn man durch die Mitten von AB eine senkrechte Linie zieht.

§. 41. Es seyn wiederum (Fig. XIII. und XIV.) AC, BD, AB, CD gerade Linien, und in A, B, C, D rechte Winkel. Auf AC nehme man jeden beliebigen Punkt E, und richte aus demselben EF senkrecht auf: so wird EF = AB = CD, und in F werden rechte Winkel seyn. Man halbire AE in G, CE in I, und richte in G und I Perpendikularen GH, IK auf. Setzt man nun, es sey EF > AB: so mache man EL = AB; und

so

so wird auch EL = CD seyn (§. 40). Man ziehe HL, KL: und so ist HLE = HBA = 90 Gr. Ingleichem KLE = KDC = 90 Gr. welches klar erhellet, wenn man die Figur längs den Linien GH, IK zusammenlegt. Hieraus folgt aber, in Absicht auf die 13de Figur, daß HLK eine gerade Linie sey. Da nun auch HK eine gerade Linie ist: so würden zwo gerade Linien einen Raum schließen, welches nicht angeht. Demnach kann L nicht unterhalb, und aus gleichem Grunde auch nicht oberhalb F fallen. Und so müssen nothwendig EF = AB = CD, und in F rechte Winkel seyn. In Ansehung der 14ten Figur folgt eben dieses, weil sich aus Einem Punkt L nicht zwo Linien LH, LK senkrecht auf EL ziehen lassen. Demnach muß L in F fallen; und so sind in F rechte Winkel, und es ist EF = AB = CD.

§. 42. Hiedurch ist nun die erste Hypothese (§. 39.) zureichend charakterisirt, weil alle Perpendikularen FE = AB, und in F rechtwinklicht sind, sobald irgendwo 4 rechte Winkel A, B, C, D vorkommen.

§. 43. Es seyn nun wiederum (Fig. XV.) A, B, C, D rechte Winkel. Durch jeden Punkt K werde HKL schief gezogen. Aus K falle KE auf CA senkrecht; und es werde EG = EF nach Belieben angenommen, und in G, F Perpendikularen GI, FL aufgerichtet: so werden die beyden Triangel IHK, MLK einander gleich und ähnlich seyn. Denn in I, M sind rechte Winkel (§. 41.); und IK ist = GE = EF = KM; und IKH = MKL (§. 36. 37.).

§. 44. Da nun hierbey ferner GI = EK = FM ist (§. 41.): so sind die Linien GH, EK FL, jede um gleich viel länger als die nächst vorhergehende. Oder es ist

$$EK = GH + HI.$$

$$FL = EK + LM = EK + HI.$$

Demnach $FL = GH + 2HI.$

§. 45. Man ziehe ferner durch H die Linie HN auf GI senkrecht. Da nun G, I, K, E rechte Winkel sind: so ist auch HN = IK, und in N sind rechte Winkel (§. 41.). Demnach ist auch IH = KN (§. 40.). Und damit sind die Triangel IKH, NHK einander gleich und ähnlich. Demnach ist der Winkel HKN = IHK = KLM.

§. 46. Hieraus folgt ferner, daß, aus welchem Punkt k man auf GC eine Linie senkrecht fälle, der Winkel Hke = HKE seyn werde. Denn ek, in m verlängert, durchschneidet IK rechtwinklicht; und eben so sind auch in n rechte Winkel (§. 41.) Fällt man ferner ki aus k auf IG senkrecht: so ist auch ikn = 90 Gr. und damit ik = Hn. Demnach sind die Triangel ikH, nkH einander gleich und ähnlich, und folglich der Winkel Hke = HKE.

§. 47. Daraus wird ohne Mühe die Folge gezogen, daß die Linien LH, CG, gegen G verlängert, einander durchschneiden müssen. Denn weil die Linien FL, EK, GH, &c immer um einen gleichen Theil LM kürzer werden: so müssen die Punkte L, K, H, &c einmal unter CG kommen. Daß der Durchschnittswinkel beyder Linien LH, CG jeden Winkeln IKH, ikH, &c gleich sey, folgt ebenfalls ohne Mühe.

§. 48. Die Sache läßt sich nun folgendermassen umkehren. Es seyn G, F, rechte Winkel, und die Winkel IHL, HLF spitze, aber einander gleich: so wird jeder Winkel Hke = IHL = HLF seyn. Denn man halbire GF in E. Aus E richte man EK senkrecht auf; und durch K ziehe man IK ebenfalls senkrecht: so ist erstlich GIK = FMK, und IK = MK. (§. 30.) Da nun IKH = MKL, und IHK = KLM ist: so sind die Triangel HIK, LMK einander gleich und ähnlich; demnach der Winkel HIK = LMK; demnach auch LMK = KMF =

90 Gr. Da nun solchergestalt in I, M, G, F, rechte Winkel sind: so folgt schlechthin und durchaus Alles was vorhin (§. 43 — 47.) über die Figur gesagt worden. Jede Winkel Hke sind = HKE; und die Linien LH, FG, gegen G verlängert, schneiden sich unter einem Winkel, der dem Winkel IKH oder jedem Winkel ikH gleich ist.

§. 49. Es kann ferner die Sache noch auf folgende Art umgekehrt werden. Man setze GE = EF. In G, E, F, seyn rechte Winkel. Die Linie HL sey gerade; und es sey FL — EK = EK — GH. Man trage GH in FP, und EK in FM, und ziehe KM und KP: so werden die Winkel HKE = QKL = PKE, ingleichem die Winkel EKM = FMK, und QKM = LMK, und LM = MP seyn. Denn HKE, QKL sind Scheitelwinkel; demnach sind sie einander gleich. Wird ferner die Figur längs der Linie EK zusammengelegt: so fällt G auf F, GH auf FP; demnach KH auf KP, und folglich EKH auf EKP; und so ist EKH = EKP = QKL. Daß ferner EKM = FMK, und QKM = LMK sey, folgt aus dem §. 30, wenn man sich eine, mitten auf EF errichtete Perpendikulare, und längs derselben die Figur zusammengelegt gedenkt. Endlich ist PM = ML, weil ML = FL — EK, und PM = EK — GH ist, und weil vorausgesetzt worden, daß FL — EK = EK — GH sey. Nun sage ich ferner, daß EKM, FMK rechte Winkel sind, und folglich damit Alles gilt, was vorhin (§. 43. und folg.) über die Figur gesagt worden. Der Beweis, daß KMF ein rechter Winkel sey, gründet sich auf einen Lehnsatz, den ich im folgenden Paragraph vortragen werde, um hier die Ordnung der Gedanken nicht zu unterbrechen. Man setze demnach, die Winkel in M seyn schief, z. E. KMP < 90 Gr.: so wird KML > 90 Gr. seyn. Daraus folgt aber, daß, weil KM = KM, und ML = MP ist, der Winkel LKM < MKP sey. (§. seqq.) Dieses gehet aber

 nicht

nicht an. Denn vermöge des vorhin erwiesenen ist QKM = LMK, demnach > 90 Gr.; und EKM = KMF, demnach < 90 Gr. Da nun also

QKM > EKM

und hingegen QKL = EKP

ist: so bleibt, wenn man abzieht,

LKM > PKM.

