Beyträge
zum Gebrauche
der
Mathematik
und
deren Anwendung
durch
J. H. Lambert.

Mit Kupfern.

Zweyter Theil
Erster Abschnitt.

Berlin,
im Verlag der Buchhandlung der Realschule,
1770.

Vorrede.

Ich liefere hier wiederum einige Abhandlungen, die theils die Erweiterung, theils die Anwendung der Mathematik zur Absicht haben. Es sind deren zwölfe von so verschiedenem Inhalte, daß jede besonders angezeigt werden müßte, wenn man von allen zusammen genommen einen Begrif geben wollte. Ich kann aber dieses hier unterlassen, und diejenigen, die so geschwinde weg ein Buch übersehen wollen, auf das am Ende dieser Vorrede stehende Verzeichniß verweisen. Andern, die sich etwas mehr umsehen wollen, muß ich sagen, daß sie von jeder Abhandlung wenigstens den Anfang lesen, wo sie mehrentheils angezeigt finden werden, wohin es bey jeder abgesehen ist. Vielleicht nehmen sie sich dann die Gedult, weiter fort zu lesen, und beym Fortlesen finden sie etwan auch Dinge, die, wenn sie schon nicht anfangs angekündigt waren, dennoch von einiger Brauchbarkeit und Erheblichkeit seyn werden.

Dieses ist nun, was ich überhaupt zu sagen hatte. Es bleiben aber noch Anmerkungen über einzelne Stellen zurücke, die hier ihren Ort finden mögen. Einmal habe ich diese Abhandlungen nicht ununterbrochen, sondern seit 1765 nach und nach geschrieben. Und dieses muß, um Anachronismen zu vermeiden, erinnert werden. So z. E. ist die hier vorkommende fünfte Abhandlung: **für die Erforscher der Quadratur des Circuls**, im Jahr 1766 vor derjenigen geschrieben worden, die ich einige Monathe nachher bey der hiesigen Königl. Akademie der Wissenschaften über eben die Materie vorgelesen.

Sie können aber beyde ganz wohl beysammen bestehen. In der zweyten Abhandlung: Theiler der Zahlen in Tabellen wird man sehen, daß ich erst nachgehends näher müsse erfahren haben, was es mit Pells Tafel von den Theilern der Zahlen für eine Bewandtniß habe. Man wird daher nicht übel thun, wenn man diese 2te Abhandlung mit dem vergleicht, was ich in den ganz neu herausgekommenen Zusätzen zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen über die Sache anmerke. Die hier gelieferte Tafel der Theiler der Zahlen erstreckt sich zwar nur bis auf 10200, sie giebt aber bey jeder Zahl die sämtlichen Factoren an, hingegen geht die Pellsche Tafel zehnmal weiter, es wird aber darin bey jeder Zahl nur ihr kleinster Theiler angegeben. Wer demnach die Pellsche Tafel vollständig machen wolte, würde immer noch etwas zu thun finden, wiewohl ich im §. 15. darauf eben noch nicht die rechte Unsterblichkeit des Namens setze.

In Ansehung der vierten Abhandlung, welche algebraische Ausdrücke der

Sinus von 3 zu 3 Graden liefert, muß ich hier anmerken, daß bereits Wallis sich die Mühe gegeben, ähnliche Formeln für die Chorden zu berechnen. Sie werden aber wegen der veralteten Zeichnungsart, dafern man sich nicht daran gewöhnt, ziemlich unleslich.

Bey der zweyten Abhandlung verdient Huygens, daß ich wenigstens hier erwähne, daß er von den in einem fortgehenden Brüchen (fractio continua) zuerst Gebrauch gemacht hat, als er für die Umlaufszeit der Planeten, geschmeidige Verhältnisse in ganzen Zahlen suchte.

Was ich im Anfange der achten Abhandlung von Auflösung der Cubic- und Biquadrat-Gleichungen sage, wird sich nützlich mit den Formeln vergleichen lassen, die in vorerwähnten Tabellen vorkommen. Ueber die Verwandlung der Gleichungen hat, wo ich mich recht erinnere, Waring, ein Engländer, einen den meinigen ganz ähnlichen Versuch gemacht, er nimmt aber die Sache so sehr abstracte vor, daß er die Vortheile, so besondere und einfachere Fälle anbieten, gar nicht sehen konnte.

Wer die eilfte Abhandlung über die Grundsätze des Gleichgewichtes und der Bewegung zum Lernen lieset, der wird hin und wieder einige Aufmerksamkeit gebrauchen müssen; denen aber muß ich Bedacht anrathen, die diese Abhandlung, um sie zu beurtheilen, lesen wollen. Was im eigentlichsten Verstande a priori seyn soll, kann nur Möglichkeiten enthalten. Man muß aber diese Möglichkeiten am allgemeinsten nehmen, sie vollständig vorzählen, und dann erst sehen, welche davon in der wirklichen Welt vorkommen, und unter welchen Bedingungen sie vorkommen. Was einer Möglichkeit den so verachteten Namen einer Hypothese giebt, ist nicht, daß es eine Möglichkeit ist, sondern das unbewiesene Voraussetzen, daß diese Möglichkeit existire. Betrachtungen von dieser Art machten, daß ich den Begrif der Kraft anfangs sehr abstract genommen, und nicht sogleich den Begrif der Schwere damit verbunden habe. Der abstracte Begrif ist aber gerade derjenige, den wir uns gedenken, wenn wir uns eine Kraft überhaupt vorstellen, oder auch, wenn wir auf unsere eigene Empfindung merken. Der siebente Abschnitt der Abhandlung wird über den Vortrag und die Anordnung der vorhergehende Abschnitte ein ziemliches Licht ausbreiten. Man muß aber, um dabey recht zu sehen, diese vorhergehende Abschnitte vorerst gelesen haben. Noch bleibt hier anzumercken, daß die im siebenten Abschnitte angeführte Erfahrungen mit einer Allgemeinheit und mit einem Anschein von äusserst genauer Richtigkeit vorgetragen sind, für welche ich gar nicht gut stehe. Man nimmt sie zwar gewöhnlich so an, und bey dem Gebrauche der Mechanik im gemeinen Leben kann man es auch dabey bewenden lassen. Wer aber auf Theorie sieht, der kann sowohl die durchgängige Allgemeinheit als die bis auf Infinitesimaltheilchen richtige Genauigkeit in Zweifel ziehen. Vielleicht wird die noch immer so schwere und noch immer so unbekannte Theorie der Schwere und des dabey vorkommenden Mechanismus

nismus dabey gewinnen. In der That suchte auch Newton sich durch besondere Versuche zu überzeugen, ob das, was man in der Dynamic Masse nennt, dem, was man in der Static Gewicht nennt, so durchgängig proportional sey? Die Versuche, so wie er sie anstellte, wiederlegten den Satz nicht. Vielmehr zeigten sie eine Proportionalität. Sie zeigten aber diese nicht genauer als Newton beobachten konte. Und so läßt sich, wenn es auf sehr kleine Unterschiede ankommen sollte, noch anstehen, ob die Proportionalität bis aufs unendlich Kleine statt habe. Die meisten Körper verliehren im Feuer von ihrer Masse, einige aber werden im Feuer schwerer. Wie, wenn sie bey wenigerer Masse dennoch mehr Gewicht erhielten? Es mag nun aber mit bemeldten Erfahrungen beschaffen seyn, wie es wolle, so richten sich die im siebenten Abschnitte daraus gezogenen Schlüsse genau nach denselben, und welchem Schlussen etwas abgebrochen werden muß, daß wird der Erfahrung abgebrochen, die dabey zum Grunde liegt. Auch dieses aber zeigt, warum der siebente Abschnitt nicht der erste, oder überhaupt warum er erst der siebente ist.

Es ist billig, daß ich hier nebst Herrn Pr. Tetens, der ganz neulich über das Principium minimi eine schöne Abhandlung bekannt gemacht hat, die Herren Pr. Kästner und Karsten, als solche Gelehrten nenne, die sich wegen Berichtigung der Beweise auch in der Mechanik hervorgethan haben. Ihre Bemühungen sind weder unerheblich noch überflüßig. Das meiste in der Mechanik war immer noch blos deswegen wahr, weil es die Erfahrung lehrte, und in der Hydrostatik gieng es mit den Beweisen nicht besser. Ungeachtet ich nun hier in dem Vortrage der statischen Sätze einen andern Weg genommen, so finde ich dennoch den von diesen beyden Gelehrten gegebenen Beweis vom Gleichgewichte bey dem Hebel, so weit er reicht, ganz gut. Was sie beyde selbst noch dabey vermissen werden, ist daß der Beweis von jeden Verhältnissen aus dem Beweise von Verhältnissen in ganzen Zahlen hergeleitet werden muß, und

eben

eben daher viel von der Kürze, Geschmeidigkeit und von dem Einfachen verleurt, welches man bey den ersten Grundsätzen oder unmittelbar aus den Gründen abzuleitenden Lehrsätzen verlangen kann. Ich hatte mich, wiewohl ohne sonderlichen Erfolg, umgesehen, wiefern die Sache abgekürzt werden kan. Ich gab aber die Sache noch wegen einer andern Betrachtung auf, und diese ist folgende:

Man setze, daß es sich leicht und strenge erweisen lasse, daß bey dem Hebel Kraft zur Last in umgekehrter Verhältniß des Abstandes sey, so sehr auch Kraft und Last unter sich incommensurabel seyn mögen. Wenn auch ein solcher Beweis angeht, so hat man damit noch nicht viel anders gewonnen, als daß man das Gesetz bewiesen hat, nach welchem Kräfte auf einzelne Puncte des Hebels wirken. Es würde aber immer ein Sprung und zwar ein Sprung von einer auf zwo Dimensionen seyn, wenn man von Kräften, die auf einzelne Puncte wirken, auf Kräfte verfallen wollte, die auf ganze Linien wirken. So hete-

heterogen indessen diese Kräfte sind, so ist es dessen unerachtet gedenkbar, daß eine auf einen Punct angebrachte Kraft, einer auf eine ganze Linie wirkenden Kraft das Gleichgewicht halte. Die Kräfte sind hier eben so wie Puncte und Linien, der Dimension nach, verschieden, weil sonst von keinem Gleichgewichte, und überhaupt von keiner Vergleichung die Rede seyn könnte. Die hieher gehörende Begriffe und Grundsätze müssen nun nothwendig vorausgeschicket werden; und dieses machte auch, daß ich die Dimensionen der Kraft im dritten Abschnitte, die Theorie des Hebels aber erst im vierten vortrug, und so war es ein leichtes, diese Theorie behörig ins reine zu setzen. Alles kömmt auf den §. 31 an. Die daselbst gebrauchte Voraussetzung ist, daß eine auf eine ganze Linie gleichförmig vertheilte Kraft eben so wie die Linie in beliebige Theile getheilt werden könne, und die Theile der Kraft eben so wie die Theile der Linien ihr Verhältniß zum Ganzen behalten. Diesen Satz mag man als einen Grundsatz oder als ein *Postulatum* ansehen; es gilt mir gleichviel. Mir scheint er in dem Begrif der Kraft so am Tage zu liegen, daß ich nicht mehr wissen würde, was eine Kraft ist, wenn er erst sollte bewiesen oder in Zweifel gezogen werden. Und wenn ich auch die Theorie des Hebels nicht darauf gründen wollte, so bleibt er dessen unerachtet, eben so unentbehrlich, weil man in der Mechanik immer auch solche Kräfte betrachten muß, die auf ganze Linien, Flächen und körperliche Räume vertheilt sind. Muß man ihn aber als einen Grundsatz annehmen, um andere Hauptstücke der Mechanik darauf zu gründen, so gründe ich mit gleichem Rechte die Theorie des Hebels darauf, und erspahre dadurch so wohl das Aufsuchen anderer oder gar nicht zu findender Grundsätze, als ängstlich gesuchte Beweise, die zuletzt dennoch nur für einzelne Puncte des Hebels dienen.

Der nach dem dreyzehnten Abschnitte eingerückte Zusatz sollte eigentlich nach dem vierzehnten folgen, wie man es gleich aus den ersten fünf Zeilen sehen kann.

Es

Es hat übrigens dieses Versetzen nichts auf sich, wiewol es wäre geändert worden, wenn ich die Aushängebogen nicht erst nach dem Abdrucke erhalten hätte. Aus gleichem Grunde muß auch S. 72

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095$$

gelesen werden. S. 114 ist in den drey letzten Ueberresten im Rechnen um eine Unität gefehlt, um welche die achte Decimalstelle zu klein ist; und S. 154 unten muß

Nun ist

$$\begin{aligned} 3 \log.(b:a) &= 0,6820631 - 17 \\ \mathrm{l.}\,\tfrac{2}{81} \quad - - - &= 0,3925450 - 2 \\ \tfrac{1}{3}\log. a \quad - - &= 0,7598949 - 1 \end{aligned}$$

demnach

$$\log.\frac{2b^3}{81a^3}.\sqrt[3]{a} = 0,8345030 - 19$$

gelesen werden. In den Kupferplatten sind folgende Aenderungen zu machen:

Tab. III. Fig. 2. wird bey dem Durchschnittspunct der Bögen EM, GC ein A gesetzt.

Tab. III. Fig. 5 muß oben zwischen ♑, ♒ ein N stehen.

Tab. V. Fig. 14. wird am untern Ecke ein D gesetzt.

Tab. VI. Fig. 18. wird von g nach q eine blinde Linie gezogen.

Die

Die übrigen Errata, die von einiger Erheblichkeit sind, finden sich am Ende der Vorrede; und die so ich beym nochmaligen Collationiren in den Mondstafeln und den Beyspielen bemerkt, am Ende derselben. In der Tafel von den Theilern der Zahlen müssen

bey 1117	die Theiler	11. 101
- - 1603	- - - -	7. 229
- - 2737	- - - -	7. 17. 23
- - 4249	- - - -	7. 607
- - 8981	- - - -	7. 1283

gesetzt werden.

Einige Fehler im Texte rühren noch daher, daß der Setzer, vielleicht der Märkischen Mundart gemäß, die Fallendungen verwechselt, und z. E.

S. 172. l. 4. um sich der anstatt um sich die

S. 391. l. penult. denselben anstatt demselben.

S. 512. l. 5. von unten, den Körper anstatt dem Körper rc.

gesetzt hat.

Wer die Mondstafeln gebrauchen will, thut wohl, wenn er die bemerkten Errata derselben ausbessert. Ich glaube, daß sie sodann ziemlich zuverläßig seyn werden. Indessen da man

bey

bey dem Gebrauche selbst auch sich überrechnen kann, so ist das Rathsamste, jede Rechnung doppelt zu machen; bey der einen die Tage vom Anfang, bey der andern die Tage vom Ende des Jahrs zu gebrauchen. Dabey gebraucht man sodann auch in der zweyten Tafel zween verschiedene Jahrgänge, und da man doch einerley heraus bringen muß, so wird die Vergleichung immer zur Porbe dienen, und dadurch werden die mittlern Bewegungen ausser Zweiffel gesetzt, oder man kann wenigstens den Fehler nachspühren. Andere Mittel werden sich, wenn man sich einmal an die Tafeln gewöhnt hat, leicht anbieten. Selbst in der Abhandlung kommen einige bey den Beyspielen vor.

Da dieser zweyte Theil der Beyträge doppelt stärker geworden als der erste, so habe ich zwey Titelblätter abdrucken lassen, wovon das Zweyte vor die eilfte Abhandlung gebunden werden muß. Der Buchbinder wird daran dergestalt erinnert, daß er sich nach der Willkühr des Besitzers zu erkundigen hat, ob dieser zween oder nur einen Band haben will.

ERRATA.

Errata.

Seite	anstatt	liese:
2. linie 6	Theile	Theiler
5. l. 15	z. E.	So z. E.
5. unten	Ueberrest der	Ueberrest. Die
6. l. 18	$a - x$ mal	$a + x$ mal
29. l. 21	fürgegeben ist	fürgegeben, ist
30. l. 16	in einer	inner
70. l. 10	in Rechnung	Rechnung
78. §. 20. l. 1	$2 = 1$	$z = 1$
79. §. 21. l. 2	$l(1+2) = 2 \ldots$ ꝛc.	$l(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \&c.$
80. l. 1	$2 = 2$	$z = 2$
88. l. 3 von unten	$a^{2n+2} + b^{2n+2}$	$a^{2n+2} - b^{2n+2}$
97. §. 32. l. 11	657153 ꝛc.	67153 ꝛc.
118. §. 47. l. 3	$\frac{1}{7} + x^7$	$\frac{1}{7} x^7$
120. l. 3	$\frac{1}{9}\ \frac{1}{11}$	$\frac{1}{9} - \frac{1}{11}$
144. l. 4	Rakensburg	Ravensburg
192. §. 9. l. 6	$A x$	$A x^2$
213. l. 3	y^2	z
215. l. 23	$z^6 + \ldots$	$x^6 + \ldots$
254. l. 3	$m \nu C$	$\mu \nu C$
254. l. 5	$\alpha \mu \alpha$	$a \mu \alpha$
262. §. 15. l. 1	NH, MK	MH, NK
324. §. 13. l. 3	e	k
324. §. 13. am Ende	$d = NL$	$\delta = NL$
329. l. 18	Gleichgewichte	Gewichte

Errata.

Seite	anstatt	liese:
333. §. 23. am Ende	EAE	EAR
340. §. 32. l. 5	EN	ER
349. unten	12ten Figur	13ten Figur
353. §. 48. l. 9	k	K
ibid. . . .	MP	AP
407. §. 45. l. 3	E	P
416. §. 54. l. 13	Schwürigkeiten	Schwünge
421. am Rande	Fig. IX	Fig. XI.
422. unten	p =	b =
439. l. 4	$\epsilon\gamma$	$C\gamma$
. . am Rande	Fig. XI	Fig. XII
449. l. 3	CD	Cd
. . . 4	CA	Ca
488. l. 5	dcvk : m	dc ∽ k : m
496. l. 4	M	Q
520. l. 5	DC	DB
. . 6	DD	DB
. . 13	R	k
521. unten	P. DP	P. DB
542. l. 1	DEH	DEK
543. l. 9	gesetzte	Gesetz
618. l. 1	als	als die
639. §. 8. l. 6	weil	weil man
644. §. 11. l. 4	138	183
652. §. 22. l. 11	Eben so	finden. Eben so
658. l. 5	3 12 34 27	3 12 39 27
. . ibid.	3 12 39 46	3 12 34 46
. . §. 30. l. 7	142 20 46 39	144 20 46 39

665.

Seite	anstatt	liese:
665. §. 38. am Ende	PM	P—M
669. §. 48. l. 5	1 S	2 S
691.	$TL = \frac{1-ee}{1=e\cos\mu}$	$TL = \frac{1-ee}{1-e\cos\mu}$
693. l. 11. von unten	warum	warum sich
698. l. 3	+92 ſ2(2☉−2☊)	+92 ſ(2☉—2☊)
738. l. 10	20 St.	21 St.
767. §. 186. l. 3	Inclination	Declination
778. §. 200. l. 4	die meisten	wie die meisten
805. l. 3. von unten	1738	1783

Inhalt.

16°.

14°

I.
Theilung und Theiler der Zahlen.

§. 1.

Es ist nicht zu zweifeln, daß die Aufgabe von Erfindung der Theiler der Zahlen von den Geometer bereits an die ältesten Zeiten an die Geometer beschäftigt habe. Die Theorie der Primzahlen kömmt bereits in den Euclidischen Anfangsgründen vor, und eben so findet sich in denselben die Aufgabe von dem grösten gemeinsamen Theiler zwoer Zahlen. Daß aber Euclid von der Aufgabe, die Theiler einer fürgegebenen Zahl zu finden, nicht Erwähnung thut, rührt schlechthin nur daher, weil er alles wegläßt, was er nicht auf eine ganz determinirte Art erweisen konnte. Diese Aufgabe gehört einiger maßen unter die Diophantischen; sie ist aber auch zum Theil davon verschieden. Denn ungeachtet die Bedingung, daß die Theiler ganze Zahlen seyn müssen, dabey vorkommt, so bleibt die Frage: wie viele Theile eine jede Zahl habe, schlechthin unbestimmt; weil man Zahlen findet, die so viele und so wenig Theiler haben, als man immer will. Dieser Umstand aber verursacht, daß man in der Algebra die Frage von Erfindung der Theiler einer Zahl, schwerlich oder gar nicht auf eine Gleichung bringen kann. Man hat dabey kein ander Datum als die Zahl, deren Theiler zu suchen sind. Von dieser weiß man nicht voraus, ob sie Theiler hat, oder nicht. Wolte man demnach die Theiler, oder wenigstens die Factoren der fürgegebenen Zahl als Wurzeln einer Gleichung ansehen; so würde diese Zahl zwar das letzte Glied der Gleichung seyn, als welches allemal das Product der Wurzeln ist. Hingegen bleibt die Anzahl der Glieder dieser Gleichung, die Coefficienten derselben und der Grad der Gleichung ganz unerörtert, bevor nicht die Factoren der fürgegebenen Zahl gefunden sind. Man reicht eben so nicht aus, wenn man sich mit einer quadratischen Gleichung begnügen, und nur zween Factores finden will.

§. 2.

Die Auflösung, die man für diese Aufgabe angiebt, ist, daß man die Zahl, deren Theiler

man

man suchen will, durch jede kleinere Zahl wirklich theile, um dadurch, der Ordnung nach, zu finden, ob sie Theiler habe oder nicht? Ich sage, durch jede kleinere Zahl. Denn ungeachtet seit Euclids Zeiten an schon bewiesen ist, daß man hiebey alle die Zahlen vorbey gehen kann, die nicht Primzahlen sind, so setzt dieses dennoch voraus, daß man die Primzahlen kenne. Es ist aber die Erfindung der Primzahlen eben so schwer, als die Erfindung der Theiler einer Zahl, und man muß eben die Theilungen, die wir vorschlagen, vornehmen, es sey daß man eine Zahl als Primzahl erkennen, oder ihre Theiler finden will. Indessen läßt sich die Arbeit auf eine gedoppelte Art abkürzen. Denn wenn die Theilung mit einer Zahl nicht angeht, so geht sie auch mit jedem vielfachen dieser Zahl nicht an, und eben so viele Theilungen können demnach erspart werden. Verfährt man auf diese Art von 1 an gerechnet; so behält man allerdings nur jede Primzahlen, womit die Theilung vorgenommen werden muß. Sodann läßt sich ohne Mühe erweisen, daß, wenn eine Zahl Theiler hat, von diesen Theilern eben so viele kleiner sind als ihre Quadratwurzeln, als es deren giebt, die grösser sind, und daß letztere gefunden sind, sobald man erstere gefunden hat, weil jene die Quotienten von diesen sind. Dieser Umstand macht, daß man sich begnügen kann, die Theilung nur mit denen Primzahlen vorzunehmen, welche kleiner sind, als die Quadratwurzel der Zahl, deren Theiler man suchen will.

§. 3.

Indessen wenn leicht diese Zahl sich auf 100000, oder ein Million beläuft; so hat man so viele Theilungen vorzunehmen, daß man es gewiß nicht für die langeweile unternimmt, und ansteht, ob man die Zahl nicht eben so gut ungetheilt lasse, oder aufgebe; zumal da man nicht voraus wissen kann, ob es nicht eine Primzahl ist, und daher gar keine Zerfällung in Factoren zuläßt. Ich habe demnach auf Mittel gedacht, alle diese Theilungen dergestallt unnöthig zu machen, daß man ohne eine einige davon vorzunehmen, dennoch jede Quotienten und jede Ueberreste finden, und gleichsam in einer Reihe hinschreiben kann. Man sieht leicht, daß dieses in einer gewissen Ordnung, oder nach einem allgemeinen Gesetze geschehen müsse. Und da die Ordnung, wie die Primzahlen auf einander folgen, noch ganz unbekannt ist; so sieht man auch leicht, daß es besser angehen werde, wenn man die Theiler entweder nach der natürlichen Ordnung der Zahlen, oder wenigstens nach einer andern ganz einfachen Ordnung nimmt. Ich werde indessen die Sache so vortragen, wie ich darauf geleitet worden. Dahin gehören demnach folgende Betrachtungen.

§. 4.

Wenn eine Zahl kleine Theiler hat, dergleichen z. E. 2, 3, 5, 7, 11, 13 ꝛc. sind, so ist die Theilung damit bald vorgenommen, und die Probe fällt desto leichter aus, weil man für diese Theiler Kennzeichen hat, daran sich bald finden läßt, ob sie in einer Zahl aufgehen, oder nicht. Hat hingegen eine Zahl nur grosse Theiler, so ist dieses eben der Fall, wo man sehr viele Theilungen mit den kleinern Primzahlen vergebens vornehmen muß. Man sieht leicht, daß man hier durch grosse Theiler solche verstehen muß, die von der Quadratwurzel der Zahl, deren Theiler man sucht, wenig unterschieden sind, oder ein geringes Verhältniß zu derselben habe. Z. E. hat die Zahl 479707 nur die zween Theiler 491 und 977. Und diese werden groß genennt, weil sie von der Quadratwurzel 692 + ... kaum um die Hälfte verschieden sind. Hingegen hat die Zahl 479708 allerdings einen grössern Theiler 239854; sie hat aber auch einen sehr kleinen 2. Man kann daher nicht sagen, daß sie lauter grosse Theiler habe.

§. 5.

Wenn demnach eine Zahl A solche Theiler hat, die von ihrer Quadratwurzel nicht viel verschieden sind; so ist es das natürlichste, dieselben auf folgende Art zu suchen. Man ziehe die Quadratwurzel derselben in ganzen Zahlen aus, und sehe zugleich auf den Ueberrest der

Quadratwurzel in ganzen Zahlen, oder die von der nächst kleinern Quadratzahl sey $= a$, und der Ueberrest $= b$, so ist

$$A = aa + b.$$

Es ist klar, daß wenn A selbst eine Quadratzahl ist, sodann $b = 0$ wird. Da wir nun annehmen, A habe solche Theiler, die von a wenig verschieden sind, so nenne man den kleinern $a - x$, den grössern $a + x + y$, so ist

$$A = aa + b = (a - x).\ (a + x + y)$$

$$\text{und } \frac{A}{a - x} = \frac{aa + b}{a - x} = a + x + \frac{xx + b}{a - x}$$

$$= a + x + y$$

demnach wird

$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$

eine ganze Zahl seyn, welche zu $a + x$ addirt, den Theiler $a + x + y$ giebt. Man sieht zugleich auch, daß der Zähler dieses Bruches $xx + b$ der Ueberrest ist, welcher bleibt, wenn A durch $a - x$ getheilt, $a - x$ mal geht, oder wenn $a - x$ mit $a + x$ multiplicirt, von A abgezogen wird.

§. 6.

Man kann nun, um es im Vorbeygehen anzumerken, vermittelst dieser Formel

$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$

sprungsweise Zahlen bestimmen, zwischen welche kein

kein Theiler von A fällt. Es sey z. E. die Zahl 150737, so ist die nächst kleinere Quadratzahl 150544, ihre Wurzel $388 = a$, und der Unterschied $b = 193$, demnach

$$150737 = (388)^2 + 193$$

und
$$y = \frac{193 + xx}{388 - x}$$

eine ganze Zahl. Hier sieht man nun leicht, daß man x wenigstens $= 14$ nehmen müsse, wenn y auch nur $= 1$ solle werden können; und daß demnach zwischen 388 und $388 - 14 = 374$ kein Theiler der Zahl 150737 vorkomme. Man setze ferner $x = 14 + p$, so findet man

$$y = \frac{389 + 28p + pp}{374 - p} = 1 + \frac{15 + 29p + pp}{374 - p}$$

eine ganze Zahl. Hier sieht man wiederum, daß p wenigstens $= 10$ müsse genommen werden, wenn der Quotient auch nur $= 1$ werden solte. Demnach ist auch zwischen 374 und 364 kein Theiler der Zahl 150737. Man kann eben so fortfahren und $p = 10 + q$ setzen; und so wird man

$$y - 2 = \frac{41 + 50q + qq}{364 - q}$$

erhalten, welches wiederum eine ganze Zahl seyn muß.

§. 7.

Will man hiebey der beständig wieder vorkommenden Reductionen entübrigt seyn, so kehrt man die Formel

$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$

um, indem man sie in

$$2x + y = \sqrt{(4ay + yy - 4b)}$$

verwandelt. Hier muß demnach

$$4ay + yy - 4b$$

eine Quadratzahl seyn. Dieses giebt in erst angeführtem Beyspiele, wo $a = 388$ und $b = 193$ ist,

$$2x + y = \sqrt{(1552\,y - 772 + yy)}$$

woraus man für

y = 1	781*	y = 11	16421*
2	2336	12	17996
3	3893*	13	19573*
4	5452*	14	21152*
5	7013*	15	22733*
6	8576	16	24316
7	10141*	17	25901*
8	11708*	18	27488*
9	13277*	19	29077*
10	14848*	20	30668*
11	16421*	21	32261*
		22	33856 rc.

findet. Ueber diese Zahlen bemerke man:

1. Daß, wenn die zwo ersten gefunden sind, die folgenden durch blosses addiren gefunden werden. Denn ihre Unterschiede sind 1555, 1557, 1559, 1561, 1563 rc. jeder folgende um 2 grösser.

2. Da

2.° Da diese Zahlen Quadrate seyn sollen, so werden die meisten von denen, die es nicht sind, leicht an den Endigungen erkannt; diese sind mit einem * bezeichnet.

3. Demnach bleiben nur noch die wenige bey $y = 2, 6, 12, 16, 22$ rc. zu untersuchen. Da nun von diesen, wenn man die Probe anstellt, nur die letzte 33856 eine Quadratzahl ist, und 184 zur Wurzel hat, so findet man dadurch

$$2x + y = 2x + 22 = 184$$
$$x = 81$$

folglich den einen Theiler

$$388 - x = 307$$

den andern

$$388 + x + y = 491.$$

Und zugleich weiß man, daß, wenn auch die Zahl 150737 noch andere Theiler haben solte, derselben keiner zwischen 307 und 491 falle.

§. 8.

Die erstbemeldete Kennzeichen der Quadratzahlen, sind folgende:

1. Keine Quadratzahl endet sich mit 2, 3, 7, 8; sondern die Endungen sind

p 01	04	00	16	p 09
i 21	24	025	36	i 29
p 41	44	225	56	p 49
i 61	64	625	76	i 69
p 81	84		96	p 89

wo p überhaupt jede gerade Zahl, i aber jede ungerade bedeutet.

2.° Jede gerade Quadratzahl läßt sich so vielmal durch 4 theilen, bis der Quotient ungerade wird. Geschieht dieses bey einer fürgegebenen geraden Zahl nicht, so ist sie keine Quadratzahl.

3.° Demnach lassen sich auch die zwo letzten Ziffern einer geraden Quadratzahl durch 4 theilen.

4.° Jede ungerade Quadratzahl um 1 vermindert, läßt sich durch 8 theilen.

5.° Demnach auch die drey letzten Ziffern derselben um 1 vermindert, können durch 8 getheilet werden.

6. Jede Quadratzahl, durch 9 getheilt, geht entweder auf, oder sie läßt 1, 4, 7 im Ueberreste.

7. Eine ungerade Quadratzahl, so durch 9 nicht theilbar ist, läßt sich, um 1 vermindert, durch 24 theilen.

Proben

Proben von dieser Art giebt es noch unzählige. Man sieht aber aus dieser angeführten leicht, daß, wenn eine Zahl dieselbe aushält, es sehr wahrscheinlich eine Quadratzahl sey.

§. 9.

Man kann auch von diesen Kennzeichen mehrere verbinden, und dadurch das Aufsuchen der Theiler einer Zahl abkürzen. Um dieses durch ein Beyspiel zu erläutern, so sey die Zahl 479707 fürgegeben; und es solle gefunden werden, ob, oder welche Theiler sie habe? Zieht man nach den vorhingegebenen Regeln (§. 6.) die Quadratwurzel aus, so findet man

$$479707 = (692)^2 + 843 = a^2 + b$$

demnach $a = 692$

$b = 843$

und folglich

$$2x + y = \sqrt{(2768\,y + yy - 3372)}$$

demnach für

y = 2	2168 *	y = 8	18836
3	4941 *	9	21621 *
4	7716	10	24408 *
5	10493 *	11	27197 *
6	13272 *	12	29988 *
7	16053 *	13	32781 *
		14	35576 2c.

Diese Zahlen solten wiederum Quadratzahlen seyn; es werden aber vermöge der erst angegebenen Kennzeichen, die mit einem * bezeichneten

neten leicht ausgeschlossen, und so bleiben nur noch die zu untersuchen, welche bey $y = 4, 8, 14, 18$ rc. stehen. Um nun auch von diesen noch die meisten auszuschliessen, werden wir das sechste dieser Kennzeichen gebrauchen, daß nemlich jede Quadratzahl durch 9 getheilt, müsse $0, 1, 4, 7$ übrig lassen. Man setze demnach

$$y = 10m + 4 \quad \text{und} \quad y = 10m + 8$$

so verwandelt sich der Ausdruck

$$2768y + yy - 3372$$

in folgende beyde

$$27760m + 100m^2 + 7716$$

und $$27840m + 100m^2 + 17836.$$

Diese beyde Ausdrücke theile man durch 9, und behalte nur die Ueberreste, so ist

der erste	der zweyte
$4m + 3 + mm$	$3m + 7 + mm.$

Man setze nun für m die Werthe von 0 bis 8, und indem man wiederum durch 9 dividiret, behalte man ebenfalls nur die Ueberreste, so findet sich

für m =		für m =	
0	3	0	7*
1	8	1	2
2	6	2	8
3	6	3	7*
4	8	4	8
5	3	5	2
6	0*	6	7*
7	8	7	5
8	0*	8	5

Unter

Unter diesen Ueberresten finden sich nur o und 7, welche bey Quadratzahlen vorkommen. Demnach werden für m auch nur die Werthe

6	0
8	3
15	6
17	9
24	12
26 ꝛc.	15 ꝛc.

beybehalten, welches für y die Werthe

64	8
84	38
154	68
ꝛc.	98 ꝛc.

giebt. Wir können aber bey m und den Ausdrücken

$$27760\,m + 100\,m^2 + 7716$$
$$27840\,m + 100\,m^2 + 17836$$

bleiben. Wird demnach in diesen

$m = 6$	$m = 0$
8	3
15	6
ꝛc.	9 ꝛc.

gesetzt, so findet sich

für		für	
$m = 6$	177976	$m = 0$	17836
$= 8$	236196*	$= 3$	25314
	ꝛc.	$= 6$	188476 ꝛc.

