Leipziger Magazin
für
reine und angewandte
Mathematik.

Viertes Stück, 1786.

I.

Anmerkungen über die Bestimmung des körperlichen Raumes jeder Segmente von solchen Körpern, welche durch die Umdrehung einer conischen Section um ihre Axe entstehen. Von J. H. Lambert.

§. 1.

Gegenwärtige Abhandlung enthält solche Fälle, wo die bloß geometrische Betrachtung der Figur bessere Dienste thut, als jede Kunstgriffe der Integral-Rechnung; und wobey man folglich Anlaß nehmen kann, letztere durch die erstern mit neuen Kunstgriffen zu bereichern. Da man noch dermalen keine directe Methode hat, aus den Differentialgrössen ihre Integralien zu finden, sondern es immer den Differentialien, gleichsam muß ansehen können, ob und wie sie sich integriren lassen: so bestehen die feinsten Kunstgriffe der Integralrechnung noch bisher nur darin, daß man verwickelte Differentialformeln dergestalt zu verwandeln wisse, bis man bey solchen Verwandlungen auf Formeln verfällt, von welchen man die Integralien kennt. So glücklich aber ist man nicht bey jeder Verwandlung; und daher giebt es auch Fälle, wo man Jahre lang eine nach der andern versuchen müßte, bis man endlich eine solche fände, die man mit gutem Fortgange anwenden kann, und die man allerdings gleich Anfangs hätte müssen finden können, wenn eine directe Methode zu integriren bekannt wäre.

§. 2. Ich werde diese Abhandlung mit demjenigen anfangen, was mir den Anlaß dazu gegeben hat. Und dieses ist das **Visiren der Fässer**. Dafür hatte ich, in einer darüber bereits (1765) im Drucke erschienenen Abhandlung *), die Regel angegeben, daß man ein Faß **nicht müsse als das arithmetische Mittel von zween Cylindern** ansehen, wovon der Eine um das **Faß**, der Andre **in dem Fasse** beschrieben wird; **sondern** daß man den Inhalt sehr genau finde, wenn man **zween Drittel** von dem **erstern** zu **Einem Drittel** von dem **letztern** addirt. Diese Regel hatte ich, mit Weglassung einiger kleinern Theile, aus einer Formel hergeleitet, die viel verwickelter war; und ich behielt sie sowohl wegen der Leichtigkeit als wegen der hinlänglichen Genauigkeit bey **). Es fiel mir erst nachgehends an, die

*) S. die Visirkunst im 1. Theile der Beyträge, Seite 314—368.

**) Eben diese Regel ist doch schon über 40 Jahre früher, unmittelbar aus der Gleichung für die Ellipse hergeleitet worden, von M. Christian Martini in seiner *Pithometriae seu Doliorum mensurae Theoria Nova*; Viremb. 1723; 4. §. 83. Und zwar so:

Für die Ellipse, wenn die Abscissen vom Mittelpunkte an gerechnet werden, hat man die Gleichung

$$y^2 = b^2 . (a^2 - x^2) : a^2;$$

Demnach $2\pi y^2 dx = 2\pi b^2 . (a^2 - x^2) . dx : a^2$.

Und das Integral hiervon

$$2\pi \int y^2 dx = Z = 2\pi b^2 x . (a^2 - \tfrac{1}{3} x^2) : a^2.$$

Weil man aber a^2 durch b und y ausgedrückt haben will:

die Krümmung der Faßdauben zu suchen, bey welcher diese Regel nach aller Schärfe statt hat. Und dieses erhielt ich auf folgende Art *).

§. 3. Es sey (Fig. 1) das Faß ABCD; dessen Axe IL; die halbe Spunttiefe EG = GH = b. Man setze GI = GL = x; IA = LD = y; und die Verhältniß des Diameters zum Umkreise sey = 1 : π: so ist der Inhalt des um das Faß beschriebenen Cylinders = $2\pi b^2 x$; der Inhalt des in demselben beschriebenen = $2\pi y^2 x$. Demnach zufolge erstbemeldter Regel der Inhalt des Faßes

$$Z = \tfrac{4}{3}\pi b^2 x + \tfrac{2}{3}\pi y^2 x.$$

§. 4. Wie nun aber immer die Gleichung für die Krümmung der Dauben AED beschaffen seyn mag: so können wir eben diesen Inhalt

$$Z = 2\pi \int y^2 dx + \text{Const.}$$

setzen; indem wir x und y als veränderlich ansehen. Demnach haben wir die Gleichung

$$\tfrac{4}{3}\pi b^2 x + \tfrac{2}{3}\pi y^2 x = 2\pi \int y^2 dx + \text{Const.}$$

oder, wenn man durch 2π dividirt,

$$\tfrac{2}{3} b^2 x + \tfrac{1}{3} y^2 x = \int y^2 dx + \text{Const.}$$

will: so giebt die Gleichung für die Ellipse

$$a^2 = b^2 x^2 : (b^2 - y^2).$$

Wird dieser Werth von a^2 in dem gefundenen Integral substituirt: so erhält man

$$Z = 2\pi b^2 x . \left[\frac{b^2 x^2}{b^2 - y^2} - \tfrac{1}{3} x^2\right] : \frac{b^2 x^2}{b^2 - y^2}.$$

Oder abgekürzt

$$Z = 2\pi x . (b^2 - \tfrac{1}{3} b^2 + \tfrac{1}{3} y^2) = 2\pi x . (\tfrac{2}{3} b^2 + \tfrac{1}{3} y^2).$$

Allein, wie man sieht, so ist diese akademische Schrift Lamberten unbekannt geblieben. Auch war es nur Ihm vorbehalten, die Anwendung dieser Formel recht bequem und leicht zu machen.

*) Eben diese Untersuchung findet sich auch in den Zusätzen zur Visirkunst §. 23 — 25 im 3ten Theile der Beyträge, völlig so wie hier beschrieben.