Setzt man hingegen KMP > 90 Gr.: so wird KML < 90 Gr. seyn. Und damit ist auch MKE > QKM, und folglich, wenn man QKL = EKP abzieht, bleibt PKM > MKL. Da nun aber KMF > KML gesetzt worden, und KM = KM, ML = MP ist; so folgt hieraus, daß der Winkel PKM < MKL seyn müßte; welches aber mit dem erst gefundenen PKM > MKL nicht bestehen kann. Demnach läßt sich weder KMP > 90 Gr. noch KMP < 90 Gr. setzen; und so müssen in K rechte Winkel seyn. Da nun EKM = FMK erwiesen worden: so ist auch EKM = 90 Gr. Und so, weil in K, M, F, E rechte Winkel sind, gilt Alles, was §. 43. und folg. von der Figur gesagt worden. LH, FG, verlängert, laufen auf der Seite G zusammen, und durchschneiden sich unter einem Winkel, der jeden Winkeln ikH, IKH, LKM, ꝛc. gleich ist.

§. 50. Der Lehnsatz, von welchem erst die Rede war, ist folgender. Die Linien KM, PL (Fig. XVI.) durchschneiden sich in M schief; und es sey MP = ML. Man ziehe KL, KP: so wird, wenn KML > 90 Gr. ist, LKM < PKM seyn. Aus L falle Lq auf KM senkrecht; und eben so werde aus P die Linie Pr durch KM senkrecht gezogen, und pr = pP gemacht. Da nun pMP = qML, PM = ML, und in p, q rechte Winkel sind: so sind die Triangel pPM, qLM einander gleich und ähnlich. (§. 36.) Demnach ist Lq = Pp = pr. Wird also durch rL eine gerade Linie gezogen: so läuft diese mit KM auf keiner Seite zusammen. Denn zieht man durch M die

Linie

Linie MR auf KM senkrecht, und legt die Figur längs MR zusammen: so fällt p auf q, pr auf qL, und Rr auf RL. Demnach sind in R rechte Winkel. Damit ist nun rKM > LKM. Da aber rKM = PKM ist: so ist auch PKM > LKM. Und dieses war zu beweisen.

§. 51. Man sieht aus dem bisher gesagten, daß ich nicht nur die erste Hypothese und ihre Folgen für sich betrachtet, sondern auch einige andre zugleich mitgenommen habe, welche sowohl bey derselben zugleich statt haben und eine Folge davon sind, als auch dieselbe nach sich ziehen, und in beyden Absichten, das will sagen, gerade und umgekehrt damit verbunden sind. Man kann auch leicht voraus sehen, daß eben dadurch die beyden andern Hypothesen sehr merklich eingeschränkt und näher bestimmt werden; weil dabey nothwendig alle die Möglichkeiten ausgeschlossen bleiben, wodurch man auf die erste Hypothese verfallen würde. Uebrigens ist bey der ersten Hypothese besonders merkwürdig, daß ein einziges Rectangel alle andre von jeder Grösse und Verhältniß der Seiten nach sich zieht; und daß ebenfalls ein einziges Trapezium GHLF (Fig. XV.), wo G, F rechte Winkel sind, und IHL = HLF ist, sowohl die Rectangel als jede andre Trapezia und zusammenlaufende Linien zur Folge hat; und daß Alles dieses sich ebenfalls einfindet, wenn auch nur in Einem Fall FL — EK = EK — GH ist.

Zwote Hypothese.

§. 52. Da es aber bey Allem, was über die erste Hypothese gesagt worden, unausgemacht bleibt, ob dieselbe möglich oder unmöglich, wahr oder falsch ist: so werde ich zu der andern Hypothese fortschreiten, und ihre Symptomata untersuchen. Bey dieser sind in A, B, C, c (Fig. X.) rechte Winkel; BDC aber wird stumpf gesetzt.

setzt. Da nun wegen der rechten Winkel in A' und B, auf beyden Seiten der Linie AB, Alles einerley Bewandtniß hat: so wird es, überhaupt betrachtet, genug seyn, die Symptomata für die eine Seite zu beweisen, und es, wo etwan beyde Seiten in Betrachtung gezogen werden müssen, ausdrücklich anzuzeigen.

§. 53. Es seyn nun in A, B, (Fig. XVII.) rechte Winkel; und so auch in C, E, G, &c. Der Winkel D oder BDC sey stumpf: so ist erstlich DC < AB. Denn man setze CD = AB. Man halbire AC und richte die Perpendikulare MN auf. Wird nun nach dieser die Figur zusammengelegt: so fällt A auf C, AB auf CD; demnach NB auf ND; und so wäre NDC = NBA; der Voraussetzung zuwider, daß B ein rechter, D ein stumpfer Winkel sey. Wollte man CD > AB setzen: so würde auf eben die Art erhellen, daß NDC < NBA seyn müßte; welches noch mehr der Voraussetzung zuwider wäre. Demnach ist CD < AB.

§. 54. Auf eben die Art erhellet, daß auch BD < AC sey, wenn man mitten durch AB eine senkrechte Linie zieht.

§. 55. Ferner, so viel man auch auf AG senkrechte Linien EF, GH aufrichtet, oder aus BH auf AG herunterfällt, werden sie sämtlich unter sich ungleich seyn; oder man findet nicht zwo, die einander gleich wären. Es versteht sich, daß sie auf gleicher Seite des Striches AB genommen werden. (§. 52.) Man setze, es sey z. E. EF = GH. Wird demnach mitten auf EG die senkrechte Linie IK aufgerichtet, und die Figur längs derselben zusammengelegt: so wird KF auf KH fallen. Demnach werden in H rechte Winkel seyn. Damit ist aber auch D ein rechter Winkel. (§. 41.) Da nun dadurch die Voraussetzung umgestossen wird: so kann auch nicht EF = GH seyn.

§. 56.

§. 56. Es sind aber nicht nur die Senkstriche CD, EF, GH durchaus ungleich, (§. 55.) sondern jeder von AB entferntere ist kleiner als jeder nähere. Man setze erstlich, es sey EF > CD. Da nun auch AB > CD ist: so giebt es zwischen AC und zwischen CE nothwendig solche Perpendikularen, die einander gleich sind; weil sonst die Linie BF sich sprungsweise von AE entfernen müßte, um in F wiederum entfernter zu seyn, als sie in D war. Nun aber ist ein solches Entfernen der Natur der geraden Linie, die Gleichheit der Perpendikularen aber dem vorhergehenden §. 55 zuwider. Demnach kann auch nicht EF > DC seyn. Da nun auch EF = DC nicht angeht (§. 55.): so muß EF < DC seyn. Ist aber EF < DC: so wird auf eben die Art erwiesen, daß auch HG < EF sey. Denn man setze, es sey HG > EF: so giebt es zwischen EG und zwischen AE nothwendig solche Senkstriche, die einander gleich sind; weil sonst die Linie BH sich sprungsweise von AG entfernen müßte. Nun können aber auch nicht zween Senkstriche einander gleich seyn. Demnach geht es nicht an, daß GH > EF sey. Da nun auch nicht GH = EF seyn kann (§. 55.): so ist nothwendig GH < EF.