Hier

Hier ist nun $\frac{236196}{4} = \frac{59049}{(9)} = \frac{6561}{(9)}$
$$= \frac{729}{(9)} = \frac{81}{(9)} = \frac{9}{(9)} = 1;$$
demnach die Quadratwurzel $= 2.3.3.3.3.3.$
$= 486 = 2x + y$ und $y = 10m + 4 = 84.$

Demnach $\quad 2x + 84 = 486$
$$x = 201$$
$a - x = 692 - 201 = 491$ der erste Theiler,
$a + x + y = 692 + 201 + 84 = 977$ der andere Theiler.

Da die übrige Zahlen 177976, 17836, 25314, 188476 keine Quadratzahlen sind, welches vermittelst der Theilung durch 4 leicht erhellet, so folgt auch, daß die fürgegebene Zahl 479707, wenn sie ausser den beyden Theilern 491 und 977 noch andere hätte, derselben keiner zwischen diese beyde falle.

§. 10.

Um nun wiederum zu dem §. 5. zurücke zu kehren, so haben wir daselbst angemerkt, daß in der Formel
$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$
der Zähler dieses Bruches $xx + b$, der Ueberrest ist, welcher bleibt, wenn $a - x$ in A getheilt, $a + x$ mal geht; oder wenn $a - x$, $a + x$ male genommen von A abgezogen wird.

Setzt

Setzt man nun für x der Ordnung nach 0, 1, 2, 3, 4 ꝛc. so sieht man leicht, daß in

$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$

der Zähler immer grösser, der Nenner aber immer kleiner wird, und daß daher nach und nach y grösser als 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. werden muß. Es ist aber, wenn man A durch a — x theilt, der Quotient

$$a + x + y = a + x + \frac{xx + b}{a - x}$$

demnach wächst dieser nicht nur um die Einheiten von x, sondern zugleich auch, wiewohl langsamer, um die von y. Ferner sieht man, daß die Ueberreste xx + b anfangs wie die Quadrate von x, und daher ihre Unterschiede wie die ungerade Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 ꝛc. anwachsen, bis sie grösser als der Theiler a — x werden. Wird demnach, so bald dieses geschiehet, a — x von xx + b abgezogen, so wird der Quotient um 1 grösser, und die folgenden Ueberreste nehmen nun ebenfalls stärker zu. Denn man setze, das Abziehen geschehe, wo x = c wird, so ist der Ueberrest für x = c

vor dem Abziehen	nach dem Abziehen
$cc + b$	$cc + c + b - a$

demnach für die nächstfolgende Stelle x = c + 1

$cc + 2c + 1 + b$	$cc + 3c + 2 + b - a$

und daher das Anwachsen dieser Ueberreste

$2c + 1$	$2c + 2$

woraus

woraus man sieht, daß, wenn man das Abziehen wirklich vornimmt, die folgende Ueberreste um 1 stärker anwachsen, als wenn man das Abziehen nicht vorgenommen hätte.

§. 11.

Da sich alles dieses in einem Beyspiele klarer zeigen läßt, so sey die Zahl 10007 durch jede kleinere Zahlen zu theilen, und die zu jedem Theiler gehörige Quotienten und Ueberreste zu finden. Nun ist $10007 = (100)^2 + 7 = aa + b$, demnach $a = 100$ und $b = 7$, folglich $y = \frac{7 + xx}{100 - x}$

Dieses giebt nun folgende Tabelle für jede Theiler $100 - x$.

§. 12.

In dieser Tabelle enthält die Columne A die Theiler $100 - x$. In der Columne B steht neben jedem Theiler der Ueberrest. Die dritte Columne C giebt die Unterschiede, oder die allmählige Zunahme dieser Ueberreste an. Endlich kommen in der vierten Columne D die Quotienten in ganzen Zahlen vor. Alle diese Zahlen lassen sich nun allerdings finden, wenn man, der Ordnung nach, die fürgegebene Zahl 10007 durch 100, 99, 98, 97, 96 rc. theilen will. Da es aber sehr langweilig ist, so viele Theilungen vorzunehmen, so ist es unstreitig

A	B	C	D
100	7		100 (I)
99	8	1	101
98	11	3	102
97	16	5	103
96	23	7	104
95	32	9	105
94	43	11	106
93	56	13	107
92	71	15	108
91	88	17	109
90	107	19	110
90	17		111
89	39	22	112
88	63	24	113
87	89	26	114
87	2		115
86	31	29	116
85	62	31	117
84	95	33	118
84	11		119
83	47	36	120
82	85	38	121
82	3		122
81	44	41	123
80	87	43	124
80	7		125
79	53	46	126
78	101	48	127
78	23		128
77	74	51	129
76	127	53	130

A	B	C	D
76	51		131
75	107	56	132
75	32		133
74	91	59	134
74	17		135
73	79	62	136
73	6		137
72	71	65	138
71	138	67	139
71	67		140
70	67	0 (70)	142 (II)
69	71	4	144
69	2		145
68	11	9	147
67	24	13	149
66	41	17	151
65	62	21	153
64	87	25	155
64	23		156
63	53	30	158
62	87	34	160
62	25		161
61	64	39	163
61	3		164
60	47	44	166
59	95	48	168
59	36		169
58	89	53	171
58	31		172
57	32	1 (58)	175 (III)
56	39	7	178
55	52	13	181
54	71	19	184

A	B	C	D
54	17		185
53	43	26	188
52	75	32	191
52	23		192
51	62	39	195
51	11		196
50	57	46	199
50	7		200
49	11	4 (53)	204 (IV)
48	23	12	208
47	43	20	212
46	71	28	216
46	25		217
45	62	37	221
45	17		222
44	19	2 (46)	227 (V)
43	31	12	232
42	53	22	237
42	11		238
41	44	33	243
41	3		244
40	7	4 (44)	250 (VI)
39	23	16	256
38	51	28	262
38	13		263
37	17	4 (41)	270 (VII)
36	35	18	277
35	67	32	284
35	32		285
34	45	13 (47)	293 (VIII)
34	11		294
33	41	30	302

A	B	C	D
33	8		303
32	23	15 (47)	312 (IX)
31	25	2 (33)	322 (X)
30	47	22	332
30	17		333
29	31	14 (43)	344 (XI)
29	2		345
28	11	9 (37)	357 (XII)
27	17	6 (33)	370 (XIII)
26	23	6 (32)	384 (XIV)
25	32	9 (34)	399 (XV)
25	7		400
24	23	16 (40)	416 (XVI)
23	48	25 (48)	433 (XVII)
23	25		434
23	2		435
22	41	39 (61)	453 (XVIII)
22	19		454
21	74	55 (76)	473 (XIX)
21	53		474
21	32		475
21	11		476
20	87	76 (96)	496 (XX)
20	67		497
20	47		498
20	27		499
20	7		500
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

eine beträchtliche Abkürzung, wenn alle diese Zahlen durch blosses Addiren gefunden, und gleichsam nur hingeschrieben werden können, so bald man vermittelst der Ausziehung der Quadratwurzel aus der fürgegebenen Zahl 10007 die drey ersten Zahlen

100 7 100

gefunden hat.

§. 13.

Dieses geht nun nach folgenden Regeln an.

1.° Erhellet aus der (§. 11.) gefundenen Formel $y = \frac{7 + xx}{100 - x}$ daß die ersten Ueberreste nach den Quadraten xx demnach ihre Unterschiede nach den ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 rc. anwachsen.

2.° Daher finden sich in der dritten Columne C. diese ungerade Zahlen, der Ordnung nach, bis auf 19; und bis eben so weit sind sie in der zweyten Columne B zu dem ersten Ueberreste 7 addirt. Man begreift leicht, daß wenn 10007 eine Quadratzahl wäre, dieser erste Ueberrest $= 0$ seyn, und demnach die zweyte Columne die Quadrate 1, 4, 9, 16, 25 rc. enthalten würde.

3. Nun findet sich die erstbemeldte Ordnung bey dem Theiler 90 unterbrochen: denn

19 zu 88 addirt, giebt 107. Da nun dieser Ueberrest grösser ist als der Theiler, so wird dieser davon abgezogen, und so bleibt 17, welcher nunmehr kleinere Ueberrest, unter 107 und ebenfals neben 90 gesetzt ist; so, daß auf diese Art 90 zwey mal vorkömmt.

4. Sodann nahmen die Quotienten in der Columne D, welche überhaupt

$$100 + x + y = 100 + x + \frac{7 + xx}{100 - x}$$

sind, bis eben dahin, der Ordnung nach, um 1 zu. Von da an wird jeder um 1 grösser. Denn da 90 mal $110 = 9900$ von 10007 abgezogen 107, demnach mehr als 90 übrig läßt; so sieht man leicht, daß sich in der That 90 mal $110 + 1$, oder 90 mal 111 abziehen lassen. Und dieses macht, daß der Quotient 111 neben dem zweyten 90 und nicht neben 89 steht, wo er sonst würde zu stehen gekommen seyn, wenn man nicht 90 von 107 abgezogen hätte.

5. Endlich sieht man in der dritten Columne C daß von 19 nicht auf 21, sondern auf 22 gesprungen wird. Dieses würde ebenfalls nicht seyn, wenn nicht 90 wäre von 107 abgezogen worden. Denn so würde man

A	B	C	D
90	107	19	110
89	128	21	111
88	151	23	112
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

gehabt haben. Da aber auf diese Art alle Ueberreste B grösser seyn würden als ihre Theiler A, so müßten diese sämtlich abgezogen werden. Man ziehe sie wirklich ab, so wird jeder Quotient D um 1 grösser, und man erhält

90	17	19	111
89	39	22	112
88	63	24	113
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

demnach eben die Zahlen, wie sie in der Tafel sind. Man verfährt daher kürzer, wenn man, wie es in der Tafel geschehen, 90 von 107 abzieht, und sodann von 19 auf 22 springt.

6.° Da nun die Ueberreste durch das beständige Addiren der Unterschiede, so in der Columne C sind, immer anwachsen; so sieht man leicht, daß im folgenden wiederum müßten Subtractionen vorgenommen werden, so oft ein Ueberrest anfängt grösser als der Theiler zu werden.

7.° Dieses geschieht auch würklich bey den Theilern 87, 84, 82, 80, 78, 76, 75, 74, 73, 71, welche daher eben so wie vorhin

90 doppelt vorkommen, und wo die Unterschiede C ebenfalls um 3 grösser werden.

8.° Bis dahin geht demnach alles nach einem sehr einfachen Geseze. Hingegen fängt bey dem Theiler 70 eine neue Ordnung an; und dieses geschieht immer wo der Quotient anfängt, doppelt, drey, vier, fünf ꝛc. mal grösser als der Theiler zu werden.

9.° Um diese Abänderungen aber, der Ordnung nach, zu betrachten, so sieht man, daß bey 71 der Ueberrest 138 steht, und demnach 71 davon abgezogen werden muß. Dieses Abziehen macht, daß man in der Columne C von 67 auf 70 kömmt, welche Zahl nun eben so groß ist als der Theiler; demnach wird sie zu dem neben dem 71 stehenden Ueberrest 67 nicht erst addirt, weil man den Theiler 70 von der Summe wiederum abziehen müßte. Ich habe demnach in der Columne C 70 in ( ) eingeschlossen, und 0 voran gesetzt, welches anzeigt, daß der neben 71 stehende Ueberrest 67 nicht vermehrt werde, sondern ebenfalls neben den Theiler 70 zu stehen komme.

10. Da nun aber dadurch der Quotient um 1 grösser wird, so steht auch neben dem Theiler 70 nicht 141, sondern 142.

11. Da

11. Da ferner bey dem Theiler 70 eine Subtraction geschehen, so solte in der Columne C neben 69 nunmehr 73 stehen; da sich aber auch hievon 69 abziehen läßt, und 4 übrig bleibt, so habe ich auch nur 4 neben 69 gesetzt, welches zu 67 addirt, den Ueberrest 71 giebt. Man sieht auch leicht, daß ebenfalls wegen des Abziehens, der Quotient um 1 grösser, und demnach 144 werden muste.

12. Aus gleichen Gründen nehmen von da an die Quotienten um 2, die Unterschiede C um 4 zu, jedoch mit dem Bedinge, daß, wo die Ueberreste grösser als die Theiler werden, daselbst wiederum subtrahirt, der Theiler doppelt gesetzt, der Quotient um 1 vermehrt, und in der Columne C 4 + 1 oder 5 addirt wird; wie man es bey den Theilern 69, 64, 62, 61, 59 sehen kann.

13. Bis dahin geht es nach der zweyten Ordnung. Die dritte fängt aus ganz ähnlichen Gründen bey 57 an. Denn da würde in der dritten Columne 58 zu stehen kommen, wenn man nach der zweyten Ordnung fortfahren wolte. Da aber 58 bereits grösser ist als der Theiler 57, so habe ich 58 in ( ) eingeschlossen, und dafür 1 gesetzt, um der Subtractionen überhoben zu seyn. Dieses machte aber, daß

nun die Quotienten um 3, die Zahlen C um 6 grösser werden, doch ebenfalls mit dem Bedinge, daß, wo die Ueberreste grösser als die Theiler werden, daselbst wiederum subtrahirt, der Theiler doppelt gesetzt, der Quotient um 1 vermehrt, und in der Columne C 6 + 1 oder 7 addirt wird, wie man es bey den Theilern 54, 52, 51, 50 sehen kann.

14. Auf diese Art geht es auch mit den folgenden Ordnungen, deren Anfang in der Columne D mit römischen Zahlen gezeichnet steht. Bey jeder Ordnung wachsen die Theiler um so viel Einheiten als die Zahl der Ordnung angiebt, die Unterschiede C aber um doppelt so viel. Doch immer mit Vorbehalte des Umstandes, wo eine Subtraction vorgenommen wird.

15. Man sieht auch leicht, daß die Ordnungen immer näher zusammen kommen, oder sich auf weniger Theiler erstrecken. Dieses macht auch, daß man die Aufmerksamkeit wegen der Abwechselung der Zahlen in der Columne C verdoppeln muß.

16. So z. E. bey dem Theiler 29 fängt die XIte Ordnung an, und zugleich wird 29 von 31 abgezogen; dieses macht, daß man in C 2. XI + 1 = 23 zu 14 addiren muß, um (37) zu erhalten. Nun wird der Theiler 28 von (37) abgezogen,

und

und dieses macht, daß die XIIte Ordnung anfängt. Der Unterschied $37-28=9$ wird vor (37) gesetzt und zu 2 addirt, um den Ueberrest 11 zu haben. Endlich wird $345+\text{XII}=357$ der Quotient; sodann giebt $2.\text{XII}+9=24+9=(33)$, und $33-27=6$, und $6+11=17$. Und wegen des Abziehens fängt die XIIIte Ordnung an; so, daß $357+\text{XIII}=370$ der Quotient wird rc.

17. Bey dem Theiler 23 wird zweymal, bey 21 dreymal, bey 20 viermal subtrahirt; weil die Zahlen C immer grösser, die Theiler aber immer kleiner werden. Ich habe demnach bey 20 abgebrochen, weil nachgehends die Quotienten so schnelle wachsen, daß des subtrahirens kein Ende wird.

18. Noch ist anzumerken, daß es Fälle giebt, wo gleich Anfangs subtrahirt werden muß. So z. E. wenn anstatt der Zahl 10007 die Zahl 10157 wäre vorgenommen worden zu theilen; so würde $a=100$, $b=157$ gewesen seyn. Demnach hätte man

A	B	C	D
100	157		100
100	57		101
99	59	2	102
98	63	4	103
97 rc.	69 rc.	6 rc.	104 rc.

und folglich gleich Anfangs zu subtrahiren gehabt; und so wären auch die Unterschiede C gleich Anfangs um 1 grösser gewesen.

§. 13.

Das bisher gesagte betrift den Fall, wo man a — x als Theiler ansieht. Man kann aber auch a + x als Theiler ansehen, und da erhält man

$$\frac{A}{a+x} = \frac{aa+b}{a+x} = a - x + \frac{xx+b}{a+x}$$

Setzt man demnach für x der Ordnung nach 0, 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. so wird der Theiler a + x der Ordnung nach um 1 grösser, der Quotient

$$a - x + \frac{xx+b}{a+x}$$

der Ordnung nach um 1 kleiner, ausgenommen an denen Stellen wo der Bruch

$$\frac{xx+b}{a+x}$$

anfängt grösser als 1, 2, 3, 4 ꝛc. zu werden, welches aber hier, wo der Theiler immer anwächst, nicht so ofte wie in den vorhergehenden Fall geschieht. Man sieht auch leicht, daß, weil hier der Theiler von a bis auf A = aa + b anwachsen kann, die Berechnung von jeden Quotienten und Ueberresten um so viel mehr verlängert wird. Denn so z. E. hatten wir vorhin bey der Zahl 10007 nur die Theiler von

100

100 bis 1; hingegen haben wir hier Theiler die von 100 bis 10006 gehen. Bey noch grössern Zahlen wird dieser Unterschied noch grösser. Uebrigens wird die länger dauernde Arbeit bey den Theilern a + x dadurch leichter gemacht, daß man hier nicht auf so viele Abwechslungen von Ordnungen zu sehen hat. Ich werde nun, um das Verfahren zu erläutern, eben die Zahl 10007 vornehmen, ohne jedoch die daraus erwachsende Tabelle bis zum Ende fortzusetzen, weil die Berechnung von Anfang bis zum Ende gleich einfach bleibt.

§. 14.

Hier sind nun wiederum in A die Theiler, in B ihre Ueberreste, in C deren Unterschiede, in D die Quotienten. Bey dem Theiler 111 geht die erste Subtraction vor, weil der Ueberrest 128 grösser als der Theiler ist. Dadurch wird der Quotient, welcher 89 war, in 90 verwandelt, und in der Columne C geht man nun von 21 nur zu 22. Denn die Subtraction, die mit 111 vorgenommen worden, ist so gut als mit allen folgenden Theilern vorgenommen. Da aber bey den folgenden Theilern nicht 111, sondern der Theiler selbst, oder 112, 113, 114, 115 rc. hätte müssen abgezogen werden, so wird diese Verminderung der dazu gehörenden Ueberreste dadurch erhalten, daß die Unterschiede C nicht 23, 25 rc. sondern nur 22, 24, 26 rc. genommen werden. Eine eben derglei-

chen

A	B	C	D
100	7		100
101	8	1	99
102	11	3	98
103	16	5	97
104	23	7	96
105	32	9	95
106	43	11	94
107	56	13	93
108	71	15	92
109	88	17	91
110	107	19	90
111	128	21	89
111	17		90
112	39	22	89
113	63	24	88
114	89	26	87
115	117	28	86
115	2		87
116	31	29	86
117	62	31	85
118	95	33	84
119	130	35	83
119	11		84
120	47	36	83
121	85	38	82
122	125	40	81
122	3		82
123	44	41	81
124	87	43	80
125	132	45	79
125	7		80
126	53	46	79
127	101	48	78
128	151	50	77
128	23		78

A	B	C	D
129	74	51	77
130	127	53	76
131	182	55	75
131	51		76
132	107	56	75
133	165	58	74
133	32		75
134	91	59	74
135	152	61	73
135	17		74
136	79	62	73
137	143	64	72
137	6		73
138	71	65	72
139	138	67	71
140	207	69	70
140	67		71
141	137	70	70
142	209	72	69
142	67		70
143	140	73	69
144	215	75	68
144	71		69
145	147	76	68
145	2		69
146	79	77	68
147	158	79	67
147	11		68
148	91	80	67
149	173	82	66
149	24		67
150	107	83	66
151	192	85	65
151	41		66
152	127	86	65

chen Verminderung geht auch bey jeder folgenden Subtraction, z. E. bey den Theilern 115, 119, 122, 125, 128, 131, 133 rc. vor.

§. 15.

Es ist nun die Frage, diese Methode, wodurch unzählige Divisionen in ein blosses addiren und subtrahiren verwandelt werden, bey der Aufgabe von Erfindung der Theiler einer Zahl anzuwenden. Man sieht von selbst, daß es hiebey eigentlich nur auf die Ueberreste ankömmt. Die in erstgegebenem Beyspiele gebrauchte Zahl 10007 ist eine Primzahl; und so ist sich nicht zu verwundern, daß in den Columnen B kein Ueberrest = 0 wurde. Denn man sieht leicht, daß dieses geschehen muß, so ofte die Zahl, so man auf diese Art behandelt, wirklich Theiler hat. Man sieht auch leicht, daß der Ueberrest desto früher = 0 wird, je näher ein Theiler der Quadratwurzel der Zahl kömmt, deren Theiler man sucht. So z. E. wenn die Zahl 53297 fürgegeben ist

$$53297 = (230^2) + 397,$$

demnach hat man (§. 13. No. 18.)

A	B	C	D
230	397		230
230	167		231
229	169	2	232
228	173	4	233
227	179	6	234
226	187	8	235
225	197	10	236
224	209	12	237
223	223	14	238
223	0		239

Da

Da hier der erste Ueberrest 397 bereits grösser ist als der Theiler, so wird gleich Anfangs die Subtraction vorgenommen, und daher die Unterschiede C um 1 vermehrt, $= 2, 4, 6, 8$ ꝛc. Bey 223 kömmt die zweyte Subtraction vor. Und da der Ueberrest $= 0$ wird; so folgert man ohne weiters, daß die fürgegebene Zahl 53297 das Product aus 223 und 239 sey. Es ist für sich klar, daß man ungleich länger würde zu rechnen gehabt haben, wenn man 53297 durch alle Primzahlen von 1 bis 223 hätte wirklich dividiren wollen; und daß demnach durch diese Methode gerade diejenigen Theiler am kürzesten gefunden werden, die man sonst am mühsamsten durch das Dividiren mit Primzahlen findet.

§. 16.

Da man aber nicht voraus wissen kann, ob eine Zahl so schickliche Theiler habe, so würde in jeden andern Fällen der Vortheil dieser Methode nur in der Abkürzung bestehen, wodurch alle solche Divisionen erspahrt werden. Dieser Vortheil ist zwar allemal an sich beträchtlich; es findet sich aber noch ein anderer mit ein, und dieser macht, daß auch dann, wo eine fürgegebene Zahl entweder nur kleine, oder auch gar keine Theiler hat, man nicht nöthig hat, die Theiler sämtlich durch die Musterung gehen zu lassen; sondern, daß man sich mit denen begnügen kann, welche sich in einer dem

Bezir-

Bezirke der oben (§. 12. No. 14.) sogenannten ersten Ordnung befinden. Oder, welches einerley ist, man setzt die Tabelle nur so weit fort, bis der Quotient anfängt doppelt grösser als der Theiler zu werden.

§. 17.

Um dieses zu erweisen, und zugleich durch ein Beyspiel aufzuklären, werden wir wiederum die Zahl 10007 vornehmen, und dabey setzen, die Tabelle (§. 11), so wir für dieselbe berechnet, sey nur bis auf den Theiler 70 fortgesetzet. Da nun bis dahin kein Ueberrest $B=0$ ist; so sieht man sogleich, daß, wenn auch die Zahl 10007 Theiler haben solte, deren keiner zwischen 70 und 142 falle. Nun sage ich, daß wenn die Zahl 10007 einen Theiler z haben solte, der kleiner als 70 ist, dieses sich an denen bis zu dem Theiler 70 berechneten Theilern, Ueberresten und Quotienten erkennen lasse. Denn was auch immer z für eine Zahl seyn mag, so fällt wenigstens ein Multiplum davon zwischen 70 und 142, oder auch nur zwischen 70 und 140; und zwar wird es

$2z$	seyn, wenn z zwischen			35	und	70
$4z$	-	-	-	18	-	35
$8z$	-	-	-	9	-	17
$16z$	-	-	-	5	-	8
$32z$	-	-	-	3	-	4
$64z$	-	-	-	2	-	2
$128z$	-	-	-	1	-	1

fällt.

fällt. Demnach wird ein Multiplum von z, und zwar wenigstens eines, zwischen 70 und 140 fallen, und daher unter denen von 100 bis 70 berechneten Theilern oder unter ihren Quotienten vorkommen. Dazu kommt nun noch der Umstand, daß, wo auch immer dieses Multiplum vorkommt, der in B dabey befindliche Ueberrest, entweder der Theiler z selbst, oder wenigstens ein Multiplum davon ist. Das will nun sagen: wenn unter den bis zu dem Theiler 70 in B befindlichen Ueberresten einer vorkommt, der entweder mit dem Theiler oder mit dem Quotienten commensurabel ist, so, daß entweder der Ueberrest und der Theiler, oder der Ueberrest und der Quotient, oder alle drey sich durch einerley Zahl dividiren lassen; so ist diese Zahl zugleich auch ein Theiler der fürgegebenen Zahl 10007. Geht es aber bey keinem der Ueberreste an, so ist 10007 eine Primzahl. Denn da der Voraussetzung zufolge z in 10007 getheilt werden kann, so wird 10007 durch das Multiplum n z getheilt, entweder ebenfalls aufgehen, oder z, 2 z, 3 z, 4 z .... m z übrig lassen, nemlich eben so vielmal z, als n in (10007 : z) getheilt, Einheiten übrig läßt. Lasset uns nun dieses durch einige Beyspiele erläutern.

§. 18.

Es seyn die Theiler der Zahl 217871 zu finden. Hier ist

$$217871 = (466)^2 + 715$$

dem-

demnach

A	B	C	D	A	B	C	D
466	715	—	466	455	381	22	478
466	249		467	454	405	24	479
465	251	2	468	453	431	26	480
464	255	4	469	452	459	28	481
463	261	6	470	452	7		482
462	269	8	471	451	38	31	483
461	279	10	472	450	71	33	484
460	291	12	473	449	106	35	485
459	305	14	474	448	143	37	486
458	321	16	475	447	182	39	487
457	339	18	476	446	223	41	488
456	359	20	477				

Da sich nun hier bey dem Theiler 446 der Ueberrest 223 findet, welcher halb so groß als der Theiler ist; so ist 223 ein Theiler der fürgegebenen Zahl 217871. Nimmt man die Theilung vor, so ist der Quotient $977 = 2 \cdot 488 + 1$. Denn da 446 in 217871 getheilt, $488\frac{1}{2}$ mal geht, so geht die Hälfte von 446 doppelt so viel, oder 977 mal. Will man nun sehen, ob 977 Theiler habe; so ist

$$977 = (31)^2 + 16$$

demnach

A	B	C	D
31	16		31
30	17	1	32
29	20	3	33
28	25	5	34
27	32	7	35
27	5		36
26	15	10	37
25	27	12	38
25	2		39
24	17	15	40
23	34	17	41
23	11		42
22	31	20	43
22	9		44

Diese Tabelle wird nur bis zu den Theiler 22 fortgesetzt, weil schon dieser den doppelt grössern Quotienten 44 giebt. Sie muste aber bis dahin fortgesetzet werden, weil unter den Ueberresten B keiner vorkame, der mit seinen zugehörenden Theiler oder Quotienten commensurabel wäre; demnach ist 977 eine Primzahl.

§. 19.

Wenn eine Zahl kleine Theiler hat, so darf man die dafür zu berechnende Tabelle nicht weit fortsetzen, weil ihre Multipla sich bald zeigen. Es seyn z. E. die Theiler der Zahl 391391 zu suchen,

suchen, wo man leicht sieht, daß sie deren haben muß, und daß wenigstens 391 und 1001 solche sind. Nun ist

$$391391 = (625)^2 + 766$$

demnach

A	B	C	D
625	766		625
625	141		626
624	143	2	627
623	147	4	628
622	153	6	629
621	161	8	630

Es ist unnöthig die Tabelle weiter fortzusetzen: denn

143 und 624 lassen sich durch 13 theilen.
143 = 627 = = = = 11 =
147 = 623 = = = = 7 =
153 = 622 = = = = 17 =
161 = 621 = = = = 23 =
161 = 630 wiederum durch 7 theilen.

Und da man leicht sieht, daß schon das Product aus 7, 11, 13, 17, 23 die Zahl 391391 geben wird, wie es dieselbe auch wirklich giebt; so sind die einfachsten Factoren dieser Zahl sämtlich gefunden. Da übrigens so viele kleine Factoren ebenfalls viele nicht gar grosse Producte haben, so kann es nicht fehlen, daß nicht auch von diesen die Multipla bald vorkommen solten. Wir wollen zu diesem Ende die Tabelle um etwas weiter fortsetzen:

621	161	8	630
620	171	10	631
619	183	12	632
618	197	14	633
617	213	16	634
616	231	18	635
615	251	20	636
614	273	22	637
613	297	24	638
612	323	26	639
611	351	28	640
610	381	30	641
609	413	32	642
608	447	34	643
607	483	36	644
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.

Hier findet sich nun bereits, daß

231 und 616 durch 77 oder 7 mal 11,
273 = 637 = = 91 = 7 = 13,
483 = 644 = = 161 = 7 = 23,

und ausser dem wiederum

297 und 638 durch 11,
323 = 639 = = 17,
413 = 609 = = 7 theilbar sind.

§. 20.

So giebt es auch sehr häufig solche Fälle, wo die Theiler unter den Ueberresten so gleich selbst zum Vorschein kommen. Denn man sieht leicht, daß dieses in erst angeführtem Beyspiele schlechthin nur deswegen nicht geschehen, weil

weil die ersten Ueberreste an sich schon viel grösser als die Theiler waren. So z. E. ist

$$35351 = (188)^2 + 7$$

demnach

A	B	C	D
188	7		188
187	8	1	189
186	11	3	190
185	16	5	191
184	23	7	192

Hier findet sich nun schon $184 = 8 . 23$: so, daß demnach 23 ein Theiler der fürgegebenen Zahl 35351 ist. Wenn man aber auch weiter fortfährt,

183	32	9	193
182	43	11	194
181	56	13	195
180	71	15	196
179	88	17	197
178	107	19	198
177	128	21	199
176	151	23	200
175	176	25	201
175	1		202
174	29	28	203

so kömmt man auf $174 = 6 . 29$, so, daß demnach auch 29 ein Theiler von 35351 ist. Da man nun voraus sehen kann, daß der dritte Theiler 53 seyn müsse, so darf man nur noch ein wenig die Rechnung forsetzen, um auf den

 Quo=

Quotienten $212 = 4.53$, oder auf den Theiler $A = 159 = 3.59$ zu kommen. Es ist

173	59	30	204
172	91	32	205
171	125	34	206
170	161	36	207
169	199	38	208
169	30		209
168	71	41	210
167	114	43	211
166	159	45	212
165	206	47	213
165	41		214
164	91	50	215
163	143	52	216
162	197	54	217
162	35		218
161	92	57	219
160	151	59	220
159	212	61	221
159	53		222.

Hier kömmt demnach der dritte Factor 53 zum Vorschein.

§. 21.

Es giebt aber auch Fälle, wo man die Rechnung beynahe eben so weit fortsetzen muß, um die Theiler zu finden, als wenn die Zahl eine Primzahl wäre. Dahin gehört z. E. die Zahl 10001, welche $= (100)^2 + 1$ ist. Man hat

hat demnach

A	B	C	D
100	1		100
99	2	1	101
98	5	3	102
97	10	5	103
96	17	7	104
95	26	9	105
94	37	11	106
93	50	13	107
92	65	15	108
91	82	17	109
90	101	19	110
90	11		111
89	33	22	112
88	57	24	113
87	83	26	114
86	111	28	115
86	25		116
85	56	31	117
84	89	33	118
84	5		119
83	41	36	120
82	79	38	121
81	119	40	122
81	38		123
80	81	43	124
80	1		125
79	47	46	126
78	95	48	127
78	17		128
77	68	51	129
76	121	53	130
76	45		131
75	101	56	132
75	26		133
74	85	59	134
74	11		135
73	73	62	136
73	0		137
72	65	65	138
71	132	67	139
71	61		140
70	131	70	141
70	61		142

Hier fande sich demnach bis auf $A = 73$ kein Ueberrest B, welcher mit seinem Theiler, oder mit seinem Quotienten commensurabel gewesen wäre. Bey $A = 73$, wird $B = 0$, und demnach ist $10001 = 73 . 137$. Und diese Factoren müssen Primzahlen seyn.

§. 22.

Wir können nun noch zugleich anmerken, daß wenn man eine solche Tabelle für eine Zahl bis dahin berechnet hat, wo der Quotient doppelt so groß wird, als der Theiler, eine solche Tabelle zugleich auch für Zahlen dienen kann, die um einige Einheiten, oder auch um mehrere grösser oder kleiner sind als die Zahl, für welche die Tabelle ist berechnet worden. So z. E. wenn die Theiler der Zahl 10003 zu finden sind; so werden in der erst für die Zahl 10001 berechneten Tabelle, alle Ueberreste B um 2 grösser. Alles Uebrige bleibt. Man sieht sodann bald, daß z. E. der dritte Ueberrest 5 sich in $5 + 2 = 7$ verwandelt, und daß der dabey stehende Theiler $A = 98$ durch 7 getheilet werden kann, folglich 7 ein Theiler von 10003 ist. Vergleicht man die sämtlichen Ueberreste, jeder um 2 vergrössert, mit ihren Theilern und Quotienten, so findet man sie nur in denen Stellen commensurabel, wo sie Multipla von 7 sind, und daraus läßt sich folgern, daß $\frac{10003}{7}$ $= 1429$ eine Primzahl sey.

§. 23.

Hätte man hingegen die Zahl 10005 vorgenommen, von welcher man zwar ohnehin siehet, daß sie wenigstens durch 5 und 3 getheilt werden kann; so würden alle Ueberreste um 4 vergrössert werden müssen. Dieses verwandelt den Ueberrest 83 in $83+4=87$, so, daß er dem Theiler gleich wird. Demach läßt sich 10005 durch 87 theilen. Eben so wird der Ueberrest 111 in $111+4=115$ verwandelt, und daher dem Quotienten gleich. Daher ist auch 115 ein Theiler von 10005. Mehr hat man nicht nöthig zu suchen, weil $10005=87.115=3.5.23.29$ ist. Nimmt man eben diese Vergleichung mit 10007 vor, in dem man zu jeden Ueberresten 6 addirt; so findet sich keiner weder mit seinem Theiler noch mit dem Quotienten commensurabel, demnach ist 10007 eine Primzahl.