§. 5. Wird diese Gleichung differentiirt: so ist

$$\tfrac{2}{3}b^2dx + \tfrac{1}{3}y^2dx + \tfrac{2}{3}xydy = y^2dx.$$

Demnach $(b^2 - y^2)\,dx = -\,xydy.$

Und hieraus

$$\frac{dx}{x} = -\,\frac{ydy}{b^2 - y^2}.$$

Diese Gleichung integrirt, giebt

$$\log x = \tfrac{1}{2}\log(b^2 - y^2) + \text{Const.}$$

Man setze $\quad \text{Const} = \log m$:

so verwandelt sich diese Gleichung in folgende

$$\frac{x}{m} = \sqrt{(b^2 - y^2)} = \frac{bx}{a};$$

welches die gesuchte Gleichung ist, und anzeigt, daß die vorhin (§. 2) angegebene Regel nach aller Schärfe statt finde, wenn das Faß eine zu beyden Seiten abgeschnittene Ellipsois ist, es mag nun IL = 2x ein Stück der längern oder der kürzern Axe der Ellipse seyn.

§. 6. Sofern man demnach statt der wahren Krümmung der Faßdauben einen elliptischen Bogen annehmen kann, der entweder die Faßdaube in E osculirt, oder auch durch die drey Punkte AED geht, und dessen beyde Axen IL, EH sind: sofern wird auch die vorhin angeführte Regel zur Visirung der Fässer zuläßig seyn. Die Betrachtung, daß die Krümmung der Faßdauben meistens weder groß noch merklich ungleichförmig ist, macht, daß man bey dem Visiren diese Voraussetzung annehmen, und daher die Regel gebrauchen kann.

§. 7. Diese Untersuchungen veranlaßten mich, sie auch auf die andre Regel auszudehnen, welche ich in bemeldter Abhandlung für liegende Fässer, die nicht ganz voll sind, gegeben habe. Hier hatte ich demnach erstlich das ganze Faß als ein Segment einer Ellipsois anzusehen, wo die Schnitte in I und L senkrecht durch

die

die Axe IL gehen. Sodann, wenn man z. E. setzt, das Faß sey bis in MN angefüllt: so macht die Oberfläche des Weins noch einen Abschnitt, welcher senkrecht durch AB, CD geht. Ich werde nun, ehe ich diese Berechnung vornehme, vorerst zeigen, daß sie sich auf die Berechnung ähnlicher Segmente einer Kugel reduciren lasse. Die Berechnung wird dadurch, wo nicht gar möglich, doch wenigstens kürzer gemacht.

§. 8. Es sey demnach (Fig. II.) ADBE eine Ellipsois, welche durch die Umdrehung der halben Ellipse ADB um ihre Axe AB enstehe. Zugleichem sey aDbE eine Kugel, die mit der Ellipsois concentrisch sey, und ihren Aequator DE berühre. Die Fläche dieses Aequators wird hier durch die Linie DE vorgestellt, weil die ganze Figur eine orthographische Projection ist. Zieht man nun aus jedem Punkte M der Ellipsois eine Linie MP senkrecht auf die Fläche des Aequators; so durchschneidet diese Linie die Fläche der Kugel in einem Punkte m, den wir den gleichnamigen Punkt nennen wollen; und es ist allemal

$$MP : mP = AC : aC$$

Dieses macht, daß wir die Ellipsois als eine nach der Direction der Axe AC auf eine durchaus proportionale Art in die Länge gezogene Kugel ansehen können; weil jede Ordinate Pm, indem sie PM wird, in eben der Verhältniß sich verlängert, in welcher sich Ca verlängert, indem sie CA wird. Die Fläche des Aequators bleibt der Kugel und der Ellipsois gemeinsam. Daher dehnt sich die erstgedachte Verlängerung auch auf jede Segmente aus, die durch Schnitte geschehen, welche durch die Fläche des Aequators senkrecht gehen. Es geschehe z. E. ein solcher Schnitt nach der Linie MP: so verhält sich das Segment MDP zu mDP, wie die Linie AC zu aC.

 §. 9.

§. 9. Wird aber der Schnitt schief gemacht, wie z. E. nach der Linie MN, welche hier ebenfalls eine Fläche vorstellt: so ziehe man MP und NQ mit AC parallel; und es wird der gleichnamigte Schnitt der Kugel durch mn gehen, und das Segment MN zu dem Segment mn in eben der Verhältniß seyn, wie AC zu aC. Denn da

$$NQ : nQ = MP : mP = AC : aC$$

ist: so ist auch für jeden andern Punkt R der Fläche MN

$$RS : rS = AC : aC.$$

Ist nun R ein solcher Punkt der Fläche MN, wo diese die Oberfläche der Ellipsois schneidet: so entspricht demselben auf der Fläche der Kugel, vermöge des vorhergehenden Paragraphs, ein gleichnamigter Punkt. Wäre nun dieser nicht eben der Punkt r: so müßten auf der Linie RS zween Punkte r seyn, welche die Eigenschaft hätten, daß

$$RS : rS = AC : aC$$

wäre. Demnach würde die aus dieser Analogie gezogene Gleichung

$$rS = \frac{RS \cdot aC}{AC},$$

welche vom ersten Grade ist, zwo Wurzeln haben; welches nicht angeht. Demnach ist der Punkt r zugleich auf der Fläche des Schnittes mn und auf der Oberfläche der Kugel, und folglich mn der dem Schnitt MN entsprechende oder gleichnamigte Schnitt der Kugel. Da nun ferner

$$ST : St = SR : Sr = AC : aC$$

ist: so ist auch

$$RT : rt = AC : aC;$$

und folglich, weil die Grundfläche PQ einerley bleibt, verhält sich das Segment MN zu dem Segment mn, wie AC zu aC. Dadurch aber sind nun jede Schnitte der Ellipsois auf gleichnamigte Kugelschnitte reducirt.

§. 10.

§. 10. Wenn demnach (Fig. I.) der Inhalt des Segments BMNC zu suchen ist: so kann man erstlich das Segment BILC besonders berechnen, weil es die Hälfte des ganzen Fasses ist; und so bleibt eigentlich nur noch das Segment IMNL. Es sey aEdcHb die in dem Fasse beschriebene Kugel. Diese wird erstlich nach den Schnitten AD, BC so getheilt, daß sich dadurch die mit AB, CD gleichnamigte Schnitte ab, dc bestimmen lassen; und das Segment IMNL, auf die Kugel reducirt, wird imnl seyn, und sich zu IMNL wie il zu IL verhalten.