§. 57. Ich habe diesen Beweis auf das Gesetz der Continuität gegründet, weil er sich auf diese Art am kürzesten vortragen läßt. Ich glaube auch nicht, daß er dadurch minder evident und schlüßig sey, als wenn er auf die Euklidischen Grundsätze wäre gebaut worden. Indessen läßt er sich allerdings auch darauf gründen. Es seyn in A, B, E, G, (Fig. XVIII.) rechte Winkel. Die Linie BH gerade; (welches sich zwar für sich verstehet, aber der Umstände wegen erinnert werden muß) AB sey grösser als EF und GH; hingegen GH grösser als EF. Man halbire AG in N, und EG in M. Aus N, M, richte man Perpendikularen Nn, Mm auf. Ferner mache man Gb = AB, und Gf = EF, und ziehe nb, ingleichem fm bis in p verlängert. Endlich ziehe man aus p die Linie pP auf AG senkrecht herunter; und indem man QN = NP, und RM = MP macht, richte man in Q, R, die Perpendikularen Qq, Rr auf. Ich sage, es sey Qq = Rr. Denn, legt man die Figur längs der Linie Nn zusammen: so fällt AB auf Gb, und Qq auf Pp. Legt man aber die Figur längs der Linie Mm zusammen: so fällt EF auf GF, und Pp auf Rr; oder mr auf mp, wenn man MG auf ME legt. Demnach ist Pp = Rr. Da nun auch Pp = Qq ist: so ist Rr = Qq. Das Uebrige des Beweises ist nun wie §. 56.

§. 58. Was nun erst in Ansehung der Senkstriche EF, GH, &c (Fig. XVII.) erwiesen worden, gilt auch in Ansehung der Winkel F, H, &c. Sie sind sämtlich stumpf, durchaus ungleich, und jeder von B entferntere z. E. H, ist stumpfer, als jeder nähere F. Daß sie sämtlich stumpf sind, erhellet ohne Mühe daraus, daß jede GH < AB ist. Auf diese Art fällt AB (Fig. XVIII.) beym Zusammenlegen auf Gb. In b sind, wie in B, rechte Winkel. Und so ist in dem Triangel nbH der Winkel nHb < 90 Gr. Demnach nHG > 90 Gr. Daß ferner alle die Winkel BFE, BHG, &c von ungleicher Grösse seyn müssen, erhellet aus dem §. 48. Denn man setze z. E. BFE = BHG: so sind IFE, IHG spitze und einander gleich. Damit aber laufen die Linien BH, AG gegen G zusammen; und es ist auch IBA = IFE. Demnach IBA < 90 Gr. Beydes der Voraussetzung zuwider. Demnach kann kein Winkel IFE einem andern IHG gleich seyn. Daß endlich jeder entferntere Winkel BHG stumpfer seyn müsse, als jeder nähere BFE, folgt wiederum aus dem Gesetze der Continuität. Denn wäre BHG weniger stumpf als BFE: so würden zwischen BF und FH nothwendig Winkel vorkommen, die gleich

stumpf

stumpf wären; und so würden BH, AG gegen G zusammenlaufen, und in B gleich schiefe Winkel seyn. (§. 48.) Demnach muß durchaus BHG > BFE seyn. *)

§. 59. Man kann dieses Letztere auch auf folgende Art beweisen. Auf HD (Fig. XIX) nehme man die Distanzen HG, GF, FE, EA, AB, BC, CD, &c gleich und so klein man will. Aus allen diesen Punkten richte man Perpendikularen auf, und ziehe RP durch EI rechtwinklicht: so werden, unsrer zwoten Hypothese zufolge, die Winkel IMA, INB, IQC, IPD, &c ingleichem auf der andern Seite die Winkel IKF, IRH, &c sämtlich stumpf, und die auf beyden Seiten von EI gleich entfernten gleich seyn. (§. 30.) Man ziehe nun durch M die Linie rp auf AM senkrecht: so ist ebenfalls EiM = MnB, FkM = MqC, GlM = MpD, &c. Da nun MIE ein rechter Winkel ist: so ist MiE, und damit auch MnB und MNB noch mehr stumpf. Nun ist MNB = MLG; daher MlG = MpD noch mehr stumpf als MnB. Und eben so MPD noch mehr stumpf als MpD; folglich noch viel mehr als MnB, &c. Ferner, da MKF > 90 Gr. ist: so ist auch MkF = MqC noch stumpfer. Und da MQC > MqC: so ist auch MQC noch viel mehr stumpf, und damit auch MRH = MQC, und um so mehr noch MrH, &c. Man sieht leicht, daß auf eben die Art immer fortgeschlossen werden kann, und demnach die Winkel M, N, Q, P, &c desto mehr stumpf sind, je mehr sie von

(Lamberts Zusatz zu §. 58 auf einem besondern Blatte)

*) „Der eigentliche Beweis ist folgender:

„BFE (Fig. XVIII.) sey stumpfer als B und H. Man „lege die Figur wie §. 57. zusammen: so fällt F in f „unter H. Ferner B in b über F; (es mag nun über „oder unter H seyn.) Demnach sind (eben so wie §. „57.) Pp = Rr = Qq; welches die Hypothese um„stößt. &c."

„Auf eine ähnliche Art wird §. 69. verfahren.

von I entfernt sind. Daß eben dieses von jeden zwischen M, N, Q, P, &c fallenden Winkeln gelte, folgt daraus, daß AB, BC, CD, &c so klein angenommen werden können, als man will.

§. 60. Es ist ferner merkwürdig, daß diese in Einem fortgehende Vergrösserung der stumpfen Winkel M, N, Q, P, &c nicht nur von der absoluten Länge der Linien EA, EB, EC, ED, &c sondern auch von der absoluten Länge der Perpendikularen EI, AM, BN, &c abhängt. Um dieses noch zu zeigen: so seyn in A, B, C, D, E (Fig. XX.) rechte Winkel, und AB = BC = AD = DE. Demnach sind, vermöge unsrer zwoten Hypothese, die Winkel G, H, F, I sämtlich stumpf; und zwar H > G, und eben so I > H; demnach um so mehr I > G. Nun sind I und G nur darin verschieden, daß AE = AC doppelt so groß angenommen worden, als AD = AB. Man sieht daraus, wie mit jeder Verdoppelung die Winkel G, I stumpfer werden. Eben dieses gilt, wenn auch AE = AC schlechthin nur grösser als AD = AB genommen wird.

§. 61. In dieser Figur ist ferner AD > GB, und GB > CH. §. 56.) Man trage CH aus A in h, und ziehe Gh. Legt man nun die Figur längs der Linie BF zusammen: so fällt GH in Gh. Da nun in D rechte Winkel sind: so ist Gh > GD. Demnach auch GH > GB. Da nun GB > CH ist: so ist um so mehr noch GH > CH. Auf gleiche Art wird man FI > EF finden. Hingegen ergiebt sich FI < GF daraus, daß IF = IH, GF = GH, und FGH < FIH ist. So wird man auch, wenn man AG, GC zieht, die Winkel DAG, GAB, GCB einem halben rechten Winkel gleich, und hingegen AGC = DGB > 90 Gr. finden. &c. — Ich halte mich aber bey solchen Folgen, die leicht noch weiter können getrieben werden, nicht mehr länger auf, sondern werde die

bis-

bisher betrachtete Hypothese nun von der widersprechenden Seite zu zeigen vornehmen.

§. 62. Diese widersprechende Seite liegt nicht bloß darin, daß die von AB (Fig. XVII.) entferntern Senkstriche EF, GH immer kürzer werden. Denn man könnte gedenken, daß sie auf eine asymptotenmäßige Art sich verkürzen, ohne jemals = o oder gar negativ zu werden. Hingegen thun die immer stumpfer werdenden Winkel F, H mehr zur Sache. Denn daraus wird erhellen, daß sich BH gegen AG ungefähr eben so wie ein Cirkelbogen nähern müßte, dessen Mittelpunkt unter A ist, und dessen Diameter bis in B reicht. Ein solcher Cirkelbogen nehmlich durchschneidet nothwendig die Linie AG. Eben dieses wird sich nun auch von der Linie BH erweisen lassen. Da nun wegen der rechten Winkel in B, A kein solcher Durchschnitt statt haben kann: so folgt für sich, daß unsre zwote Hypothese dadurch werde ad absurdum gebracht seyn. Die Art, wie dieses geschehen kann, ist nun folgende.