II.
Vorschlag
die Theiler der Zahlen in Tabellen zu bringen.

§. 1.

Die vorhergehende Abhandlung enthält zwar einige Methoden, wodurch die Theiler der Zahlen mit leichter Mühe gefunden werden können. Wenn sich aber auch noch kürzere Methoden finden liessen, so werden dennoch solche Tabellen, worinne die Zahlen bereits in ihre Factoren aufgelöst sind, immer angenehm seyn, weil sie weiter nichts als das blosse Aufschlagen fordern. Man hat aus gleichem Grunde unzählige andere Tabellen, z. E. die von Quadrat und Cubiczahlen, die trigonometrischen und logarithmischen, die astronomischen rc. bey allen war die Bequemlichkeit des Gebrauches ein zureichender Grund, warum man sich Zeit und Mühe, sie ein für allemale zu berechnen, nicht hat verdriessen lassen.

§. 2.

Nun hat es zwar an Tabellen, in Absicht auf die Theiler der Zahlen, eben nicht ganz gefehlt. Sie sind aber lange nicht so bekannt wor-

worden, als sie es hätten werden sollen, und es trug sich sogar dabey zu, daß sie mehrmalen ganz von neuem berechnet worden. So z. E. wußte Poetius, daß dergleichen bereits im vorigen Jahrhundert in England herausgekommen, und 1717 vom Herrn *de Traytorrens d'Yverdun* der Parisischen Akademie ein Project von solchen Tabellen übergeben worden. Allein da ihm weiter nichts davon zu Gesichte kam, so berechnete er sie von neuem, und gab sie, wiewohl etwas abgekürzt, 1728 in seiner **Anleitung zur arithmetischen Wissenschaft vermittelst einer parallelen Algebra** heraus. Eben dieses begegnete dem Peter Jäger mit seinen Primzahlen, die **Krüger** seinen **Gedanken über die Algebra** angehenkt. Selbst **Anjema**, dessen **Verzeichnis der Theiler aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10000** nach seinem Tode 1767 in einem ziemlichen Quartbande zu Leyden herausgekommen, und seine Herausgeber scheinen von bereits vorhandenen gewesenen Tabellen nichts gewußt zu haben, da in der Vorrede das Werk als das erste und einige in seiner Art angerühmet wird. Solche Erscheinungen in der gelehrten Welt sind um desto merkwürdiger, weil unstreitig die Tabellen von den Theilern der Zahlen eben so gemein seyn solten, als es die trigonometrischen und logarithmischen sind. Denn wer diese zu gebrauchen weiß, wird ganz gewiß auch jene brauchbar finden.

§. 3.

§. 3.

Es mögen indessen verschiedene Ursachen seyn, warum die Tabellen von den Theilern der Zahlen weniger gemein sind. Sowohl D. Pell in England, als Poetius in Teutschland haben sich begnügt, sie ihren Anleitungen zur Algebra und Rechenkunst einzuverleiben, anstatt daß sie besonders hätten herausgegeben werden sollen. Eben so finden sie sich in dem 2ten Bande des 1742 zu Leipzig herausgekommenen mathematischen Lexicons unter sehr viel andern Tabellen. Anjema war demnach meines Wissens der erste, der sie vollständiger zu machen und besonders herauszugeben gedachte. Da er aber durch den Todt an der Arbeit gehindert worden, so erstrecken sich seine Tabellen auch nur bis auf 10000. Und es ist unstreitig, daß wenn sie eben so vollständig bis auf 100000 hätten fortgesetzt werden sollen, das Werk zu einem ungeheuren Folianten angewachsen wäre, und vielleicht sodann keinen Verleger würde gefunden haben.

§. 4.

Es läßt sich aber ein solcher Foliant ganz bequem auf 10 Folioseiten abkürzen, wenn man sich mit dem nöthigsten begnügen und auf die schicklichste Einrichtung denken will. Anjema hat seine Tafeln dadurch sehr weitläuftig gemacht, daß er alle Zahlen von 1 bis 10000 mitgenommen, und alle Theiler aufgezeichnet hat.

hat. Da es aber überhaupt genug ist, wenn man die eigentlichen Factoren einer Zahl weiß, weil aus diesen alle übrige Theiler leicht gefunden werden; so sieht man ohne Mühe, daß dadurch eine beträchtliche Abkürzung der Tafeln erhalten werden kann.

§. 5.

Zu dieser Abkürzung kömmt noch eine andere, welche man erhält, wenn aus der Tafel alle die Zahlen wegbleiben, die sich durch 2, 3, oder 5 theilen lassen. Denn solche Zahlen lassen sich ohne Mühe erkennen. Und werden sie, so vielmal es angeht, durch 2, 3, 5 getheilt, so ist es immer genug, wenn man aus der Tabelle sehen kann, ob der letzte Quotient noch ferners in Factoren zerfällt werden kann.

§. 6.

Auf diese Art aber werden von 30 Zahlen nur 8 beybehalten, so, daß man für 30000 Zahlen nicht mehr Raum gebraucht, als man sonst nur für 8000 würde gebraucht haben. Denn da 30 die kleinste Zahl ist, die sich durch 2, 3, 5 theilen läßt, so folgt, daß jede Zahl die durch 30 getheilt, entweder 0, oder einen durch 2, 3, 5 thielbaren Rest übrig läßt, ebenfalls durch 2, 3, 5 getheilt werden kann; und hinwiederum daß auch letzteres nicht angeht, wenn ersteres nicht statt findet. Nun findet dieses nur in denen Fällen nicht statt, wo eine Zahl,

wenn

wenn sie durch 30 getheilt wird, eine der Zahlen 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 zum Reste läßt. Und so hat man auch nur unter jeden 30 Zahlen diese achterley Fälle beyzubehalten.

§. 7.

Es verursacht aber die decimale Einrichtung des Zahlengebäudes, daß man anstatt 30 zum Grunde zu legen, bequemer 300 zum Grunde legt, und daher nur die Zahlen beybehält, welche, wenn sie durch 300 getheilt werden, eine von folgenden Zahlen

1	31	61	91	121	151	181	211	241	271
7	37	67	97	127	157	187	217	247	277
11	41	71	101	131	161	191	221	251	281
13	43	73	103	133	163	193	223	253	283
17	47	77	107	137	167	197	227	257	287
19	49	79	109	139	169	199	229	259	289
23	53	83	113	143	173	203	233	263	293
29	59	89	119	149	179	209	239	269	299

zum Ueberreste haben. Diese sind es allein, welche sich durch 2, 3, 5 nicht theilen lassen.

§. 8.

Diese Ueberreste zeigen nun ebenfalls an, in welcher Ordnung die beyzubehaltende Zahlen, in Absicht auf ihre zwo letzte Ziffern, auf einander folgen, weil diese Ordnung, so oft man um 300 weiter schreitet, allemal wiederkehrt. Es wird sich nun hieraus begreiflich machen lassen, wie es möglich gewesen, den ganzen Anjema-schen Quartband auf die beygefügte Folioseite abzukürzen.

§. 9.

Denn einmal war es genug, die zwo letzte Ziffern erst angeführter Ueberreste (§. 7.) in der vorderſten Columne herunter zu schreiben, und an den zwo Stellen, wo ein neues hundert anfängt, einen Zwischenraum zu lassen, in welchem der Queere nach die ganzen hunderte hintereinander, und zwar jedes über seine Columne, geschrieben werden konnten. Dadurch, und wegen des nach den 3000 und 6000 herunterlauffenden Zwischenraumes findet sich die Tabelle in 9 Quadrate eingetheilt, und dadurch erhielt die Tabelle theils eine bessere Gestalt, theils auch wurde dadurch das Aufsuchen erleichtert. Man sieht leicht, daß die Theiler jeder Zahl da zu suchen sind, wo man von den hunderten herunterwärts, und von den Ueberresten in der ersten Columne des Quadrats, über welchen die hunderter stehen, hinterwerts fährt, bis man zusammen trift.

§. 10.

So z. E. wenn die Zahl 4361 fürgegeben, so findet sich 4300 über der vierten Columne des mittlern Quadrats. Fährt man demnach von 4300 herunterwerts, und von 61 hinterwerts, so trift man da zusammen, wo die Zahlen 7. 7. 89 stehen. Und dieses sind die Factoren, aus deren Multiplication die Zahl 4361 erwächst.

§. 11.

§. 11.

Trift es sich bey solchen Aufsuchen, daß man auf eine leere Stelle kömmt, so ist dieses eine Anzeige, daß die aufgesuchte Zahl eine Primzahl ist. So z. E. wenn man 4363 aufgesucht hätte, so würde man auf die leere Stelle gefallen seyn, welche unmittelbar unter den für 4361 gefundenen Factoren 7. 7. 81 steht.

§. 12.

Trift man aber eine Zahl bey dem Aufsuchen gar nicht an; so kann man schliessen, daß sie durch 2, 3 oder 5 getheilt werden kann. So z. E. wenn man (um bey gleicher Columne zu bleiben) die Zahl 4371 hätte aufsuchen wollen, so würde man in der Columne der Ueberreste die zwo letzten Ziffern 71 nicht gefunden haben. Da nun 4371 weder gerade ist, noch zur letzten Ziffer eine 0 oder 5 hat, so bleibt nur, daß sie durch 3 getheilt werden kann. Nimmt man die Theilung vor; so erhält man den Quotient 1457, welcher unter 1400 und hinter 57 aufgesucht, auf die Factoren 31, 47 verweiset, so, daß demnach die Factoren der Zahl 4371 die Zahlen 3, 31, 47 sind.

§. 13.

Da nun die Tabelle sich bis auf 10199 oder 10200 erstreckt, so sieht man, daß man dadurch die Theiler der Zahlen von 1 bis auf 10200 nebst den Primzahlen auf eine sehr

geschmei-

geschmeidige Art beysammen hat, und sie gleichsam mit einem Anblicke übersehen kann. Auch hat man bey dem Aufsuchen nicht nöthig lange zu blättern, weil sowohl die hunderter als die zwo letzte Ziffern jeder fürgegebenen Zahl gleich in die Augen fallen.

§. 14.

Ungeachtet sich nun die Tabelle nur bis auf 10200 erstreckt, so dient sie doch auch für grössere Zahlen, die, wenn sie durch 2, 3, 5 können getheilt werden, sich so weit herunter bringen lassen, daß der letzte Quotient kleiner als 10200 ist. Da dieses aber nicht mit jeden grössern Zahlen angeht, so werde ich auch den Vortheil nicht mehr erheben, als er es verdient.

§. 15.

Vielmehr werde ich anmerken, daß ich die Tabelle vorzüglich deswegen durch den Druck bekannt mache, daß etwann jemand durch die so geschmeidige Einrichtung derselben sich bewegen lasse, noch 9 andere, oder wenn er sich einen recht unsterblichen Namen machen will, noch 99 andere beyzufügen. Denn so würde man im letztern Fall, auf die geschmeidigste Art, die nur immer möglich ist, die Theiler jeder Zahlen haben die unter einer Million, oder unter 1020000 sind, und das wäre doch immer genug. Im erstern Fall hätte man sie bis auf 102000, und man würde immer 10 mal weiter damit reichen, als mit der gegenwärtigen, die nur bis auf 10200 geht.

§. 16.

Da es aber schwerlich zu hoffen steht, daß zu dieser Tabelle noch 99 andere hinzugerechnet werden, wiewohl die Arbeit weder so groß, noch so weitläuftig seyn würde, als sie es bey den trigonometrischen Tafeln war, so werde ich es bey den 102000 bewenden lassen, und nun noch angeben, wie die Berechnung merklich erleichtert werden könne.

§. 17.

Die Quadratwurzel von 102000 ist etwas weniger als 320, demnach wenn eine Zahl, die kleiner als 102000 ist Theiler hat, so hat sie nothwendig einen Theiler der kleiner als 320 ist.

§. 18.

Da ferners die durch 2, 3, 5 theilbare Zahlen wegbleiben, so ist 7 die kleinste Primzahl die unter den Factoren vorkömmt. Theilt man demnach 102000 durch 7, so ist der Quotient 14571. Und so ist es zu Verfertigung der Tabelle genug, wenn man die Primzahlen bis auf 14571 weiß. Denn grössere kommen unter den Factoren nicht vor, wenn die Tabelle nur bis auf 102000 fortgesetzt wird.

§. 19.

Theilt man ferners 10200 durch 7, so ist der Quotient 1457. Und hieraus folgt, daß alle durch 2, 3, 5 nicht theilbare Zahlen, die zwischen 1457 und 14571 fallen, durch 7 müssen multiplicirt werden. Diese Zahlen wären nun sämtlich in der Tafel enthalten, wenn sie bereits bis auf 14571 fortgesetzt wäre. Da sie sich nun vorerst auf eben die Art bis dahin fortsetzen läßt, wie sie sodann bis auf 102000 fortgesetzt wird; so werde ich annehmen, daß sie bereits bis auf 14571 fortgesetzt sey. Denn so wie sie ist, läßt sie sich bis auf 7 mal 10200, oder 71400, und von da an bis auf 71400 mal 7, oder 499800 fortsetzen.

§. 20.

Nun ist vor allen Dingen nöthig, daß, so weit man die Tafel fortsetzen will, man die Eintheilung in Quadrate und Columnen gleich anfangs mache, und die hunderter und die zwo letzte Ziffern auf eben die Art, wie in der hier vorgelegten Tabelle hinschreibe, damit sodann die Factoren sogleich können an ihren Ort eingetragen werden.

§. 21.

So z. E. um die Columne von 40000 bis 40100 auszufüllen, werden die in der Tafel vorkommende Zahlen von 7 an bis zu der Quadratwurzel von 40100 gebraucht. Man theilt

40000 durch 7, so ist der Quotient $5714\frac{2}{7}$. Die nächst grössere Zahlen in der Tafel sind nebst ihren Factoren

$$\begin{aligned} &5717 \\ &5719 = 7.19.43 \\ &5723 = 59.97 \\ &5729 = 17.337 \text{ ꝛc.} \end{aligned}$$

diese mit 7 multiplicirt, geben nun

$$\begin{aligned} &40019 = 7.5717 \\ &40033 = 7.7.19.43 \\ &40061 = 7.59.97 \\ &40103 = 7.17.337 \text{ ꝛc.} \end{aligned}$$

An die Stelle von diesen Producten werden nun die neben denselben stehenden Factoren eingetragen. Sodann verfährt man eben so mit 11 als der nächst grössern Zahl. Denn 40000 durch 11 getheilt, giebt $3636\frac{4}{11}$. Die nächst grössere Zahlen in der Tafel sind nebst ihren Factoren

$$\begin{aligned} &3637 \\ &3641 = 11.331 \\ &3643 \\ &3647 = 7.521 \text{ ꝛc.} \end{aligned}$$

diese durch 11 multiplicirt, geben

$$\begin{aligned} &40007 = 11.3637 \\ &40051 = 11.11.331 \\ &40073 = 11.3643 \\ &40117 = 7.11.521 \text{ ꝛc.} \end{aligned}$$

Eben so verfährt man auch mit 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53 ꝛc. das will

Tafel der Primzahl und der Factoren von denen Zahlen die unter 10200, und durch 2, 3, 5 nicht theilbar sind.

sagen, mit allen Primzahlen bis zu der Quadratwurzel von 40100, wenn man nemlich nur bis auf diese Zahl die Tafel ausfüllen will. Man füllt sie aber, wie vorhin gesagt, entweder nur bis auf 14571, oder auch gar bis auf 71400, und sodann vollends bis auf 102000 aus. Die Stellen, die zuletzt unausgefüllt bleiben, sind die von Primzahlen.

§. 22.

Auf die erst beschriebene Art habe ich die Tafel von 10000 bis auf 10200 ausgefüllt, nachdem ich das übrige aus des *Poëtii* anatomia numerorum genommen, und zugleich in die 20 Druck- und Rechenfehler verbessert, die ich wegen der Einrichtung der hier beygefügten Tafel, leicht entdecken konnte.

III.
Verwandlung der Brüche.

§. 1.

Man trägt gemeiniglich die Brüche so vor, daß sowohl der Zähler als der Nenner ganze Zahlen sind, weil dieses die eigentliche Absicht der Brüche ist, daß man die Verhältniß des Theils zum Ganzen durch die Verhältniß zwoer ganzer Zahlen vorstelle. Der Nenner zeigt an, in wie viele Theile man das Ganze theilen müsse, und der Zähler drücket die Anzahl solcher Theile aus, die man zu nehmen hat. Indessen kann es auch Fälle geben, wo der Nenner oder der Zähler, oder beyde zugleich ebenfalls wiederum Brüche haben, und solche kann man sehr gut gebrauchen, weil sie zu besondern Absichten dienen, denen zu gefallen man auch öfters ganz reine Brüche in solche verwandelt, deren Nenner selbst wiederum mit Brüchen behaftet sind.

§. 2.

Nun kommen zwar die Regeln, so man bey solchen Verwandlungen zu beobachten hat, bereits in verschiedenen Schriften der Mathematicker vor. Da sie aber theils noch häufiger und selbst in den gemeinen Anweisungen zur

Rechenkunst vorkommen solten, theils auch verschiedenes dabey nachzuholen ist; so werde ich den meisten Lesern einen Gefallen erweisen, wenn ich mich hier sowohl bey den Regeln als bey deren Gebrauch ein wenig aufhalte.

§. 3.

Man habe z. E. 3 durch $5\frac{1}{7}$ zu theilen, so kann dieses in Form eines Bruches geschrieben werden, welcher

$$\frac{3}{5\frac{1}{7}} \text{ oder } \frac{3}{5+\frac{1}{7}}$$

seyn wird. Dieser Bruch läßt sich nun leicht in einen reinen Bruch verwandeln, wenn man Nenner und Zähler mit 7 multiplicirt. Denn so ist $7 \cdot 3 = 21$, und $7 \cdot 5\frac{1}{7} = 36$, folglich

$$\frac{3}{5+\frac{1}{7}} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

§. 4.

Hinwiederum wenn man z. E. $\frac{7}{30}$ vor sich hat, so kann man Zähler und Nenner durch 7 theilen, und da erhält man

$$\frac{7}{30} = \frac{1}{4+\frac{2}{7}}$$

welches anzeigt, daß $\frac{7}{30}$ etwas kleiner als $\frac{1}{4}$ sey. Nun läßt sich $\frac{2}{7}$, wenn Zähler und Nenner durch 2 getheilt werden, ebenfalls in

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{2+\frac{1}{2}}$$

verwandeln, und so erhält man

$$\frac{7}{30} = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$

welches anzeigt, daß $\frac{7}{30}$ etwas weniges grösser als $\frac{1}{4\frac{1}{2}}$ oder $\frac{2}{9}$ ist. (§. 3.)

§. 5.

Man habe nun z. E. $\frac{216}{1147}$, so theilt man erstlich Zähler und Nenner durch 216, und dieses giebt

$$\frac{216}{1174} = \frac{1}{5 + \frac{67}{216}}$$

auf eine ähnliche Art erhält man

$$\frac{67}{216} = \frac{1}{3 + \frac{15}{67}} = \frac{1}{3 + a}$$

$$a = \frac{15}{67} = \frac{1}{4 + \frac{7}{15}} = \frac{1}{4 + b}$$

$$b = \frac{7}{15} = \frac{1}{2 + \frac{1}{7}} = \frac{1}{2 + c}$$

Da man nun nach dieser vierten Theilung auf $\frac{1}{7}$ verfällt, so ist man mit der Auflösung des Bruchs fertig, und man findet, wenn man der Ordnung nach substituirt,

$$\frac{216}{1147} = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{7}}}}}$$

Dieses will nun sagen, der Bruch $\frac{216}{1147}$ sey etwas kleiner als $\frac{1}{5}$, etwas weniges grösser als $\frac{1}{5\frac{1}{3}} = \frac{3}{16}$, etwas noch wenigeres kleiner als

$$\cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{4}}} = \frac{1}{5 + \frac{4}{13}} = \frac{13}{69}$$

etwas noch wenigeres grösser als

$$\cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \frac{1}{2}}}} = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \frac{2}{9}}} = \frac{1}{5 + \frac{9}{29}} = \frac{29}{154}$$

und genaue gleich $\cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{7}}}}}$.

§. 6.

Hiebey kommen nun zwo Fragen vor: Einmal, wie man die ganze Rechnung nach einer gewissen Ordnung einrichten, und die Brüche $\frac{1}{5}, \frac{3}{16}, \frac{13}{69}, \frac{29}{154}$, als welche dem fürgegebenen Bruche $\frac{216}{1147}$ immer näher kommen, leichte finden könne? Sodann wie man eben so leichte finden könne, um wie viel sie von dem fürgegebenen Bruche $\frac{216}{1147}$ verschieden sind, damit man allenfalls des Unterschiedes Rechnung tragen könne?

§. 7.

Man setze erstlich

$$\frac{216}{1147} = \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+a}}$$

wobey $a = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\frac{1}{7}}}$

ist, so darf man nur Zähler und Nenner mit $3+a$ multipliciren, und so erhält man

$$\frac{216}{1147} = \frac{3+a}{16+5a}.$$

Ferner

Ferner setze man $a = \frac{1}{4+b}$

wobey folglich $b = \frac{1}{2+\frac{1}{7}}$ ist, so erhält man

$$\frac{216}{1147} = \frac{3+\frac{1}{4+b}}{16+\frac{5}{4+b}}$$

und folglich, wenn Nenner und Zähler mit $4+b$ multiplicirt wird

$$\frac{216}{1147} = \frac{13+3b}{69+16b}.$$

Setzt man nun wiederum $b = \frac{1}{2+c}$

so ist $c = \frac{1}{7}$, und man erhält

$$\frac{216}{1147} = \frac{13+\frac{3}{2+c}}{69+\frac{16}{2+c}} = \frac{29+13c}{154+69c}.$$

Endlich da $c = \frac{1}{7}$ ist, so wird

$$\frac{216}{1147} = \frac{29+\frac{13}{7}}{154+\frac{69}{7}} = \frac{216}{1147}$$

welches wiederum den fürgegebenen Bruch giebt.

§. 8.

Dieses Verfahren zeiget nun an, wie die Brüche $\frac{1}{5}, \frac{3}{16}, \frac{13}{69}, \frac{29}{154}$ aus den Theilern 5, 3, 4, 2, 7 entspringen. Denn so ist

$$1.\ 3 = 3 \qquad 5.3 + 1 = 16$$
$$3.4 + 1 = 13 \qquad 16.4 + 3 = 69$$
$$13.2 + 3 = 29 \qquad 69.2 + 16 = 154$$
$$29.7 + 13 = 216 \qquad 154.7 + 69 = 1147.$$

Man darf nemlich in den gefundenen Brüchen

$$\frac{3+a}{16+5a}, \frac{13+3b}{69+16b}, \frac{29+13c}{154+69c}$$

nur $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{7}$ setzen, um die absolute Zahlen des folgenden Bruches zu erhalten. Denn so ist

$$\frac{3+\frac{1}{4}}{16+\frac{5}{4}} = \frac{13}{69}, \text{ und } \frac{13+\frac{3}{2}}{69+\frac{16}{2}} = \frac{29}{154}$$

$$\text{und } \frac{29+\frac{13}{7}}{154+\frac{69}{7}} = \frac{216}{1147}.$$

§. 9.

Wenn wir nun die ganze Rechnung in ihre einfachste Ordnung bringen, so läßt sie sich folgender gestalt vorstellen. Erstlich dividiret man jeden Theiler durch seinen Ueberrest. Demnach nun bey eben dem Beyspiele zu bleiben

```
216 | 1147 | 5
    | 1080 |
    |   67 | 216 | 3
           | 201 |
           |  15 | 67 | 4
                 | 60 |
                 |  7 | 15 | 2
                      | 14 |
                      |  1 | 7 | 7.
                           | 7 |
                           | 0
```

Mit diesen Theilern, Ueberresten und Quotienten macht man sodann folgende Figur

1147		1	0
216	5	0	1
67	3	1	5
15	4	3	16
7	2	13	69
1	7	29	154
		216	1147

Man schreibt nemlich in der ersten Columne die Theiler und Ueberreste, in der zweyten die Quotienten, in der dritten zeichnet man 1, 0, und in der vierten 0, 1. Die übrigen Zahlen dieser beyden Columnen ergeben sich sodann, indem man

5. $0 + 1 = 1$	und	5. $1 + 0 = 5$
3. $1 + 0 = 3$		3. $5 + 1 = 16$
4. $3 + 1 = 13$		4. $16 + 5 = 69$
2. $13 + 3 = 29$		2. $69 + 16 = 154$
7. $29 + 13 = 216$		7. $154 + 69 = 1147$

macht,

macht, das will sagen, jede Zahl der dritten und vierten Columne mit dem nebenstehenden Quotienten der zweyten Columne multiplicirt, und zu dem Producte die nächst über derselben stehenden Zahl addirt. Nun geben die Zahlen der beyden letzten Columnen die Brüche

$$\frac{1}{0},\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{5},\ \frac{3}{16},\ \frac{13}{69},\ \frac{29}{154},\ \frac{216}{1147},$$

welche wechselsweise grösser und kleiner sind als der letzte, wovon aber je der folgende weniger verschieden ist.

§ 10.

Das bisher gesagte, kömmt bereits in mehren Schriften der Mathematicker vor, und dient überhaupt dahin, daß man einen durch grössere Zahlen ausgedrückten Bruch, der sich nicht genau auf kleinere Zahlen bringen läßt, dergestalt auf kleinere Zahlen bringe, daß er durch keine kleinere genauer getroffen wird. Da man auf diese Art mehrentheils eine ganze Reyhe von Brüchen findet, wovon je der folgende genauer, dabey aber durch grössere Zahlen ausgedrückt ist; so behält man dabey die Wahl, zu bestimmen, ob man sich mit einem kleinern begnügen könne, oder einen durch grössere Zahlen ausgedruckten dafür nehmen wolte. In physischen und practischen Dingen fällt dieses desto bequemer, weil man da ohnehin an keine geometrische Schärfe gedencken kann.

§. 11.

§. 11.

Man ist aber, so viel ich weiß, bey der Erfindung solcher Brüche stehen geblieben, ohne zu sehen, ob nicht durch eben das Verfahren, die Genauigkeit eines jeden bestimmt werden könnte? Die natürlichste Probe, die sich hierüber anstellen läßt, und die uns zugleich auf die Spuhr führen wird, ist, daß man nach der gewöhnlichen Art die Brüche zu subtrahiren, diese Subtraction vornehme. Denn so findet man

$$\frac{1}{5}-\frac{216}{1147}=\frac{1147-1080}{5.1147}=\frac{67}{5.1147}$$

$$\frac{216}{1147}-\frac{3}{16}=\frac{15}{16.1147}$$

$$\frac{13}{69}-\frac{216}{1147}=\frac{7}{69.1147}$$

$$\frac{216}{1147}-\frac{29}{154}=\frac{1}{154.1147}.$$

Und hieraus sieht man, daß die Zähler dieser Brüche 67, 15, 7, 1 der Ordnung nach die Ueberreste der ersten Columne, die Nenner aber das Product aus dem Nenner eines jeden Bruches und dem Nenner 1147 des fürgegebenen Bruches sind. Auf diese Art wird demnach der fürgegebene Bruch in zween aufgelöst, und es ist

$$\frac{216}{1147}=\frac{1}{5}-\frac{76}{5.1147}=\frac{3}{16}+\frac{15}{16.1147}=\frac{13}{69}-\frac{7}{69.1147}$$

$$=\frac{29}{153}+\frac{1}{154.1147}=\frac{216}{1147}+0.$$

§. 12.

Um nun überhaupt einzusehen, wie diese Ueberreste der ersten Columne hier zum Vorschein kommen, dörfen wir nur anstatt die Brüche $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{13}{69}$, $\frac{29}{154}$ von dem Bruche $\frac{216}{1147}$ abzuziehen, dieselben von den vorhin (§. 7.) gefundenen Brüchen

$$\frac{3+a}{16+5a},\quad \frac{13+3b}{69+16b},\quad \frac{29+13c}{154+69c}$$

abziehen. Denn diese stellen sämtlich den Bruch $\frac{216}{1147}$ vor, und es ist aus dem (§. 5.) zu sehen, daß die Buchstaben a, b, c durch die Ueberreste 67, 15, 7 bestimmt werden. Auf diese Art haben wir demnach

$$+\frac{3+a}{16+5a}-\frac{3}{16}=\frac{a}{16(16+5a)}=\frac{15:67}{16(16+5\cdot\frac{15}{67})}$$

$$=\frac{15}{16.\ 1147}$$

$$-\frac{13+3b}{69+16b}+\frac{13}{69}=\frac{b}{69(69+16b)}=\frac{7:16}{69(69+16\cdot\frac{7}{16})}$$

$$=\frac{7}{69.\ 1147}$$

$$\frac{29+13c}{154+69c}-\frac{29}{154}=\frac{c}{154\,(154+69c)}$$

$$=\frac{1:7}{154\,(154+\frac{69}{7})}=\frac{1}{154.\ 1147.}$$

Und hieraus sieht man, wie die Ueberreste der ersten Columne zu Nennern werden.

§. 13.

§. 13.

Wenn man die Brüche

$$\frac{1}{5},\ \frac{3}{16},\ \frac{13}{69},\ \frac{29}{154},\ \frac{216}{1147}$$

umkehrt, und statt derselben

$$\frac{5}{1},\ \frac{16}{3},\ \frac{69}{13},\ \frac{154}{29},\ \frac{1147}{216}$$

nimmt, so findet man auf eine ganz ähnliche Art

$$\frac{1147}{216} = \frac{5}{1} + \frac{67}{1.\,216} = \frac{16}{3} - \frac{15}{3.\,216} = \frac{69}{13} + \frac{7}{13.\,260}$$

$= \frac{154}{29} - \frac{1}{29.\,216} = \frac{1147}{216} + 0$, wo ebenfalls die Ueberreste 67, 15, 7, 1 als Zähler erscheinen.

§. 14.

Wir haben bisher das ganze Verfahren, in Form eines Beyspieles vorgetragen, doch so, daß sich der Grund desselben zugleich mit einsehen läßt. Berechnet man auf diese Art noch mehrere Beyspiele, so wird man leicht finden, daß man bald mehr, bald minder Divisionen vorzunehmen hat, bis der Bruch ganz aufgelöst ist. Wir wollen, um den Unterschied zu zeigen, die Figur von zwey andern Beyspielen herstellen, welche die Brüche

$$\frac{61}{97} \text{ und } \frac{231}{257}$$

betreffen. Es ist folglich

97		1	0
61	1 ——	0	1
36	1 ——	1	1
25	1 ——	1	2
11	2 ——	2	3
3	3 ——	5	8
2	1 ——	17	27
1	2 ——	22	35
		61	97

257		1	0
231	1 ——	0	1
26	8 ——	1	1
23	1 ——	8	9
3	7 ——	9	10
2	1 ——	71	79
1	2 ——	80	89
		231	257

und daher für das erste Beyspiel

$$\frac{61}{97}=\frac{1}{1}-\frac{36}{1\cdot 97}=\frac{1}{2}+\frac{25}{2\cdot 97}=\frac{2}{3}-\frac{11}{3\cdot 97}$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8\cdot 97}=\frac{17}{27}-\frac{2}{27\cdot 97}=\frac{22}{35}+\frac{1}{35\cdot 97}$$

$$=\frac{61}{97}-0,$$

oder umgekehrt

$$\frac{97}{61}=\frac{1}{1}+\frac{36}{1.61}=\frac{2}{1}-\frac{25}{1.61}=\frac{3}{2}+\frac{11}{2.61}$$

$$=\frac{8}{5}-\frac{3}{5\cdot 61}=\frac{27}{17}+\frac{2}{17.61}=\frac{35}{22}-\frac{1}{22.61}$$

$$=\frac{97}{61}+0.$$

Für das andere Beyspiel

$$\frac{231}{257}=\frac{1}{1}-\frac{26}{1\cdot 257}=\frac{8}{9}+\frac{23}{9\cdot 257}=\frac{9}{10}-\frac{3}{10.257}$$

$$=\frac{71}{79}+\frac{2}{79\cdot 257}=\frac{80}{89}-\frac{1}{89\cdot 259}=\frac{231}{257}+0,$$

oder umgekehrt $\frac{257}{231}$

$$\frac{257}{231}=\frac{1}{1}+\frac{26}{1.231}=\frac{9}{8}-\frac{23}{8.231}=\frac{10}{9}+\frac{3}{9.231}$$
$$=\frac{79}{71}-\frac{2}{71.257}=\frac{89}{80}+\frac{1}{80.231}=\frac{257}{231}-0.$$

§. 15.

