Denn wegen $nA > mB$, aber $nC = < mD$ (hypoth.);

ist auch (§. 17. 14.) $p \times nA > p \times mB$, aber $p \times nC = < p \times mD$, oder $p \times mD = > p \times nC$.

Und wenn $pC > qD$: so ist auch (§. 17.) $n \times pC$, oder (§. 28.) $p \times nC > n \times qD$.

Also ex aequo oder a fortiori $p \times mD > n \times qD$.

Daher ebenfalls (§. 27.) $p \times mB > n \times qB$.

Folglich um so vielmehr $p \times nA$ oder (§. 28.) $n \times pA > n \times qB$; und also noch $pA > qB$ (§. 19.).

II.

Ueber die Bewegung der Fässer in welchen Kugeln gerundet werden; von J. H. Lambert *).

---

1. Kugeln von Stein oder gegossenem Eisen abzurunden, werden sie in ein Faß gethan, das man sodann um seine Achse drehen läßt. Hierdurch geschiehet, daß die darein gethanen Stücke sich unter einander anstoßen und abnutzen, so daß alle Ungleichheiten ihrer Oberflächen verschwinden, und dieselben eine sphärische Figur, wie auch eine ziemlich glatte Oberfläche gewinnen. Dies gelingt um so viel besser, wenn die Steine in allen ihren Theilen einen gleichen Grad von Härte haben. Auf eben die Weise ungefähr haben sich nach der Meynung des Cartesius die Elementartheilchen der Welt nach und nach abge-

*) Aus dessen hinterlassener französischer Handschrift, welche, wie sein Tagebuch bezeuget, im Junius 1776 (ein Jahr vor seinem Tode) aufgesetzt worden. J. Bernoulli.

abgerůndet. Und gleichermaßen rűnden sich die Steine in den sie fortwälzenden Flüssen ab.

II. Dieser Mechanismus ist sehr einfach. Indessen erfordert er doch einige Aufmerksamkeit, wenn die Maschine solchergestalt soll eingerichtet werden, daß die Abrűndung so geschwind als möglich Statt finde. Zu dem Ende muß sowohl die Kraft als die Vielheit, oder öftere Wiederholung der Stöße, ein Maximum werden. Die Vermehrung der Geschwindigkeit trägt etwas darzu bey. Sobald aber diese Geschwindigkeit bis auf einen gewissen Grad zugenommen hat, theilet die drehende Bewegung des Fasses den Kugeln eine Fliehkraft (vim centrifugam) mit, welche verursachet, daß sie an der inneren Fläche des Fasses wie ankleben, und sodann das Aneinanderstoßen aufhöret.

III. Es sey BAEV, Fig. 1. der Durchschnitt der Tonne, C der Mittelpunkt der Achse, $AC = r$ der Halbmesser, und c die Geschwindigkeit des Umkreises oder irgend eines Punktes M desselben. Es habe eine mit dieser Geschwindigkeit bis zu dem Punkt M gelangte Kugel die Fliehkraft $MF = \gamma$, so ist

$$\gamma = \frac{cc}{2r}.$$

Nun sey ferner $MG = g$ die Wirkung der Schwere. Vollendet man das Parallelogramm MGNF, so giebt die Diagonallinie MN den Werth und die Richtung der aus der Zusammensetzung der zwey Kräfte MF, MG entstehenden Kraft. Nennen wir ϕ den Winkel VCM $=$ GMC, welchen der Halbmesser CM mit den senkrechten Linien VC, GM bildet, so haben wir

$$MN^2 = g^2 + \gamma^2 - 2g\gamma \cdot \cos\phi.$$

IV. Es werde aus dem Punkte G eine senkrechte Linie GP auf den Halbmesser CM gezogen, so wird die

Wir-

Wirkung der Schwere MP in zwey andere PG, PM aufgelöset. Und unstreitig wird die Kugel aufhören, gegen die Oberfläche angedrückt zu werden, sobald als PM anfängt größer als FM zu seyn. In solchem Fall wird der Winkel $CMN = 90°$, und man hat

$$g . \cos \varphi = \gamma.$$

Von dem Augenblicke an wird die von der Oberfläche sich ablösende Kugel sich frey bewegen; sie wird die Tangentialgeschwindigkeit c haben, und indem sie nach dem Gesetze der schief geworfenen Körper fällt, eine krumme Linie beschreiben, welche parabolisch seyn wird, wenn man den Widerstand der Luft aus der Acht lassen kann. Auf solche Weise fällt dann die Kugel in einen Punkt Q des Umkreises zurück.