§. 63. Es seyn in A, B, (Fig. XXI.) rechte Winkel. Auf AG nehme man nach Belieben drey Punkte E, F, G, so daß EF = FG sey, und richte aus denselben die Linien EH, FI, GK senkrecht auf: so ist zu beweisen, daß allemal EH — FI < FI — GK oder FI — GK > EH — FI sey, wenn die bisher betrachtete zwote Hypothese wahr ist. Nun sind, dieser Hypothese zufolge, die Winkel BHE, BIF, BKG nicht nur stumpf; sondern es ist BKG > BIF, und BIF > BHE. Zieht man demnach durch I die Linie LM senkrecht auf IF: so geht sie unter H und über K durch; und es ist EL = GM. (§. 30.) Man mache nun GN = EH, und ziehe IN: so wird, wenn man die Figur längs der Linie FI zusammenlegt, FE auf FG, EL auf GM, EH auf GN, demnach IL auf IM und IH auf IN fallen; und die Winkel HIL, MIK,

NIM

NIM werden gleich seyn. Da nun $BHE < BKG$: so ist $EHI > IKN$. Es ist aber $EHI = INK$. Demnach ist $INK > IKN$. Damit aber ist auch $IK > IN$. Man mache $In = IK$, und ziehe Mn: so ist der Winkel $IMK = IMn$. Demnach ist IMK stumpf. Demnach, ebenfalls vermöge der zwoten Hypothese, $GM = EL$ kleiner als FI. Ferner, da $ING = IHE$ ein spitzer Winkel ist: so ist nNM stumpf; und damit ist $Mn > MN$. Es ist aber $Mn = MK$. Demnach ist auch $MK > MN$; und eben so, weil $MN = LH$ ist: so ist auch $MK > LH$.

Demnach $GM - GK > EH - EL$.

Nun aber ist $GM = EL$.

Demnach $GM - GK > EH - GM$

Es ist aber, vermöge des erst erwiesenen,

$$FI > GM.$$

Folglich $2FI > 2GM$.

Demnach, wenn man addirt,

$$GM + 2FI - GK > 2GM + EH - GM;$$

Und folglich $2FI - GK > EH$;

Oder $FI - GK > EH - FI$.

Und dieses war zu beweisen.

§. 64. Die Perpendikel EH, IF, KG, &c nehmen demnach nicht etwan nur gleichförmig, sondern immer stärker ab. So klein demnach auch die Abnahme seyn mag: so muß, wenn man fortfährt in gleichen Entfernungen EF, FG, Perpendikularen aufzurichten, die Summe der Abnahmen nothwendig einmal anfangen grösser als AB zu werden. Und da dieses nicht geschehen kann, es sey denn, daß die Linie BK, bis dahin verlängert, sich unter die ebenfalls verlängerte AG herabsenke: so wird dadurch offenbar der Satz, daß BK, AG wegen der rechten Winkel in A, B nicht zusammenlaufen, umgestossen. Da sich aber dieser Satz nicht umstossen läßt: so fällt die zwote Hypothese ins Unmögliche. Sie wird aber noch

noch viel unmittelbarer dadurch ungereimt, daß die Linie BK auf beyden Seiten des Senkstriches AB sich unter die Linie GA herabsenken, und demnach die zwo Linien BK, AG einen Raum schließen müßten. — Laßt uns nun noch sehen, was aus der dritten Hypothese werden wird.

Dritte Hypothese.

§. 65. Man kann nun nach der Betrachtung der beyden ersten Hypothesen voraus vermuthen, daß bey der dritten immer spitzere Winkel und immer grösser werdende Perpendikularen zum Vorschein kommen werden. Hingegen läßt es sich eben daher auch nicht voraussehen, wie diese Hypothese in Absicht auf die Möglichkeit werde geprüft werden können. Ich werde demnach die Sache beschreiben, wie ich sie gefunden habe.

§. 66. Es seyn wiederum in A, B, C, (Fig. XVII.) und so auch in jeden Punkten E, I, G, &c rechte Winkel: so ist bey der dritten Hypothese der Winkel D oder BDC spitze. (§. 39.) Die erste Folge, die wir daraus ziehen, ist, daß DC > AB ist. Denn wäre CD = AB: so würde eben so wie §. 53. folgen, daß BDC ein rechter Winkel wäre. Und dieses würde der Voraussetzung zuwider seyn. Wollte man aber CD < AB annehmen: so würde, wenn man die Figur längs der mittlern Perpendikulare MN zusammenlegt, A auf C, B aber über D hinauf fallen; und damit würde NDC > 90 Gr. seyn; welches der Voraussetzung noch mehr zuwider wäre. Demnach ist CD > AB.

§. 67. Auf gleiche Art ist auch BD > AC.

§. 68. Ferner sind jede andre Perpendikularen EF, GH, nicht nur grösser als AB; sondern es ist keine der andern gleich, und jede entferntere GH ist grösser als jede nähere EF. Man setze erstlich, es sey GH = EF. Mitten

ten auf EG errichte man IK senkrecht: so sind in K rechte Winkel; und damit sind auch in D rechte Winkel. (§. 41.) Nun ist aber, vermöge der Hypothese, D ein spitzer Winkel. Demnach läßt sich nicht GH = EF setzen. Man kann aber ferner auch nicht EF < DC setzen: Denn da CD > AB ist: so würden nothwendig zwischen AC und zwischen CE Perpendikularen vorkommen, die einander gleich wären. Da nun dieses dem erst erwiesenen zuwider ist, und aus gleichem Grunde auch nicht EF = CD seyn kann: so ist EF > CD. Auf gleiche Art folgt auch, daß GH > EF seyn müsse. Und so ist auch jede zwischen A, C fallende Perpendikulare grösser als AB, und kleiner als CD. &c. Ich habe hierbey ebenfalls wiederum wie oben (§. 56.) das Gesetz der Continuität gebraucht. Will man aber lieber den Beweis auf die Euklidischen Grundsätze bauen: so kann dieses auf eine der im §. 57. angegebenen durchaus ähnliche Art geschehen. Denn man wird finden, daß für gegenwärtigen Fall, in der 18den Figur, b unterhalb, f aber oberhalb H, und damit auch p unter Fm kömmt, und dadurch an dem Satze Qq = Rr nichts geändert wird.

§. 69. In Ansehung der Winkel D, F, H, &c (Fig. XVII.): so sind hier nicht nur alle spitze, sondern auch alle ungleich; und jeder entferntere H ist spitzer als jeder nähere F. Daß alle spitze sind, folgt daraus, daß alle Perpendikularen grösser als AB sind, ohne Mühe, wenn man, z. E. in Absicht auf den Winkel F die Figur so zusammenlegt, daß E auf A falle. Denn so wird F oberhalb B fallen; und da in B rechte Winkel sind: so muß BFE < 90 Gr. seyn. Daß ferner nicht zween Winkel F, H gleich spitze sind, folgt aus dem §. 48, weil die Linien HF, GE, gegen A verlängert, sich durchschneiden, und in B schiefe Winkel seyn würden. Da nun dieses der Voraussetzung zuwider: so kann auch nicht F = H seyn.