§. 11. Es sey nun (Fig. III.) die Kugel ADBR nach dem Diameter AB und der Parallele GF horizontal, und sodann nach dem Diameter DR und der Parallele Mn vertical geschnitten; und es soll der Inhalt des Prisma CEQP gefunden werden. Es sey Pp unendlich klein; und es geschehe nach der Linie mpn noch ein verticaler Schnitt mit Mn parallel; so wird auf diese Art eine Scheibe oder ein Teller aus der Kugel weggeschnitten, dessen Grundfläche die Figur und Größe des Cirkels MKNL hat, und dessen Höhe oder Dicke = Pp ist. Dieser Teller wird durch die beyden nach AB, GF geschehenen horizontalen Schnitte in drey Theile zerfällt, deren Figur und Größe OIM, OIKL, LKN ist. Und man sieht leicht, daß der mittlere Abschnitt OIKL, mit der Dicke Pp multiplicirt, das Differentiale des Prisma abgiebt, dessen Inhalt zu suchen ist.

§. 12. Man setze demnach den Halbmesser der Kugel AC = 1; den Bogen BF = λ; den Bogen MD = φ: so ist

$$CE = PQ = \sin\lambda;$$
$$CP = \sin\varphi;$$
$$Pp = \partial \sin\varphi;$$
$$MP = PK = \cos\varphi.$$

Ferner nenne man den Winkel IPK = ψ: so ist

$$QI = \cos\phi \, . \, \cos\psi;$$
$$PQ = \sin\lambda = \cos\phi \, . \, \sin\psi.$$

Demnach

$$\sin\psi = \sin\lambda : \cos\phi.$$

Und das Segment der Cirkelfläche

$QIKL = 2IPQ + 2IPK = \cos\phi^2 . \, f\psi . \cos\psi + \psi . \cos\phi^2;$ welches, mit der Dicke $Pp = d \sin\phi$ multiplicirt, das Differentiale des Prisma PQEC:

$2dZ = \sin\psi . \cos\psi . \cos\phi^2 . d\sin\phi + \psi . \cos\phi^2 . d\sin\phi$ giebt. Da nun

$$\cos\phi = \sin\lambda : \sin\psi;$$

demnach

$$\sin\phi = \sqrt{(f\psi^2 - f\lambda^2)} : f\psi,$$

und $d\sin\phi = \dfrac{d f\psi}{\sqrt{(f\psi^2 - f\lambda^2)}} - \dfrac{\sqrt{(f\psi^2 - f\lambda^2)} . d f\psi}{\sin\psi^2}$;

so erhält man, wenn man diese Werthe setzt und die Reduction vornimmt,

$$2dZ = \frac{f\lambda^4 . d f\psi . (\psi + f\psi . \cos\psi)}{f\psi^4 . \sqrt{(\sin\psi^2 - \sin\lambda^2)}} \;\; *).$$

§. 13. Von dieser Formel wäre nun das Integrale zu suchen, welches sodann der verlangte Inhalt des Prisma PQEC seyn würde. Man kann aber der Formel nicht ansehen, welche Gestalt das Integrale haben werde. Ich werde im folgenden den Weg dazu anzeigen, und inzwischen hier angeben, wie sich der Inhalt des Prisma durch bloß geometrische Lehrsätze aus Betrachtung der Figur finden lasse. Ich fange demnach an, das Prisma PQEC nach dem Schnitte EQ in zwey trianguläre Prismata zu vertheilen, welche einander in Absicht auf die durch

*) Dies ist die Differentialformel, von deren Integration Lambert Meldung thut in einem Schreiben an Holland, im December 1766. S. Briefwechsel 1. Band, Seite 175.

durch das Centrum C gehenden Schnitte CP, CQ, CB, und in Absicht auf die rechtwinklichten Schnitte QP, QB ähnlich sind, und daher auf einerley Art berechnet werden können. Sodann, da in der Figur die Fläche der Tafel selbst einen durch das Centrum C gehenden Schnitt der Kugel vorstellt, welcher das Prisma in zween auf beyden Seiten gleiche Theile theilt: so nehme ich nur die eine Hälfte, um die Betrachtung auch dadurch noch einfacher zu machen.

§. 14. Auf diese Art wird nun das auf PQC stehende Prisma in der IV. Figur vorgestellt. Die Grundfläche QPC ist ein geradelinichter und in P rechtwinklichter Triangel. Die Flächen QqpP, PpcC, QqcC sind eben, und auf QPC senkrecht. Hingegen ist die Fläche qcp sphärisch; und ihr Centrum ist C. Demnach sind qc, pc größte Cirkel der Sphäre. Hingegen ist qp ein kleiner Cirkel, und daher die schief durch das Prisma gehende Fläche qCp conisch. Diese conische Fläche theilt nun das Prisma in zwo Pyramiden qcpC und qQPpC, deren Inhalt nun leicht zu bestimmen ist. Denn ersterer wird gefunden, wenn man die Kugelfläche qcp mit dem dritten Theile des Halbmessers Cc multiplicirt. Letzterer aber findet sich, indem man die Fläche QqpP mit dem dritten Theile der Höhe PC multiplicirt.

§. 15. Dieser letztere Inhalt ist nun leicht zu finden. Denn es ist

die Höhe $PC = \sin\phi$.

die Fläche $QqpP = \frac{1}{2}(\psi + \sin\psi . \operatorname{Cos}\psi) . \operatorname{Cos}\phi^2$.