Es ist aber eben diese immer verschiedene Anzahl der vorzunehmenden Divisionen, welche den algemeinen Beweis schwerer macht, weil man dabey genöthiget wird, Glied für Glied zu beweisen, und die Anzahl der Divisionen unbestimmt lassen muß. Wir werden diesen Beweis folgendergestalt vortragen: Es sey die allgemeine Figur

A		1	0
B	a ———	0	1
C	b ———	1	a
D	c ———	b	ab + 1
E	d ———	bc + 1	abc + c + a
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.
- -	- - - -	- -	- - - - -
O	———	x	v
P	q	y	w
Q		qy + x	qw + v

so ist überhaupt $Pq + Q = O$, weil O durch P dividirt q giebt, und Q übrig läßt. Nun ist zu beweisen, daß, was von den Brüchen $\frac{x}{v}$, $\frac{y}{w}$ gilt, auch von dem folgenden und daraus formirten Bruche $\frac{qy+x}{qw+v}$ gelte, oder, daß wenn erstere beyde die Gleichungen

$$+\frac{x}{v}-\frac{B}{A}=\frac{\pm O}{Av}$$

$$-\frac{y}{w}+\frac{B}{A}=\frac{\pm P}{Aw}$$

geben, der dritte auf eben die Art die Gleichung

$$+\frac{qy+x}{qw+v}-\frac{B}{A}=\frac{\pm Q}{A(qw+v)}$$

geben werden. Um dieses zu beweisen, haben wir weiter nichts zu thun, als die in diesen Gleichungen angezeigte Subtractionen vorzunehmen. Denn so verwandeln sich die beyden erstern in

$$\frac{Ax-Bv}{vA}=\frac{\pm O}{Av}$$

$$-\frac{Ay+Bw}{wA}=\frac{\pm P}{Aw}$$

Und hieraus folgt, daß

$$\pm O=+Ax-Bv$$

$$\pm P=-Ay+Bw$$

ist. Nun aber ist

$$\pm Q=O-Pq$$

demnach, wenn man die für O und P gefundene Werthe setzt,

$$\pm Q=Ax-Bv+Ayq-Bwq.$$

Eben dieses folgt aber auch aus der dritten Gleichung

$$\frac{qy+x}{qw+v}-\frac{B}{A}=\frac{\pm Q}{A(qw+v)}.$$

Denn

Denn wird die Subtraction vorgenommen, so erhält man

$$\frac{qyA+Ax-qwB-vB}{A(qw+v)}=\frac{\pm Q}{A(qw+v)}$$

demnach, mit Weglassung der Nenner

$$\pm Q = Ax - Bv + qyA - qwB,$$

welches eben die Gleichung ist, die aus denen beyden erstern folgte, und demnach das, was wir zu beweisen hatten, an Tag legt. Wir haben demnach nur noch zu zeigen, daß diese beyden Gleichungen von den 2 ersten Gliedern der Figur

$$\begin{array}{c|l|c} A & \overline{\qquad\qquad\quad} & \overline{\quad} \\ \hline B & a \text{———} 0 & 1 \\ C & b \text{———} 1 & a \end{array}$$

gelten, denn so werden sie auch von dem dritten, demnach von dem vierten, und jeden folgenden wahr seyn. Zu diesem Ende haben wir nur

$$\begin{array}{l|l|l|l} P = B & q = a & x = 0 & v = 1 \\ Q = C & & y = 1 & w = a \end{array}$$

zu setzen, so werden die Gleichungen

$$\pm O = +Ax - Bv$$
$$\pm P = -Ay + Bw$$

in folgende

$$\pm B = +A.0 - B.1 = -B$$
$$\pm C = -A.1 + B.a$$

verwandelt. Erstere ist für sich klar, letztere wird dadurch als richtig erkannt, weil A durch

B dividiret, a giebt, und C übrig läßt, demnach

$$C = A - Ba$$

ist. Wir haben demnach

$$\frac{B}{A} = \frac{o}{1} + \frac{B}{A}$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{C}{A(a)}$$

$$= \frac{b}{ab+1} + \frac{D}{A(ab+1)}$$

$$= \frac{bc+1}{abc+c+a} - \frac{E}{A(abc+c+a)}$$

$$= \&c.$$

$$= \frac{x}{v} \mp \frac{O}{Av}$$

$$= \frac{y}{w} \pm \frac{P}{Aw}$$

$$= \frac{qy+x}{qw+v} \mp \frac{Q}{A(qw+v)}$$

&c.

Nun sind die Zähler B, C, D, E &c. O, P, Q der Ordnung nach kleiner, weil der letzte $= 0$ wird; hingegen aber die Nenner A, Aa, A(ab+1) &c. der Ordnung nach grösser, weil a, b, c &c. positiv und ganze Zahlen, demnach entweder $= 1$, und mehrentheils grösser als 1 sind. Da folglich die Brüche $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{Aa}$, $\frac{D}{A(ab+1)}$ &c. sehr merklich kleiner, und zuletzt $= 0$ werden, so sind auch die

Brüche $\frac{1}{a}$, $\frac{b}{ab+1}$, $\frac{bc+1}{abc+c+a}$ &c. von dem fürgegebenen $\frac{B}{A}$ der Ordnung nach weniger, und der letzte gar nicht davon verschieden.

§. 16.

Wenn ein Bruch sich in der That durch kleinere Zahlen ausdrücken läßt, so erhält man nach diesem Verfahren nicht nur den verkleinerten Bruch genau, sondern auch noch alle noch kleinere, die von demselben am wenigsten verschieden sind. Man habe z. E. $\frac{189}{301}$, so ist

301		1	0
189	1 ———	0	1
112	1 ———	1	1
77	1 ———	1	2
35	2 ———	2	3
7	5 ———	5	8
		27	43

Demnach ist

$$\frac{189}{301} = \frac{27}{43} = \frac{1}{2} + \frac{77}{2.301} = \frac{2}{3} - \frac{35}{3.301} = \frac{5}{8} + \frac{7}{8.301}$$

oder $= \frac{1}{2} + \frac{11}{2.43} = \frac{2}{3} - \frac{5}{3.43} = \frac{5}{8} + \frac{1}{8.43}$.

§. 17.

Man sieht ferners auch leicht, daß besonders Decimalreyhen auf diese Art in Brüche verwandelt werden können, die sie so genau, als man es verlangt, vorstellen. Doch da man solche Reyhen nicht so unendlich, wie sie sind, in die Rechnung ziehen kann, so nimmt man auch nur so viele Ziffern, als es nöthig ist. Indessen kann man derer, so man wegläßt, dennoch in Rechnung tragen, damit man das Dividiren eben nicht weiter verfolge als es nöthig ist. Und dabey hat man auf zweyerley Umstände zu merken: Einmal findet man früher den Bruch, welcher die Decimalreihe, so weit man sie verlangt, vorstellt. Sodann häuft sich bey dem fortgesetzten Dividiren der Fehler, der aus dem weggelassenen Theile der Decimalreihe entsteht, und dieses kann machen, daß man zuletzt ganz andere Zahlen heraus bringt, als die, so man heraus bringen würde, wenn man die Reihe ganz in die Rechnung ziehen würde. Wir wollen beydes durch ein Beyspiel erläutern. Es sey das Verhältniß der Seite eines Quadrates zu der Diagonale desselben durch Brüche auszudrücken, welche dasselbe sehr genaue, oder beynahe ganz richtig ausdrücken. Nun weiß man, daß, wenn die Seite $= 1$ ist, die Diagonale $= \sqrt{2} = 1,41421355530202722\ldots$ ist. Wir wollen uns hier mit den 7 ersten Decimalzahlen $1,4142135$ begnügen, und den Ueberrest $= a$ setzen; demnach ist

1,

1, 4142135 + a	1	0
1, 0000000	1 ——— 0	1
4142135 + a	2 ——— 1	1
1715730 — 2 a	2 ——— 2	3
710675 + 5 a	2 ——— 5	7
294380 — 12 a	2 ——— 12	17
121915 + 29 a	2 ——— 29	41
50550 — 70 a	2 ——— 70	99
20815 + 169 a	2 ——— 169	239
8920 — 408 a	2 ——— 408	577
2975 + 985 a	2 ——— 985	1393
2970 — 2378 a		

Man sieht hieraus, daß der von dem Ueberrest a herrührende Unterschied anfängt beträchtlich groß zu werden, und daß man folglich, ohne mehrere Ziffern mitzunehmen, die Division nicht weiter fortsetzen müsse. Da nun

$$\frac{17}{12} = 1,4166\ldots.$$

$$\frac{41}{29} = 1,41379\ldots.$$

$$\frac{99}{70} = 1,41428\ldots.$$

$$\frac{239}{169} = 1,414207\ldots.$$

$$\frac{577}{408} = 1,414215$$

$$\frac{1393}{985} = 1,4142132$$

ist, so sieht man hieraus, daß, wenn man bey den 7 angenommenen Decimalziffern bleiben will, der letzte Bruch eben so weit reicht, und daher auch aus diesem Grunde das fernere Dividiren überflüßig wird.

§. 18.

Um noch ein Beyspiel anzuführen, welches nicht so regulär ist, wie das erst angebrachte; so setzen wir, der Mond durchlaufe den Thierkreis in 27 T. 7 St. 43 M. $5''$, $2'''$, $58\frac{1}{2}^{IV}$. Dieses giebt in Decimaltheilen 27, 32158601 Tage. Um nun zu sehen, wie sich diese Zahl zu ganzen Tagen verhalte, so ist

27, 32158601 + a		1	0
1, 00000000	27	— 0	1
32158601 + a	3	— 1	27
3524197 — 3a	9	— 3	82
440828 + 28a	7	— 28	765
438401 — 199a	1	— 199	5437
12427 + 227a	35	— 227	6202.
3456			

Weiter ist nun die Division nicht fortzusetzen, weil sich der von a herrührende Unterschied zu sehr aufhäufen, und die Quotienten unrichtig machen würde. Nehmen wir demnach den letzten Bruch $\frac{6202}{227}$, so will dieser sagen, daß in 6202 Tagen der Mond 227 mal den Thierkreis durchlaufe, und dieses ist nun sehr genaue. Denn wird 6202 durch 227 getheilt, so findet man

man 27 T. 7 St. 43 M. 5″. 1‴. 19⁗, welches von der wahren Zeit kaum um $1\frac{2}{5}$ Tertien verschieden ist, und folglich für die 6202 Tage kaum $6\frac{1}{3}$ Secunden Unterschied giebt. Hingegen giebt der Bruch $\frac{765}{28}$ die Zeit von 27 T. 7 St. 42 M. $51\frac{1}{2}$ Sec. welche um $13\frac{3}{5}$ Secunden zu klein ist. Dieser Unterschied ist beträchtlicher als der vorhergehende; indessen ist er für einen Uhrmacher, der den Mondlauf durch Räderwerke vorstellen wolte, unerheblich genug, um so mehr, da der Bruch $\frac{765}{28}$, welcher $= \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17}{4 \cdot 7}$ ist, durch diese schickliche Zerfällung der Zahlen, zu der Eintheilung der Räder sehr bequem ist, und weil man die Uhr erst nach etwann 5 Umlaufszeiten des Mondes um 1 Minute zu verrücken hat.

§. 19.

Man kann auf eine ganz ähnliche Art algebraische Ausdrücke, und besonders unendliche Reihen in Brüche verwandeln, ungeachtet sich dabey nicht immer die Schicklichkeit einfindet, daß solche Brüche dem wahren Werthe geschwinde näher kämen. Ich werde indessen die zwey Beyspiele hersetzen, mit denen ich hierüber eine Probe angestellt habe. Das erste betrift die Logarithmen. Denn da ist $\log.(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \text{etc.}$

Wird

Wird diese Reihe in 1 getheilt, so ist der Quotient $= \frac{1}{z}$, der Ueberrest $= + \frac{1}{2} z - \frac{1}{3} z^2 + \frac{1}{4} z^3 -$ ꝛc. Theilt man durch diesen die Reihe $z - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{3} z^3 -$ ꝛc. so ist der Quotient $= 2$, der Ueberrest $= \frac{1}{6} z^2 - \frac{1}{6} z^3 + \frac{3}{20} z^4$ ꝛc. Wird durch diesen zweyten Ueberrest der erste $\frac{1}{2} z - \frac{1}{3} z^2 + \frac{1}{4} z^3 -$ ꝛc. getheilt, so ist der Quotient $= \frac{3}{z}$, der Ueberrest $= \frac{1}{6} z^2 - \frac{1}{5} z^3 +$ ꝛc. Theilt man durch diesen dritten Ueberrest den zweyten, so ist der Quotient $= 1$, der vierte Ueberrest $= \frac{1}{30} z^3 -$ ꝛc. wodurch man wiederum den dritten theilt, und dadurch $\frac{5}{z}$ zum Quotienten erhält. Fährt man auf diese Art fort, so wird man der Ordnung nach die Quotienten $\frac{1}{z}, 2, \frac{3}{z}, 1, \frac{5}{z}, \frac{2}{3}, \frac{7}{z}$ ꝛc. erhalten, und diese geben sodann

$$\log.(1+z) = \cfrac{1}{1:z + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3:z + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5:z + \cfrac{1}{2:3 + \cfrac{1}{7:z + \text{ꝛc.}}}}}}}}$$

Es sey z. E. $z = \frac{1}{5}$, so ist

log.

$$\log.\tfrac{6}{5} = \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{25 + \cfrac{1}{2:3 + \cfrac{1}{35 + \text{ꝛc.}}}}}}}}$$

Dieses giebt demnach

	1	0
5	0	1
2	1	5
15	2	11
1	31	170
25	33	181
2:3	856	4695
35	$603\frac{2}{3}$	3311
ꝛc.	$21984\frac{1}{3}$	120580

Nun ist

$$1:5 = 0,20\ldots\ldots$$
$$2:11 = 0,1818\ldots\ldots$$
$$31:170 = 0,18235\ldots\ldots$$
$$33:181 = 0,1823204\ldots$$
$$856:4695 = 0,18232161\ldots$$
$$603\tfrac{2}{3}:3311 = 0,1823215544\ldots$$
$$21984\tfrac{1}{3}:120580 = 0,1823215569\ldots$$

Es ist aber $\log.\frac{6}{5} = 0,18232155679395\ldots$ woraus man sieht, daß diese Brüche noch ziemlich geschwinde den wahren Werthe näher kommen. Wenn wir die Theilung mit der

Zahl

Zahl selbst vornehmen, so fällt die Rechnung folgendermassen aus

1 0000000000		1	0
1823215568	5	0	1
883922160	2	1	5
55371248	15	2	11
53353440	1	31	170
2017808	25	33	181
2908240			
rc.			

woraus man sieht, daß der letzte Quotient 25 hätte um 1 grösser seyn können. Läßt man denselben aber so wie er ist, so wird der folgende $= \frac{2}{3}$, und so kommen alle Quotienten heraus, die wir vermittelst der unendlichen Reihe gefunden haben.

§. 20.

Setzt man $2 = 1$, in welchem Fall die Reihe selbst sehr wenig convergirt, so erhält man

$$\log.2 = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2:3+\cfrac{1}{7+ \text{rc.}}}}}}}}$$

und

und dieses giebt

	1	0
1	0	1
2	1	1
3	2	3
1	7	10
5	9	13
2:3	52	75
7	$43\frac{2}{3}$	63
u.	$357\frac{2}{3}$	516

Nun ist

$$\frac{7}{10} = 0,700\ldots\ldots$$
$$\frac{9}{13} = 0,6923\ldots\ldots$$
$$\frac{52}{75} = 0,6933\ldots\ldots$$
$$\frac{131}{189} = 0,69312\ldots\ldots$$
$$\frac{1073}{1548} = 0,693152\ldots$$
u.
$$\log. 2 = 0,693147\ldots$$

Man sieht hieraus, daß auch in diesem Fall die Brüche sich dem wahren Werthe noch merklich geschwinde nähern.

§. 21.

Wenn $z > 1$ ist, so wird die Reihe
$$\log.(1+z) = z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \text{u.}$$
divergent, und giebt gar keinen Werth, der sich bestimmen liesse. Laßt uns demnach sehen, ob es mit unsern Brüchen besser geht. Es sey

z. E.

z. E. $2 = 2$, so haben wir

$$\log.3 = \cfrac{1}{1:2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3:2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5:2+\cfrac{1}{2:3+\cfrac{1}{7:2+\text{rc.}}}}}}}}$$

um hiebey die Brüche zu vermeiden, werden wir die Figur so vorstellen

	12	0		
1:2	0	12	=	0:1
2	12	6	=	2:1
3:2	24	24	=	1:1
1	48	42	=	8:7
5:2	72	66	=	12:11
2:3	228	207	=	76:69
7:2	224	204	=	56:51
rc.	1012	921	=	1012:921

Nun ist

$8:7 = 1,14\ldots\ldots$
$12:11 = 1,0909\ldots$
$76:69 = 1,1014\ldots$
$56:51 = 1,0980\ldots$
$1012:921 = 1,0988\ldots$
rc.
$\log.3 = 1,098612\ldots$

Man

Man sieht demnach, daß die Brüche nicht divergiren, sondern in der That dem wahren Werthe näher kommen, so, daß der letzte kaum um 0,0002 davon verschieden ist.

§. 22.

Nimmt man für z eine grössere Zahl, so muß man zwar die Rechnung weiter fortsetzen, bis man auf Brüche kömmt, die dem wahren Werthe sehr nahe kommen. Es wird aber immer angehen. Denn die Quotienten, so man wenn die Theilung der Reihe fortgesetzt wird, findet, haben in der Art, wie sie aufeinander folgen, ein sehr einfaches Gesetz. Sie sind nemlich

$$\frac{1}{z}, \frac{2}{1}, \frac{3}{z}, \frac{2}{2}, \frac{5}{z}, \frac{2}{3}, \frac{7}{z}, \frac{2}{4}, \frac{9}{z}, \frac{2}{5}, \frac{11}{z}, \frac{2}{6}, \frac{13}{z} \text{ ꝛc.}$$

wobey folglich die Glieder, so durch z dividirt sind, nach der Ordnung der ungeraden Zahlen fortgehen, und folglich ihr Zähler endlich grösser wird als jede fürgegebene Zahl. Hingegen nehmen zwar die nicht durch z getheilte Glieder $\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}$ ꝛc. immer ab, es hindert dieses aber nicht, daß die dadurch herfürgebrachte Brüche nicht solten dem wahren Werthe näher kommen, als die nächstvorhergehenden; und wie wir aus dem letzten Beyspiele sehen, so vermindern sie das Anwachsen der Zahlen, so die Zähler und Nenner der Brüche sind. Wir haben demnach hiedurch ein Mittel den Werth unendlicher Reihen auch für diejenigen Fälle zu finden, wo die Reihen selbst divergirend werden.

§. 23.

Für die Reihe

$$v = z - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 - \tfrac{1}{7}z^7 + \tfrac{1}{9}z^9 - \text{etc.}$$

welche den Bogen eines Circuls durch seine Tangente ausdrücket, findet man nach angestellter Theilung auf eine ganz ähnliche Art

$$v = \cfrac{1}{1:z + \cfrac{1}{3:z + \cfrac{1}{5:4z + \cfrac{1}{28:9z + \cfrac{1}{81:64z + \cfrac{1}{704:225\,z + \text{etc.}}}}}}}$$

Es sey z. E. $z = 1$, in welchem Fall die Reihe fast gar nicht convergirt, so haben wir

$$\text{arc.}\,45^\circ = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5:4 + \cfrac{1}{28:9 + \cfrac{1}{81:64 + \cfrac{1}{704:225 + \text{etc.}}}}}}}$$

folglich, um die Brüche zu vermeiden

	36	0				
1	0	36				
3	36	36				
5:4	108	144	=	3:4	=	0,75 ......
28:9	171	216	=	19:24	=	0,7917 ...
81:64	640	816	=	40:51	=	0,7843 ...
	981	4995:4	=	436:555	=	0,7856 ...

Es ist aber der Bogen von 45 Gr. ... = 0,7854

woraus

woraus man wiederum sieht, daß diese Brüche dem wahren Werthe noch merklich geschwinde näher kommen.

§. 24.

Die Quotienten, so man bey der Division dieser Reihe findet, haben ebenfalls ein sehr ordentliches Gesetz, nach welchem sie auf einander folgen. Es sind nemlich dieselben der Ordnung nach

$$\frac{1}{z},\ \frac{3}{1.z},\ \frac{5}{4.z},\ \frac{7.4}{9.z},\ \frac{9.\ 9}{4.16.z},\ \frac{11.\ 4.16}{9.25.z},$$
$$\frac{13.\ 9.25}{4.16.36.z},\ \frac{15.4.16.36}{9.25.49.z},\ \frac{17.\ 9.25.49}{4.16.36.64.z},$$
$$\frac{19.\ 4.16.36.64}{9.25.49.81.z}\ \text{ꝛc.}$$

In den Zählern kommen nemlich der Ordnung nach die ungeraden Zahlen vor. Die übrigen Factores sind lauter Quadratzahlen, welche wechselsweise Nenner und Zähler werden. In jede Nenner kömmt eine neue, oder die nächst grössere Quadratzahl als ein Factor hinzu, und diese bestimmt, wie die vorhergehende vertheilt werden, weil die geraden und ungeraden nicht zugleich im Nenner oder im Zähler vorkommen. Alle diese Brüche sind durch z dividirt. Hingegen werden sie nicht wechselsweise immer grösser und kleiner, sondern sie nähern sich zwoen bestimmten Grössen, nemlich die Brüche

$$\frac{3}{1}, \frac{7.4}{9}, \frac{11.4.16}{9.25}, \frac{15.4.16.36}{9.25.49} \text{ rc.}$$

nähern sich der Zahl 3, 1415926.... welche den halben Umkreiß des Circuls vorstellt. Ihr allgemeiner Ausdruck ist

$$\frac{(4x+3)(2^2.4^2.6^2.8^2....(2x)^2)}{3^2.5^2.7^2.9^2....(2x+1)^2}$$

Hingegen nähern sich die Brüche

$$\frac{1}{1}, \frac{5}{4}, \frac{9.9}{4.16}, \frac{13.9.25}{4.16.36}, \frac{17.9.25.49}{4.16.36.64} \text{ rc.}$$

der Zahl, welche herauskömmt, wenn man 4 durch den halben Umkreis des Circuls 3, 1415926.... dividirt, und welche demnach $= 1,27323954473....$ rc. ist. Dieses macht nun, daß, wenn man $z > 1$ annimmt, die Brüche sich dem wahren Werthe sehr langsam nähern. Da sie sich aber dennoch nähern, so haben sie vor der Reihe ein vieles voraus, weil diese in allen den Fällen, wo $z > 1$ ist, divergirt, und daher gar keinen Werth giebt.

§. 25.

Es giebt überdies noch andere Arten, wie man, ohne eben eine Theilung vorzunehmen, zu den Quotienten gelangen kann, die man, um solche Brüche heraus zu bringen, nöthig hat. So z. E. wenn aus jeder Zahl $AA + BB$ die Quadratwurzel solle ausgezogen werden,

so

so könnte man nach Anleitung der Newtonschen Binomialformel diese Wurzel durch eine unendliche Reihe ausdrücken, und vermittelst dieser Reihe die Quotienten suchen, und so würde man der Ordnung nach und wechselsweise $A, \frac{2A}{BB}, 2A, \frac{2A}{BB}, 2A$ &c. finden, welches den Bruch

$$1:\sqrt{(A^2+B^2)} = \cfrac{1}{A+\cfrac{1}{2A:BB+\cfrac{1}{2A+\cfrac{1}{2A:BB+\&c.}}}}$$

und daher die Wurzel

$$\sqrt{(AA+BB)} = A+\cfrac{1}{2A:BB+\cfrac{1}{2A+\cfrac{1}{2A:BB+\&c.}}}$$

geben würde. Man kann aber diese Formel unmittelbar folgendergestalten finden. Man setze $\sqrt{(AA+BB)} = A+y$, so ist

$$AA+BB = AA+2Ay+yy,$$

folglich $\quad y(y+2A) = BB$

und daher

$$y = \frac{BB}{2A+y}.$$

Nun kann man für das y, so in dem Nenner des Bruches ist, den Bruch selbst wiederum setzen, so hat man

$$y = \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + y}}$$

fährt man auf gleiche Art fort, so wird

$$y = \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \&c.}}}}$$

Und hiebey darf man nur jeden Bruch durch BB theilen, um sodann die vorige Formel

$$y + A = \sqrt{(AA + BB)} = A + \cfrac{1}{2A:BB + \cfrac{1}{2A + \cfrac{1}{2A:BB + \&c.}}}$$

zu erhalten.

§. 26.

Es sey nun z. E. die Quadratwurzel aus 38 zu ziehen; so setzt man $38 = 36 + 2$, demnach $36 = AA$, $2 = BB$, $A = 6$, $2A:BB = 6$, und so hat man

$$\sqrt{38} = 6 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{12 + \&c.}}}}$$

Dieses giebt nun folgende Figur

	1	0
6	0	1
12	1	6
6	12	73
12	73	444
6	888	5401
ꝛc.	5401	32850

demnach ist $\sqrt{38} < 1\frac{1}{6}$

$> 1\frac{12}{73}$

$< 1\frac{73}{444}$

ꝛc.

Man kann sich aber auch der ersten Formel

$$\sqrt{(AA+BB)} = A + \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \cfrac{BB}{2A + \&c.}}}$$

bedienen, und die Quadratwurzel durch eine Reihe von Regeln de tri finden, welche man so lange fortsetzen kann, als man es der Genauigkeit halber nöthig erachtet. Und dieses findet statt, so oft die fürgegebene Zahl eine Summe von zwoen Quadratzahlen ist, von welchen man die Wurzeln hat. Denn da macht man der Ordnung nach

$$2A:B = B:a$$
$$(2A+a):B = B:b$$
$$(2A+b):B = B:c$$
&c.

und die Zahlen $A+a$, $A+b$, $A+c$ &c. werden der wahren Wurzel desto näher kommen, je weiter man diese Analogien fortgesetzt hat, und je grösser A als B ist.

§. 27.

Um aber genauer zu sehen, wie sich diese gefundenen Werthe dem wahren nähern, so werden wir für A, B solche Ausdrücke nehmen, die ein Quadrat geben. Man setze demnach

$$A = a - b$$
$$BB = 4ab,$$

so ist

$$AA + BB = a^2 + 2ab + bb$$

und

$$\sqrt{(AA + BB)} = a + b = A + y$$

demnach $y = 2b$

und

$$\sqrt{(AA + BB)} = (a - b) + \cfrac{4ab}{2(a-b) + \cfrac{4ab}{2(a-b) + \&c.}}$$

Wird nun dieser Bruch stuffenweise um ein Glied weiter abgebrochen und die Reduction vorgenommen, so erhält man der Ordnung nach

$$\sqrt{(AA - BB)} = a - b + 2ab\,(a + b) : (a^2 - b^2)$$
$$= a - b + 2ab\,(a^2 - b^2) : (a^3 + b^3)$$
$$= a - b + 2ab\,(a^3 + b^3) : (a^4 - b^4)$$
&c.
$$= a - b + 2ab\,(a^{2n} - b^{2n}) : (a^{2n+1} + b^{2n+1})$$
$$= a - b + 2ab\,(a^{2n+1} + b^{2n+1}) : (a^{2n+2} + b^{2n+2})$$

Um dieses überhaupt zu beweisen, darf man nur setzen, daß man mit Beybehaltung von

2n

2n Gliedern des Bruches auf den Ausdrucke

$$\frac{2ab(a^{2n}-b^{2n})}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}$$

gekommen. Denn so wird man, wenn man um eine Stuffe tiefer anfängt den Ausdruck

$$\cfrac{4ab}{2(a-b)+\cfrac{2ab(a^{2n}-b^{2n})}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}}$$

erlangen. Nimmt man bey diesem die Reduction vor, so verwandelt derselbe sich in

$$\frac{2ab(a^{2n+1}+b^{2n+1})}{a^{2n+1}-b^{2n+1}}$$

Und dieser kommt ebenfalls heraus, wenn man in den erst angenommenen

$$\frac{2ab(a^{2n}-b^{2n})}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}$$

für n, $n+1$ setzt, und die Zeichen verwechselt, welche vor b stehen. Ist demnach $a > b$, so läßt sich n so groß annehmen, daß die Formel sich in

$$\sqrt{(A^2+B^2)} = a-b+\frac{2ab.a^{2n}}{a^{2n+1}}$$

$$= a-b+2b = a+b$$

verwandelt, welches sodann in der That die Wurzel ist. Man sieht zugleich hieraus, daß, weil

$$a-b+\frac{2ab(a^{2n}-b^{2n})}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}=a+b-\frac{2(a-b)b^{2n}}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}$$

und

$$a-b+\frac{2ab(a^{2n+1}+b^{2n+1})}{a^{2n+2}-b^{2n+2}}=a+b+\frac{2(a+b).b^{2n+1}}{a^{2n+2}-b^{2n+2}}$$

ist, die Brüche sich dem wahren Werthe der Wurzel in einer Progreßion nähern, welche einer geometrischen desto näher kommen, je grösser n ist, und daß die Brüche, welche zu groß sind, immer um mehr zu groß sind, als die, so zu klein sind, zu klein sind. Denn die Unterschiede der erstern sind mit $(a+b)$, die Unterschiede der andern mit $(a-b)$ multiplicirt. Die Näherung ist am langsamsten, wenn $A=B$ ist. Nun ist aber überhaupt

$$2a=+A+\sqrt{(A^2+B^2)}$$
$$2b=-A+\sqrt{(A^2+B^2)}$$

demnach für den Fall, wo $A=B$ ist, findet sich

$$2a=A(+1+\sqrt{2})=2,4142136\ldots.$$
$$2b=A(-1+\sqrt{2})=0,4142136\ldots.$$

demnach

$$\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=3+2\sqrt{2}=5,8284272\ldots$$

Da nun die Brüche entweder um

$$\frac{2(a-b)b^{2n}}{a^{2n+1}+b^{2n+1}}=\frac{2\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}}{1+(b:a)^{2n+1}}$$

zu klein, oder um

$$\frac{2(a+b)b^{2n+1}}{a^{2n+2}-b^{2n+2}}=\frac{2(1+b:a).(b:a)^{2n+1}}{1-(b:a)^{2n+2}}$$

anbringen. Nimmt man aber die Reihe

$$\sqrt[3]{(a^3+b)}=a+\frac{b}{3a^2}-\frac{1.2b^2}{3.6a^5}+\frac{1.2.5b^3}{3.6.9a^8}-\frac{1.2.5.8b^4}{3.6.9.12a^{11}}+\text{etc.}$$

vor, und theilt sie anfangs durch 1, so, daß der erste Quotient $= a$ sey, und sodann jeden Theiler durch den Ueberrest, so sind die Quotienten der Ordnung nach

$$a,\ \frac{3a^2}{b},\ a,\ \frac{9a^2}{2b},\ \frac{4a}{5},\ \frac{75a^2}{14b},\ \frac{7a}{10},\ \frac{6a^2}{b},\ \&c.$$

demnach

$$1:\sqrt[3]{(a^3+b)}=\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{3a^2:b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{9a^2:2b+\text{etc.}}}}}$$

und

$$\sqrt[3]{(a^3+b)}=a+\cfrac{1}{3a^2:b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{9a^2:2b+\cfrac{1}{4a:5+\cfrac{1}{75a^2:14b+\text{etc.}}}}}}$$

diese Quotienten geben nun Brüche, die sehr geschwinde sich dem wahren Werthe der Wurzel nähern. Wir wollen es für den Fall zeigen, wo es noch am langsamsten zugeht, weil wir $a = b = 1$ setzen wollen. Denn es ist klar, daß, wenn $a > 1$ und $b < a$ ist, die Quo-

Quotienten merklich grösser werden. Setzen wir demnach $a = b = 1$, so ist $\sqrt[3]{(a^3 + b)} = \sqrt[3]{2}$ folglich die Cubicwurzel von 2 zu suchen, welche $= 1,259921 \ldots$ ist. Wir haben demnach

	140	0				
3 ——	0	140	=	0 : 1		
1 ——	140	420	=	1 : 3	=	0, 333 ...
9:2 ——	140	560	=	1 : 4	=	0, 25
4:5 ——	770	2940	=	11 : 41	=	0, 268 ...
75:14 —	756	2912	=	27 : 104	=	0, 2596 ...
7:10 —	4820	18540	=	241 : 927	=	0, 259976 ...
6 ——	4130	15890	=	59 : 227	=	0, 259912 ...
ꝛc.	29600	113880	=	740 : 2847	=	0, 2599227 ...

Demnach, wenn wir $a = 1$ addiren, die gesuchten Werthe

1, 333 ...
1, 25
1, 268 ...
1, 2596 ...
1, 259976 ...
1, 259912 ...
1, 2599227 ... ꝛc.

Die Quotienten, oder besser zu sagen, deren Coefficienten 3, 1, $\frac{9}{2}$, $\frac{4}{5}$, ꝛc. folgen nach einem gewissen Gesetze auf einander. Es sind nemlich die Glieder folgender Reihe

$$\frac{1.3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3.3.2}{1.4}, \frac{2.4}{2.5}, \frac{5.3.2.5}{1.4.7}, \frac{2.4.7}{2.5.8}, \frac{7.3.2.5.8}{1.4.7.10} \text{ ꝛc.}$$

oder

$$\frac{3}{1}, \frac{1}{1}, \frac{9.2}{4}, \frac{4}{5}, \frac{15.2.5}{4.7}, \frac{4.7}{5.8}, \frac{21.2.5.8}{4.7.10} \text{ ꝛc.}$$

§. 30.

§. 30.

Man kann dieses Gesetz allgemeiner vorstellen, wenn man überhaupt die Wurzel

$$\sqrt[m]{(a^m+b)}$$

in eine Reihe auflöset, und vermittelst dieser Reihe durch die Division die Quotienten sucht. Denn da findet man sie in folgender Ordnung

$$\frac{ma^{m-1}}{b}, \frac{2}{m-1}a, 3.m.\frac{m-1}{m+1}, \frac{a^{m-1}}{b}, \frac{2.}{m-1}, \frac{m+1.a}{2m-1},$$

$$5m.\frac{m-1.2m-1.a^{m-1}}{m+1\,.\,2m+1\,.\,b}, \frac{2.m+1.2m+1.a}{m-1\,.\,2m-1\,.\,3m-1}, \text{ꝛc.}$$

diese geben demnach überhaupt

$$\sqrt[m]{(a^m+b)} = a + \cfrac{1}{ma^{m-1}:b + \cfrac{1}{2a:\overline{m-1} + \cfrac{1}{3.m.(m-1)a^{m-1}:(m+1)b + \&c.}}}$$

Man sieht zugleich hieraus, daß diese Quotienten bey jeder Wurzel wechselsweise zu- und abnehmen, und daß ihre Coefficienten nur bey der Quadratwurzel beständig $= 2$ sind. Setzt man für m, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ꝛc. so erhält man Dignitäten von (a^m+b), und da irgend einer der Quotienten anfängt unendlich zu werden, so wird die Reihe daselbst abgebrochen, und man erhält die Dignität ganz rein. Es sey z. E. $m = 2$, und $a = b = 1$, so sind die Coefficienten

$$+\tfrac{1}{2}, -4, -\tfrac{1}{2}, \infty.$$

Folg-

Folglich die Figur

$$
\left|\begin{array}{r|l}
\overline{4} & \underline{\ 0\ } \\
+1:2\ -\ -\ -\ 0 & \ 4 \\
-4\ -\ -+\ 4 & +2 = 2 \\
-1:2\ -\ -16 & -4 = 4 \\
+12 & +4 = 3
\end{array}\right.
$$

demnach $(1+1)^2 = 1+3 = 4$.