End-

Endlich kann auch nicht H > F seyn. Denn wo dieses wäre: so würden zwischen BF und zwischen FH Winkel vorkommen, die einander gleich wären; und damit würde auch F = H seyn. (§. 48.) Demnach muß H < F seyn. Man kann, um dieses ohne Zuziehung des Gesetzes der Continuität zu beweisen, eben so wie §. 59 verfahren, wenn man in der 19den Figur in i rechte Winkel, und iMA < 90 Gr., IMA aber = 90 Gr. setzt. Denn so wird EIM = MNB spitze, und damit MnB = MIG noch kleiner, und eben dadurch MLG = MPD noch mehr kleiner. rc.

§. 70. Aus dem aber, daß die entferntern Winkel immer spitzer werden, folgt nun ferner, daß die Perpendikularen mit der Entfernung von A (Fig. XVII.) nicht etwan nur gleichförmig, sondern immer mehr grösser werden, so daß sich BH, verlängert, von AG, ebenfalls verlängert, dergestalt entfernt, daß die Perpendikularen grösser werden, als jede gegebene Grösse. Es seyn in A, B (Fig. XXII.) rechte Winkel. Man nehme nach Belieben die Punkte E, F, G, so daß EF = FG sey, und richte aus denselben die Perpendikularen EH, FI, GK auf: so sind, vermöge unsrer dritten Hypothese BHE, BIF, BKG spitze Winkel, und jeder folgende spitzer als der vorhergehende. Zieht man demnach durch I die Linie LM auf FI senkrecht: so geht LM oberhalb H und unterhalb K durch, weil HIF < 90 Gr. ist. Man mache GN = EH, und ziehe INn. Da nun EL = GM ist (§. 30.): so fällt N unterhalb M. Und indem man die Figur längs der Linie FI zusammenlegt, wird IH auf IN, IL aber auf IM fallen; und die Winkel LIH, KIM, MIN werden gleich seyn. Denn LIH fällt beym Zusammenlegen auf MIN; und LIH, KIM sind Scheitelwinkel. Da nun ferner IHE auf ING fällt: so ist ING = IHE; demnach auch INK = BHE. Nun aber ist BHE > IKN;

demnach ist ebenfalls $INK > IKN$. Daraus folgt aber $IK > IN$. Man mache also $In = IK$, und ziehe Mn: so ist $Mn = MK$, und der Winkel $IMK = IMn$ stumpf; demnach IMG spitze. Dadurch ist aber, ebenfalls vermöge der dritten Hypothese, $GM > FI$, und damit auch $EL > FI$, weil $EL = GM$ ist. Da nun ferner $INM = BHE$ spitze ist: so ist MNn stumpf, und damit $Mn > MN$. Es ist aber $Mn = MK$, $MN = LH$; demnach $KM > LH$; und damit

$$GK - GM > EL - EH.$$

Nun aber ist $GM = EL$.

Demnach $GK - GM > GM - EH$.

Da nun, vermöge des erst erwiesenen,

$$GM > FI,$$

und $2GM > 2FI$:

so ist, wenn man addirt,

$$GK + 2GM - GM > GM + 2FI - EH.$$

Folglich $GK > 2FI - EH$;

oder $GK - FI > FI - EH$.

Demnach wächst bey gleich zunehmenden Entfernungen AE, AF, AG, die Perpendikulare GK in Absicht auf FI um ein mehrers als FI in Absicht auf EH. Da nun dieses von jeden folgenden Entfernungen gilt: so wird die Summe aller Zunahmen oder Incrementen endlich grösser als jede gegebene Größe.

§. 71. Dadurch fällt nun der Unterschied zwischen einer geraden und krummen Linie eben so weg, wie bey der zwoten Hypothese. (§. 64.) Indessen, da es sich bey der zwoten Hypothese dadurch erweisen ließ, daß sich die Linie BK auf beyden Seiten des Senkstriches AE unter die Linie AG herabzog: so hat man bey der dritten, wo sich BK von AG auf beyden Seiten unendlich entfernt, nichts dergleichen zu befahren. Es macht aber eben dieses Entfernen, daß, wenn man ja noch einen andern Beweis

weis der Unmöglichkeit der dritten Hypothese, verlangt, derselbe auf eine andre Art gefunden werden muß. Ich merke inzwischen an, daß vermittelst der §. 64 und 70. eine Menge von Einwendungen wegfällt, die man sonst wider die Parallellinien und deren von verschiedenen Geometern versuchte Beweise gemacht hat. Denn die ganze Sache kömmt auf die bisher betrachteten drey Hypothesen an. Nach der erstern laufen die Linien BK, AG in immer gleicher Entfernung fort. Nach der zwoten durchschneiden sie sich auf beyden Seiten von AB. Nach der dritten nimmt ihre Entfernung auf beyden Seiten immer mehr zu, und wird grösser als jede gegebene Entfernung. Demnach fallen alle Einwendungen weg, die sich auf ein asymptotisches Annähern oder auf ein asymptotisches Entfernen gründen würden; wobey nehmlich die Entfernungen EH, IF, GK, &c sich einer gewissen Grösse immer mehr näherten, ohne sie jedoch zu erreichen. Eben so fallen auch diejenigen Einwendungen weg, wobey die zwote Hypothese zum Grunde liegen oder vorausgesetzt würde; wie z. E. wo zu drey rechten Winkeln A, B, C der vierte H stumpf, demnach die Summe > 360 Gr. oder in einem Triangel die Summe der drey Winkel > 180 Gr. angenommen würde, ꝛc weil die zwote Hypothese an sich wegfällt.

§. 72. In Ansehung des immer mehrern Entfernens, so bey der dritten Hypothese vorkömmt, könnte man anstehen, ob die aus jeden Punkten E, F, G, &c aufgerichteten Perpendikularen die Linie BK alle noch schneiden, so groß man auch AE, AF, AG, &c annehmen würde. Nun sehe ich zwar nicht, wie bey diesem Anstande BK eine gerade Linie bleiben könnte. Indessen wenn es auch wäre: so hat es auf die vorhergehenden Sätze keinen Einfluß. Die Vergrösserung, oder das Anwachsen der Perpendikularen, so weit diese nehmlich aus jeden Punkten H, I, K, &c auf AG können gefällt werden, wird dadurch nicht nur nicht angefochten, sondern noch um desto merklicher. Und eben dieses findet auch in Ansehung der Winkel H, I, K statt, welche dadurch nicht nur bis auf einen bestimmten Grad, sondern vollends bis auf 0 kleiner werden würden.

§. 73. Bey der dritten Hypothese ist in jedem Triangel die Summe der drey Winkel kleiner als 180 Gr. Da sich jeder Triangel in zween rechtwinklichte zerfällen läßt, weil bey jedem nothwendig wenigstens zween Winkel spitze sind: so werde ich diesen Satz erstlich von den rechtwinklichten Triangeln erweisen. Es sey ein solcher BAE. Man ziehe HB auf BA, und HE auf EA rechtwinklicht: so ist $BH > AE$, und $EH > AB$. (§. 66. 67.) Trägt man demnach den Triangel BHE in EaB, so daß BH in Ea, und EH in Ba falle: so fällt aB ausserhalb ABH, und aE ausserhalb AEH. Demnach ist der Winkel

$$aBE > ABE,$$

und $\quad aEB > AEB.$

Folglich, wenn man addirt,

$$aBE + aEB > ABE + AEB.$$

Es ist aber die Summe dieser vier Winkel = 180 Gr.