Demnach

$$PQqpC = \tfrac{1}{6}.(\psi + \sin\psi . \cos\psi) . \sin\phi . \cos\phi^2.$$

§. 16. Hingegen um den Inhalt der Pyramide qpcC zu finden, muß vorerst die sphärische Grundfläche derselben qpc berechnet werden; welches, da qp ein Bogen eines kleinern Cirkels der Sphäre ist, nicht so unmittelbar geschehen kann. Man verlängere demnach den Bogen cp bis in A; so ist Apc ein Quadrant, und A, der Pol des Bogens qp. Ferner ziehe man durch A und q einen Bogen eines größten Cirkels; so hat man auf diese Art den sphärischen Triangel Aqc, dessen drey Seiten Bögen von größten Cirkeln sind. Nun ist der Bogen qp eben derjenige, der in der 2ten Figur IK ist; demnach ist der Winkel $qAp = \psi$. Sodann ist der andre Winkel qpc dem geradelinichten QCP gleich. Setzt man folglich denselben $= w$: so ist

$$\tang w = QP : PC = \sin \lambda : \sin \phi.$$

Da nun, weil Ac ein Quadrant ist, nach den trigonometrischen Regeln

$$-\cos Aqc = \cos w . \cos \psi$$

gefunden wird: so wird dadurch auch der dritte Winkel Aqc bestimmt, welchen wir $180° - k$ nennen wollen. Nun ist der Flächenraum des sphärischen Triangels $=$ dem Ueberschuß der Summe seiner Winkel über den halben Cirkel *); demnach

$$= w + \psi + 180° - k - 180° = w + \psi - k.$$

Hier muß nun $w + \psi - k$ in Theilen des Halbmessers berechnet werden. Endlich da hiervon noch der Flächenraum Aqp abgezogen werden muß, um qpc allein zu haben: so ist der Bogen $pc = \phi$; demnach $Ap = 90° - \phi$. Folglich der Flächenraum

$$Aqp = \psi . (1 - \sin \phi);$$

und daher der Flächenraum

$$qpc = w + \psi - k - \psi . (1 - \sin \phi) = w - k + \psi . \sin \phi.$$

Hieraus erhält man nun den Inhalt der Pyramide

$$qpcC = \tfrac{1}{3} (w - k + \psi . \sin \phi),$$

welcher zu dem vorhin (§. 14.) gefundenen Inhalt der Pyra-

*) S. Zusätze zur Trigonometrie, §. 25, im 1. Th. der Beyträge.

Pyramide QqpPC addirt, den ganzen Inhalt des Prisma

$$QqcCP = \tfrac{1}{2}(w - k + \psi . \sin\varphi) + \tfrac{1}{3}.(\psi + \mathrm{s}\psi . \cos\psi) . \mathrm{s}\varphi . \cos\varphi^2$$

giebt; welcher zu finden war.

§. 17. Diese ganze Formel wird nun durch

$$CP = \sin\varphi,$$
$$PQ = \sin\lambda$$

bestimmt. Denn es ist (§. 12)

$$\sin\psi = \sin\lambda : \cos\varphi.$$

Und hieraus ergiebt sich ψ und $\cos\psi$. Sodann ist (§. 16)

$$\tan w = \sin\lambda : \sin\varphi;$$
$$\cos k = \cos w . \cos\psi.$$

Und hieraus wird w, und sodann k gefunden.

§. 18. Wenn wir aber die Werthe überhaupt berechnen, um sie in der Formel zu setzen: so ist

$$\cos\psi = \sqrt{(\cos\varphi^2 - \sin\lambda^2)} : \cos\varphi;$$
$$\cos w = \sin\varphi : \sqrt{(\sin\varphi^2 + \sin\lambda^2)}.$$

Demnach

$$\cos k = \frac{\sin\varphi . \sqrt{(\cos\varphi^2 - \sin\lambda^2)}}{\cos\varphi . \sqrt{(\sin\varphi^2 + \sin\lambda^2)}}, \text{ oder } \sin k = \frac{\sin\lambda}{\cos\varphi . \sqrt{(\mathrm{s}\varphi^2 + \mathrm{s}\lambda^2)}}$$

Und daher, um die Brüche zu vermeiden,

$$6 . QqcCP = 2\,\mathrm{Arc.}\cos.\left[\frac{\sin\varphi}{\sqrt{(\mathrm{s}\varphi^2 + \mathrm{s}\lambda^2)}}\right] - 2\,\mathrm{Arc.}\cos.\left[\frac{\sin\varphi . \sqrt{(\cos\varphi^2 - \mathrm{s}\lambda^2)}}{\cos\varphi . \sqrt{(\sin\varphi^2 + \mathrm{s}\lambda^2)}}\right] + \sin\varphi . (2 + \cos\varphi^2) . \mathrm{Arc.}\sin.\left(\frac{\sin\lambda}{\cos\varphi}\right) + \mathrm{s}\varphi . \mathrm{s}\lambda . \sqrt{(\cos\varphi^2 - \mathrm{s}\lambda^2)}.$$

§. 19.

§. 19. Auf diese Art ist nun der Inhalt des auf PQC (Fig. III.) stehenden Prisma durch bestimmte Functionen von ϕ und λ ausgedrückt. Und dieses macht, daß man nur ϕ und λ verwechseln darf, um durch eben diese Formel auch den Inhalt des auf CQE stehenden Prisma zu haben. Nimmt man diese Verwechselung vor, und drückt sodann in beyden Formeln die Functionen $\sin\phi$ und $\cos\phi$ durch $\sqrt{(\sin\psi^2 - \sin\lambda^2)}:\sin\psi$ und $\sin\lambda:\sin\psi$ aus, und addirt beyde Formeln zusammen: so erhält man den Inhalt des auf dem ganzen Rectangel PQEC stehenden Prisma oder sphärischen Segmentes durch ψ und λ, und demnach dergestalt ausgedrückt, wie er aus der oben (§. 12.) zu integriren vorgegebenen Differentialformel durch die Integration hätte sollen gefunden werden, wenn man alle damit vorzunehmende Reductionen und Verwandlungen hätte voraussehen können.