V. Es sey der Winkel $ACQ = \psi$; ferner τ die Zeit, welche die Kugel braucht, die Parabel MQ zu beschreiben; und wenn die Verticallinie QKD bis zur Tangente MD gezogen worden, so ist

$$MD = c\tau \text{ und } QD = g\tau\tau$$

woraus man durch Eliminirung des τ erhält

$$\frac{QD}{g} = \frac{MD^2}{cc}$$

Allein man hat auch durch die Eigenschaft des Kreises

$$MD^2 = QD . KD$$

Folglich ist $KD = \frac{cc}{g}$

und weil $g \cos \varphi = \gamma = \frac{cc}{2r}$

so geben diese Gleichungen, wenn c eliminiret wird

$$KD = 2r . \cos \varphi$$

das ist $KD = MR.$

Man findet aber durch die Construction

$$QD = r\,[\cos\varphi + \cos\psi + (\sin\varphi - \sin\psi)\,.\,\mathrm{tang}\,\varphi]$$

$$QK = 2r\,.\cos\psi$$

Demnach

$$KD = r\,[\cos\varphi - \cos\psi + (\sin\varphi - \sin\psi)\,\mathrm{tang}\,\varphi]$$

$$= \frac{r - r\cos(\varphi - \psi)}{\cos\varphi}.$$

Substituirt man diesen Werth in der Gleichung

$$KD = 2r\cos\varphi$$

so hat man $2\cos\varphi^2 = 1 - \cos(\varphi - \psi)$

oder $\cos 2\varphi = -\cos(\varphi - \psi)$

Woraus sich leicht ergiebt

$$\varphi = 60^\circ + \tfrac{1}{3}\psi.$$

VI. Dieses Verhältniß der Winkel φ und ψ ist sehr einfach. Allein da es nicht hinreichet, diese Winkel selbst zu bestimmen; so muß man noch andere Betrachtungen zu Hülfe nehmen. Ich bemerke demnach, daß die Geschwindigkeit zunimmt, je mehr der Punkt M dem Scheitelpunkt V näher ist. Deswegen wird man besser thun, den Punkt Q irgendwo in dem Bogen AB anzunehmen. Denn alsdann ist ψ verneinend, und der Winkel φ wird um so viel kleiner. Außerdem habe ich in der vorigen Rechnung angenommen, die Kugel in M sey die höchste von allen. Man kann aber auch zugleich annehmen, die Kugel in Q sey an dem andern Ende, so daß alle Kugeln in dem Bogen QM sich befinden. Dieser Bogen muß nicht über 180° betragen. Und wenn man ihn dem halben Kreise gleich setzet, so hat man $\varphi = 45^\circ$, und $\psi = -45^\circ$. In diesem Falle können die Kugeln die Hälfte des innern Raumes der Tonne einnehmen, und wenn diese mit der erforderlichen Geschwindigkeit umgedrehet wird, so werden die Kugeln solchergestalt ihren Platz bekommen, daß der Durchmesser des halben Krei-

kes

ses, den sie ausfällen, eine Neigung von 45 Graden hat. Wenn übrigens das Faß auf solche Weise angefüllt ist, so werden die den Punkt M erreichenden Kugeln, nur sehr selten in der Parabel MQ wieder herabfallen, sondern über die andern wegrollen. Hierdurch entstehen zwar minder starke Stöße, aber desto öftere: welches denn mehr oder weniger auf eins herauskommt.

VII. Ich beobachte nun weiter, daß nur der Winkel Φ allein auf die Bestimmung der Geschwindigkeit, mit welcher das Faß umgedrehet werden soll, Einfluß hat. Die Geschwindigkeit der Punkte der inneren Fläche ist

$$c = \sqrt{(2 r g \cdot \cos \varphi)}.$$

Man siehet leicht ein, daß sie nicht kann größer seyn als $\sqrt{(2 r g)}$, und daß, wenn man $\varphi = 45°$ macht, dieselbe wird

$$c = \sqrt{(r g \sqrt{2})}$$

so daß sie nur etwa um den $\frac{1}{6}$ Theil kleiner ist, als wenn man $\varphi = 0$ setzt. Nun aber ist die Biquadratwurzel von $2 = 1,189207$.