Demnach ist $\quad aBE + aEB > 90$ Gr.

und $\quad ABE + AEB < 90$ Gr.

Folglich $\quad ABE + AEB + BAE < 180$ Gr.

Die Besorgniß, als möchten BH, EH einander nicht schneiden, hat hier ebenfalls nichts zu sagen; weil, wenn es auch wäre, die Linien Ba, Ea nur um so mehr noch ausserhalb BAE fallen würden.

§. 74. Nun seyn in jedem Triangel AGC (Fig. XX.) die Winkel A, C spitze. Aus G falle GB auf AC senkrecht: so ist

$$AGB + GAB + ABG < 180 \text{ Gr.}$$
$$CGB + GCB + CBG < 180 \text{ Gr.}$$

Dem-

Demnach die Summe

$$AGC + GAC + GCA + ABG + CBG < 360 \text{ Gr.}$$

Es ist aber $ABG + CBG = 180$ Gr.

Demnach $AGC + GAC + GCA < 180$ Gr.

§. 75. Da in einem gleichseitigen Triangel ABC (Fig. XXIII.) die Winkel A, B, C gleich sind: so ist, bey der dritten Hypothese, jeder derselben kleiner als 60 Gr.

§. 76. Man ziehe nun in einem gleichseitigen Triangel ABC aus jedem Winkel senkrechte Linien auf die gegenüber stehende Seite: so werden sowohl die Winkel als die Seiten halbirt; und die Perpendikularen haben einen gemeinsamen Durchschnittspunkt D. Alles dieses läßt sich durch das Zusammenlegen der Figur längs jeder Perpendikulare leicht erweisen. Und eben daraus wird auch gefolgert, daß die Winkel in D sämtlich gleich, und demnach jeder = 60 Gr. ist. Ferner, da der Winkel $ACG < GAC$: so ist auch $AG < GC$, oder $GC > AG$. Hingegen wegen des rechten Winkels in G, ist $AC > GC$. Demnach ist die Perpendikulare zwar kleiner als jede Seite, aber grösser als die Hälfte einer Seite.

§. 77. Man beschreibe nun auf BD noch einen gleichseitigen Triangel BDd. Da nun auch in diesem, jeder Winkel < 60 Gr. ist; (es versteht sich bey der dritten Hypothese:) so fällt die Seite Dd innerhalb BDF, weil BDF = 60 Gr. ist; und so muß die aus B auf Dd fallende Perpendikulare Bf ausserhalb ABC fallen. Demnach ist $Df > Dg$. Es ist aber, wegen des rechten Winkels in F, $Dg > DF$; demnach, um desto mehr $Df > DF$. Da nun $Df = \frac{1}{2} Dd = \frac{1}{2} DB = \frac{1}{2} DA$ ist: so ist $\frac{1}{2} DA > DF$, und $DA > 2DF$; demnach auch $AF > 3DF$, oder $DF < \frac{1}{3} AF$. Dieses hat bey der dritten Hypothese statt. Denn bey der ersten läßt sichs leicht erweisen, daß $DF = \frac{1}{3} AF$ sey. Die zwote Hypothese,

 wobey

wobey AF < $\frac{1}{3}$ DF seyn würde, fällt an sich weg. Und demnach kann DF wenigstens nicht grösser als $\frac{1}{3}$ AF seyn.

§. 78. Ferner ist, bey der dritten Hypothese, in jedem Triangel KLM (Fig. XVI.) die Summe zweener Winkel LKM + KLM kleiner als der aussen an dem dritten liegende Winkel LMq. Denn es ist

LMK + LKM + KLM < 180 Gr.
Hingegen 180 Gr. = LMK + LMq.
Demnach LKM + KLM < LMq.

Und wenn KM = ML ist: so ist LKM kleiner als die Hälfte von LMq.

§. 79. Man sieht leicht, daß sich auf diese Art bey der dritten Hypothese noch weiter gehen läßt; und daß sich ähnliche Sätze auch bey der zwoten finden lassen, doch mit ganz entgegengesetztem Erfolge. Ich habe aber vornehmlich bey der dritten Hypothese solche Folgsätze aufgesucht, um zu sehen, ob sich nicht Widersprüche äußern würden. Aus Allem sah ich, daß sich diese Hypothese gar nicht leicht umstossen läßt. Ich werde demnach noch einige solcher Folgsätze anführen, ohne darauf zu sehen, wiefern sie auch bey der zwoten Hypothese mit gehöriger Veränderung gezogen werden können. Die erheblichste von solchen Folgen ist, daß, **wenn die dritte Hypothese statt hätte, wir ein absolutes Maaß der Länge jeder Linien, des Inhalts jeder Flächenräume und jeder körperlichen Räume haben würden.** Dieses stößt nun einen Satz um, den man ohne Bedenken unter die Grundsätze der Geometrie rechnen kann, und woran bisher noch kein Mensch gezweifelt hat, daß es nehmlich **kein solches absolutes Maaß** gebe. Es machte zwar **Wolf** einen Lehrsatz daraus, indem er die Definition der Grösse (Quantitas) so einrichtete, daß er im Folgenden daraus herleiten konnte: Quantitas dari sed non per se intelligi potest.

Allein

Allein dieser Lehrsatz muß, so wie die Definition, geändert werden, weil es unstreitig Grössen giebt, die für sich kenntlich sind, und eine bestimmte Einheit haben. Bey Linien, Flächen und körperlichen Räumen gilt derselbe allerdings; und da glaube ich nicht, daß man, um ihn in der Geometrie anzubringen, erst eine Definition dazu zurechte machen müßte.

§. 80. Um aber die erst erwähnte Folge zu beweisen: so seyn in A, B, C, D, E (Fig. XX.) rechte Winkel; und es werden, bey der dritten Hypothese, G, F, H, I spitze, und zwar $H < G$, und $I < H$; und eben so $F < G$ und $I < F$ seyn. Nun sage ich, der Winkel G sey das Maaß des Viereckes ADGB, wenn nehmlich $AB = AD$ ist; und eben so sey der Winkel I das Maaß des Viereckes ACIE, wenn $AC = AE$ ist. Denn, mit Beybehaltung der Gleichheit der Seiten $AB = AD$ und der rechten Winkel A, B, D, wird der spitze Winkel G bey keinem andern Vierecke passen, als bey solchen, deren Seiten AB, AD die absolute Länge von AB, AD haben. Man nehme z. E. grössere Seiten $AE = AC$, und mache in E, C rechte Winkel: so ist bey der dritten Hypothese der Winkel $I < G$. Demnach paßt G nicht auf I. Wäre $AE = AC$ kleiner als $AD = AB$ genommen worden: so würde $I > G$ herausgekommen seyn; und so würde G ebenfalls nicht auf I gepaßt haben. Demnach ist der Winkel G das absolute Maaß des Viereckes ADGB. Da die Winkel ein für sich kenntliches Maaß haben: so dürfte man z. E. wenn $AB = AD$ ein Pariser Fuß, und dabey der Winkel $G = 80$ Gr. wäre, nur sagen, man soll das Viereck ADGB so groß machen, bis der Winkel $G = 80$ Gr. würde: so werde man die absolute Länge eines Pariser Fußes auf $AB = AD$ haben. Diese Folge hat etwas Reizendes, welches leicht den Wunsch abdringt, die dritte Hypothese möchte doch wahr

 seyn!

seyn! Allein ich wünschte es, dieses Vortheils unerachtet, dennoch nicht, weil unzähliche andre Unbequemlichkeiten dabey mit seyn würden. Die trigonometrischen Tafeln würden unendlich weitläuftig; und die Aehnlichkeit und Proportionalität der Figuren würde ganz wegfallen; keine Figur ließe sich anders als in ihrer absoluten Größe vorstellen; um die Astronomie wäre es übel bestellt; u. s. w.