§. 20. Die hier angegebene Berechnung giebt demnach, wenn sie vorgenommen wird, folgende Formel

$$6Z = 2\,\mathrm{Arc.\,cos.}\left[\frac{\sqrt{(s\psi^2 - s\lambda^2)}}{\sqrt{(s\psi^2 - s\lambda^2.\cos\psi^2)}}\right] - 2\,\mathrm{Arc.\,cos.}\left[\frac{\cos\psi.\sqrt{(s\psi^2 - s\lambda^2)}}{\sqrt{(s\psi^2 - s\lambda^2.\cos\psi^2)}}\right]$$

$$+ \frac{\sqrt{(s\psi^2 - s\lambda^2)}}{s\psi}.\left(2 + \frac{s\lambda^2}{s\psi^2}\right).\psi + \frac{s\lambda^2.\cos\psi.\sqrt{(s\psi^2 - s\lambda^2)}}{\sin\psi^2}$$

$$+ 2\,\mathrm{Arc.\,cos.}\left[\frac{s\lambda.s\psi}{\sqrt{(s\psi^2 - s\lambda^2.\cos\psi^2)}}\right] - 2\,\mathrm{Arc.\,cos.}\left[\frac{s\lambda.s\lambda.\cos\psi}{\sqrt{(s\psi^2 - s\lambda^2.\cos\psi^2)}}\right] + s\lambda.$$

$$+ \,\mathrm{s}\lambda.(2+\cos\lambda^2).\ \mathrm{Arc.\,sin.}\left[\frac{\sqrt{(\mathrm{s}\psi^2-\mathrm{s}\lambda^2)}}{\mathrm{s}\psi.\cos\lambda}\right]$$
$$+\frac{\mathrm{s}\lambda^2.\cos\psi.\sqrt{(\mathrm{s}\psi^2-\mathrm{s}\lambda^2)}}{\sin\psi^2};$$

wovon die 4 erstern Glieder für das auf PQC, die 4 letztern für das auf CQE stehende Prisma sind.

§. 21. Nimmt man aber, ohne auf diesen Unterschied zu sehen, beyde Prismata zusammen; so läßt sich diese Formel in etwas kürzer machen. Denn wenn man, wie es die Formel erfodert, den Ausdruck im fünften Gliede

$$\frac{\sin\lambda.\sin\psi}{\sqrt{(\sin\psi^2-\sin\lambda^2.\cos\psi^2)}}$$

als einen Cosinus ansieht: so ist der dazu gehörende Sinus

$$\frac{\sqrt{(\sin\psi^2-\sin\lambda^2)}}{\sqrt{(\sin\psi^2-\sin\lambda^2.\cos\psi^2)}}.$$

Nun ist dieser Sinus gerade der Cosinus des Bogens im ersten Gliede der Formel. Demnach machen der Bogen im ersten, und der im fünften Gliede zusammengenommen, einen Quadranten, und daher die doppelte Summe derselben einen halben Cirkel $=\pi$. Man hätte dieses auch aus der Art schließen können, wie diese Formel gefunden worden. Denn der erste Bogen ist $w =$ PCQ (§. 16.); und so muß aus gleichem Grunde der fünfte $=$ QCE, demnach beyde zusammen $=$ PCE $= 90$ Gr. seyn. Sodann sind in der Formel das vierte und achte Glied einerley; weil das vierte aus dem Produkt PC.PQ, das achte aus dem Produkt EQ.EC $=$ PC.PQ entspringt. Endlich lassen sich auch noch das zweyte und sechste Glied zusammenziehen. Denn die zu den beyden Cosinus

cos

$$\frac{\cos\psi . \sqrt{(\sin\psi^2 - \sin\lambda^2)}}{\sqrt{(\sin\psi^2 - \sin\lambda^2 . \cos\psi^2)}} \text{ und } \frac{t\lambda . s\lambda . \cos\psi}{\sqrt{(s\psi^2 - s\lambda^2 . \cos\psi^2)}}$$

gehörenden Sinus sind, wenn man nachrechnet,

$$\frac{\sin\psi^2}{\sqrt{(s\psi^2 - s\lambda^2 . \cos\psi^2)}} \text{ und } \frac{\sqrt{(s\psi^2 - s\lambda^2)}}{\cos\lambda . \sqrt{(s\psi^2 - s\lambda^2 . \cos\psi^2)}}.$$

Wird nun das Produkt der beyden Sinus von dem Produkte der beyden Cosinus abgezogen: so findet sich, nach bekannten trigonometrischen Regeln, für den Cosinus der Summe von beyden Bögen, nach beschehener Reduction, folgender Ausdruck

$$-\frac{\sqrt{(\sin\psi^2 - \sin\lambda^2)}}{\cos\lambda},$$

welcher allenfalls auch aus Betrachtung der Figur hätte können gefunden werden. Da derselbe negativ ist: so ist dies eine Anzeige, die Summe beyder Bögen sey grösser als 90 Grad; demnach die doppelte Summe, als welche eigentlich in der Formel vorkömmt, grösser als 180 Gr. Da nun diese doppelte Summe von der doppelten Summe des ersten und fünften Gliedes, welche genau 180 Gr. ist, muß abgezogen werden: so werden das 1, 2, 5 und 6te Glied hierdurch auf ein Einiges reducirt, welches

$$-2 \text{ Arc. sin.} \left[\frac{\sqrt{(s\psi^2 - s\lambda^2)}}{\cos\lambda}\right]$$

ist. Und auch dieser Ausdruck wird noch geschmeidiger, wenn man diesen Bogen durch seinen Cosinus, welcher

$$= \frac{\cos\psi}{\cos\lambda}$$

gefunden wird, bezeichnet, und daher, anstatt bemeldter 4 Glieder der Formel schlechthin nur

$$-2 \text{ Arc. cos.} \left[\frac{\cos\psi}{\cos\lambda}\right]$$

setzt. Die im dritten und siebenden Gliede der Formel

vor-

vorkommenden Bögen sind mit verschiedenen Coefficienten multiplicirt; daher läßt sich keine weitere Reduction damit vornehmen, ausser daß man noch

$$\text{Arc. sin.}\left[\frac{\sqrt{(\text{s}\psi^2 - \text{s}\lambda^2)}}{\text{s}\psi.\cos\lambda}\right] = \text{Arc. cos.}\left(\frac{\tan\lambda}{\tan\psi}\right)$$

setzen kann.