§. 31.

Wir werden nun zu andern Reductionen der Brüche, und besonders der Decimalreihen fortschreiten. Wenn man mit einer Decimalreihe, wie z. E. mit 3, 1415926 .... oft zu multipliciren hat, und besonders wenn entweder große Zahlen, oder andere Decimalreihen damit solten multiplicirt werden, so ist ein solches Multipliciren, wegen der Weitläuftigkeit, beschwerlich. Ich habe demnach auf Mittel gedacht, demselben abzuhelfen. So z. E. um bey eben dieser Reihe 3, 1415926 .... zu bleiben, welche dem Umkreis des Circuls ausdrückt, fand ich

$$
3{,}1415926\text{ rc.} = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{800} - \frac{1}{70000} - \frac{1}{5000000} - \frac{1}{3000\,000\,00} - \frac{1}{5000\,000\,000} - \frac{1}{5000\,000\,0000\,0} + \frac{1}{4000\,000\,000\,0000\,0} - \frac{1}{2000\,000\,000\,000\,00} - \text{rc.}
$$

Weiter habe ich diese Reihe nicht verfolgt, weil man ohnehin selten bis auf 14 Decimalziffern rechnet. Man sieht sogleich und auf eine sehr klare Art daraus, um wie viel die archimedische Proportion, welche die ersten zwey Glieder dieser Reihe vorstellen, zu groß ist, um wie viel man noch fehlt, wenn man sie um $\frac{1}{800}$ des Diameters vermindert ꝛc. Es ist beynahe ganz unnöthig, daß ich die Methode hersetze, nach welcher ich diese Reihe gefunden. Denn da ich mir dabey vorgesetzt hatte, solche Brüche zu finden, deren Zähler $= 1$, die Nenner aber eine ganz einfache Zahl mit angehenkten 0 seyn solten, damit man ohne Mühe dividiren könne, so war leicht voraus zu sehen, daß diese Nenner ohne alle Ordnung würden grösser werden, weil der Umstand, daß wir nur bis auf 9 zählen, ganz willkührlich ist, und mit der Quadratur des Circuls nichts zu thun hat. Das einige Mittel, so demnach übrig bliebe, war, daß ich die Ludolphischen Zahlen

3, 141592653589, 793238, ꝛc.

vor mich nahme, sodann erstlich 3 abzoge, und von dem Ueberreste, welcher beynahe $\frac{1}{7}$ war, zog ich $\frac{1}{7}$ ab. Da aber $\frac{1}{7}$ grösser wäre als der Ueberrest, so sahe ich, daß dieser sodann von $3\frac{1}{7}$ muste abgezogen werden. Nun war dieser Ueberrest etwas grösser als $\frac{1}{800}$. Ich zoge demnach $\frac{1}{800}$ ab, und fand das Uebrigbleibende noch etwas grösser als $\frac{1}{70000}$. Dieses zoge ich demnach wiederum ab, und was übrig

bliebe,

bliebe, war noch etwas grösser als $\frac{1}{5000\,000}$. Auf diese Art fuhr ich fort, bis der Ueberrest grösser als $\frac{1}{6000\,000\,000\,00}$, und nur ein wenig kleiner als $\frac{1}{5000\,000\,000\,0}$ war. Ich zoge denselben demnach von diesem letztern Bruche ab, und damit muste das Zeichen — in + verwandelt werden, weil mit $\frac{1}{5000\,000\,0000}$ zu viel war weggenommen worden ꝛc.

§ 32.

Man sieht ohne mein Erinnern, daß es bey Ausfindung solcher Brüche eigentlich darum zu thun ist, daß die Anzahl der 0 in den Nennern geschwinde zunehme, damit man mit wenigern Theilungen weiter reiche. Hiezu kann man nun keine allgemeine Regel geben, theils weil man die Ueberreste bey solchen Brüchen nicht vorher sehen kann, theils weil es mehrere Anordnungen der Brüche giebt, die zuletzt dennoch auf eines hinaus laufen. So z. E. findet man

$$\frac{1}{3,1415926\text{ ꝛc.}} = 0,31830988618379067153\text{ ꝛc.}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{60} + \frac{1}{600} - \frac{1}{40000} + \frac{1}{600000}$$

$$- \frac{1}{9000000} - \frac{1}{4000\,000\,000} - \text{ꝛc.}$$

oder auch

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{50} + \frac{1}{200} - \frac{1}{40000} + \frac{1}{600000}$$

$$- \frac{1}{9000000} - \frac{1}{400000000} - \text{ꝛc.}$$

Denn es ist

$$\tfrac{1}{60} - \tfrac{1}{600} = \tfrac{1}{50} - \tfrac{1}{200}.$$

Man wird eben so auch die Reihe

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{70} - \frac{1}{1000} + \frac{1}{4000} + \frac{1}{80000}$$

$$- \frac{1}{5000000} - \frac{1}{30000000} + \frac{1}{2000000000}$$

$$- \frac{1}{30000000000} + \text{ꝛc.}$$

finden, welche eben den Werth giebt, und von den beyden vorhergehenden, von dem zweyten Gliede an, ganz verschieden ist.

§. 33.

Diese Reihen sind nun in dem Gebrauche sehr vortheilhaft. Man sieht mit einem male, bis auf die wievielste Decimalstelle jeder Bruch reicht, und wie viele Theilungen man folglich vorzunehmen hat, um zu einem fürgegebenen Grade der Genauigkeit zu gelangen. Wer überdies leicht im Rechnen geübt ist, dem fällt es nicht schwerer mit einer Ziffer zu dividiren, als zu multipliciren, und er gebraucht kein besonder

sonder Blatt dazu, um jeden Quotienten zu finden.

§. 34.

Indessen ist eben diese Leichtigkeit Schuld daran, daß diese Reihen weniger convergiren, als es an sich geschehen könnte. Ich habe demnach auf Mittel gedacht, jede Decimalreihe, oder auch andere Brüche, in solche Brüche aufzulösen, deren Zähler = 1, die Nenner aber in der größten möglichen Verhältniß der Ordnung nach grösser seyn. Diese Auflösung geht nun stuffenweise von statten, und die Bedingung, daß alle Zähler sollen = 1 seyn, giebt die Methode von selbst an. Es sey z. E. der Bruch $\frac{94}{127}$. Da dieser nun näher bey 1 als bey $\frac{1}{2}$ ist, so wird er von 1 abgezogen, demnach

$$\frac{94}{127} - \frac{127}{127} = -\frac{33}{127}.$$

Nun ist $\frac{33}{127}$ näher bey $\frac{1}{4}$ als bey $\frac{1}{3}$. Man zieht demnach $\frac{1}{4}$ davon ab, und so ist

$$\frac{33}{127} - \frac{1}{4} = \frac{132 - 127}{4.127} = \frac{5}{508}.$$

Eben so ist dieser neue Ueberrest $\frac{5}{508}$ näher bey $\frac{1}{102}$ als bey $\frac{1}{101}$, man zieht demnach $\frac{1}{102}$ davon ab, und so ist

$$\frac{5}{508} - \frac{1}{102} = \frac{510 - 508}{508.102} = \frac{1}{508.51} = \frac{1}{4.127.51}$$

demnach wenn man nun den Rückweg nimmt

$$\frac{5}{508}=\frac{1}{102}+\frac{1}{4.127.51}$$

$$\frac{33}{127}=\frac{1}{4}+\frac{1}{102}+\frac{1}{4.127.51}$$

$$\frac{94}{127}=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{102}-\frac{1}{4.127.51}.$$

§. 35.

Wiederum, es sey $\frac{355}{113}$ in eine solche Reihe von Brüchen aufzulösen, so macht man erstlich

$$\frac{355}{113}=3+\frac{16}{113}$$

sodann, weil $\frac{16}{113}$ dem $\frac{1}{7}$ am nächsten kömmt

$$\frac{16}{113}=\frac{1}{7}-\frac{1}{791}=\frac{1}{7}-\frac{1}{7.113}.$$

Da nun der Ueberrest $\frac{1}{791}$ schon 1 zum Zähler hat, so gebraucht es keiner weitern Auflösung, und es ist ganz kurz

$$\frac{355}{113}=3+\frac{1}{7}-\frac{1}{7.113}$$

Man sieht hieraus, um wie viel die Metianische Proportion des Umkreises zum Diameter von der Archimedischen verschieden ist. Kehrt man den Bruch $\frac{355}{113}$ um, so findet man auf eine ganz ähnliche Art

$$\frac{113}{355} - \frac{1}{3} = -\frac{16}{3.355} = -\frac{16}{1065}$$

$$\frac{16}{1065} - \frac{1}{67} = +\frac{7}{67.1065} = +\frac{7}{71355}$$

$$\frac{7}{71355} - \frac{1}{10194} = +\frac{3}{10194.71355} = \frac{1}{242464290}$$

folglich

$$\frac{113}{355} = \frac{1}{3} - \frac{1}{67} - \frac{1}{10194} - \frac{1}{242464290}.$$

Man sagt nemlich: 113 in 355 geht 3 mal, und es bleiben 16 übrig. 16 in 3 mal 355, oder 1065 geht 67 mal, und es fehlen 7. Endlich 7 in 67 mal 1065, oder 71355 geht 10194 mal, und es fehlen 3. Dieses 3 in 10194 mal 71355 geht genau 242464290 male. Und damit sind die Nenner 3, 67, 10194 und 242464290 gefunden.

§. 36.

Bey den Decimalreihen verfährt man auf eine ganz ähnliche Art, nur daß man die Brüche, so man herausbringt, in Decimalreihen verwandelt, um zu finden, wie nahe sie dem wahren Werthe der Reihe kommen, und was noch entweder hinzu zu setzen oder weg zu nehmen ist. So z. E. ist für die Ludolphische Zahlen

$$\begin{array}{lrcr}
 & \pi & = & 3,14159265358979323 8 \text{ ꝛc.} \\
A & 3\frac{1}{7} & = & 3,142857142857142857 \text{ ꝛc.} \\
\hline
a & & & -0,0012644892673496 18 \text{ ꝛc.} \\
B - \frac{1}{791} & & = & 1264222503151706 \text{ ꝛc.} \\
\hline
b & & & -266764197911 \text{ ꝛc.} \\
C - \frac{1}{3748629} & & = & 266764195656 \text{ ꝛc.} \\
\hline
c & & & 2255 \text{ ꝛc.} \\
D - \frac{1}{443384023362059} & & = & 2255 \text{ ꝛc.}
\end{array}$$

Hier müssen nemlich die Brüche B, C, D aus den Ueberresten a, b, c gefunden werden, indem man 1 durch dieselben dividirt. Man hat nicht nöthig hiezu die ganze Reihen a, b, c zu nehmen, sondern es ist genug, wenn man von den ersten Zahlen derselben so viel nimmt als nöthig ist, die Quotienten, soweit diese ganze Zahlen sind, zu bestimmen. Sind auf diese Art die Brüche A, B, C, D gefunden, so verwandelt man sie in Decimalreihen, um sie sodann abzuziehen. Ich habe, um diese Brüche zu finden, von der Reyhe π in allem 30 Decimalstellen zur Rechnung genommen, und fand demnach, daß die Formel

$$3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{791} - \frac{1}{3748629} - \frac{1}{443384023362059} \text{ ꝛc.}$$

die Ludolphische Zahlen bis auf die 28te Decimalstelle richtig giebt. Die zwey ersten Glieder geben die Archimedische Proportion $\frac{22}{7}$, die drey ersten aber

$$3+\frac{1}{7}-\frac{1}{791}=3+\frac{113-1}{791}=3\frac{16}{113}=\frac{355}{113}$$

geben die Metianische $\frac{355}{113}$. Man sieht also hieraus, daß unter den kleinern Verhältnissen diese beyden die genauesten sind, und daß von der Metianischen bis zur nächst grösseren ein merklicher Sprung ist.

§. 37.

Die Reihen von Brüchen, in welche man auf diese Art jede Decimalreihe verwandeln kann, sind nun diejenigen, die unter allen am geschwindesten convergiren. Es haben aber diese Brüche in der Art, wie sie auf einander folgen, kein Gesetz unter sich. Die Nenner haben zuweilen Theiler, zuweilen sind es Primzahlen, und jede Reihe hat, in Ansehung des Convergirens, etwas besonders. Es kommt viel darauf an, daß schon der erste Bruch dem wahren Werthe der Reihe sehr nahe komme. Denn man sieht leicht, daß wenn man in unserm Beyspiele anstatt der Reihe A, welche $\frac{22}{7}$ ist, gleich anfangs $\frac{355}{113}$ als die Summe beyder Reihen A, B genommen hätte, der folgende Bruch unmittelbar würde C gewesen seyn. Die Anzahl der Ziffern in dem Nenner eines jeden folgenden Bruches wird immer doppelt, und mehrentheils um eine Ziffer mehr als doppelt grösser. Es kann auch in einigen Fällen geschehen, wo ein Nenner weit über doppelt mehr Ziffern bekömmt, als der nächst vorhergehende. Dieses geschieht aber gleichsam nur zufälliger Weise, wenn man nemlich eine solche Reihe vor sich hat, welche einem gewissen Bruche beynahe gleich ist.

§. 38.

Wenn man nicht so genau darauf sieht, daß solche Reihen unter allen am geschwindesten convergiren, so lassen sich solche finden, die nach gewissen Gesetzen fortgehen. So z. E. es sey die Frage jede Decimalreihen in eine Reihe von Brüchen von folgender Form

$$A + \frac{1}{a} + \frac{1}{a.\,b} + \frac{1}{a.\,b.\,c} + \frac{1}{a.\,b.\,c.\,d} + \text{ꝛc.}$$

zu verwandeln, und zwar mit der gedoppelten Bedingung, daß a, b, c, d &c. ganze Zahlen seyn, und die Reihe unter allen von dieser Art am geschwindesten convergire. Die Auflösung dieser Aufgabe hat nun ebenfalls gar keine Schwürigkeit, und wir können sogleich anfangen, sie in einem Beyspiele zu zeigen, wozu wir ebenfalls wiederum die Ludolphischen Zahlen nehmen werden. Die Rechnung ist demnach folgende

$$\begin{array}{rcl}
\pi & = & 3,141592,653589,793238,462643,38\text{ ꝛc.} \\
3+\frac{1}{7} & = & \underline{3,142857,142857,142857,142857,14\text{ ꝛc.}} \\
M & = & -\ 1264,489267,349618,680213,76\text{ ꝛc.} \\
A = \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{113} & = & \underline{1264,222503,151706,700379,27\text{ ꝛc.}} \\
N & = & -\ 266764,197911,979834,49\text{ ꝛc.} \\
B = \frac{A}{4739} & = & \underline{266769,867725,618632,49\text{ ꝛc.}} \\
O & = & +\ 5,669813,638798,00\text{ ꝛc.} \\
C = \frac{B}{47051} & = & \underline{5,669802,293800,74\text{ ꝛc.}} \\
P & = & +\ 11,344997,26\text{ ꝛc.} \\
D = \frac{C}{499762} & = & \underline{11,345004,81\text{ ꝛc.}} \\
\text{ꝛc.} \quad Q & = & -\ 7,55\text{ ꝛc.}
\end{array}$$

folglich

$$\pi = 3+\frac{1}{7}-\frac{1}{7\cdot113}-\frac{1}{7\cdot113\cdot4739}+\frac{1}{7\cdot113\cdot4739\cdot47051}$$
$$+\frac{1}{7\cdot113\cdot4739\cdot47051\cdot499762}-\text{ꝛc.}$$

Man dividirt nemlich $\frac{1}{7}$ durch den ersten Ueberrest M. um den Nenner 113 zu finden. So dann theilt man $\frac{1}{7}$ durch 113, um die Reihe A zu finden. Diese wird von M abgezogen, und so erhält man den zweyten Ueberrest N. Sodann giebt die Theilung $\frac{A}{N}$ den Nenner 4739, und $\frac{A}{4739}$ die Reihe B, welche von N abgezogen, den 3ten Ueberrest O giebt, mit welchem man auf eine ganz ähnliche Art verfährt ꝛc.

§. 39.

Die Reihen, die man nach dieser Methode findet, haben den Vortheil, daß man sogleich sieht, wie vielmal jeder Bruch kleiner ist, als der nächst vorhergehende, und daß man bey ihrem Gebrauche nicht mit so grossen Zahlen zu dividiren hat, weil jedes Glied durch das nächst vorhergehende gefunden werden kann. Jeder neue Factor hat wenigstens so viel, mehrentheils aber mehr Ziffern, als der nächst vorhergehende. Lezters hängt von der besondern Art der Reihe ab, die man in solche Brüche aufzulösen vornimmt. Daher findet sich in Ansehung des Convergirens ein merklicher Unterschied. So z. E. findet man

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3.22} + \frac{1}{3.22.118} - \frac{1}{3.22.118.384} - \text{rc.}$$

Diese Reihe convergirt demnach merklich langsamer als die, so wir erst für π gefunden.

§. 40.

Will man Brüche in solche Reihen auflösen, so kann es nach einer gewissen mechanischen Methode geschehen, welche wir durch das Beyspiel des Bruches $\frac{5341}{7837}$ erläutern wollen. Die Figur ist folgende

5341

$$\begin{array}{r|l|l}
5341 & 7837 & 1 \\
 & 5341 & \\ \hline
-2496 & 7837 & 3 \\
 & 7488 & \\ \hline
+349 & 7837 & 22 \\
 & 7678 & \\ \hline
-159 & 7837 & 49 \\
 & 7791 & \\ \hline
+46 & 7837 & 170 \\
 & 7820 & \\ \hline
-17 & 7837 & 461 \\
 & 7837 & \\ \hline
 & 0 &
\end{array}$$

Dieses giebt nun

$$\frac{5341}{7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{1}{3.22.49} + \frac{1}{3.22.49.170} - \frac{1}{3.22.49.170.461}.$$

Man dividirt nemlich den Nenner durch den Zähler, und sodann durch jeden Ueberrest, um die Quotienten 1, 3, 22, 49, 170, 461 zu finden. Nun ist

$$1 - \frac{2496}{7837} = \frac{5341}{7837}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{349}{3.7837} = \frac{2496}{7837}$$

$$\frac{1}{22} - \frac{159}{22.7837} = \frac{349}{7837}$$

$$\frac{1}{49} - \frac{46}{49.7837} = \frac{159}{7837}$$

$$\frac{1}{170} - \frac{17}{170.7837} = \frac{46}{7837}$$

$$\frac{1}{461} - \frac{0}{461.7837} = \frac{17}{7837}$$

Denn

Denn es sey der Nenner $= B$, ein jeder Ueberrest $= Q$, B durch Q getheilt gehe m mal, und lasse R übrig, so ist

$$mQ = B - R$$

demnach

$$\frac{mQ}{B} = 1 - \frac{R}{B}$$

$$\frac{Q}{B} = \frac{1}{m} - \frac{R}{m.B}$$

Es ist daher, wenn man nach und nach substituirt,

$$\frac{5341}{7837} = 1 - \frac{2496}{7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{349}{3.7837} = 1 - \frac{1}{3}$$

$$+ \frac{1}{3.22} - \frac{159}{3.22.7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{1}{3.22.49}$$

$$+ \frac{46}{3.22.49.7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22} - \frac{1}{3.22.49} +$$

$$\frac{1}{3.22.49.170} - \frac{17}{3.22.49.170.7837} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3.22}$$

$$- \frac{1}{3.22.49} + \frac{1}{3.22.49.170} - \frac{1}{3.22.49.170.461}.$$

§. 34.

In diesem Beyspiele hat es sich schicklich ereignet, daß jeder Ueberrest kleiner als die Hälfte desjenigen war, welcher zum Dividiren genommen worden, und dieses machte, daß in der herausgebrachten Reihe die Zeichen — + einförmig abwechselten. Es giebt aber ungleich mehr Brüche, wo die Ueberreste bald grös-

grösser, bald kleiner sind, als die Hälfte der Theiler. Will man nun eine Reihe haben, die am geschwindesten convergirt; so muß man in allen den Fällen, wo ein Ueberrest grösser seyn würde, als die Hälfte des Theilers, den Quotienten um 1 grösser nehmen. Dadurch wird der Ueberrest negativ, und zugleich kleiner als die Hälfte des Theilers, und damit muß das Zeichen verwechselt werden. Es sey z. E. der Bruch $\frac{4142136}{10000000}$, so haben wir folgende Figur

4142136 | 10000000 | 2
8284272
— 1715728 | 10000000 | 6
10294368
— 294368 | 10000000 | 34
10008512
— 8512 | 10000000 | 1175
10001600
— 1600

1600 | 10000000 | 6250
10000000
0

folglich

$$\frac{4142136}{10000000} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2.6} - \frac{1}{2.6.34} - \frac{1}{2.6.34.1175}$$
$$- \frac{1}{2.6.34.1175.6250}$$

Es ist demnach

√2

$$\sqrt{2} = 1{,}4142136 = 1 + \tfrac{1}{2} - \frac{1}{2.\,6} - \frac{1}{2.\,6.\,34}$$

$$- \frac{1}{2.\,6.\,34.\,1175} - \text{rc.}$$

Da hier von den zweyten an, alle Quotienten um 1 grösser genommen worden, so sind auch alle Zeichen von dem zweyten an — geblieben.

§. 42.

Wiederum es sey 0,8660254 der Tabellarsinus von 60 Gr. in solche Brüche zu verwandeln, so ist

$$\begin{array}{r|r|l}
8660254 & 10000000 & 1 \\
 & 8660254 & \\
\hline
-1339746 & 10000000 & 7 \\
 & 9378222 & \\
\hline
+621778 & 10000000 & 16 \\
 & 9948608 & \\
\hline
-51392 & 10000000 & 195 \\
 & 10021440 & \\
\hline
 & -21440 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|l}
-21440 & 10000000 & 466 \\
 & 9991040 & \\
\hline
+8960 & 10000000 & 1116 \\
 & 9999360 & \\
\hline
-640 & 10000000 & 15625 \\
 & 10000000 & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

Hier

Hier ist der einige Quotient 195 um 1 grösser genommen worden, demnach ist auch nur bey dessen Ueberrest keine Verwechselung des Zeichens vorgegangen. Es ist demnach

$$\sqrt{\tfrac{3}{4}} = 1 - \tfrac{1}{7} + \frac{1}{7.16} - \frac{1}{7.16.195} - \frac{1}{7.16.195.466} + \frac{1}{7.16.195.466.1116} - \frac{1}{7.16.195.466.1116.15625}$$

hiebey kann man die drey letzten Glieder, als welche kleiner als 0,0000001 sind, weglassen, weil wir den Sinus von 60 Gr. selbst nicht genauer genommen haben.

§. 43.

Auf diese Art verfährt man demnach, wenn Brüche oder Decimalreihen in solche Reihen

$$A + \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} + \&c.$$

aufzulösen sind, die am geschwindesten convergiren. Will man aber von dieser Bedingung abgehen, so kann jeder Bruch und jede Decimalreihe in unzählige Reihen verwandelt werden, die nach andern Absichten eingerichtet werden können. Man setze z. E. jeder von den Factoren a, b, c, d &c. sollen eine Zahl aus der Reihe

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50 rc.

seyn, so wird diese Absicht auf eine ganz ähnliche Art erhalten werden können. Wir wollen

len in Ansehung des hyperbolischen Logarithmus von 10, welcher $= 2,30258509299404568$ ꝛc. ist, ein Beyspiel geben. Es ist demnach

$$\log. 10 = 2,302585092994 \text{ ꝛc.}$$
$$\underline{-2,000\,000\,000\,000 \text{ ꝛc.}}$$
$$A = +0,302585092994 \text{ ꝛc.}$$
$$a = \tfrac{1}{3} = \underline{0,333333333333 \text{ ꝛc.}}$$
$$B = -30748240339 \text{ ꝛc.}$$
$$b = \tfrac{1}{10}a = \underline{33333333333 \text{ ꝛc.}}$$
$$C = +2585092994 \text{ ꝛc.}$$
$$c = \tfrac{1}{10}b = \underline{3333333333 \text{ ꝛc.}}$$
$$D = -748240339 \text{ ꝛc.}$$
$$d = \tfrac{1}{4}c = \underline{833333333 \text{ ꝛc.}}$$
$$E = +85092994 \text{ ꝛc.}$$
$$e = \tfrac{1}{10}d = \underline{83333333 \text{ ꝛc.}}$$
$$F = +1759660 \text{ ꝛc.}$$
$$f = \tfrac{1}{5}e = \underline{1666666 \text{ ꝛc.}}$$
$$G = +92994 \text{ ꝛc.}$$
$$g = \tfrac{1}{20}f = \underline{83333 \text{ ꝛc.}}$$
$$H = +9660 \text{ ꝛc.}$$
$$h = \tfrac{1}{9}g = \underline{9259 \text{ ꝛc.}}$$
$$I = +401 \text{ ꝛc.}$$
$$i = \tfrac{1}{20}h = \underline{462 \text{ ꝛc.}}$$
$$K = -61 \text{ ꝛc.}$$
ꝛc.

folglich

folglich

$$\log. 10 = 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3.10} + \frac{1}{3.10.10} - \frac{1}{3.10.10.4} + \frac{1}{3.10.10.4.10} + \frac{1}{3.10.10.4.10.5} + \frac{1}{3.10.10.4.10.5.20} + \frac{1}{3.10.10.4.10.5.20.9} + \frac{1}{3.10.10.4.10.5.20.9.20} - \text{ꝛc.}$$

§. 44.

Man kann auf eine ähnliche Art die Auflösung einer Decimalreihe so anstellen, daß die Nenner oder Factores lauter Quadrat, Cubic ꝛc. Trigonal ꝛc. oder Zahlen aus einer fürgegebenen Reihe sind. Man wird aber, ungeachtet es an sich nicht unmöglich ist, nicht leicht auf eine solche Auflösung verfallen, da die Factores nach einem einförmigen Gesetze auf einander folgen, daferne man dieses nicht voraus weiß. Denn so z. E. giebt es allerdings eine Reyhe, deren Factores der Ordnung nach 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. sind; man muß aber voraus wissen, daß es die Zahl ist, deren hyperbolischer Logarithmus $= 1$ ist. Denn so hat man

	2, 718281828459
	2
	0, 718281828459
$a = \frac{1}{2} =$	0. 500000000000
	0, 218281828459
$b = \frac{1}{3}a =$	0, 166666666666
	0, 051615151793
$c = \frac{1}{4}b =$	41666666666
	0, 009948485126
$d = \frac{1}{5}c =$	0, 008333333333
	0, 001615151793
	2c.

§. 45.

Bey diesen so gar vielen Möglichkeiten die Decimalreihen und Brüche in Reihen zu verwandeln, welche entweder unter allen am geschwindesten, oder doch nach beliebigen Gesetzen, sehr geschwinde convergiren, wäre es sehr zu wünschen, daß die dabey gebrauchte Methode auch bey den algebraischen unendlichen Reihen mit eben so gutem Fortgange angebracht werden könnte. Man weiß, daß wenn man mit dem Integriren einer Differentialformel nicht fortkommen kann, das letzte Mittel dieses ist, daß man sie in eine unendliche Reihe auflöset, und sodann jede Glieder derselben besonders integrirt. Es geschieht aber selten, daß solche Reihen in allen Fällen sehr convergent wären, und um destomehr wäre es gut, sie in solche ver-

verwandeln zu können, die unter allen am geschwindesten convergirten. Will man aber mit solchen Reihen Divisionen vornehmen, wie wir es vorhin (§. 40.) mit den Brüchen gethan haben, so kann man sich dabey weder von dem größten Quotienten, noch von dem kleinsten Ueberreste versichern, weil sich die Glieder, die verschiedene Exponenten haben, nicht so unbedingt addiren und subtrahiren lassen. Man kann dabey nur die Glieder, so gleiche Exponenten haben, mit einander vergleichen, und man hat bey dem Dividiren nur diese Wahl, ob die Quotienten aus 1, 2, 3 2c. Gliedern bestehen sollen. Die Probe, so ich hierüber angestellt, hat mich gelehrt, daß, wenn man sich mit eingliedrigen Quotienten begnügen will, man nichts ausrichtet, weil man statt einer mehr convergirenden Reihe gerade diejenige wieder bekömmt, die man hatte verwandeln wollen. Es sey z. E. die Reihe

$$y = \frac{ax + bx^2 + cx^3 + \&c.}{1}$$

in Form eines Bruches vorgestellt dessen Nenner $= 1$ ist. Dividirt man nun 1 durch $ax + bx^2 + cx^3 + \&c.$ so ist der Quotient $= \frac{1}{ax}$ der Ueberrest $= -\left(\frac{bx}{a} + \frac{cx^2}{a} + \frac{dx^3}{a} + \&c.\right)$ Wird durch diesen Ueberrest wiederum 1 dividirt, so ist der Quotient $= -\frac{a}{bx}$, der Ueberrest $= -\left(\frac{cx}{b} + \frac{dx^2}{b} + \&c.\right)$ Fährt man auf gleiche Art fort, so werden der Ordnung nach die Quotienten $\frac{1}{ax}, \frac{a}{bx}, \frac{b}{cx}, \frac{c}{dx}$ &c. erhalten. Und diese geben demnach die Reihe

$$y = ax + ax.\frac{bx}{a} + ax.\frac{bx}{a}.\frac{cx}{b} + ax.\frac{bx}{a}.\frac{cx}{b}.\frac{dx}{c} + \text{etc.}$$

welcher sich offenbar in die fürgegebene

$$y = ax + bx^2 + cx^3 + \&c.$$

verwandelt. Es sind demnach die auf diese Art gefundene eingliedrige Quotienten nicht nur nicht die Grösten, sondern weder grösser noch kleiner als diejenigen, welche die Anfangs fürgegebene Reihe wieder herfür bringen.

§. 46.

Ich habe hierauf eine Probe mit Quotienten von zweyen Gliedern vorgenommen, weil es sich voraus sehen liesse, daß diese allerdings grösser als die eingliedrigen seyn, und sich nicht gegen einander wieder aufheben würden. Ich nahm zu diesem Ende die Leibnitzische Reihe

$$y = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \text{etc.}$$

diese in 1 dividirt, gieng $\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{3}\right)$ mal, und der Ueberrest wäre

$$-\frac{4}{45}x^4 + \frac{8}{105}x^6 - \frac{12}{189}x^8 + \frac{16}{297}x^{10} - \frac{20}{13.33}x^{12} + \text{etc.}$$

dieser

dieser wiederum in 1 dividirt gieng $\div \left(\frac{45}{4\,xxxx} + \frac{135}{14\,xx} \right)$ mal, und der Ueberrest war

$$+ \frac{1}{49} x^4 - \frac{10}{33 \cdot 49} x^6 - \frac{5}{7 \cdot 11 \cdot 13} x^8 + \frac{12}{7 \cdot 11 \cdot 13} x^{10} \text{ \&c.}$$

dieser nochmals in 1 dividirt, gabe $\left(\frac{49}{x^4} + \frac{49 \cdot 10}{33 x^2} \right)$, und der Ueberrest war

$$+ \frac{953 \cdot 5}{11 \cdot 13 \cdot 99} x^4 - \frac{173}{11 \cdot 13 \cdot 33} x^6 \text{ \&c.}$$

Dadurch erhielte ich nun nach gehöriger Reduction der Quotienten

$$y = \frac{3x}{3+xx} + \frac{3x}{3+xx} \cdot \frac{56x^4}{630+540x^2} - \frac{3x}{3+xx} \cdot \frac{56x^4}{630+540\,xx} \cdot \frac{33\,x^4}{1617+490\,xx}$$

oder nach geschehener Verkleinerung der Brüche

$$y = \frac{3x}{3+xx} + \frac{1}{(3+xx)} \cdot \frac{28\,x^5}{(105+90\,xx)} - \frac{44\,x^9}{(3+xx) \cdot (35+30\,xx) \cdot (231+70\,xx)} \text{ ꝛc.}$$

Diese Reihe convergiret demnach schon merklicher, als die fürgegebene. Setzt man z. E. $x = 1$, so erhält man

$$y = \frac{3}{3} + \frac{7}{195} - \frac{11}{19565} - \text{ ꝛc.}$$

Setzt man $x = \sqrt{\frac{1}{3}}$, so findet sichs

$$y = \sqrt{\frac{1}{3}} \left(\frac{9}{10} + \frac{14}{2025} - \frac{22}{1545075} + \text{ ꝛc.} \right)$$

Setzt man $x = 2$, so ist

$$y = \frac{6}{7} + \frac{128}{465} - \frac{22528}{544435} + \text{ ꝛc.}$$

woraus man sieht, daß diese Reihe auch in denen Fällen noch convergirend bleibt, in welchen die Leibnitzische divergent wird.

§. 47.

Eben diese Probe mit Quotienten von drey Gliedern fiel so aus. Die Reihe $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7} + x^7 +$ rc. in 1 dividirt, gieng $(1:x + \frac{1}{3}x - \frac{4}{45}x^3)$mal, und der Ueberrest war

$$+ \frac{44}{27 \cdot 35} + x^6 - \frac{8}{7 \cdot 25} x^8 + \frac{428}{9 \cdot 33 \cdot 35} x^{10} \text{ rc.}$$

dieser Ueberrest wiederum in 1 getheilt, gieng

$$\frac{27 \cdot 35}{44 x^6} + \frac{27 \cdot 27 \cdot 7}{11 . 11 . 2 . x^4} + \frac{241 . 3 \cdot 7 \cdot 9}{121 . 44 . 5 x^2}$$

mal rc. Demnach wenn man diese Brüche unter einen gemeinen Nenner bringt; so war der erste Quotient $= \frac{45 + 15x^2 - 4x^4}{45x}$

der zweyte $= \frac{571725 + 561330x^2 + 45549x^4}{26620x^6}$

rc.