§. 81. Jedoch dies sind Argumenta ab amore & inuidia ducta, die aus der Geometrie, so wie aus allen Wissenschaften, ganz wegbleiben müssen. Ich wende mich demnach wiederum zu der dritten Hypothese. Bey dieser ist nicht nur, wie wir vorhin gesehen haben, in jedem Triangel die Summe der drey Winkel kleiner als 180 Gr. oder zween rechte Winkel; sondern der Unterschied von 180 Gr. wächst schlechthin nach dem Flächenraume des Triangels; das will sagen: wenn von zween Triangeln der eine einen grössern Flächenraum hat, als der andre: so ist in dem erstern die Summe der drey Winkel kleiner als sie in dem andern ist. Ich werde diesen Satz hier nicht so ausführlich beweisen, als ich ihn vortrage, sondern von dem Beweise nur so viel anführen, daß sich das Uebrige daraus überhaupt begreifen läßt. Es sey z. E. in dem Triangel ACB (Fig. XXIII.) der Triangel EFG, so daß des letztern Ecken auf die Seiten des erstern stossen. Da auf diese Art EFG ganz in ABC ist: so ist der Raum des erstern unstreitig kleiner als der Raum des letztern. Nun ist die Summe der Winkel

$$EFG + EGF + GEF = 180 \text{ Gr.} - a.$$
$$EGA + EAG + AEG = 180 \text{ Gr.} - b.$$
$$FGB + GBF + GFB = 180 \text{ Gr.} - c.$$
$$FCE + FEC + EFC = 180 \text{ Gr.} - d.$$

Hin-

Hingegen

$$EGA + EGF + FGB = 180 \text{ Gr.}$$
$$AEG + GEF + FEC = 180 \text{ Gr.}$$
$$EFC + EFG + GFB = 180 \text{ Gr.}$$

Ziehet man die Summe dieser drey letztern Gleichungen von der Summe der vier erstern ab: so bleibt

$$CAB + ABC + BCA = 180 \text{ Gr.} - a - b - c - d.$$

Da demnach hier nicht nur a, sondern a + b + c + d von 180 Gr. abgezogen werden muß: so sieht man, daß sich bey dem Triangel ABC alle Defecte a, b, c, d der vier Triangel AEG, ECF, FBG, GEF zusammenhäufen, und demnach die Summe seiner drey Winkel um so viel mehr kleiner als 180 Gr. ist. Kann das kleinere Dreyeck nicht ganz in das grössere gelegt werden: so steht etwas davon voraus, und dieses wird abgeschnitten und in das hervorstehende des grössern Dreyeckes gelegt, und allenfalls so fortgefahren, bis das nunmehr in Theile zerschnittene kleinere Dreyeck ganz im grössern liegt. Der im grössern unbedeckt bleibende Raum wird in Triangel zerfällt. So viel nun die Summe aller Winkel in diesen Triangeln kleiner ist als eben so vielmal 180 Gr. um eben so viel ist die Summe der drey Winkel des grössern vorgegebenen Dreyeckes kleiner als die Summe der drey Winkel des vorgegebenen kleinern Dreyeckes.

§. 82. Wenn es bey der dritten Hypothese möglich wäre, mit gleichen und ähnlichen Triangeln einen grössern Triangel zu bedecken: so würde es sich auch leichte darthun lassen, daß bey jedem Triangel der Ueberschuß von 180 Gr. über die Summe seiner drey Winkel dem Flächenraume des Triangels proportional wäre. Indessen da sich dieser Ueberschuß nach dem Raume richtet: so läßt sich dennoch eine solche Proportionalität auf eine andre Art gedenken. Man setze z. E. zween Triangel. Der eine habe doppelt so viel Flächenraum als der andre:

 so

so wird ersterer, so viel man will, zerschnitten, doppelt auf den andern gelegt werden können. Und wenn der kleinere um a Gr. in Absicht auf die Summe seiner Winkel von 180 Gr. abgeht: so wird der grössere um 2a Gr. davon abgehen. — Ich werde nun noch folgende Anmerkung beyfügen. Bey der zwoten Hypothese kommen ganz ähnliche Säze vor, nur daß dabey in jedem Triangel die Summe der drey Winkel grösser als 180 Gr. wird. Der Ueberschuß proportionirt sich ebenfalls nach dem Flächenraume des Triangels. Hierbey scheint mir merkwürdig zu seyn, daß die zwote Hypothese statt hat, wenn man statt ebener Triangel spährische nimmt, weil bey diesen sowohl die Summe der Winkel grösser als 180 Gr. als auch der Ueberschuß dem Flächenraume des Triangels proportional ist. Noch merkwürdiger scheint es, daß, was ich hier von den sphärischen Triangeln sage, sich ohne Rücksicht auf die Schwierigkeit der Parallellinien erweisen lasse, und keinen andern Grundsaz voraussezt, als daß jede durch den Mittelpunkt der Kugel gehende ebene Fläche die Kugel in zween gleiche Theile theile. Ich sollte daraus fast den Schluß machen, die dritte Hypothese komme bey einer imaginären Kugelfläche vor. Wenigstens muß immer Etwas seyn, warum sie sich bey ebenen Flächen lange nicht so leicht umstossen läßt, als es sich bey der zwoten thun ließ.

§. 83. Was ich erst von den Triangeln sagte, gilt auch von den viereckichten Figuren. Weil jede sich in zween Triangel zerfällen läßt: so beträgt, bey der dritten Hypothese, die Summe der vier Winkel eines Viereckes weniger als 360 Gr. und der Unterschied ist dem Flächenraume des Viereckes proportional. Es seyn nun (Fig. XIX.) in H, r, G, F, E, A, &c rechte Winkel, und HG = GF = FE = EA = &c so sind bey der dritten Hypothese die Perpendikularen Hr, Gl, Fk, Ei,

AM,

AM, Bn, &c nicht nur der Ordnung nach grösser, sondern sie nehmen immer um mehr zu. Dieses macht, daß auch der Flächenraum, die Vierecke HrlG, GlkF, FkiE, &c immer grösser, und eben so wie die Perpendikularen immer um mehr grösser werden. Demnach ist die Summe der 4 Winkel nicht nur immer kleiner, sondern immer um mehr kleiner als 360 Gr. Da nun die Linien rp, HD gerade sind: so lassen sich die sämtlichen Vierecke, oder so viel deren hintereinander liegend genommen werden, in Eines zusammennehmen; und da die an einander stossenden Winkel in l, k, i, &c G, F, E, &c immer zusammen = 180 Gr. sind: so werden bey jedem neu addirten Vierecke von der Summe der Winkel 360 Grade weggeworfen. Und so ist z. E. die Sumine der Winkel