§. 22. Wir haben demnach, wenn wir erstbemeldte Substitution vornehmen, für das auf PQEC stehende Prisma

$$6Z = \frac{\sqrt{(\text{s}\psi^2 - \text{s}\lambda^2)}}{\text{s}\psi^3}.(2\text{s}\psi^2 + \text{s}\lambda^2).\psi - 2\,\text{Arc. cos.}\left(\frac{\cos\psi}{\cos\lambda}\right)$$

$$+ \text{s}\lambda.(2 + \cos\lambda^2).\,\text{Arc. cos.}\left(\frac{\tan\lambda}{\tan\psi}\right)$$

$$+ \frac{2\,\text{s}\lambda^2.\cos\psi}{\text{s}\psi^2}.\sqrt{(\text{s}\psi^2 - \text{s}\lambda^2)}.$$

Diese Formel ist demnach das Integrale der oben (§. 12.) zu integrirenden vorgegebenen Differentialgleichung

$$6\,dZ = \frac{3\,\text{s}\lambda^4.d\,\text{sin}\,\psi.(\psi + \text{s}\psi.\cos\psi)}{\text{s}\psi^4.\sqrt{(\text{s}\psi^2 - \text{s}\lambda^2)}}.$$

§. 23. Da sichs auch hier noch nicht sehen läßt, wie das Integrale aus der Differentialgleichung folgt: so wollen wir die Sache umkehren, und sehen, wie letztere aus dem erstern gefunden wird. Zu diesem Ende haben wir nur das Integrale zu differentiiren; und da erhalten wir, noch ohne alle Reduction, folgende sehr weitläuftige Differentialgleichung

$$6\,dZ = -\frac{3\sqrt{(\text{s}\psi^2 - \text{s}\lambda^2)}}{\text{s}\psi^4}.(2\text{s}\psi^2 + \text{s}\lambda^2).\psi.d\,\text{s}\psi$$

$$+ \frac{(2\text{s}\psi^2 + \text{s}\lambda^2).\psi.d\,\text{s}\psi}{\text{s}\psi^2.\sqrt{(\text{s}\psi^2 - \text{s}\lambda^2)}}$$

$$+ 4\sqrt{}$$

$$+\frac{4\sqrt{(\sin\psi^2-\sin\lambda^2)}.\psi.d\sin\psi}{\sin\psi^2}$$

$$+\frac{\sqrt{(\sin\psi^2-\sin\lambda^2)}.(2\sin\psi^2+\sin\lambda^2).d\psi}{\sin\psi^2}$$

$$+\frac{2d\cos\psi}{\sqrt{(\cos\lambda^2-\cos\psi^2)}}+\frac{\sin\lambda^2.(2+\cos\lambda^2)d\sin\psi}{\sin\psi.\cos\psi.\sqrt{(\sin\psi^2-\sin\lambda^2)}}$$

$$+\frac{2\sin\lambda^2.\sqrt{(\sin\psi^2-\sin\lambda^2)}\,d\cos\psi}{\sin\psi^2}$$

$$-\frac{4\sin\lambda^2.\cos\psi.\sqrt{(\sin\psi^2-\sin\lambda^2)}.d\sin\psi}{\sin\psi^3}$$

$$+\frac{2\sin\lambda^2.\cos\psi.d\sin\psi}{\sin\psi^2.\sqrt{(\sin\psi^2-\sin\lambda^2)}}.$$

§. 24. Diese Gleichung muß sich sehr in die Kürze ziehen lassen, weil sie auf 2 Glieder soll können reducirt werden. Um diese Reduction in einer gewissen Ordnung vorzunehmen, werden wir bey den drey ersten Gliedern anfangen, als welche allein mit dem Bogen ψ multiplicirt sind. Der gemeinsame Zähler derselben ist $\psi.d\sin\psi$; und so müssen sie auch auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden, welcher $\sin\psi^4.\sqrt{(\sin\psi^2-\sin\lambda^2)}$ ist. Wird demnach das erste Glied mit $\sqrt{(\sin\psi^2-\sin\lambda^2)}$, das zweyte mit $\sin\psi^2$, das dritte mit $\sin\psi^2.\sqrt{(\sin\psi^2-\sin\lambda^2)}$ multiplicirt: so haben wir

$$\frac{\psi.d\sin\psi}{\sin\psi^4.\sqrt{(\sin\psi^2-\sin\lambda^2)}}\left\{\begin{array}{l}-6\sin\psi^4+6\sin\psi^2.\sin\lambda^2+3\sin\lambda^4.\\ \qquad\qquad-3\sin\psi^2.\sin\lambda^2\\ +2\sin\psi^4+\ \sin\psi^2.\sin\lambda^2\\ +4\sin\psi^4-4\sin\psi^2.\sin\lambda^2\end{array}\right\}$$

Da hier, bis auf das letzte Glied $3\sin\lambda^4$, die übrigen sich aufheben: so ist der ganze Ausdruck schlechthin

$$=\frac{3\sin\lambda^4.\psi.d\sin\psi}{\sin\psi^4.\sqrt{(\sin\psi^2-\sin\lambda^2)}}$$

Und dieses ist die erste Hälfte der Differentialgleichung (§. 22.).