Demnach $c = 1,189207 \cdot \sqrt{(r g)}$.

Daher wenn $g = 15,625$ Rheinische Fuß angenommen wird, ist $\sqrt{g} = 3,9530$, und folglich $c = 4,7009 \cdot \sqrt{r}$ Rhein. Fuß.

VIII. Nachdem die Geschwindigkeit c mittelst des Halbmessers der Tonne gefunden worden, hat man auch noch den Widerstand, welchen das Gewicht der Kugeln der bewegenden Kraft entgegen setzt, zu bestimmen. Es sey der Winkel $VCM = \varphi = 45°$, Fig. 2. und werde der Durchmesser MQ gezogen, so hat man den Winkel $QCA = \psi = -45°$. Wenn denn die Tonne halb voll ist, so werden die Kugeln den Raum des halben Kreises QCMEQ, oder vielmehr den krummlinichten Raum qHMEq einnehmen. Es sey I der gemeinschaftliche Schwerpunkt der Kugeln; man ziehe die Verticallinie IL, welche den Horizontaldiameter BCE unter rechten Winkeln durchschneiden wird. So giebt alsdann die mit dem Gewichte der Kugeln multiplicirte Distanz CL das statische Momentum der Kugeln. Man setze jenes Gewicht $= p$, und $CL = a$, so ist das Product ap das Maaß dieses Momentums.

IX. Die Kugeln lassen leere Zwischenräume zwischen einander, und diese machen ungefähr $\frac{7}{27}$ Theile des ganzen Raumes, den die Kugeln einnehmen, aus. Wenn nun die innere Länge der Tonne $= \lambda$ ist, so wird ihr Inhalt $= rr\pi\lambda$ seyn, und die Hälfte dieser Masse $= \frac{1}{2}\pi rr\lambda$. Der $\frac{20}{27}$te Theil dieser Hälfte ist $= \frac{10}{27}\pi rr\lambda$ Cubikfuß. Kennt man dann das Gewicht eines Cubikfußes der Materie, aus welcher die Kugeln bestehen, so multiplicire man dieses Gewicht mit $\frac{10}{27}\pi rr\lambda$, oder (weil $\pi = \frac{22}{7}$ kann gesetzt werden) mit $\frac{220}{189} rr\lambda$, und man erhält das Gewicht p der sämmtlichen Kugeln. Hiernächst hat man $CI = \frac{14}{33} r$, und da der Winkel $ICL = 45°$ ist, so wird $CL = \frac{14}{33} . r\sqrt{\frac{1}{2}} = a$.

Wenn die Kugeln von Eisen sind, wird der Rhein. Cubikfuß ungefähr 510 Pfund Berliner Gewichtes wiegen. Dies giebt $p = 594\, rr\lambda$ Pf. und das statische Momentum $ap = 178\, rrr\lambda$. Dieses Momentum zeigt ein Gewicht an, welches an einem Hebel, in der Entfernung von 1 Fuß angehängt ist. Sind die Kugeln von Stein, so hat man $ap = 44\, rrr\lambda$, und wäre von Pulverkörnern die Rede, so hätte man für dieses Momentum nur $ap = 28\, rrr\lambda$. Dabey ist allemal zu verstehen, daß diese Werthe für die Fälle gelten, wo die Kugeln die Hälfte der Tonne füllen, und der Winkel $\phi = 45°$ ist.

X. Nach-

X. Nachdem auf diese Weise das statische Moment und die Geschwindigkeit, mit welcher ein Faß von einem gegebenen Durchmesser soll gedrehet werden, bestimmt worden, so findet man keine Schwierigkeit in Ansehung der Art, die bewegenden Kräfte dabey anzubringen. Wir wollen z. B. annehmen, man wolle vier Pferde hierzu gebrauchen, die Kugeln seyen von Eisen, und die Absicht sey, die Anzahl und die Größe der Fässer, welche mit der erforderlichen Geschwindigkeit können umgedrehet werden, zu bestimmen. Die an die Hebel D, D, D; Fig. 3. angespannten Pferde werden das Kammrad R, R umdrehen, welches wiederum, indem es in die Getriebe L, L eingreifet, die Fässer T, T umwälzet. Wir wollen den Halbmesser der Laternen oder Getriebe ϱ nennen; R den Halbmesser des Rades R, und D den Abstand der Pferde von der Achse der Welle. Ich setze ferner voraus, daß die Pferde einen Weg von 10 Fuß in 3 Secunden zurücklegen, und mit Anwendung einer Kraft von 178 Pfunden: (Ich hätte können 175 schreiben; ich wähle aber 178, um die Rechnung abzukürzen).