H, r, l, G $= 360$ Gr. $- \alpha$.
H, r, k, F $= 360$ Gr. $- 2\alpha - \beta$.
H, r, i, E $= 360$ Gr. $- 3\alpha - 2\beta - \gamma$.
H, r, M, A $= 360$ Gr. $- 4\alpha - 3\beta - 2\gamma - \delta$.
&c &c &c

Kann man nun damit immer fortfahren: so wird nothwendig folgen, daß man zuletzt auf Vierecke verfällt, in welchen die Summe der vier Winkel kleiner als drey rechte Winkel sind. Es sey HrpD ein solches Viereck. Da nun bereits in H, R, D drey rechte Winkel sind: so ist H + R + D + p $>$ 270 Gr. Und dieses stößt die Folge, und mit derselben entweder die ganze dritte Hypothese, oder den Satz um, daß die aus G, F, E, A, B, &c errichtete Perpendikularen irgend aufhören, die Linie rp zu schneiden. Allein, wenn auch dieses wäre: so würden die Ordinaten dennoch bis ins Unendliche wachsen, und demnach der Raum des letzten Viereckes so vielmal den Raum des ersten HRLG fassen, daß die Summe der Winkel kleiner als 270 Gr. wäre. Indessen werde ich darauf nicht bestehen, weil man allerdings vorerst die Ver-

Vermuthung heben müßte, es möchten die Vierecke gerade aufhören möglich zu seyn, wo die Summe der vier Winkel = 270 Gr. würde. Es kömmt demnach vielmehr darauf an, ob die aus den Punkten G, F, E, A, B, &c errichteten Perpendikularen die Linie rp sämtlich schneiden? Wollte man diese Frage auf die bloße **Vorstellung** der Sache ankommen lassen; so sage ich nochmals, daß dabey der Begriff einer geraden Linie ganz wegfällt. Und ich würde, statt des 11ten Euklidischen Grundsatzes, allemal lieber als für sich evident annehmen, **daß eine Linie, die die Perpendikulare *Hr* rechtwinklicht schneidet, und sich sodann z. E. längs der Perpendikulare *Dp*, ohne diese zu schneiden, aufwärts zieht, keine gerade Linie seyn könne.**

§. 84. Da es aber die Frage ist, ob sich, ohne Zuziehung neuer Grundsätze, die dritte Hypothese vermittelst der übrigen Euklidischen Grundsätze umstossen lasse: so bleiben bey der gegenwärtigen Betrachtung noch zween Wege zu versuchen. Der erste, wenn sichs aus der dritten Hypothese selbst folgern ließe, daß die Perpendikularen Gl, Fk, Ei, &c sämtlich die Linie rp schneiden müssen. Könnte dieses geschehen: so würde, vermöge des vorhin erwiesenen, die Hypothese sich selbst umstossen. Ich habe es nicht versucht, weil es mir sehr wenig wahrscheinlich vorkam, und dabey immer Ausflüchte bleiben. Der andre Weg ist, wenn sich erstbemeldtes Durchschneiden aus den übrigen Euklidischen Grundsätzen herleiten läßt. Auch hierüber habe ich nichts gefunden, das mir völlig Genügen gethan hätte; ungeachtet sich die Sache vielfältig auf solche Sätze reduciren läßt, die ganz augenscheinlich wahr sind. Es seyn z. E. in A, D, C (Fig. XX.) rechte Winkel; und man steht an, ob CH, DH sich schneiden. Es sey AC > AD: so trage man AC aus A in E, und ziehe EI auf AE senkrecht: so ist erstlich für sich klar, daß, wenn EI, CI sich schneiden, der Durchschnitt H nothwendig auch statt habe. Setzt man nun auf EC einen gleichseitigen Triangel, wovon jede Seite = EC sind: so wird EIC allemal innerhalb dem gleichseitigen Triangel fallen. Allein den Beweis dazu habe ich nicht finden können. Hingegen ließ es sich beweisen, daß, wenn man den gleichseitigen Triangel umlegt, EAC ganz in denselben fällt, weil man weiß, daß A ein rechter Winkel ist.

§. 85. Wiederum sey AB = AD; in A, D, B rechte Winkel; und man steht an, ob DG, BG sich schneiden? Trägt man nun AD aus D in E, und beschreibt auf AE einen gleichseitigen Triangel: so wird allemal der Durchschnittspunkt G in denselben fallen. Hier wäre nun nur zu beweisen, daß in jedem gleichseitigen Triangel jeder Winkel grösser als 45°, das will sagen, grösser als der Winkel GAD = GAB ist. Daß jeder grösser sey als der Winkel GEA, wenn nehmlich AC = AE gemacht wird, das kann bey der dritten Hypothese leicht erwiesen werden.

§. 86. Wiederum, wenn man ansteht, ob EI, CI sich schneiden: so darf man nur AG mitten durch A ziehen, so daß GAD = GAB = 45 Gr. sey. Fällt man nun aus jedem Punkt G eine senkrechte GD auf AE, und man kann beweisen, daß AD grösser als die Hälfte, oder auch nur grösser als $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ꝛc von AG sey: so wird der Durchschnitt I ebenfalls erwiesen seyn, weil AI kleiner als das 2, 3, 4, ꝛc fache von AE seyn wird. Daß es Fälle giebt, wo AD > $\frac{1}{2}$ AG ist, wird leicht erwiesen.

§. 87. In dem Cirkel AC (Fig. XXIV.) seyn AE, EB, BF, FC, &c Octanten. Man ziehe die Vierecke ABCD, EFHG: so werden die Durchschnittspunkte I, K, L ebenfalls in einem concentrischen Cirkel herumliegen,

gen, und die Winkel IMK, KML, &c Octanten seyn. Man ziehe nun IL: so wird leicht bewiesen, daß MP > PK, demnach MP > ½ MK oder MP > ½ MI ist. Denn ERK = 90 Gr. Demnach EKR < 90 Gr. Folglich IKL > 90 Gr.; IKM > 45 Gr. Da nun IMK 45 Gr. ist: so ist PM > PK. Auf diese Art läßt sichs von jedem Cirkel auf einen kleinern schliessen. Man müßte nur auch beweisen können, daß, wenn man jenen, so viel man will, vergrössert, dieser nicht zurücke bleibe. Und dieses wird man erhalten, sobald man erweisen kann, daß entweder ER = RK, oder auch nur ER < IK, oder ER < RM, oder, ohne Rücksicht auf den äussern Cirkel, der Winkel IKL stumpf ist.

§. 88. Man sieht aus Allem diesem, daß, so leicht die zwote Hypothese umzustossen war, es noch ganz im Gegentheil mit der dritten viel härter halte. Ich übergehe noch mehrere solcher Versuche; und werde nun (Fig. XIX.) AB = BC = CD = &c und in A, B, C, D &c rechte Winkel, und AM = BN = CQ = DP = &c setzen. Dabey sind nun die Winkel AMN = MNB = BNQ = NQC = CQP = QPD = &c, zufolge der dritten Hypothese, sämtlich spitze, und MN = NQ = QP = &c. Das will nun sagen: MNQP ist nicht eine gerade Linie, sondern ein Theil eines regulären Vieleckes, das sich in einen Cirkel beschreiben läßt, dessen Mittelpunkt unterhalb M auf jeder der Linien MA, NB, QC, PD, &c ist. (§. 20.) Da nun damit B, C, D, &c nicht mehr rechte Winkel seyn können: so wird dadurch die Voraussetzung und mit derselben die dritte Hypothese umgestossen.

III. Noch