§. 25. Um die andre Hälfte zu finden, müssen die 6 letztern Glieder (§. 23.) zusammengenommen werden. Sie haben theils ungleiche Differentialien, theils ungleiche Nenner. Um demnach diese Ungleichheiten zu heben, setzt man in dem vierten Gliede $d\,\sin\psi : \cos\psi$ für $d\psi$, in dem fünften und siebenden $-\sin\psi . d\sin\psi : \cos\psi$ anstatt $d\cos\psi$. Ist dieses geschehen: so sieht man voraus, daß der gemeinsame Nenner $\mathrm{s}\psi^3 . \cos\psi^2 . \sqrt{}(\mathrm{s}\psi^2 - \mathrm{s}\lambda^2)$ seyn müsse. Nimmt man diese Berechnung vor: so erhält man

$$\frac{\cos\psi . d\,\mathrm{s}\psi}{\cos\psi^2 . \mathrm{s}\psi^3 . \sqrt{}(\mathrm{s}\psi^2 - \mathrm{s}\lambda^2)} \left\{ \begin{array}{l} +2\mathrm{s}\psi^4 - 2\mathrm{s}\psi^2.\mathrm{s}\lambda^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ . \; . \; + \mathrm{s}\psi^2.\mathrm{s}\lambda^2 - \mathrm{s}\lambda^4 \; . \; . \; . \; . \; . \\ -2\mathrm{s}\psi^4 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \\ . \; . \; +3\mathrm{s}\psi^2.\mathrm{s}\lambda^2 \; . \; - \mathrm{s}\lambda^4.\mathrm{s}\psi^2 \; . \; . \\ . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; -2\mathrm{s}\lambda^4.\mathrm{s}\psi^2 + 2\mathrm{s}\lambda^2.\mathrm{s}\psi^4 \\ . \; . \; -4\mathrm{s}\psi^2.\mathrm{s}\lambda^2 + 4\mathrm{s}\lambda^4 - 4\mathrm{s}\lambda^4.\mathrm{s}\psi^2 + 4\mathrm{s}\lambda^2.\mathrm{s}\psi^4 \\ . \; . \; +2\mathrm{s}\psi^2.\mathrm{s}\lambda^2 \; . \; . \; . \; . \; . \; -2\mathrm{s}\lambda^2.\mathrm{s}\psi^4 \end{array} \right\}$$

Da

Da sich auch hier wiederum, bis auf zwey Glieder, die übrigen unter einander aufheben; so wird der ganze Ausdruck auf folgenden

$$\frac{\cos\psi \,.\, d\,\mathrm{f}\psi}{\mathrm{f}\psi^3 \,.\, \sqrt{(\mathrm{f}\psi^2 - \mathrm{f}\lambda^2)}}\left(\frac{3\,\mathrm{f}\lambda^4 - 3\,\mathrm{f}\lambda^4 \,.\, \mathrm{f}\psi^2}{\cos\psi^2}\right),$$

und endlich auch dieser auf

$$\frac{3\,\mathrm{f}\lambda^4 \,.\, \cos\psi \,.\, \mathrm{f}\psi \,.\, d\sin\psi}{\mathrm{f}\psi^4 \,.\, \sqrt{(\mathrm{f}\psi^2 - \mathrm{f}\lambda^2)}}$$

reducirt; welcher nun die andre Hälfte der Differentialgleichung (§. 22.) ist.

§. 26. Man kann nun von hier an rückwärts gehen, und stufenweise sehen, wie man die vorgegebene Differentialgleichung hätte zerfällen und verwandeln müssen, bis man auf die erste (§. 23) gekommen wäre, welche sich unmittelbar würde haben integriren lassen. Ich sage, daß man es nun sehen könne. Aber daß man es hätte können voraussehen, oder durch nothwendig anwendbare Regeln vorausbestimmen, das ist eine ganz andre Frage. Und man sieht hieraus, wie sehr der Integralcalcul in Absicht auf solche nothwendig anwendbare Regeln zurückebleibt.

§. 27. Wir können nun, um den Unterschied des Verfahrens noch klarer zu machen, die Differentialgleichung

$$2dZ = \frac{\mathrm{f}\lambda^4 \,.\, (\psi + \mathrm{f}\psi \,.\, \cos\psi) \,.\, d\,\mathrm{f}\psi}{\mathrm{f}\psi^4 \,.\, \sqrt{(\mathrm{f}\psi^2 - \mathrm{f}\lambda^2)}}$$

vornehmen, um sie nach den Vorschriften der Integralrechnung zu behandeln. Zu diesem Ende werden wir sie ebenfalls in zween Theile zerfällen, und bey jedem die Irrationalität zu heben suchen, dafern es angeht.

§. 28. Der eine Theil, wenn wir $2dZ$ durch $\mathrm{f}\lambda^4$ theilen, ist

$$\frac{s\psi . \cos\psi . ds\psi}{s\psi^4 . \sqrt{}(s\psi^2 - s\lambda^2)},$$

und hat eine gedoppelte Irrationalität, weil $\cos\psi$ in Absicht auf $\sin\psi$ irrational ist. Um diese zu heben, dürfen wir nur

$-\cos\psi . d\cos\psi$ anstatt $s\psi . ds\psi$

und $\sqrt{}(\cos\lambda^2 - \cos\psi^2)$ anstatt $\sqrt{}(s\psi^2 - \sin\lambda^2)$

setzen. Damit wird der Ausdruck in

$$-\frac{\cos\psi^2 . d\cos\psi}{(1 - \cos\psi^2)^2 . \sqrt{}(\cos\lambda^2 - \cos\psi^2)}$$

verwandelt, welcher noch Eine Irrationalität hat. Um nun auch diese zu heben, setze man

$$\frac{\cos\psi}{\cos\lambda} = \cos\omega = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

Und so ist ω eben der Winkel der oben (§. 21.) vorkam, und sich allenfalls auch in der Figur finden läßt. x ist die Tangente seiner Hälfte. Und sodann findet sich

$$\frac{d\cos\psi}{\cos\lambda} = \frac{-4xdx}{(1 + x^2)^2};$$

$$\frac{\sqrt{}(\cos\lambda^2 - \cos\psi^2)}{\cos\lambda} = \frac{4x}{1 + x^2};$$

$$(1 - \cos\psi^2)^2 = \frac{(s\lambda^2 + 2x^2 . (1 + \cos\lambda^2) + x^4 . s\lambda^2)^2}{(1 + x^2)^4}.$$

Werden diese Werthe gesetzt, und die Reduction vorgenommen: so erhält man

$$+ \frac{(1 - x^2) . (1 + x^2) . dx}{(s\lambda^2 + 2x^2 . (1 + \cos\lambda^2) + x^4 . s\lambda^2)^2};$$

einen Ausdruck, welcher rational ist, und sich daher auf Logarithmen oder Cirkelbögen reduciren läßt, wenn man den Nenner in zween Factoren auflöst.