Demnach haben wir

$$y = \frac{45x}{45 + 15x^2 - 4x^4} - \frac{\frac{45x}{45 + 15x^2 - 4x^4}}{\frac{26620x^6}{571725 + 561330x^2 + 45549x^4}}$$

§. 48.

Um nun diese Reihe mit der vorhergehenden (§. 46.) zu vergleichen, so bemerke ich, daß mehr nicht als die sechs ersten Glieder der Leibnitzischen

nitzischen Reihe

$$z - \tfrac{1}{3}z^2 + \tfrac{1}{5}z^5 - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9}z^9 - \tfrac{1}{11}z^{11}$$

gebraucht worden, um bey der Reihe des §. 46. die drey ersten, bey der Reihe des §. 47. die zwey ersten Glieder heraus zu bringen. Denn weiter wolte ich die Rechnung ohnehin nicht verfolgen, weil dieses schon genug war, um zu sehen, wiefern die beyden heraus gebrachten Reihen convergiren würden. Ich setzte demnach $x = \frac{1}{2}$, und die drey ersten Glieder der Reihe des §. 46. gaben

$$\frac{6}{13} + \frac{7}{3315} + \frac{11}{4393480} = 0{,}4636475717\ldots$$

hingegen die zwey ersten Glieder der Reihe des §. 47. gaben

$$\frac{45}{97} - \frac{33275}{123281277} = 0{,}46364761455\ldots$$

Nun aber ist die Länge des Bogens, dessen Tangente $= \frac{1}{2}$ ist,

$$y = 0{,}4636476056\ldots$$

demnach ist der erste Ausdruck um 0,000000 0339... zu klein, der andere aber um 0,000000 0089 zu groß. Man sieht hieraus, daß beyde Reihen beträchtlich convergiren; für $x = 1$, geben die drey ersten Glieder (§. 46)

$$\tfrac{3}{4} + \tfrac{7}{195} - \tfrac{11}{10505} = 0{,}7853352$$

die zwey ersten Glieder (§. 47.)

$$\tfrac{45}{58} - \tfrac{33275}{1833384} = 0{,}7854217$$

Nun ist der Bogen selbst $y = 0{,}7853982$ — demnach ist der erste Ausdruck um 0,0000629 zu klein, der andere aber um 0,0000235 zu groß. Man hätte von der Reihe

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{9}\tfrac{1}{11}+ \text{rc.}$$

eine beträchtliche Anzahl von Gliedern addiren müssen, um den Bogen so weit zu finden, daß der Fehler kleiner als 0,0001 gewesen wäre.

§. 49.

Da übrigens der Unterschied zwischen beyden Methoden nicht sehr groß ist, so werden wir bey den zweygliedrigen Quotienten bleiben, und dafür eine allgemeine Formel suchen, woraus sich sodann die Bedingungen ergeben, unter welchen die dadurch herausgebrachte Reihe am meisten convergirt. Es sey demnach die Reihe

$$y = ax^m + bx^{m+n} + cx^{m+2n} + dx^{m+3n} + \text{rc.}$$

Wird diese in 1 dividirt, so ist der Quotient

$$= \frac{1}{ax^m} - \frac{bx^n}{aax^m} = \frac{a-bx^n}{aax^m}$$

und der Ueberrest

$$= \frac{bb-ca}{aa}x^{2n} + \frac{bc-da}{aa}x^{3n} + \frac{bd-ea}{aa}x^{4n} + \frac{be-fa}{aa}x^{5n} + \&c.$$

für diesen setze man Kürze halber

$$Ax^{2n} + Bx^{3n} + Cx^{4n} + Dx^{5n} + \&c.$$

Dividirt man nun wiederum 1 durch diesen Ueberrest, so ist der zweyte Quotient

=

$$= \frac{1}{Ax^{2n}} - \frac{Bx^n}{AAx^{2n}} = \frac{A - Bx^n}{AAx^{2n}}$$

und der zweyte Ueberrest

$$= \frac{BB - CA}{AA} x^{2n} + \frac{BC - DA}{AA} x^{3n} + \frac{BD - EA}{AA} x^{4n} + \&c.$$

Setzt man diesen ebenfalls Kürze halber

$$= \alpha x^{2n} + \beta x^{3n} + \gamma x^{4n} + \delta x^{5n} + \&c.$$

und nimmt die dritte Division vor, so wird wiederum der Quotient

$$= \frac{1}{\alpha x^{2n}} - \frac{\beta x^n}{AAx^{2n}} = \frac{\alpha - \beta x^n}{\alpha\alpha x^{2n}}$$

und der Ueberrest

$$= \frac{\beta\beta - \gamma\alpha}{\alpha\alpha} x^{2n} + \frac{\beta\gamma - \delta\alpha}{\alpha\alpha} x^{3n} + \frac{\beta\delta - \varepsilon\alpha}{\alpha\alpha} x^{4n} + \text{ꝛc.}$$

seyn ꝛc. Da auf diese Art jede folgende Quotienten und Ueberreste einerley Form haben, so sieht man, wie sie, ohne in jeden besondern Fällen die Division vorzunehmen, vermittelst dieser Formeln aus einander hergeleitet und berechnet werden können. Wir haben demnach statt der fürgegebenen Reihe, folgende

$$y = \frac{aax^m}{a - bx^n} - \frac{aax^m}{a - bx^n} \cdot \frac{AAx^{2n}}{A - Bx^n} + \frac{aax^m}{a - bx^n} \cdot \frac{AAx^{2n}}{A - Bx^n} \cdot \frac{\alpha\alpha x^{2n}}{\alpha - \beta x^n} - \&c.$$

§. 50.

Diese Reihe wird nun offenbar abgebrochen, und in einem endlichen Ausdruck verwandelt, wenn einer von den Factoren A, α &c. $= 0$ wird. Man setze z. E. $A = 0$. Da nun

$$A = \frac{bb - ca}{aa}$$

ist, so ist $\quad bb - ca = 0$,

folglich $\quad a : b = b : c$.

Wenn demnach in der fürgegebenen Reihe

$$y = ax^m + bx^{m+n} + cx^{m+2n} + \&c.$$

die Coefficienten a, b, c, d &c. entweder gleich sind, oder überhaupt in einer geometrischen Progression fortgehen, so wird $A = 0$ &c. und man hat schlechthin

$$y = \frac{aax^m}{a - bx^n}$$

In der That giebt auch dieser Ausdruck, wenn man ihn in eine Reihe auflöst, eine geometrische Progression. Wir können hieraus die Folge ziehen, daß die herausgebrachte Reihe destomehr convergirt, jemehr die Coefficienten a, b, c, d &c. entweder der Gleichheit, oder einer jeden geometrischen Progression nahe kommen.

§. 51.

Setzt man ferner $\alpha = 0$, so erhellet auf eben diese Art, daß

$$A : B = B : C$$

sey; folglich wird die Formel bey dem zweyten

Gliede abgebrochen, wenn die Coefficienten des ersten Ueberrestes entweder einander gleich sind, oder in einer geometrischen Progression fortgehen. Ein gleiches hat auch für jeden folgenden Ueberrest statt.

§. 52.

Nun sind die meisten von denen Reihen, die langsamer convergiren, von der Art, daß die Coefficienten a, b, c, d &c. immer weniger von einander unterschieden sind. Wenn man daher die ersten Glieder solcher Reihen für sich addirt, und die folgenden nach der erst angegebenen Methode behandelt, so wird man ungleich geschwinder dem wahren Werthe der Reihe näher kommen, als wenn man bey den ersten Gliedern angefangen hätte. Wir wollen dieses ebenfalls durch das Beyspiel der Leibnitzischen Reihe

$$y = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{9}x^9 - \text{etc.}$$

erläutern. Nimmt man von dieser die fünf ersten Glieder besonders, so sind die folgenden

$$-\left(\tfrac{1}{11}x^{11} - \tfrac{1}{13}x^{13} + \tfrac{1}{15}x^{15} - \tfrac{1}{17}x^{17} + \tfrac{1}{19}x^{19} - \tfrac{1}{21}x^{21} + \text{etc.}\right)$$

demnach

$$a = +\frac{1}{11} \qquad b = -\frac{1}{13} \qquad m = 11$$

$$c = +\frac{1}{15} \qquad d = -\frac{1}{17} \qquad n = 2$$

$$e = +\frac{1}{19} \qquad f = -\frac{1}{21}$$

&c.

Diese

Diese Werthe in den Formeln des §. 49. gesetzt, geben den ersten Quotienten

$$= + \frac{11(13+11x^2)}{13x^{11}}$$

und den ersten Ueberrest

$$-\frac{11.4}{13.13.15}x^4 + \frac{11.8}{13.15.17}x^6 - \frac{11.12}{13.17.19}x^8 + \frac{11.16}{13.19.21}x^{10} - \text{rc.}$$

demnach

$$A = -\frac{11.4}{13.13.15} \quad B = +\frac{11.8}{13.15.17}$$

$$C = -\frac{11.12}{13.17.19} \quad D = +\frac{11.16}{13.19.21}$$

rc.

Hieraus erhält man den zweyten Quotienten

$$= -\frac{15.13.13(17+2.13x^2)}{4.11.17.x^4}$$

und den zweyten Ueberrest

$$+\frac{13.223}{17.17.19}x^4 - \frac{13.15.482}{17.17.19.21}x^6 + \text{rc.}$$

demnach

$$\alpha = \frac{13.223}{17.17.19} \quad \beta = -\frac{13.15.482}{17.17.19.21}$$

rc.

welches den dritten Quotienten

$$= + \frac{17.17.19.(1561+2410x^2)}{7.13.223.223.}$$

giebt rc.

giebt ꝛc. Demnach haben wir

$$y = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - \frac{13x^{11}}{143+121xx}$$

$$- \frac{13.x^{11}}{(143+121x^2)} \cdot \frac{4.11.17.x^4}{15.13.13(17+26xx)}$$

$$+ \frac{13.x^{11}}{143+121xx} \cdot \frac{4.11.17.x^4}{15.13.13(17+26x^2)} \cdot$$

$$\frac{7.13.223.223.x^4}{17.17.19.(1561+2410xx)} - \text{ꝛc.}$$

Diese Glieder geben, wenn man $x = 1$ setzt, für den halben Quadranten 0, 785399582 ꝛc. welches von dem wahren Werthe nur um 0, 0000014 verschieden ist.

§. 53.

Bey der Reihe

$$\sqrt{(1+x)} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$$
$$+ \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 + \frac{33}{2048}x^7 - \text{ꝛc.}$$

kann man bey dem zweyten Gliede anfangen, weil von diesem an die Zeichen ordentlich abwechseln. Und so wird man

$$\sqrt{(1+x)} = 1 + \frac{2x}{4+x} + \mathfrak{A}.\frac{xx}{16+12x} - \mathfrak{B}.\frac{xxx}{64+96x}$$
$$+ \mathfrak{C}.\frac{81.xx}{16(9+13x)} - \mathfrak{D}.\frac{625.625.xx}{16.81(625+807x)}$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

erhalten, wobey Kürze halber die Factores $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ꝛc. die nächst vorhergehenden Glieder bedeu-

bedeuten, und B deswegen mit xxx multiplicirt ist, weil es sich hier zuträgt, daß bey der zweyten Division das erste Glied des Ueberrestes $= 0$ wird. Diese Reihe ist zur Ausziehung der Quadratwurzel sehr bequem. Es solle z. E. aus 2916 die Quadratwurzel ausgezogen werden, welche $= 54$ ist. Wir wollen dafür 53 nehmen, und so läßt das Quadrat von $53 = 2809$ von 2916 abgezogen, 107 übrig. Demnach haben wir

$$53\sqrt{\left(1+\tfrac{107}{2890}\right)} = 53\sqrt{(1+x)}$$

und damit die Reihe

$$\sqrt{(2916)} = 53\left(1+\frac{214}{11343}+\frac{214}{11343}\cdot\frac{11449}{2809.\ 36228} - - \text{ꝛc.}\right)$$

Da nun hier schon das dritte Glied kleiner als $\frac{1}{1000000}$, das vierte aber noch

$$1 : \left(\frac{107}{2890}\right)^3 \cdot \frac{1}{64+\frac{96.\ 107}{2890}}$$

mal, das ist über 1500000 mal kleiner ist, so sieht man leicht, daß man es mehrentheils bey den zwey ersten Gliedern der Reihe

$$\sqrt{(1+x)} = 1 + \frac{2x}{4+x}$$

kann bewenden lassen.

§. 54.

Für die Cubicwurzel findet man auf eine ähnliche Art

$\sqrt[3]{(1}$

$$\sqrt[3]{(1+x)} = 1 + \frac{x}{3+x} + \mathfrak{A}.\frac{4xx}{9(6+5x)} - \mathfrak{B}.\frac{xx}{4(9+4x)} + \text{rc.}$$

und für jede Wurzel überhaupt

$$(1+x)^n = 1 + \frac{2nx}{2-(n-1)x} - \frac{(n-1)(n+1)x^2.\mathfrak{A}}{12-6(n-2)x} + \frac{(2n-1)^2.(n-2)x^2.\mathfrak{B}}{60(2n-1)-(n-3).(5n-2).10.x} - \text{rc.}$$

Setzt man in dieser allgemeinen Formel $n = \frac{1}{2}$, welches für die Quadratwurzel ist, so wird das dritte Glied $= 0$, und eben so auch die folgende Glieder. Wir haben aber schon in den vorhergehenden §. angezeigt, woher dieses komme, und wie das dritte und die folgende Glieder für die Quadratwurzel müssen gefunden werden.

§. 55.

Bey allen diesen Reihen werden die Binomialfactoren, durch deren Multiplication die Glieder derselben entstehen, einander mehrentheils ungleich, und zuweilen, wie in dem Beyspiele des §. 53. unähnlich. Ich habe daher eine andere Methode gesucht, bey welcher diese Ungleichheit wegbliebe, und die Reihe eben dadurch einförmiger würde. Diese werde ich so gleich hersetzen, und hier nur noch anmerken, daß, wenn bey der erst angeführten die fürgegebene

gebene Reihe endlich ist, auch diejenige endlich werde, in welche jene nach dieser Methode verwandelt wird.

§. 56.

Es sey nun die Reihe

$$y = x^m - a x^{m+n} + b x^{m+2n} - c x^{m+3n} + \text{etc.}$$

bey welcher wir setzen, daß die Coefficienten a, b, c &c. immer langsamer abnehmen. Man setze

$$1 + x^n = z$$

so ist

$$\begin{aligned} yz = x^m &- a x^{m+n} + b x^{m+2n} - c x^{m+3n} + \text{etc.} \\ &+ 1 \ldots \quad - a \ldots \quad + b \ldots \end{aligned}$$

demnach

$$yz - x^m = (1-a) x^{m+n} - (a-b) x^{m+2n} + (b-c) x^{m+3n} - \text{etc.}$$

Da diese Reihe der fürgegebenen ähnlich ist, so leidet sie eben die Verwandlung, und damit ist

$$yz^2 - x^m z - (1-a) x^{m+n} = (1-2a+b) x^{m+2n} - (a-2b+c) x^{m+3n} + \text{etc.}$$

Auf eben die Art wiederum

$$yz^3 - x^m z^2 - (1-a) x^{m+n} z - (1-2a+b) x^{m+2n} = (1-3a+3b-c) x^{m+3n} - \text{etc.}$$

Fährt man auf diese Art immer fort, so erhält man nach λ Wiederholungen

yz^λ

$$y z^{\lambda} - x^{m} z^{\lambda-1} - (1-a) x^{m+n} z^{\lambda-2} - (1-2a+b) x^{m+2n} z^{\lambda-3} + \&c.$$

$$= (1 + \lambda a - \lambda . \frac{\lambda-1}{2} . b + \lambda . \frac{\lambda-1}{2} . \frac{\lambda-2}{3} c - \&c.) x^{m+\lambda n} - \&c.$$

Und demnach, wenn man alles durch z^{λ} dividirt

$$y - \frac{x^m}{z} - \frac{(1-a) x^{m+n}}{zz} - \frac{(1-2a+b) x^{m+2n}}{z^3} + \&c. \ldots$$

$$= (1 + \lambda a - \lambda . \frac{\lambda-1}{z} . b + \&c.) \frac{x^{m+\lambda n}}{z^{\lambda}} - \&c.$$

Ist nun x positiv, so ist

$$z = (1 + x^n) > x^n$$

demnach

$$z^{\lambda} > x^{n\lambda}$$

Daher wird der Bruch

$$\frac{x^m . x^{n\lambda}}{z^{\lambda}}$$

in geometrischer Progression kleiner, je grösser λ wird, und folglich $= 0$, wenn man $\lambda = \infty$ setzt. Wir setzen dieses und haben demnach

$$0 = y - x^m : z - (1-a) x^{m+n} : z^2 - (1-2a+b) x^{m+2n} : z^3 - (1-3a+3b-c) x^{m+3n} : z^4 - \&c.$$

eine unendliche Reihe, welche sich, wenn man für z dessen Werth $1+x^n$ setzt, in

$$y=\frac{x^m}{1+x^n}\left(1+(1-a)\frac{x^n}{1+x^n}+(1-2a+b).\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^2+(1-3a+3b-c).\left(\frac{x^n}{1+x^n}\right)^3+\text{rc.}\right)$$

verwandelt. Und dieses ist die Reihe, welche wir suchen wolten. Man sieht zugleich, daß sie sehr einförmig ist, und daß die Coefficienten

$$\begin{array}{l} 1-a \\ 1-2a+b \\ 1-3a+3b-c \\ 1-4a+6b-4c+d \\ \text{rc.} \end{array}$$

die ersten, zweyten, dritten und jede folgenden Differenzen der Coefficienten a, b, c, d &c. der fürgegebenen Reihe sind.

§. 57.

Um ein sehr allgemeines Beyspiel hievon zu geben, so sey die Reihe

$$y=\frac{c}{a}x^m-\frac{c+d}{a+b}x^{m+n}+\frac{c+2d}{a+2b}x^{m+2n}-\frac{c+3d}{a+3b}x^{n+3m}-\&c.$$

wobey sowohl die Zähler als Nenner in arithmetischer Progreßion fortgehen. Vergleicht man diese Reihe mit der Reihe (§. 56.)

$$y=ax^m-bx^{m+n}+cx^{m+2n}+\&c.$$

und

und nimmt die ersten, zweyten, dritten und jede folgenden Differenzen, so erhält man die Reihe

$$y = \frac{x^m}{1+x^n}\Big(\frac{c}{a} + \frac{cb-ad}{a(a+b)} \cdot \frac{x^n}{1+x^n} + \frac{(cb-ad).2b}{a.(a+b).(a+2b)} \cdot \Big(\frac{x^n}{1+x^n}\Big)^2 + \frac{(cb-ad).2b.3b}{a.(a+b).(a+2b).(a+3b)} \cdot \Big(\frac{x^n}{1+x^n}\Big)^3 + \text{etc.}\Big)$$

welche nach einem sehr einfachen Gesetze fortgeht. Hier sind nun einige besondere Fälle.

§. 58.

Es sey

$$y = \frac{1}{a}x^m - \frac{1}{2a}x^{m+n} + \frac{1}{3a}x^{m+2n} - \&c.$$

so ist $c=1$, $d=0$, $a=b$, demnach

$$y = \frac{x^m}{1+x^n}\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} \cdot \frac{x^n}{1+x^n} + \frac{1}{3a} \cdot \Big(\frac{x^n}{1+x^n}\Big)^2 + \frac{1}{4a} \cdot \Big(\frac{x^n}{1+x^n}\Big)^3 + \&c.\Big)$$

Setzt man hier $a=m=n=1$, so ist

$$y = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \text{etc.} = \log.(1+x)$$

und

$$y = \frac{x}{1+x} + \tfrac{1}{2}\Big(\frac{x}{1+x}\Big)^2 + \tfrac{1}{3}\Big(\frac{x}{1+x}\Big)^3 + \tfrac{1}{4}\Big(\frac{x}{1+x}\Big)^4 + \&c. = \log.(1+x).$$

§. 59.

Es sey

$$y = \frac{1}{a} x^m - \frac{1}{a+b} x^{m+n} + \frac{1}{a+2b} x^{m+2n} - \text{ꝛc.}$$

so ist $c = 1$, $d = 0$, demnach

$$y = \frac{x^m}{1+x^n} \left(\frac{1}{a} + \frac{b}{a(a+b)} \cdot \frac{x^n}{1+x^n} + \frac{b.\,2b}{a(a+b).(a+2b)} \cdot \left(\frac{x^n}{1+x^n} \right)^2 + \text{ꝛc.} \right)$$

Setzt man hier $n = 2$, $b = 2$, so ist

$$y = \frac{1}{a} x^m - \frac{1}{a+2} x^{m+2} + \frac{1}{a+4} x^{m+4} - \text{ꝛc.}$$

und

$$y = \frac{x^m}{1+xx} \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a(a+2)} \left(\frac{xx}{1+xx} \right) + \frac{2.\,4}{a(a+2).(a+4)} \left(\frac{xx}{1+xx} \right)^2 + \text{ꝛc.} \right)$$

Von diesen beyden Reihen ist erstere ein Stück der Leibnitzischen, sobald man für a und m eine gleiche ungerade Zahl setzt. Man mache z. E. $a = m = 21$, und $x = 1$, so erhält man

$$y = \tfrac{1}{21} x^{21} - \tfrac{1}{23} x^{23} + \tfrac{1}{25} x^{25} - \tfrac{1}{27} x^{27} + \text{ꝛc.}$$

und

$$y = \tfrac{1}{42} \left(1 + \tfrac{1}{23} + \frac{1.\,2}{23.\,25} + \frac{1.\,2.\,3}{23.\,25.\,27} + \frac{1.\,2.\,3.\,4}{23.\,25.\,27.\,29} + \text{ꝛc.} \right)$$

IV.

IV. Algebraische Formeln für die Sinus von drey zu drey Graden.

§. 1.

In den Anfangsgründen der Trigonometrie wird die Verfertigung der trigonometrischen Tafeln gewöhnlich so angegeben, wie sie sich aus der Elementargeometrie begreiflich machen läßt, und wie diese Tafeln in der That anfangs verfertigt worden. Man kann nemlich vermittelst des Circuls und Lineales den Circul in 2, 3, 4, 5 gleiche Theile theilen, und jeden Bogen, so vielmal man will, halbiren. Daraus läßt sich sodann herleiten, wie sich der Circul von 3 zu 3 Graden, oder von 45 zu 45 Min. oder von 675 zu 675 Secunden eintheilen, und die Sinus, Tangenten und Secanten von allen diesen Bögen berechnen lassen. Diese Berechnungsart ist ungemein weitläuftig. Man hat daher seit der Erfindung der Infinitesimalrechnung auf Mittel gedacht, sie abzukürzen, und jede Sinus, Tangenten und Secanten für sich zu finden, ohne daß sie erst aus einander hergeleitet werden müßten. Dazu müßten nun allerdings unendliche Reihen gebraucht

braucht werden, dafern man nicht bey den imaginairen Formeln, die Herr Joh. Bernoulli zuerst gefunden, stehen bleiben wollte, als welche, wenn man sie nicht in unendliche Reihen verwandelt, fürnemlich nur zu Erfindung von Lehrsätzen dienen.

§. 2.

Will man aber für die Sinus und Tangenten algebraische Formeln haben, die weder imaginair sind, noch aus unendlich vielen Gliedern bestehen, so bleibt man eben so zurücke, wie die ersten Berechner der trigonometrischen Tafeln, weil man sie ebenfalls nur von 3 zu 3 Graden berechnen kann, und die dazwischen fallenden, durch fortgesetztes Halbiren, finden muß. Da mir solche Formeln noch nicht vorgekommen, so unterzog ich mich der Arbeit sie zu finden, um ausführlich zu sehen, auf welche Art die Sinus von 3 zu 3 Graden mehr oder minder irrational sind. Folgende Tabelle stellt sie mit einem Anblicke vor Augen.

Formeln für die Sinus von drey zu drey Graden.

$$\sin. 3^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{15}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$
$$- \tfrac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{5}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\sin. 6^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(30-6\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{5} - \tfrac{1}{8}$$

$$\sin. 9^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{5}{2}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$

ſin. $12^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{15} + \frac{1}{8}\sqrt{3}$

ſin. $15^\circ = \sqrt{\frac{3}{8}} - \sqrt{\frac{1}{8}}$

ſin. $18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}$

ſin. $21^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(15 - 3\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$
$- \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}$

ſin. $24^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{15} + \frac{1}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{8}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$

ſin. $27^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(5 + \sqrt{5})} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}$

ſin. $30^\circ = \frac{1}{2}$

ſin. $33^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(15 + 3\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$
$- \frac{1}{8}\sqrt{(5 + \sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}$

ſin. $36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$

ſin. $39^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}$
$- \frac{1}{8}\sqrt{(15 - 3\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$

ſin. $42^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(30 + 6\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{5} + \frac{1}{8}$

ſin. $45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$

ſin. $48^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{15} - \frac{1}{8}\sqrt{3}$

ſin. $51^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}$
$+ \frac{1}{8}\sqrt{(15 - 3\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$

ſin. $54^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}$

ſin. $57^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(15 + 3\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$
$+ \frac{1}{8}\sqrt{(5 + \sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}$

ſin. $60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

ſin. $63^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(5 + \sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sin. 66° = \frac{1}{8}\sqrt{(30 - 6\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{5} + \frac{1}{8}$

$\sin. 69° = \frac{1}{8}\sqrt{(15 - 3\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$
$\quad + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}$

$\sin. 72° = \frac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$

$\sin. 75° = \sqrt{\frac{3}{8}} + \sqrt{\frac{1}{8}}$

$\sin. 78° = \frac{1}{8}\sqrt{(30 + 6\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{5} - \frac{1}{8}$

$\sin. 81° = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}$

$\sin. 84° = \frac{1}{8}\sqrt{15} + \frac{1}{8}\sqrt{3} + \frac{1}{8}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$

$\sin. 87° = \frac{1}{8}\sqrt{(5 + \sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}}$
$\quad + \frac{1}{8}\sqrt{(15 + 3\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sin. 90° = 1.$

§. 3.

Bey der Berechnung dieser Formeln legte ich die Sinus von 45, 30, 18 Graden zum Grunde, weil von diesen, jeder für sich, aus der Elementargeometrie gefunden werden muß. Die übrigen Formeln fanden sich sodann aus den bekannten zween Lehrsätzen

$\sin. (x + y) = \sin. x. \cos. y + \cos. x. \sin. y$

$\sin. (x - y) = \sin. x. \cos. y - \cos. x. \sin. y.$

Sie müßten aber nach einer gewissen Ordnung gefunden werden, damit man aller Reductionen überhoben seyn könne. Die Ordnung, so ich dabey beobachtet, ist folgende:

I°. $\sin. 60° = \cos. 30 = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

II°. $\sin. 75° = \sin. (45 + 30)$
$\quad \sin. 15° = \sin. (45 - 30)$

III°. $\sin. 72° = \cos. 18°$

IV°.

IV°. $\sin. 54^\circ = \sin. (72 - 18)$
$\sin. 36^\circ = \cos. 54^\circ = \sin. (2.18)$
V°. $\sin. 12^\circ = \sin. (30 - 18)$
$\sin. 48^\circ = \sin. (30 + 18)$
$\sin. 24^\circ = \sin. (54 - 30)$
$\sin. 84^\circ = \sin. (54 + 30)$
$\sin. 6^\circ = \sin. (36 - 30)$
$\sin. 66^\circ = \sin. (36 + 30)$
$\sin. 42^\circ = \sin. (72 - 30)$
$\sin. 78^\circ = \sin. 102^\circ = \sin. (72 + 30)$
VI°. $\sin. 81^\circ = \sin. 99^\circ = \sin. (54 + 45)$
$\sin. 9^\circ = \sin. (54 - 45)$
$\sin. 63^\circ = \sin. 117^\circ = \sin. (72 + 45)$
$= \sin. (45 + 18)$
$\sin. 27^\circ = \sin. (72 - 45) = \sin. (45 - 18)$
VII°. $\sin. 3^\circ = \sin. (48 - 45)$
$\sin. 87^\circ = \sin. 93^\circ = \sin. (48 + 45)$
$\sin. 21^\circ = \sin. (45 - 24)$
$\sin. 69^\circ = \sin. (45 + 24)$
$\sin. 33^\circ = \sin. (45 - 12)$
$\sin. 57^\circ = \sin. (45 + 12)$
$\sin. 39^\circ = \sin. (45 - 6)$
$\sin. 51^\circ = \sin. (45 + 6)$.

§. 4.

In eben dieser Ordnung werden auch die Formeln selbst zusammengesetzter. Vergleicht man sie miteinander, in Absicht auf die Irrationalität, so findet sich, daß sie aus 15 verschiedenen Arten von Wurzelgrössen zusammengesetzt sind, und daß sie sich, wenn man einmal diese gefunden, durch bloßes Addiren und Subtrahiren berechnen lassen. Die Wurzelgrößsen sind

	$\sqrt{(1:2)}$	$\sqrt{(5+\sqrt{5})}$	$\sqrt{(5-\sqrt{5})}$
$\sqrt{3}$	$\sqrt{(3:2)}$	$\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$	$\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$
$\sqrt{5}$	$\sqrt{(5:2)}$	$\sqrt{(15+3\sqrt{5})}$	$\sqrt{(15-3\sqrt{5})}$
$\sqrt{15}$	$\sqrt{(15:2)}$	$\sqrt{(30+6\sqrt{5})}$	$\sqrt{(30-6\sqrt{5})}$

§. 5.

Weiter geht nun die Elementargeometrie nicht, als daß sie noch Mittel giebt, durch fortgesetztes Halbiren, die Sinus für kleinere Bögen zu finden. Die einfachste Art, dieses durch Rechnung zu verrichten, geben folgende beyden Formeln an

$$\text{sin.}\tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\text{sin.}y)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\text{sin.}y)}$$
$$\text{cos.}\tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\text{sin.}y)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\text{sin.}y)}$$

welche durch die Auflösung der Gleichung

$$\text{sin.}y = 2\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}y \,.\, \text{cos.}\tfrac{1}{2}y$$

leicht gefunden werden. * Werden diese beyde Formeln addirt und subtrahirt, so erhält man

$$\text{cos.}\tfrac{1}{2}y + \text{sin.}\tfrac{1}{2}y = \sqrt{(1+\text{sin.}y)}$$
$$\text{cos.}\tfrac{1}{2}y + \text{sin.}\tfrac{1}{2}y = \sqrt{(1-\text{sin.}y)}$$

Multiplicirt man diese mit

$$\text{sin.}45^\circ = \text{cos.}45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

so ist

$$\text{sin.}45^\circ.\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}y + \text{cos.}45^\circ.\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}y = \sqrt{\left(\frac{1+\text{sin.}y}{2}\right)}$$

$$\text{sin.}45^\circ.\,\text{cos.}\tfrac{1}{2}y - \text{cos.}45^\circ.\,\text{sin.}\tfrac{1}{2}y = \sqrt{\left(\frac{1-\text{sin.}y}{2}\right)}$$

Dem-

demnach $\sin.(45^\circ + \frac{1}{2}y) = \sqrt{\left(\frac{1 + \sin.y}{2}\right)}$

$\sin.(45^\circ - \frac{1}{2}y) = \sqrt{\left(\frac{1 - \sin.y}{2}\right)}$

§. 6.

Aus den vorhin angeführten Formeln lassen sich noch einige speciale trigonometrische Lehrsätze herleiten, wenn man sie unter einander vergleicht. So z. E. ist

$\sin.75^\circ - \sin.15^\circ = 2\sqrt{\frac{1}{8}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \sin.45^\circ$

$\sin.75^\circ.\sin.15^\circ = \frac{1}{4}$

$\tang.15^\circ = 2 - \sqrt{3} = 2 - \tang.60^\circ$

$\tang.75^\circ = 2 + \sqrt{3} = 2 + \tang.60^\circ$

$\tang.15^\circ + \tang.75^\circ = 4.$

Eben so auch

$\sin.54^\circ - \sin.18^\circ = \frac{1}{2} = \sin.30^\circ$

$\sin.54^\circ.\sin.18^\circ = \frac{1}{4}$

$\tang.18^\circ.\tang.54^\circ = \sqrt{\frac{1}{5}}$

$\sin.36^\circ.\sin.72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5}$

$\tang.18^\circ + \sec.18^\circ = \tang.54^\circ$

$\sin.18^\circ + \sin.54^\circ = \frac{3}{4} = \sin.60^\circ$

$\cos.18^\circ + \cos.54^\circ = \frac{5}{4}$

ingleichen

$\sec.30^\circ = \frac{1}{2}(\tang.30^\circ + \tang.60^\circ)$

$= \frac{4}{3}\sin.60^\circ.$

V.

V.
Vorläufige Kenntnisse für die, so die Quadratur und Rectification des Circuls suchen.

§. 1.

Ich kann mit einigem Grunde zweifeln, ob gegenwärtige Abhandlung von denjenigen werde gelesen, oder auch verstanden werden, die den meisten Antheil daran nehmen sollten, ich meyne von denen, die Zeit und Mühe aufwenden, die Quadratur des Circuls zu suchen. Es wird sicher genug immer solche geben, und solte man die, so in den folgenden Zeiten sich damit beschäftigen, nach denen beurtheilen, die sich bisher damit beschäftigt haben, so werden es gröstentheils solche seyn, die von der Geometrie wenig verstehen, und ihre Kräfte zu schätzen nicht im Stande sind. Was aber den meisten an Erkenntniß und Verstand abgeht, und wo sie mit richtigen und zusammenhängenden Schlüssen nicht ausreichen, das ersetzt die Ruhm- und Geldbegierde durch Sophismata, die öfters auch weder sehr fein, noch sehr versteckt sind. Es hat auch Fälle gegeben, wo solche Leute feste geglaubt

glaubt haben, man versage ihren vermeynten Beweisen den Beyfall bloß aus Neid und Mißgunst. Es geht auch unter ihnen eine Sage herum, als wenn in England nnd Holland eben so grosse Preiße und Belohnungen wären auf die Quadratur des Circuls gesetzt worden, als auf die Erfindung der geographischen Länge zur See. Ich will zwar eben nicht gut dafür stehen, ob man nicht zu Anfange des vorigen Jahrhunderts, oder noch vorher, geglaubt hat, daß die Erfindung der Länge zur See mit der Quadratur des Circuls in einer solchen Verbindung stehe, daß, wer letztere gefunden, zugleich auch erstere gefunden habe. So viel ist gewiß, daß man damals Verhältnisse zwischen Wahrheiten suchte und glaubte, die noch vielweniger zusammen paßten. Solte aber in der That wegen der Länge zur See ein Preiß auf die Quadratur des Circuls gesetzt worden seyn, so glaube ich, daß das Parlement in England ein sehr gutes Werk thun würde, wenn es, zumal da nun die Preiße für die Länge zur See schon ausgetheilt worden, in allen Zeitungen kund machen liesse, daß man sich bey der Quadratur des Circuls auf keinen Preiß Rechnung zu machen habe. In der That hat man sich auch keine Rechnung darauf zu machen, weil man heutiges Tages viel zu wohl weiß, wie sehr die Länge zur See von der Quadratur des Circuls unabhängig ist.