XI. Weil nun die Geschwindigkeit des innern Umfanges der Fässer $c = 4{,}7 \cdot \sqrt{r}$ ist, so wird die Geschwindigkeit der Triebstöcke oder Stäbe der Laternen, wie auch der Zähne des Rades R

$$= \frac{\varrho c}{r} = 4{,}7 \cdot \frac{\varrho}{\sqrt{r}}$$

und die Geschwindigkeit der Pferde

$$4{,}7 \cdot \frac{D\varrho}{R\sqrt{r}} = \tfrac{10}{3} \text{ Fuß.}$$

Dies giebt

$$\frac{D\varrho}{R} = \frac{\sqrt{r}}{1{,}41}.$$

XII. Ueberdies haben wir für das statische Moment eines jeden Fasses, wenn die Kugeln von Eisen sind,

$$ap = 178 \cdot r^3 \lambda.$$

Es sey die Anzahl der Fässer $= m$; so ist dieses Moment $= 178\, m \lambda r^3$. Betrachtet man dasselbe in Ansehung der Laternenstäbe, und durch diesen Weg, der Zähne des Rades R, so ist es $= 178\, m \lambda r^3 : \rho$; endlich in Ansehung der Punkte D wird es $= 178\, m \lambda R r^3 : \varrho D$. Diese Größe ist aber der Kraft der 4 Pferde gleich, d. i. 4mal 178 Pfunde. Demnach hat man

$$\frac{178\, m \lambda R r^3}{\varrho D} = 4 \cdot 178.$$

Dies giebt

$$\frac{D\varrho}{R} = \frac{m \lambda r^3}{4},$$

und weil

$$\frac{D\varrho}{R} = \frac{\sqrt{r}}{1,41}$$

so ist

$$m \lambda r^{5:2} = \frac{400}{141}.$$

XIII. Diese Gleichung giebt uns zu erkennen, daß wenn die innere Länge der Fässer $= 1$ Fuß angenommen wird, man für 2 Fässer $m = 2$, und $r = 1,15$ Fuß erhält. Wollte man aber lieber vier Fässer gebrauchen, so wäre $m = 4$, und $r = 0,8325$ Fuß.

XIV. Ich habe das Reiben nicht in Betrachtung gezogen, nicht, als ob es nicht von einigen Belang seyn könnte, sondern weil man dasselbe am besten in Anschlag bringt, indem man die Anzahl der Kugeln um so viel vermindert, als die Erfahrung anzeigen wird, daß nöthig sey. Es schadet nichts, daß die Kugeln nicht ganz die Hälfte des innern Raumes der Fässer anfüllen.

XV. Das

XV. Das Verhältniß der Halbmesser ϱ, R eines zu dem andern muß rational seyn, nämlich ϱ zu R, wie eine ganze Zahl zu einer ganzen Zahl. Denn dieses Verhältniß ist dasselbe, als das Verhältniß der Anzahl der Stäbe des Getriebes L zu der Anzahl der Zähne des Rades R. Man hat demnach

$$\frac{\varrho}{R} = \frac{\sqrt{r}}{1,41 \,.\, D}$$

Da nun der Abstand D wenigstens 7 bis 8 Fuß betragen muß, und r von der Einheit 1 wenig verschieden ist, so siehet man leicht ein, daß die Zahl R beyläufig 10mal ϱ betragen wird. Macht man demnach $\varrho : R = 17 : 168$, und $r = 1,15$, welches der Fall für 2 Fässer ist, so bekommt man

$$\frac{17}{168} = \frac{\sqrt{1,15}}{1,41\, D}$$

Dies giebt $D = 7,513$, oder $= 7\frac{1}{2}$ Fuß; und solchergestalt wird die Laterne L, 17 Stäbe, das Rad R aber 168 Zähne haben.