§. 29. Der andre Theil der Formel (§. 27.), wenn man $2dZ$ ebenfalls durch $s\lambda^4$ dividirt, ist

$$\frac{\psi . d\,s\psi}{s\psi^4 . \sqrt{(s\psi^2 - s\lambda^2)}}.$$

Dieser Ausdruck hat nun zwar nur Eine Irrationalität; dagegen aber in dem Winkel ψ etwas Transcendentes; so daß jene muß gehoben, dieses vermieden werden. Um letzteres zu erhalten, muß man vor Allem das Integrale von

$$\frac{d\,s\psi}{s\psi^4 . \sqrt{(s\psi^2 - s\lambda^2)}}$$

suchen. Denn man setze, dieses Integrale sey $= y$; so ist der ganze Ausdruck $= \psi dy$; und daher

$$\int \psi dy = \psi y - \int y d\psi.$$

Man setze demnach (§. 12.)

$$\frac{s\lambda}{s\psi} = \cos\varphi;$$

$$s\psi = \frac{s\lambda}{\cos\varphi};$$

$$d\,s\psi = \frac{-s\lambda . d\cos\varphi}{\cos\varphi^2};$$

$$\sqrt{(s\psi^2 - s\lambda^2)} = \frac{s\lambda . s\varphi}{\cos\varphi}.$$

Demnach, wenn man diese Werthe setzt, und die Reduction vornimmt,

$$dy = \frac{d\,s\psi}{s\psi^4 . \sqrt{(s\psi^2 - s\lambda^2)}} = \frac{-\cos\varphi^3 . d\cos\varphi}{s\lambda^4 . s\varphi}$$

$$= \frac{(1 - s\varphi^2) . d\,s\varphi}{s\lambda^4}.$$

Und hieraus

$$y = \frac{s\varphi - \frac{1}{3} s\varphi^3}{s\lambda^4}.$$

Ferner

Ferner ist

$$d\psi = \frac{d\,\mathrm{f}\psi}{\cos\psi} = \frac{-\mathrm{f}\lambda.\cos\phi.d\cos\phi}{\cos\phi^4.\sqrt{(\cos\phi^2-\mathrm{f}\lambda^2)}}$$

$$= \frac{\mathrm{f}\lambda.\mathrm{f}\phi.d\,\mathrm{f}\phi}{(1-\mathrm{f}\phi^2)^2.\sqrt{(\cos\lambda^2-\mathrm{f}\phi^2)}}$$

Und daher

$$y\,d\psi = \frac{(\mathrm{f}\phi^2-\frac{1}{3}\mathrm{f}\phi^4).d\,\mathrm{f}\phi}{\mathrm{f}\lambda^3.(1-\mathrm{f}\phi^2)^2.\sqrt{(\cos\lambda^2-\mathrm{f}\phi^2)}}.$$

Wird nun hier $\mathrm{f}\phi : \cos\lambda = 2v : (1+v^2)$ gesetzt: so wird die Irrationalität gehoben; und man erhält einen rationalen Bruch, der sich im Integriren auf Logarithmen oder Cirkelbögen reduciren läßt.

§. 30. Man kann auch auf diese letztere Art beyde Theile der Formel zusammennehmen; und so wird man

$$\frac{2Z}{\mathrm{f}\lambda^4} = \int\psi\,dy + \int(\mathrm{f}\psi.\cos\psi.dy) = y.(\psi+\mathrm{f}\psi.\cos\psi)$$

$$-\int y\,(d\psi+d(\mathrm{f}\psi.\cos\psi))$$

haben. Dieses giebt, wenn man ψ durch ϕ ausdrückt, und die Rechnung vornimmt,

$$\frac{2Z}{\mathrm{f}\lambda^4} = \frac{3\,\mathrm{f}\phi-\mathrm{f}\phi^3}{\mathrm{f}\lambda^4}.\left(\text{Arc. sin.}\left(\frac{\mathrm{f}\lambda}{\cos\phi}\right) + \frac{\mathrm{f}\lambda.\sqrt{(\cos\lambda^2-\mathrm{f}\phi^2)}}{1-\mathrm{f}\phi^2}\right)$$

$$-\mathrm{f}\lambda.\int\left(\frac{6\,\mathrm{f}\phi^2.\cos\lambda^2-(3+2\cos\lambda^2).\mathrm{f}\phi^4+\mathrm{f}\phi^6}{3.(1-\mathrm{f}\phi^2)^2.\sqrt{(\cos\lambda^2-\mathrm{f}\phi^2)}}\right).d\,\mathrm{f}\phi.$$

Das letzte Glied wird ebenfalls rational gemacht, wenn man $\mathrm{f}\phi:\cos\lambda = 2v:(1+v^2)$ setzt.

§. 31. Eben so kann man auch, nachdem (§. 29.)

$$y = (\mathrm{f}\phi - \tfrac{1}{3}\mathrm{f}\phi^3) : \mathrm{f}\lambda^4$$

gefunden worden, diesen Werth durch ψ ausdrücken, indem man,

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{(\sin\psi^2 - \sin\lambda^2)}}{\sin\psi}$$

setzt. Und so wird man, wenn man die Rechnung vornimmt und behörig reducirt,

$$\frac{2Z}{\sin\lambda^4} = \frac{(2\sin\psi^2 + \sin\lambda^2)}{3\sin\psi^3 . \sin\lambda^4} . \sqrt{(\sin\psi^2 - \sin\lambda^2)} . (\psi + \sin\psi . \cos\psi)$$

$$+ \frac{2}{\sin\lambda^4}\int\frac{(2 - 2\cos\psi^2 + \sin\lambda^2).\sqrt{(\cos\lambda^2 - \cos\psi^2)}.d\cos\psi}{(1-\cos\psi^2)^2}$$

erhalten; wo sich das zweyte Glied wiederum rational machen läßt, wenn man, wie §. 28.

$$\cos\psi : \cos\lambda = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

setzt.

§. 32. Man sieht aber aus allen diesen Methoden, daß dadurch das gesuchte Integrale auf eine indirecte und sehr weitläuftige Art erhalten wird.

II. Noch