§. 2.

Die Erfindung von Sachen, die lange vergebens gesucht worden, ist entweder an sich unmöglich, oder sie ist einem künftigen glücklichen Zufall vorbehalten. Ein Beyspiel mag dieses erläutern. Es ist nicht zu zweiffeln, daß die alten Phoenicischen, und nach ihnen die Griechischen und Römischen Schiffer ein Mittel gewünscht haben, welches ihnen bey trübem Wetter eben so den Weg des Schiffes zeigte, als ihn bey hellem Wetter die Gestirne zeigten. Wie hätte ihnen in Sinn kommen sollen, daß sie dieses Mittel in dem Magnetsteine zu suchen hätten? Es ist unstreitig, daß diese Entdeckung auf einen schlechthin unvorgesehenen Zusammenlauf mehrerer Umstände ankäme, den man, ohne ihn vorher zu wissen, nicht veranstalten konnte, und der folglich sich von selbst darbieten muste. Auf eine ähnliche Art ist es zu vermuthen, daß, wenn je die Quadratur des Circuls möglich seyn solte, sie vielleicht einem Meßkünstler aufstößt, der an nichts weniger als an die Erfindung derselben gedenkt. Es ist aber auch möglich, daß man auf eine eben so zufällige Weise auf irrige Quadraturen verfalle. Hievon geben die Zahlen 1225 und 961 ein artiges Beyspiel. Sie haben eine gedoppelte Eigenschaft. Denn einmal sind es die Quadratzahlen von 35 und 31. Sodann verhalten sie sich beynahe wie das Quadrat

des

des Diameters zum Inhalt des Circuls. Dadurch erhält man auch, daß der Diameter des Circuls zu der Seite eines mit dem Circul gleichräumigen Quadrates beynahe wie 35 zu 31 ist. Sodann, wenn man 961 vierfach nimt, so erhält man 3844 ebenfalls eine Quadratzahl, und der Diameter wird sich zum Umkreise beynahe wie 1225 zu 3844 verhalten. Nur muß man dieses beynahe nicht sehr strenge nehmen. Denn theilt man 3844 durch 1225, so kömmt 3,138... Und da sieht man leicht, daß diese Verhältniß schon in der 3ten Decimalstelle von 3,1415926... abweicht, und daher lange nicht so genau ist, als die Archimedischen 22:7, welche die Reihe 3,1428571...giebt, die nur um 0,0012645... zu groß, und damit fast dreymal genauer ist.

§. 3.

Indessen behalten die Zahlen 1225 und 961, oder 1225 und 3844 dennoch dadurch einen gewissen Werth, daß es Quadratzahlen sind. In diesem Jahrhundert sind, so viel ich weiß, ihrer drey darauf verfallen. Dieser Umstand scheint mir der merkwürdigste. Denn da es noch mehrere solcher Quadratzahlen giebt, so solte man ehender denken, daß jeder von diesen drey Erfindern auf andere Zahlen würde verfallen seyn. Der erste war Herr von Leistner, Kayserl. Rittmeister. Er fand die Zahlen 1225 und 3844, und diese wurden von einer Kayserl. Hofcommission als unrichtig erkannt, wowider aber in einer Anno 1740 herausgekommenen Schrift, Nodus gordius &c. protestirt wurde. Der andere war Herr Merkel, Prediger zu Rakensburg in Schwaben. Seine Schrift kam erst Anno 1751 heraus. Er sagt aber, daß er lange vor dem Herrn v. Leistner seine Zahlen 1225 und 961 zufälliger Weise gefunden habe, er sey aber erst durch den Nodum gordium bewogen worden, sie auf alle Proben zu setzen; was ihn aber fürnemlich aufgebracht habe, sie durch den Druck bekannt zu machen, sey ein Articul in der Utrechter Zeitung gewesen, wo eine Quadratur angekündet, und der vermeyntlich darauf gesetzte Preiß angefordert wurde; diese Nachricht habe ihm um so geschwinder die Feder in die Hand gegeben, weil er den vorhergehenden Winter seine Zahlen einen Franzosen, der wirklich nachher in die Niederlande verreisete, vorgerechnet, und auf das Papier nicht weiter Achtung gegeben, und so habe er starke Gründe zu vermuthen, dieser Geometra möchte mit seinem Kalbe gepflügt haben ꝛc. Was damit nun weiter vorgegangen, ist mir nicht bekannt. Es wurde aber die Merkelsche Schrift Anno 1765 von Herrn Prof. Bischoff zu Alten-Stettin mit Anmerkungen und noch mehrerern Prüfungen wiederum aufgelegt, und die Zahlen 1225 und 961 als richtig erklärt. Bald darauf kamen sie im Anfange des 1766sten Jahres in den Zeitungen wiederum zum Vorschein, mit der solen-

solennen Ankündigung, daß man fernerhin die Quadratur des Circuls nicht mehr zu suchen nöthig habe, weil sie bereits, und zwar zum drittenmale gefunden worden ꝛc. Es wäre eben nicht übel gethan, wenn viele, die noch künftighin sich an die Sache machen werden, dieses ganz f ste glaubten, weil sie dadurch überhoben wären, Mühe, Zeit und Kräfte zu verliehren, die man als sehr vergebens angewandt ansehen kann, weil die meisten von denselben kaum eine leichte geometrische Aufgabe zu erfinden und aufzulösen im Stande sind. Es ist auch kaum zu zweifeln, daß nicht auch künftig noch die Merkelsche und Leistnersche Zahlen wieder aufgewärmt zum Vorsch in kommen solten. Die Hauptprobe von ihrer Unrichtigkeit ist, daß 3844 durch 1225 getheilt, die Ludolphische Zahlen geben solte. Herr Prof. Bischoff nimmt auch diese Ludolphische, und sogar die über doppelt weiter reichende Sherwinsche Zahlen vor, er sieht sie aber nicht als Probiersteine an, sondern sagt, daß sie zwar gar sehr nahe zutreffen, dabey aber den Inhalt des Circuls nicht völlig genau geben, demnach müste man auf andere Proben bedacht seyn. Von solchen Proben führt Herr Bischoff 8 an, und macht auf diese Art die Sache scheinbar. Es ist unstreitig, daß wenn 3844 durch 1225 getheilt, die bis auf 32 Decimalstellen reichende Ludolphische Zahlen genau geben würde, man damit eines Theils sehr wohl zufrieden seyn könnte, andern Theils aber sehen müste, ob man durch diese Division auch die bis auf 72 Decimalstellen reichende Sherwinsche Zahlen, und sodann die bis auf 100 Decimalstellen reichende Machinsche, oder endlich die bis auf 127 Decimalstellen reichende Lamysche Zahlen heraus bringen würde. Man könnte sodann um so mehr noch mit der Proportion 3844 : 1225 zufrieden seyn. Allein nimmt man bemeldte Division vor, so fängt der Quotient 3, 138.... schon in der zweyten Decimalstelle an, von den Ludolphischen Zahlen abzuweichen. Und überdies sind alle die 8 Proben von der Art, daß jede beliebige zwo Quadratzahlen dieselbe aushalten. Ich werde mich aber nicht verweilen, dieses hier zu zeigen, sondern vielmehr angeben, wie sich nach einer allgemeinen Regel solche Quadratzahlen finden lassen, welche die Verhältniß des Quadrats des Diameters zum Inhalte des Circuls desto genauer angeben, je grösser sie sind. Dieses mag unter andern auch dahin dienen, daß man künftig nicht nöthig habe, erst zufälliger Weise auf solche Quadratzahlen zu verfallen, und sie als ganz richtige Quadraturen des Circuls anzugeben.

§. 4.

Man nehme zwo Quadratzahlen aa, bb, so, daß wenn a der Diameter des Circuls, dem-

demnach aa dessen Quadrat ist, sodann bb den Inhalt eines mit dem Circul gleichräumigten Quadrates, und daher b die Seite desselben vorstelle. Auf diese Art wird sich aa zu 4 bb wie der Diameter zum Umkreise, oder wie 1 zu 3, 141592, 653589, 793238, 462643, 383279, 502884, 197169, 399375, 105820, 974944, 592307, 816406, 286208, 998628, 034825, 342117, 067982, 148086, 513272, 306647, 093844, 6 + ... $= 1 : \pi$ verhalten.

Demnach ist $aa : 4\,bb = 1 : \pi$

und hieraus folgt

$$a : b = 2 : \sqrt{\pi}.$$

Es ist aber $\sqrt{\pi} = 1{,}77245385075 \ldots.$

Und hieraus findet sich

$$a:b = \frac{2{,}00000000000}{1{,}77245385075} = 1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{26 + \text{rc.}}}}}}}}$$

Dieses giebt der Ordnung nach

$$\begin{array}{llll}
b:a = & 7:8 + \ldots \text{ und } bb:aa = & & 49:64 + \\
= & 8:9 - \ldots & = & 64:81 - \\
= & 31:35 + \ldots & = & 961:1225 + \\
= & 39:44 - \ldots & = & 1521:1936 - \\
= & 109:123 + \ldots & = & 11881\ 15129 + \\
= & 148:167 - \ldots & = & 21904:27889 - \\
= & 3848:4342 + \ldots \text{rc.} & = & 14807104:18852964 + \text{rc.}
\end{array}$$

Diese Brüche sind nun der Ordnung nach genauer. Man sieht auch hieraus, daß die Herren von **Leistner, Merkel, Bischoff** ꝛc. nur zufälliger Weise auf ihre Zahlen 961, 1225 verfallen sind. Denn die Rechnung mit 49:64 oder 64:81 wäre immer viel leichter und kürzer gewesen, und mit 1521:1936, oder 11881:15129 ꝛc. würde sie zwar weitläuftiger, dabey aber genauer gewesen seyn.

§. 5.

Es ist aber überhaupt mehr anzurathen, schlechthin nur die ersten von diesen Verhältnissen nemlich b:a zu gebrauchen. Denn für bb:aa hat man andere Brüche, die, ohne eben Quadratzahlen zu seyn, viel kleiner und viel genauer sind, indem man nach eben dieser Art zu verfahren

$$\begin{aligned} bb:aa = \pi:4 &= 11:14 \\ &= 172:219 \\ &= 355:452 \text{ ꝛc.} \end{aligned}$$

findet. Es drücken aber die Brüche $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{31}{35}$, $\frac{39}{44}$, $\frac{109}{123}$, $\frac{148}{167}$, $\frac{3848}{4342}$ ꝛc. die Seite eines Quadrates aus, welches so groß als die Fläche eines Circuls ist, dessen Diameter = 1 angenommen wird. Und hinwiederum stellen eben diese Brüche umgekehrt, oder $\frac{8}{7}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{35}{31}$,

$\frac{44}{39}, \frac{123}{109}, \frac{167}{148}, \frac{4342}{3848}$ ꝛc. den Diameter eines Circuls vor, dessen Inhalt $= 1$ ist. Und in dieser Absicht lassen sie sich bey Ausmessung von Cylindern, und bey Verfertigung der cylindrischen Visirstäbe gebrauchen. Besonders ist hiezu der Bruch $\frac{167}{148}$ dienlich, weil derselbe unter den kleinern der genaueste ist, und erst in der siebenden Decimalstelle anfängt von dem wahren abzuweichen. Denn rechnet man nach, so findet sich der Diameter des Circuls, dessen Inhalt $= 1$ ist, vermittelst der Ludolphischen Zahlen $= 1,1283790\ldots$

Es ist aber $\frac{167}{148} = 1,1283784\ldots$

demnach der Unterschied $= 0,0000006\ldots$

Es geschieht selten, daß man diesen Diameter in practischen Fällen genauer zu wissen verlangt.

§. 6.

Da es, wenn man den Diameter einer Kugel mit der Seite eines gleichräumigten Würfels vergleicht, ebenfalls möglich ist, auf solche Cubiczahlen zu verfallen, woraus man die Quadratur des Cirkels, oder die Cubatur der Sphären erträumen könnte; so wird es eben nicht undienlich seyn, solchen künftigen Vorfällen vorzubeugen, und solche Cubiczahlen nach eben der Methode voraus zu bestimmen, zumal da sie bey Berechnung des räumlichen Inhalts der Kugeln, und bey Verfertigung der

Caliberstäben mit Vortheil gebraucht werden können. Es sey demnach der Diameter der Kugel $= a$, die Seite des gleichräumigten Würfels $= b$, die Ludolphische Zahlen $3,1415926 \ldots = \pi$, so ist nach der bekannten Archimedischen Regel

$$b^3 : a^3 = \;\; : 6$$

demnach $\quad b : a = \sqrt[3]{\left(\frac{\pi}{6}\right)}$.

Nun ist

$$\pi = 3,141592,653589,793238,462 \ldots$$
$$\tfrac{1}{6}\pi = 0,523598,775598,298873,077 \ldots$$

Und hieraus die Cubicwurzel

$$b : a = 0,805995,977008,234820 \ldots$$

welche in einen immer fortgehenden Bruch aufgelöst

$$b : a = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{6 + \text{etc.}}}}}}}}$$

giebt. Hieraus erhält man nun

$$\begin{aligned} b : a &= 4 : 5 + \\ &= 25 : 31 - \\ &= 54 : 67 + \\ &= 457 : 567 - \\ &= 2796 : 3469 + \\ &= 17233 : 21381 - \text{etc.} \end{aligned}$$

Dem-

Demnach, wenn der Diameter einer Kugel $= 1$ ist, so wird die Seite eines gleichräumigten Würfels durch jeden der Brüche $\frac{4}{5}, \frac{25}{31}, \frac{54}{67}, \frac{457}{567}, \frac{2796}{3469}, \frac{17233}{21381}$ rc. desto genauer ausgedrückt, je grösser derselbe ist. Cubirt man diese Brüche, so geben sie den Inhalt der Kugel. Setzt man aber den körperlichen Inhalt der Kugel $= 1$, so stellen eben diese Brüche umgekehrt $\frac{5}{4}, \frac{25}{31}, \frac{67}{54}, \frac{567}{457}, \frac{3469}{2796}, \frac{21381}{17233}$ rc. den Diameter der Kugel vor. Man kann sich mehrentheils mit dem Bruche $\frac{567}{457}$ begnügen, weil derselbe, wenn man nachrechnet, den Diameter der Kugel eben so genau giebt, als man denselben vermittelst der logarithmischen Tabellen findet.

§. 7.

Ich habe bey dieser Rechnung die Cubicwurzel von $\frac{1}{6}\pi$ bis auf die 18te Decimalstelle geliefert. Da es nun eine verdrüßige und ungemein langwierige Arbeit wäre, wenn man sie nach den gemeinen Regeln bis so weit suchen wolte, so wird es nicht undienlich seyn, wenn ich noch beyfüge, wie ich diese Wurzel vermittelst einer einigen Regel de tri gefunden, und zugleich, wie ich mich versichert habe, daß sie bis auf die 18te Decimalstelle richtig ist.

§. 8.

Nach der Newtonschen Binnomialformel ist überhaupt

$$x = (a + b)^n = a^n + n a^{n-1} b + n . \frac{n-1}{2} . a^{n-2} b^2 + \&c.$$

Man multiplicire nun diese Reihe mit $1 + zb : a$, und in dem Producte

$$x\left(1 + \frac{zb}{a}\right) = a^n + n a^{n-1} b + n . \frac{n-1}{2} a^{n-2} b^2 + n . \frac{n-1}{2} . \frac{n-2}{3} a^{n-3} b^3 + \text{2c.}$$
$$+ z a^{n-1} b + n . z . a^{n-2} b^2 + n . \frac{n-1}{2} . z a^{n-3} b^3 + \text{2c.}$$

setze man, um z zu bestimmen, das dritte Glied

$$n . \frac{n-1}{2} . a^{n-2} b^2 + n . z . a^{n-2} b^2 = 0$$

so ist $z = -\frac{n-1}{2}$

Wird nun dieser Werth von z in dem Producte gesetzt, so erhält man

$$x\left(1 - \frac{n-1}{2} . \frac{b}{a}\right) = a^n + \frac{n+1}{2} a^{n-1} b + * - n . \frac{n-1}{2} . \frac{n+1}{6} a^{n-3} b^3 - \&c.$$

und hieraus

$x =$

$$x = (a + b)^n = \left(\frac{2a + (n + 1)b}{2a - (n - 1)b}\right) a^n + * - \frac{n.(n-1).(n+1)a^{n-2}b^3}{6(2a - (n-1).b)} - \&c.$$

Von dieser Reihe wird das erste Glied zur Bestimmung der Wurzel gebraucht, das zweyte aber dient, um zu finden, wie weit man mit dem ersten ausreicht.

§. 8.

Nun ist für die Cubicwurzel $n = \frac{1}{3}$. Setzt man diesen Werth, so erhält man nach den behörigen Reductionen die Formel

$$x = \sqrt[3]{(a + b)} = \frac{3a + 2b}{3a + 1b}.\sqrt[3]{a} + * + \frac{2b^3.\sqrt[3]{a}}{81a^3 + 27aab} + \&c.$$

Diese habe ich nun, um aus

$a + b = \frac{1}{6}\pi = 0{,}523598{,}775598{,}298873{,}077\ldots$

die Cubicwurzel zu ziehen, folgendermassen angewandt. Erstlich fand ich, vermittelst der Logarithmen die sechs ersten Decimalstellen dieser Wurzel. Diese sind

$$0{,}805995 = \sqrt[3]{a}$$

Und da

$$805995 = 806000 - 5$$

ist, so liesse sich hievon der Cubus leicht finden. Ich setzte demnach denselben

$$0,523596871520449875 = a$$

und dadurch erhielt ich

$$b = 0,00000190407784899\,8077107\ldots$$

Da nun, wenn man das erste Glied der Reihe

$$x = \sqrt[3]{(a+b)} = \frac{3a+2b}{3a+b} \cdot \sqrt[3]{a}$$

allein beybehält, dieses die Regel de tri giebt

$$(3a+b):(3a+2b) = \sqrt[3]{a}:x$$

oder $(a+\frac{1}{3}b):(a+\frac{2}{3}b) = \sqrt[3]{a}:x$, so durfte ich nur die Werthe von a und b setzen, um den Werth

$$x = \sqrt[3]{(a+b)} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6}} = 0,805995977008234820\ldots$$

zu erhalten. Daß nun aber dieser Werth bis auf die 18te Decimalstelle richtig seye, fand ich vermittelst des zweyten Gliedes der Reihe

$$\frac{2b^3 \cdot \sqrt[3]{a}}{81a^3 + 27a^2b}$$

durch einen leichten Ueberschlag. Denn da b um 275000 mal kleiner ist als a, so konnte ich dieses Glied

$$\frac{2b^3}{81a^3} \cdot \sqrt[3]{a}$$

setzen. Nun ist

$$3\log. b : a = 0,6820508 - 17$$
$$\log. \tfrac{2}{81} = 1,6074550$$

demnach $\log. \dfrac{2b^3}{81a^3} = 0,9145458 - 19.$

Da nun hier die Characteristica $= - 19$, und $a < 1$ ist, so ist klar, daß

$$\frac{2b^3}{81a^3} \cdot \sqrt[3]{a}$$

einen Decimalbruch vorstellt, der erst auf der 19ten Decimalstelle anfängt. Und so ist die durch

$$x = \frac{3a+2b}{3a+b} \cdot \sqrt[3]{a}$$

gefundene Decimalreihe bis auf die achtzehnte Stelle genau.

§. 9.

Ob die Verhältniß des Diameters zum Umkreise durch einen rationalen Bruch ausgedrückt werden könne, ist, meines Wissens, noch nicht erörtert. **Sturm** hat zwar diese Frage zu verneinen gesucht: allein sein Beweis ist mangelhaft, weil es allerdings unendliche Reihen giebt, deren Summa rational ist, ungeachtet alle Glieder irrational sind. Da demnach die Sache noch zu erörtern bleibt, so kann es immer noch Leute geben, die mit Aufsuchung solcher rationalen Brüche ihre Zeit verlieren, oder durch irrige Schlüsse dergleichen auf die Bahn bringen. Nun ist zwar bey jedem, vermittelst der **Ludolphischen** Zahlen, die Probe bald gemacht. Allein, wenn auch der fürgegebene Bruch dadurch verworffen wird, so kann noch immer die Lust bleiben, andere zu suchen. Nun läßt sich diese Lust so

geringe

geringe machen, daß man das Aufsuchen solcher Brüche leicht wird bleiben lassen. Denn wenn auch die Verhältniß des Diameters zum Umkreise sich genau durch einen rationalen Bruch ausdrücken liesse, so kann man aus den oben (§. 4.) angeführten **Lamyschen** Zahlen, oder auch aus den **Ludolphschen** Zahlen erweisen, daß es ein sehr grosser Bruch seyn müsse. Diese Zahlen lassen sich nemlich in Brüche verwandeln, welche der Ordnung nach grösser und zugleich auch genauer werden. Die Methode und die dabey zu gebrauchende Vorsichtigkeit, habe ich in der Abhandlung von **Verwandlung der Brüche** §. 17. angezeigt und durch Beyspiele erläutert. Nach dieser Methode fand ich für das Verhältniß des Diameters zum Umkreis folgende rationale Brüche oder Verhältnisse

1	:	3
7	:	22
106	:	333
113	:	355
33102	:	103993
33215	:	104348
66317	:	208341
99532	:	312689
265381	:	833719
364913	:	1146408
1360120	:	4272943
1725033	:	5419351
25510582	:	80143857

52746197

52746197 : 165707065
78256779 : 245850922
131002976 : 411557987
340262731 : 1068966896
811528438 : 2549491779
1963319607 : 6167950454
4738167652 : 14885392687
6701487259 : 21053343141
567663097408 : 1783366216531
1142027682075 : 3587785776203
1709690779483 : 5371151992734
2851718461558 : 8958937768937
107223273857129 : 336851849443403
324521540032945 : 1019514486099146 ꝛc.

Von diesen Verhältnissen ist nun jede folgende genauer als die vorhergehende, und zwischen dieselben fällt keine rationale Verhältniß, die genauer wäre, als die nächst grössere unter den hier angegebenen. Demnach wenn auch die Verhältniß des Diameters zum Umkreise durch ganze Zahlen genau sollte ausgedrückt werden können, so müsten diese Zahlen nothwendig grösser als die letzten

324521540032945 : 1019514486099146

von den hier angegebenen seyn. Diese zwo Zahlen geben die Ludolphische bis auf die 25te Decimalstelle. Wenn sie aber auch ganz genau wären, so sieht man leicht, daß es weitläuftig und beschwerlich wäre damit zu rechnen. Uebrigens entstehen alle diese Verhältnisse aus der Fractio continua

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{2+a}}}}}}}}}}}}}$$

wobey $a = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{84+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{37+\cfrac{1}{3+ \text{rc.}}}}}}}}}}}}}$

ist.

ist. Weiter habe ich die Berechnung von dieser Fractio continua aus den **Ludolphischen** Zahlen nicht verfolgt. Und so werde ich auch nicht sagen, ob sie, wenn weiter fortgerechnet wird, irgend abgebrochen werde. Wäre dieses, so liesse sich die Verhältniß des Diameters zum Umkreise, durch ganze, wiewohl ungeheuer grosse Zahlen ausdrücken. Ich habe aber in vorbemeldter Abhandlung von **Verwandlung der Brüche** (§. 23) eine andere Fractio continua angegeben, welche nach einem gewissen Gesetze ins Unendliche fortgeht, und die Hofnung, die Verhältniß des Diameters zum Umkreise durch ganze Zahlen zu bestimmen, ganz benimmt.

§. 10.

Es giebt in der Mathematik noch andere Grössen, von denen es sich eben so viel der Mühe lohnte, zu suchen, ob sie durch rationale Brüche, oder auf eine geschmeidigere Art ausgedrückt werden können, als es noch dermalen durch Decimalzahlen geschieht. Dahin kann besonders die Zahl 2,718281,828459,045235,36028... gerechnet werden, deren hyperbolischer Logarithmus = 1 ist. Diese Zahl ist in Absicht auf die Logarithmen eben das, was die **Ludolphischen** Zahlen in Absicht auf den Circul sind, und daher in Absicht auf trigonometrische und andere Rechnungen von gleicher **Erheblichkeit.** Fragt man demnach, warum denn nur die Ludolphische Zahlen so viel Wesens machen? so wird diese Frage theils nur aus der Geschichte der Mathematik, und theils auch dadurch beantwortet werden können, daß die Begriffe Circul, Vierecke, Grösse, gleich jedermann bekannt sind, welches sich von dem Begrif hyperbolische Logarithmen nicht sagen läßt, weil dieser Begrif erst durch den Infinitesimalcalcul bekannt worden, und ohne die Erlernung dieses Calculs nicht wohl deulich gemacht werden kann. Wäre den meisten unter denen, so die Quadratur des Circuls suchen, nicht dieser Riegel geschoben, so würden, allem Ansehen nach, eben so viel vergebliche Bemühungen und fehlgeschlagene Versuche, in Ansehung der Zahl 2,718281, 828459, 045235, 36028... zum Vorschein kommen, als in Ansehung der Ludolphischen Zahlen zum Vorschein gekommen sind. Es läßt sich aber auch diese Zahl nicht durch einen rationalen Bruch genau ausdrücken. Denn setzt man dieselbe Kürze halber $= e$, so ist

$$e = 1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \cfrac{1}{26 + \text{rc.}}}}}}}}$$

oder

oder $$\frac{e-1}{e+1} = \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\text{rc.}}}}}}$$

oder

$$\frac{ee-1}{ee+1} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{9+\cfrac{1}{11+\text{rc.}}}}}}}$$

und überhaupt

$$\frac{e^x-1}{e^x+1} = \cfrac{1}{2:x+\cfrac{1}{6:x+\cfrac{1}{10:x+\cfrac{1}{14:x+\text{rc.}}}}}$$

Da diese Brüche immer fortgehen, so läßt sich auch weder e noch e^x durch einen rationalen Bruch genau ausdrücken, wenn nemlich x eine rationale Zahl oder Bruch ist. Ich habe übrigens diese Formeln nach der Methode gefunden, die ich in vorbemeldter Abhandlung von **Verwandlung der Brüche** (§. 19. seqq.) angegeben habe. Die Veranlassung aber, diese Formeln zu suchen, gab mir des Herrn Eulers Analysis infinitorum, wo der Ausdruck

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+ \text{rc.}}}}}}$$

in Zahlen berechnet, in Form eines Beyspieles vorkömmt.

§. 11.

Auf eben diese Veranlassung gienge ich weiter, und fande in Absicht auf die Circulbögen den Ausdruck

$$\text{tang. } v = \cfrac{1}{1:v-\cfrac{1}{3:v-\cfrac{1}{5:v-\cfrac{1}{7:v-\cfrac{1}{9:v-\text{rc.}}}}}}$$

Aus diesem immer fortgehenden Bruche lassen sich, in Absicht auf die unbestimmte Quadratur des Circuls, verschiedene Folgen ziehen. Man setze n eine ganze Zahl, und mache $v = 1:n$, so ist

$$\text{tang. } v = \cfrac{1}{n - \cfrac{1}{3n - \cfrac{1}{5n - \cfrac{1}{7n - \cfrac{1}{9n - \cfrac{1}{11n - \text{ꝛc.}}}}}}}$$

Da dieser Bruch immer fortgeht, so folgt daraus, daß, so oft ein Circulbogen eine Pars aliquota des Halbmessers ist, die Tangente desselben nothwendig irrational sey. Denn wäre die Tangente rational, so könnte dieser Bruch nicht in einem fortgehen, sondern er müste irgend aufhören. Um dieses mehr zu erläutern, wollen wir zum Beyspiele $v = 1$ setzen. Da nun auch $n = 1$ wird, so ist

$$\text{tang. arc. } 1 = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{5 - \cfrac{1}{7 - \cfrac{1}{9 - \text{ꝛc.}}}}}}$$

demnach zufolge der vorhin (§. 9.) angeführten Abhandlung

	+ 1	+ 0
+ 1	+ 0	+ 1
— 3	+ 1	+ 1
+ 5	— 3	— 2
— 7	— 14	— 9
+ 9	+ 95	+ 61
— 11	+ 841	+ 540
+ 13 ꝛc.	— 9156 ꝛc.	+ 5879 ꝛc.

Und so wird die Tangente des dem Halbmesser gleichen Bogens, der Ordnung nach, durch die Brüche

$$\frac{3}{2}, \frac{14}{9}, \frac{95}{61}, \frac{841}{540}, \frac{9156}{5879} \text{ ꝛc.}$$

und zwar durch jeden folgenden dergestalt genauer ausgedruckt, daß jeder kleinere Bruch minder genau ist. Da nun diese Reihe von Brüchen nirgends abgebrochen wird, sondern dergestalt fortgeht, daß endlich Nenner und Zähler, ohne gemeinsame Theiler zu haben, grösser werden, als jede fürgegebene Zahl, so läßt sich die Tangente des dem Halbmesser gleichen Bogens durch keinen endlichen oder rationalen Bruch ausdrücken. Eben dieses gilt auch für die Tangenten jeder Bögen die $\frac{1}{n}$ Theil des Halbmessers sind.

§. 12.

Werden die erstgefundene Brüche von einander abgezogen, so findet sichs dadurch, wie geschwinde sie dem wahren Werthe näher kommen. Denn so ist

$$\frac{14}{9} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9}$$

$$\frac{95}{61} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61}$$

$$\frac{841}{540} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61} + \frac{1}{61.540}$$

$$\frac{9156}{5879} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.61} + \frac{1}{61.540} + \frac{1}{540.5879}$$

ꝛc.

Fährt

Fährt man auf diese Art fort, so wird die Tangente des dem Halbmesser gleichen Bogens durch eine unendliche Reihe

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{2.9}+\frac{1}{9.61}+\frac{1}{61.540}+\frac{1}{540.5879}+\frac{1}{5879.76887}+\text{ꝛc.}$$

ausgedrückt, welche stärker convergirt als jede geometrische Reihe, und man weiß, daß die Summe derselben irrational ist.

§. 13.

Daß aber nicht nur die Tangenten der Bögen $\frac{1}{n}$, sondern überhaupt jeder Bögen $\frac{m}{n}$, die zum Halbmesser ein rationales Verhältniß haben, irrational seyn, erhellet auf eben diese Art. Es sey z. E. $v=\frac{2}{3}$, so ist die Tangente dieses Bogens

$$=\cfrac{1}{3:2-\cfrac{1}{9:2-\cfrac{1}{15:2-\cfrac{1}{21:2-\text{ꝛc.}}}}}$$

demnach	1	0		
+ 3:2	0	1	=	0:1
− 9:2	+ 1	+ 3:2	=	2:3
+ 15:2	− 9:2	− 23:4	=	18:23
− 21:2	− 131:4	− 333:8	=	262:333
+ 27:2	+ 2715:8	+ 6901:16	=	5430:6901
ꝛc.	ꝛc.	ꝛc.		

Und so wird die Tangente des Bogens $v = \frac{2}{3}$, durch jeden der Brüche $\frac{2}{3}, \frac{18}{23}, \frac{262}{333}, \frac{5430}{6901}$ 2c. und zwar durch jeden folgenden dergestallt genauer ausgedrückt, daß jeder kleinere Bruch minder genau ist. Da nun diese Reihe von Brüchen nirgend aufhört, sondern so anwächst, daß endlich Nenner und Zähler, ohne gemeinsame Theiler zu haben, grösser werden als jede fürgegebene Zahl, so folgt, daß die Tangente des Bogens $v = \frac{2}{3}$ irrational sey. Eben dieses gilt auch für die Tangenten jeder Bögen, die $= \frac{m}{n}$ sind, oder zum Halbmesser ein rationales Verhältniß haben. Zieht man die erstgefundene Brüche von einander ab, so erhält man für die Tangente des Bogens $v = \frac{2}{3}$, die Reihe

$$\frac{2}{3} + \frac{8}{3 \cdot 23} + \frac{32}{23 \cdot 333} + \frac{128}{333 \cdot 6901} \mp \text{2c.}$$

welche ebenfalls stärker als jede geometrische Reihe convergirt und eine irrationale Summe hat.

§. 14.

Da demnach die Tangente eines jeden rationalen Bogens irrational ist, so ist hinwiederum auch der Bogen einer jeden rationalen Tangente irrational. Denn man setze, der Bogen wäre rational, so würde der Voraussetzung zuwider die Tangente, vermöge des erst erwiesenen, irrational seyn.

§. 15

§. 15.

Wir haben in den trigonometrischen Tabellen eine einige rationale Tangente, nemlich die von 45 Gr. welche den Halbmesser gleich, und demnach = 1 ist. Damit ist also der Bogen von 45 Gr. und folglich auch der Bogen von 90, 180, 360 Gr. irrational, oder diese Bögen haben zu dem Halbmesser des Circuls kein rationales Verhältniß.

§. 16.

Aus dem bisher gesagten erhellet demnach so viel, daß kein Bogen nebst seiner Tangente zugleich ein rationales Verhältniß zum Halbmesser haben könne. Es ist aber auf unzählige Arten möglich, daß ein Bogen zu seiner Tangente ein rationales Verhältniß habe. Allein es läßt sich auch beweisen, daß in allen diesen Fällen, sowohl der Bogen als die Tangente desselben, mit dem Halbmesser incommensurabel sind. Denn erstlich können, vermöge des bereits erwiesenen, nicht beyde zugleich zu dem Halbmesser ein rationales Verhältniß haben. Man setze demnach, es sey nur die Tangente oder nur der Bogen allein. Im ersten Fall müßte die Tangente sowohl mit dem Halbmesser als mit dem Bogen commensurabel seyn. Und so wäre eben dadurch auch der Bogen mit dem Halbmesser commensurabel, weil die Summe oder die Differenz zweyer rationalen

Verhältnisse ebenfalls rational ist. Im andern Fall wäre der Bogen zugleich mit der Tangente als mit dem Halbmesser commensurabel, und so würde ebenfalls die Tangente zu dem Halbmesser ein rationales Verhältniß haben. Da nun vermöge des vorhin erwiesenen, Halbmesser, Bogen und Tangente nicht zugleich commensurabel sind, so werden die beyden angeführten Fälle umgestossen; demnach wenn Bogen und Tangente unter sich ein rationales Verhältniß haben, so sind beyde mit dem Halbmesser incommensurabel.

§. 17.

Noch werde ich kurz zween Umstände berühren, die in Absicht auf die Quadratur des Circuls etwas scheinbares haben. Der erste ist folgender Satz: Wenn man um einen Circul ein beliebiges regulaires oder irregulaires Vieleck beschreibt, so, daß jede Seite den Circul berühre, so verhält sich der Umkreis des Vielecks zu seinem Inhalte, wie sich der Umkreis des Circuls zu seinem Inhalte verhält. Den Beweis übergehe ich, weil er sehr leicht ist. Der andere Umstand ist ein Phaenomenon, welches sich folgendermaßen eräugnet: Wenn man 1 durch 0, 7853981634... als den vierten Theil der Ludolphischen Zahlen dividirt, so geht es 1 mal, und es bleibt 0, 2146018366.... Dividirt man ferners diesen

diesen Ueberrest in die 0,7853981634... durch die man vorhin getheilt hatte, so geht es 3 mal und es bleibt 0,1415926536.... Setzt man diesem Ueberrest die Zahl 3 vor, so erhält man 3,1415926536—.. welches gerade die Ludolphische Zahlen sind. Hiezu sage ich weiter nichts, als daß es ein blosses Phaenomenon ist, woraus sich auf die Quadratur des Circuls schlechthin nicht schliessen läßt. Es ist auch nicht schwer die Ursache davon zu finden.

VI.
Einige Anmerkungen von Ausmessung der Winkel und Linien auf dem Papier.

§. 1.

Tab. I. Unter denen Instrumenten, so man zur Zeichnung der Figuren auf dem Papier gebraucht, findet sich gewöhnlich ein Transporteur zu Abnehmung und Auftragung der Winkel, ein Winkelhacken zur Zeichnung von senkrechten Linien, und ein Triangel oder zwey zusammengerichtete Lineale zur Zeichnung der Parallellinien. Alle diese Instrumente lassen sich in eines zusammenziehen, welches ihre Vortheile vereinigt, und in Absicht auf die Zeichnung jeder Winkel noch bequemer ist. Da ich es nirgends schon beschrieben gefunden, so werde ich die Verfertigung und den Gebrauch desselben, da beydes sehr leicht ist, mit wenigen Worten hier anzeigen.

§. 2.

Fig. I. Aus einer hölzernen, helfenbeinernen, hornenen oder metallenen Platte wird ein rechtwinklichter und gleichschenklichter Triangel ABC von beliebiger Grösse ausgeschnitten, und indem man jeden Cathetum als einen Halbmesser

messer ansieht, so werden aus C gegen A und B die Tangenten jeder Grade von o bis 45 Grad aufgetragen, und die Grade so hingezeichnet, wie sie in der Figur zu sehen. Der mittlere Raum a b c f, m ausgeschnitten oder gelassen, und wenn man will, so können auf A B Maaßstäbe gezeichnet werden. Der Gebrauch ist nun folgender.

§. 3.

Daß man mit diesem Instrumente Perpendiculären ziehen könne, ist dadurch, daß A C B ein rechter Winkel ist, für sich klar; und eben so bedarf die Möglichkeit, Parallelinien zu ziehen, keiner weitern Erläuterung. So ist auch C A B = C B A an sich schon immer ein Winkel von 45 Grad. Ich habe demnach nur noch zu zeigen, wie jede andere Winkel können gezogen werden, je nachdem sie über oder unter 45 Gr. sind.

§. 4.

Es sey demnach auf der Linie D B in B ein Winkel z. E. von 25 Gr. zu ziehen, welcher gegen D offen sey. Hier wird das Instrument dergestalt auf die Linie D B gelegt, daß diese zugleich durch die Ecke B und durch den gegen über stehenden 25 Gr. gehe, und die Ecke B auf den fürgegebenen Punct B falle. Ist dieses geschehen, so wird längs B C eine Linie gezogen, und so wird C B D der verlangte Winkel seyn. Hätte der Winkel gegen E offen seyn Fig. II.

sollen,

sollen; so sieht man leicht, daß man die Ecke A und den gegenüber stehenden 25ten Gr. hätte gebrauchen müssen. So darf man auch nur die Figur umwenden, um sich der Lage des Instrumentes für die Fälle vorzustellen, wo die Linie abwerts zu ziehen ist.

§. 5.

Da hiebey der Winkel CDB = ADF = 65 Gr. ist, so wird man sich ohne Mühe vorstellen können, wie ein Winkel müsse gezogen werden, der über 45 Gr. ist. Denn ist z. E. auf DB ein Winkel CDB, oder FDA von 65 Gr. zu ziehen, so wird der 65te Gr. an D und die Ecke B auf die Linie DB angelegt, und längs CA eine Linie gezogen, welche den verlangten Winkel CDB oder FDA = 65 Gr. geben wird. Solte der Winkel nicht gegen E, sondern gegen F offen seyn, so wird wiederum die Ecke A und der gegenüber stehende 65te Gr. gebraucht. Daß man endlich, auf eben die Art, wie die Winkel gezeichnet werden könne, bereits gezeichnete messen kann, versteht sich für sich.

§. 6.

Es ist auch für sich klar, daß dieses Instrument fürnehmlich nur dient, um solche Winkel zu zeichnen und zu messen, deren Schenkel auf der Figur, so man zeichnen will, kleiner, oder wenigstens nicht viel grösser sind, als AC oder AB auf dem Instrumente ist. Bey grössern Figuren bedient man sich sicherer der trigonometrischen Tafeln. Denn ungeachtet in denselben heut zu Tage die Chorden nicht mehr vorkommen, so werden die Sinus leicht in Chorden verwandelt, weil der Sinus des halben Winkels doppelt genommen, der Chorde des ganzen Winkels gleich ist. Um aber dieses Verdoppelns überhoben zu seyn, darf man nur den Halbmesser von 50, 500, 5000 ꝛc. Theilen annehmen, welches, wenn man mit Maaßstäben von verschiedener Grösse versehen ist, immer so geschehen kann, daß der Halbmesser die verlangte Grösse habe, und wenigstens in Absicht auf die Grösse der Figur, die man zeichnen will, nicht zu klein sey. Nimmt man auf einem solchen Maaßstabe den Sinus des halben Bogens, so wird derselbe an sich schon die Chorde des ganzen Bogens seyn. Denn da der Halbmesser anstatt von 100, 1000, 10000 ꝛc. Theilen genommen zu werden, von 50, 500, 5000 ꝛc. genommen wird, so ist dadurch an sich schon jeder Theil doppelt grösser, und damit ist man der Verdoppelung des Sinus des halben Bogens überhoben. Uebrigens ist für sich klar, daß, sobald der fürgegebene Winkel über 90 Gr. ist, man besser thut, seinen Zusatz zu 180 Gr. zu bestimmen.

§. 7.

Was aber die Maaßstäbe von verschiedener Grösse betrift, so habe ich mir derselben zehen

ver-

verfertigt, deren jeder beynahe einen vierten Theil grösser ist als der andere, und damit erhielte ich, daß mir der erste statt des 11ten, der 2te statt des 12ten ꝛc. dienen konnte, weil der 11te würde zehnfach grösser als der erste, und so auch der 12te zehnfach grösser als der 2te ꝛc. gewesen seyn. Diese Maaßstäbe habe ich numerottirt, um allenfalls der Figur beyzuschreiben, nach welchem sie ist gezeichnet worden, und so weiß ich mich immer wieder darein zu finden. Bey Zeichnung von krummen Linien geschieht es zuweilen, daß ich die Ordinaten nach einem andern Maaßstabe auftrage als die Abscissen, sofern es nur auf die Verhältnisse ankömmt. Und dieses geschieht, theils um der Grösse des Papieres Rechnung zu tragen, theils auch, um die Krümmung und Wendung der Linie augenscheinlicher, oder überhaupt um die Figur und die Lage ihrer Theile zu andern Absichten bequemer zu machen. Es wäre nicht unmöglich und vielleicht auch nicht undienlich, die Sprache von solchen Maaßstäben allgemein zu machen. Man dürfte nur bey dem einen derselben den Parisischen, Rheinländischen oder Londonschen Zoll zum Grunde legen, weil doch diese Maasse die bekanntesten sind.

VII.

VII.
Anlage zur Tetragonometrie.

§. 1.

Die allgemeine Möglichkeit jedes Viereck durch Ziehung einer Diagonale in zween Triangel zu zerfällen, mag zu den Gedanken Anlaß gegeben haben, daß, wer in Berechnung und Auflösung der Triangel wohl bewandert ist, in der Berechnung und Auflösung viereckigter Figuren ohne Mühe fortkommen werde. Solte dieser Ausspruch mehr als eine bloße Möglichkeit angeben, so wird gegenwärtige Abhandlung nur für Anfänger bestimmt seyn, die sich in trigonometrischen Aufgaben, und besonders in dem algebraischen Theile der Trigonometrie entweder für sich, oder unter Anführung ihres Lehrers, üben, oder von daher Stof zu einer academischen Inauguraldisputation nehmen wollen. Denn ich werde mich hier begnügen, die möglichen Fälle der Tetragonometrie vorzuzählen, und die Anzahl der dabey vorkommenden Aufgaben zu bestimmen. Tab. I.

§. 2.

Wenn man ein Viereck, ohne es durch Ziehung einer Diagonale in zween Triangel zu thei-

theilen für sich betrachtet, so beut es weiter nichts als 4 Seiten und 4 Winkel, demnach in allem 8 Stücke an. Und da ist die Frage, wie fern einige dieser 8 Stücke durch die übrigen bestimmt werden, und wie vielerley Abwechselungen dabey möglich sind? Da man in der Algebra, sofern es nur die Frage ist, zu einer Gleichung zu gelangen, auf den Unterschied der gegebenen und gesuchten Stücke nicht sieht, so werde ich, um die vorzunehmende Abzählung einfacher zu machen, diesen Unterschied ebenfalls weglassen, weil derselbe vielmehr die Auflösung als die Erfindung der Gleichungen betrift.

§. 3.

Da in jedem Vierecke die Summe der vier Winkel 360 Gr. beträgt, so kann aus dreyen Winkeln der vierte für sich gefunden werden. Es müssen aber die Data von einander unabhängig seyn, demnach läßt sich in Absicht auf die Seiten des Viereckes aus allen vier Winkeln nicht mehr finden, als sich aus dreyen finden läßt. Das will nun sagen, daß in den Gleichungen, die wir zu suchen haben, höchstens nur drey Winkel vorkommen können, weil der vierte immer der Zusatz der drey übrigen zu 360 Gr. ist.

§. 4.

Indessen sind drey Winkel in so weit hinreichend, daß, wenn man noch zwo Seiten mit nimmt

nimmt, das ganze Viereck dadurch bestimmt wird. Demnach kann von den zwoen andern Seiten noch eine mit in die Gleichung genommen werden. Und so haben wir den Satz, daß drey Winkel und drey Seiten einander bestimmen. Da nun in diesem Fall eine Seite und ein Winkel aus der Gleichung wegbleibt, so entstehen, in Absicht auf die Lage derselben, zween besondere Fälle. Denn es kann der wegbleibende Winkel entweder an der wegbleibenden Seite liegen, oder aber er liegt nicht an derselben und demnach zwischen zwoen von den in der Gleichung vorkommenden Seiten. Da es nun hiebey, in Absicht auf die Gleichung, nichts zu sagen hat, zwischen welchen von den drey Seiten der wegbleibende Winkel fällt; so ist es überflüßig, diesen zweyten Fall noch ferner einzutheilen. Demnach haben wir für drey Seiten und drey Winkel nur zween Fälle.

§. 5.

Wird ein Winkel weggelassen, so muß der Abgang durch eine Seite ersetzt werden, und da haben wir vier Seiten und zween Winkel, die ebenfalls einander bestimmen. Auch hier giebt es, in Absicht auf die Lage der Winkel, noch zween besondere Fälle, die sich leicht gedenken lassen. Denn die zween Winkel liegen entweder einander gegenüber, oder sie liegen an einer Seite.

§. 6.

Weiter läßt sich nun nicht gehen, weil ein Viereck nicht mehr als vier Seiten hat. Denn wolte man noch einen Winkel weglassen, so müßte noch eine Seite mit in die Gleichung genommen werden, und dieses würde also die fünfte Seite des Viereckes seyn. Wir haben demnach in allem nur vier allgemeine Fälle, und mit diesen vier Gleichungen. In jeder Gleichung kommen sechs Stücke vor, und jedes kann als ein Quæsitum betrachtet werden. Dieses giebt demnach für alle vier Gleichungen 24 Auflösungen, und damit eben so viele einzelne Fälle.

§. 7.

Diese 24 Fälle werden in den vier ersten Figuren vorgestellt. Es enthält nemlich die

I[te] Figur: **Vier Seiten und zween entgegenstehende Winkel.** Und die dazu gehörende Gleichung ist

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab \cos.\omega - 2cd \cos.\psi.$$

II[te] Figur: **Vier Seiten und zween nicht entgegenstehende Winkel.** Und die Gleichung dazu ist

$$a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = 2a(b \cos.\omega + c \cos.\varphi) - 2bc \cos.(\omega + \varphi).$$

III[te] Figur: **Drey Seiten, zween aussen an- und ein zwischenliegender Winkel.** Die Gleichung dazu ist

$$a \sin.\omega = c \sin.(\omega + \varphi) + d \sin.\lambda.$$

IV[te]

IVte Figur: Sechs auf einander folgende Stücke. Und die Gleichung dazu ist

$$c \sin.\psi = a \sin.(\varphi + \psi) - b \sin.(\varphi + \psi + \omega).$$

In diesen vier Gleichungen werden alle Winkel spitz genommen. Wenn sie demnach bey vorkommenden Fällen stumpf sind, oder wenn die Summen $\omega + \varphi$, $\varphi + \psi$, $\varphi + \psi + \omega$ stumpf oder vollends grösser als 180 Grade sind, so müssen die Zeichen behörig verändert werden. Doch ist dieses erst dann vorzunehmen, wenn die Gleichung aufgelöst worden, weil bey den meisten Auflösungen die Functionen der Winkel noch ihre Gestalt ändern. Man sieht übrigens, daß nicht jede Auflösung gleich einfach und geschmeidig ist, und daß besonders alle sechserley Auflösungen der zweyten Gleichung irrationale und doppelte Werthe geben.

§. 8.

Alle die 24 Fälle, welche in diesen vier Gleichungen enthalten sind, können in der practischen Feldmeßkunst wirklich vorkommen, wo man ein viereckigtes Feld, wegen darauf und dazwischen liegenden Morästen, Sümpfen und Waldungen, dem Umkreise nach, auszumessen genöthigt ist, und wo sich weder alle Seiten noch alle Winkel gleich leicht oder bequem wirklich messen lassen.

§. 9.

Es sind aber diese 24 Fälle noch lange nicht alle, sondern nur diejenigen, wo man mit den Seiten und Winkeln am Umkreise ausreicht. Zerlegt man aber ein Viereck in zween Triangel, indem man eine Diagonale zieht, so ist es auf sehr vielerley Arten möglich, die gegebenen und gesuchten Stücke so zu vertheilen, daß nicht jeder der beyden Triangel für sich bestimmt, sondern beyde zusammengenommen werden müssen, wenn man zur Gleichung gelangen will. Diese Bedingung macht, daß die darunter begriffene Fälle nicht zur eigentlich sogenannten Trigonometrie, sondern zur Tetragonometrie gehören, und ihre eigene Verwickelungen, Schwürigkeiten und Auflösungen haben.

§. 10.

Diese Fälle habe ich von der 5ten Figur an bis zur 42ten vorgestellt, wie ich sie nach einer etwas mühsamen Abzählung habe finden und in Ordnung bringen können. Jede dieser Figuren hat eine ihr eigene Gleichung, und da in jeder sechserley Grössen vorkommen, deren jede als ein Quæsitum betrachtet werden kann, so giebt dieses für die 38 Figuren 6 mal 38, oder 228 verschiedene Fälle. Ich werde nun darüber folgende Anmerkung hersetzen.

§. 11.

In jeder dieser Figuren sind sechs Stücke gezeichnet, welche in die Rechnung gezogen wer-

werden müssen; und zwar die meisten nur mit einem —. Wo aber einer der Winkel, durch welche die Diagonale geht, ganz vorkommt, da ist in der Figur ein Bogen dadurch gezogen. In jeder Figur kömmt wenigstens einer von diesen Winkeln ganz oder ungetheilt vor, weil dadurch die beyden Triangel von einander abhängig gemacht werden. Aus eben dem Grunde kömmt entweder noch die Diagonal, oder einer von denen an derselben liegenden Winkeln, oder auch beyde vor, jedoch dergestalt, daß in keinem Triangel mehr als drey ganz bestimmte Stücke vorkommen, weil sonst in demselben überflüßige Data und in dem andern Triangel zu wenig seyn würden.

§. 12.

Ich habe die Figuren in der Ordnung gezeichnet, wie sie bey dem Abzählen muß vorgenommen werden. Und dieses mag die Beschreibung davon abkürzen. Der untere Diagonalwinkel kömmt in allen vor. Demnach blieben noch 5 Stücke zu zeichnen. Und da da bey vielerley Abwechselungen möglich sind, so habe ich, um sie zu claßificiren, bey der Diagonale angefangen. Diese kömmt in den Figuren 5, 6, 7.... 25 vor, in den folgenden kömmt sie nicht vor. Beyde dieser Hauptclassen enthalten gleich viel Fälle, wenn man die 1, 2, 3, 4te Figur mit zu der letztern rechnet.

§. 13.

Die erste Hauptclasse, wobey nemlich die Diagonal vorkömmt, theilt sich in vier andere ein:

I°. Fig. 5, 6, 7 haben den obern Diagonalwinkel ganz.

II°. Fig. 8, 9, 10 haben dessen beyde Theile.

III°. Fig. 11, 12 .... 19 haben nur einen Theil desselben.

IV°. Fig. 20 .... 25 haben keinen Theil desselben, und zwar

Fig. 20 vier Seiten.

Fig. 21, 22 drey Seiten und einen Winkel.

Fig. 23, 24, 25 zwo Seiten und zween Winkel.

§. 14.

Die zweyte Hauptclasse, wobey die Diagonale wegbleibt, ist wiederum in Ansehung des obern Diagonalwinkels in zwo Classen Fig. 26....31 und Fig. 32....42, oder wenn man specialer gehen will, in 6 Classen getheilt, nemlich

I. Fig. 26, 27, 28,	IV. Fig. 35, 36, 37,
II. Fig. 29, 30, 31,	V. Fig. 38, 39, 40,
III. Fig. 32, 33, 34,	VI. Fig. 41, 42.

§. 15.

Die Auflösung aller dieser Fälle werde ich, wie Anfangs gesagt worden, denen überlassen, die

die sich in dem algebraischen Theil der Trigonometrie üben wollen. Die Erfindung der Gleichung für jede Figur kömmt immer auf den untern ungetheilten Diagonalwinkel an. In allen Figuren der zweyten Hauptclasse scheint es, als wenn in dem einen Triangel nicht genug Stücke wären; allein da muß man vermittelst der in den anliegenden Triangel vorkommenden Stücke die Diagonale bestimmen. Dadurch erhält man für den erstern Triangel das noch mangelnde Stück, und kann sodann vermittelst des untern Diagonalwinkels zur Gleichung gelangen. In der ersten Hauptclasse wird die Diagonal immer am mühsamsten gefunden, und bey verschiedenen geht es auch nicht einmal durch Construction leicht an. Ob übrigens alle die 228 Fälle in der Ausübung wirklich vorkommen und brauchbar sind, werde ich eben nicht stückweise untersuchen. Wenn man aber in der

8ten Figur die Diagonale,
29ten Figur den hintern Winkel,
30ten Figur die obere Seite

als ein Quæsitum ansieht, so enthalten diese Figuren eine Aufgabe, die eine von den schönsten und brauchbarsten in der practischen Geometrie ist, und wovon ich in den Anmerkungen und Zusätzen zur practischen Geometrie vier verschiedene Auflösungen gegeben habe.

VIII.
Anmerkungen über die Verwandlung und Auflösung der Gleichungen.

§. 1.

Tab. II. Es ist aus den Anfangsgründen der Algebra bekannt, daß die Auflösung einer Gleichung vom vierten Grade von der Auflösung einer cubischen Gleichung abhängt, auf welche sich jene reduciren läßt, und daß, wenn bey jener alle vier Wurzeln entweder unmöglich oder real sind, die drey Wurzeln der letztern real sind. Da nun dieser letztere Fall immer auf die Trisection eines Circulbogens reducirt werden kann, so sieht man überhaupt leicht ein, daß sich auch jede Biquadratgleichungen, deren Wurzeln sämtlich entweder unmöglich oder real sind, auf die Trisection eines Circulbogens solle können reduciren lassen. Die Frage ist nun, die Methode dazu zu finden und brauchbar zu machen.

§. 2.

Um in der Auflösung dieser Frage nicht ohne Noth Weitläuftigkeiten einzumengen, so werden wir setzen, daß in der fürgegebenen Biquadratgleichung das zweyte Glied weggeschaft sey, weil

weil dieses in jedem Falle, ohne Mühe voraus geschehen kann. Es sey demnach

$$0 = x^4 + Ax^2 + Bx + C.$$

Man sehe diese Gleichung als das Product zwoer Quadratgleichungen

$$0 = xx + ax + b$$
$$0 = xx - ax + c$$

an, welches

$$\begin{aligned} 0 = x^4 &+ bx^2 + acx + bc \\ &+ c \quad - ab \\ &- aa \end{aligned}$$

ist, so lassen sich durch die Vergleichung der Glieder die Coefficienten a, b, c durch A, B, C bestimmen, und die gesuchten vier Wurzeln werden sodann

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - b)}$$
$$x = +\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}aa - c)}$$

seyn. Wird nun die Vergleichung der Glieder angestellt, so ist

$$A = b + c - aa$$
$$B = ac - ab$$
$$C = bc$$

demnach

$$c + b = A + aa \qquad 2c = A + aa + B:a.$$
$$c - b = B:a \qquad 2b = A + aa - B:a.$$
$$(c+b)^2 - (c-b)^2 = 4bc = 4C = (A+a^2)^2 - B^2 : a^2$$
$$4C = A^2 + 2a^2A + a^4 - B^2 : a^2$$

folglich

$$\begin{aligned} 0 = a^6 + 2a^4A + A^2a^2 &- B^2 \\ &- 4Ca^2 \end{aligned}$$

Man setze

$$a^2 = z - \tfrac{2}{3}A$$

so ist, wenn man diesen Werth substituirt und die Reduction vornimmt,

$$\begin{aligned} 0 = z^3 &- \tfrac{1}{3}A^2 z - \tfrac{2}{27}A^3 \\ &- 4Cz + \tfrac{8}{3}CA \\ &\qquad - B^2 \end{aligned}$$

Man setze nun

$$z = r \text{ cosin. } v$$
$$r \text{ cos. } 3v = D$$

so giebt die Trigonometrie folgende Gleichung

$$0 = z^3 - \tfrac{3}{4}rrz - \tfrac{1}{4}rrD.$$

Wird diese mit der erst gefundenen verglichen, so ist

$$\tfrac{3}{4}rr = \tfrac{1}{3}A^2 + 4C$$
$$\tfrac{1}{4}rrD = \tfrac{2}{27}A^3 - \tfrac{8}{3}CA + B^2$$

folglich

$$r = \tfrac{2}{3}\surd(12C + A^2)$$
$$D = (2A^3 - 72CA + 27B^2) : (36C + 3A^2)$$

Endlich, wenn man in den für x gefundenen zwo Gleichungen die für c, b gefundene Werthe setzt, so sind alle vier Wurzeln

$$x = \pm\tfrac{1}{2}a + \surd(-\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{4}a^2 \mp B : 2a).$$

§. 3.

Wir haben nun nur den Rückweg zu nehmen, um die Operationen anzuzeigen, durch welche man die Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^4 + Ax^2 + Bx + C$$

findet. Dieses geschiehet demnach folgendermaßen:

1°.

1°. Man macht

$$r = \tfrac{2}{3}\sqrt{(12C + AA)}$$

$$D = (2A^3 - 72CA + 27BB) : (36C + 3AA)$$

2°. Sodann setzt man

$$D : r = \text{cosin.}\, 3v,$$

und nachdem man den Bogen $3v$ gefunden, so sucht man den Cosinus von v, und macht

$$r.\, \text{cos}.\, v = z$$

$$\sqrt{(z - \tfrac{2}{3}A)} = a.$$

3°. Hat man nun a gefunden, so sind

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(-\frac{A}{2} - \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{B}{2a}\right)}$$

$$x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(-\frac{A}{2} - \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{B}{2a}\right)}$$

die gesuchte vier Wurzeln.

§. 4.

Es sey z. E. die Gleichung

$$0 = x^4 - 15x^2 + 10x + 24$$

so ist

$$A = -15$$
$$B = +10$$
$$C = +24$$

demnach

$$r = \tfrac{2}{3}\sqrt{(12.24 + 15.15)} = \tfrac{2}{3}\sqrt{513} = \sqrt{228}$$

$$D = \frac{-2.15^3 - 72.24.15 + 27.10.10}{36.24 - 3.15.15} = \frac{270}{19}$$

$$\text{cosin.}\, 3v = D : r = 270 : 19\sqrt{228} = 135 : \sqrt{(3.19^3)}$$

$\tfrac{1}{2}$ log.

$$\tfrac{1}{2}\,\log.\,228 = \log.\,r = 1,1789674$$

$$\log.\,270 = 2,4313638$$
$$\log.\,19 = 1,2787536$$

$$\log.\,270:19 = 1,1526102$$

$$\log.\,\text{cos}.\,3v = 0,9736428 - 1$$

demnach $3v = 19^{\circ}.\,45'.\,37\tfrac{1}{7}''$

$$v = 6.\,35.\,12\tfrac{1}{3}$$

$$\log.\,\text{cos}.\,v = 0,9971238 - 1$$
$$\log.\,r = 1,1789674$$

$$\log.\,z\ldots\ldots = 1,1760912$$

$$z = 15$$

Ferner $a^2 = z - \tfrac{2}{3}A = 15 + 10 = 25$

$$a = 5$$

und

$$x = \tfrac{5}{2} \pm \surd(\tfrac{15}{2} - \tfrac{25}{4} - \tfrac{10}{10}) = \tfrac{5}{2} \pm \tfrac{1}{2}$$
$$x = -\tfrac{5}{2} \pm \surd(\tfrac{15}{2} - \tfrac{25}{4} + \tfrac{10}{10}) = -\tfrac{5}{2} \pm \tfrac{3}{2}$$

demnach sind die Wurzeln $+3, +2, -4, -1$.

§. 5.

Da sich auf diese Art nur diejenigen Biquadratgleichungen auflösen lassen, welche alle Wurzeln entweder unmöglich oder real haben, so kömmt es darauf an, die Grenzen zu bestimmen, in welchen solches möglich ist. Man sieht aus dieser Auflösung, daß es erstlich auf den Ausdruck

$$D:r = \text{cos}.\,3v$$

ankömmt.

ankömmt. Denn ein Cosinus kann nicht grösser als 1 seyn. Werden demnach für D, r die gefundenen Werthe gesetzt, so muß

$$(2A^3 - 72\,CA + 27\,B^2) : 2(12\,C + AA)^{3:2} < 1$$

folglich

$$2\,A^3 - 72\,CA + 27\,B^2 < 2(12\,C + AA)^{3:2}$$

seyn, und unter dieser Bedingung sind demnach alle vier Wurzeln entweder unmöglich oder real. Man sieht zugleich, daß eben diese Bedingung voraussetzt, es müsse sich aus

$$12\,C + AA$$

die Quadratwurzel können ausziehen lassen, und folglich wenn C negativ ist, 12 C kleiner als AA seyn. Beydes geht nun allemal an, wenn die vier Wurzeln sämtlich entweder real oder unmöglich sind, weil in diesen Fällen die cubische Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = z^3 - \tfrac{1}{3}A^2 z &- \tfrac{2}{27}A^3 \\ - 4\,C z &+ \tfrac{8}{3}\,CA \\ &- \;BB \end{aligned}$$

drey reale Wurzeln hat. Es kömmt demnach ferners auf den Ausdruck

$$a = \sqrt{(z - \tfrac{2}{3}A)}$$

an, welcher ebenfalls real seyn muß, dafern in den Wurzeln

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(-A - \tfrac{1}{4}a^2 - \frac{B}{2a}\right)}$$

$$x = -\frac{1}{2a} \pm \sqrt{\left(-A - \tfrac{1}{4}a^2 + \frac{B}{2a}\right)}$$

keine andere Unmöglichkeit seyn solle, als die, welche

welche aus den Wurzelzeichen, womit sie an sich schon behaftet sind, herrühren kann.

§. 6.

Da demnach hiebey so viele Bedingungen vorkommen, so ist leicht zu erachten, daß die Möglichkeit aller vier Wurzeln in sehr engen Schranken eingeschlossen seyn müssen. Die allgemeine Methode, dadurch man sonst diese Frage entscheidet, giebt an, man solle in der Gleichung

$$o = x^4 + Ax^2 + Bx + C$$

das letzte Glied C als veränderlich ansehen, und bestimmen, wenn es ein maximum oder ein minimum wird. Denn ist es sodann in der fürgegebenen Gleichung grösser als das maximum, oder kleiner als das minimum, so läßt sich daraus schliessen, ob die Gleichung reale Wurzeln hat oder nicht. Wenn man diesem zufolge die Gleichung differentirt und $dC = o$ setzt, so erhält man

$$o = 4x^3 + 2Ax + B$$

eine cubische Gleichung, welche man aufzulösen hat, um diejenigen x zu bestimmen, unter welchen C ein maximum oder ein minimum wird. Sind in dieser Gleichung zwo Wurzeln unmöglich, so fallen dadurch schon zwo Wurzeln aus der fürgegebenen Biquadratgleichung ins Unmögliche, und C hat nur ein maximum zur Grenze der Möglichkeit der zwo übrigen Wurzeln.

§. 7.

§. 7.

Da hiebey eine Cubicgleichung aufzulösen, bey der vorhergehenden Probe aber eine Trisection eines Circulbogens vorzunehmen ist, welche ungefehr eben so viel als eine Cubicgleichung sagen will; so habe ich auf Mittel gedacht, beydes zu vermeiden, und die Grenzen der Möglichkeit der Wurzeln auf eine deutlichere und mehr in die Augen fallende Art kenntlich zu machen. Zu diesem Ende merke ich an, daß, wenn man in der Gleichung

$$o = x^4 + A x^2 + B x + C$$

das Zeichen des dritten Gliedes + B in — B verwandelt, man dadurch an der Gleichung weiter nichts ändert, als daß die positive Wurzeln negativ, und hinwiederum die negativen positiv werden. Da dieses auf die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Wurzeln keinen Einfluß hat, so werde ich das Zeichen des dritten Gliedes, in dieser Absicht, als Gleichgültig ansehen.

§. 8.

Hingegen hat es mit dem Zeichen des zweyten und vierten Gliedes eine ganz andere Bewandniß. Ihre Verwechselung hat in die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Wurzeln, einen sehr beträchtlichen Einfluß. Und besonders muß der Fall, wo A positiv ist, anders behandelt werden, als wo A negativ ist, weil dieser letztere Fall mehrere Umstände darbeut.

Um

Um demnach bey dem ersteren anzufangen, so setze ich

$$x^4 + Ax^2 = Bx - C = z$$

Hier ist nun offenbar z positiv, es mag nun x
Fig. I. positiv oder negativ seyn. Nimmt man auf AP die Abscissen x, und richtet die Ordinaten

$$PM = z = x^4 + Ax^2$$

auf, so läßt sich die Linie NAM construiren, welches ebenfalls der andern Gleichung

$$z = Bx - C$$

genügen leisten wird. Man sieht zu diesem Ende B als eine Tangente eines Winkels ϕ an, und indem man $RAP = \phi$ macht, und die Linie AR zieht, so macht man $AQ = -C$, und zieht durch Q die Linie QM mit AR parallel. Denn so hat man, wenn $AP = x$ ist,

$$PR = AP.\ \text{tang.}\ \phi = Bx$$
$$RM = AQ = C$$

folglich $PM = Bx - C = z$.

§. 9.

Nun solte, wenn die Gleichung

$$0 = x^4 + Ax^2 B \pm x + C$$

reale Wurzeln hat, die Linie QM allemal die krumme Linie NAM entweder berühren oder schneiden. Denn man muß für z einerley Werth finden, es sey daß man $x^4 + Ax$ aus P in M trage, oder PM durch $Bx - C$ bestimme. In der Figur ist QM so gezogen, daß sie die Linie NAM berühre. Und dieses macht,

macht, daß, so lange der Winkel RAP $=\phi$ beybehalten wird, Q der tiefste Punct ist, der einen Durchschnitt zulasse. Man sieht daraus, daß wenn in der Gleichung

$$0 = x^4 + Ax^2 \pm Bx + C$$

C positiv ist, dieses Glied eine gewisse Grösse nicht überschreiten darf, wofern die Gleichung mögliche Wurzeln haben solle. Ist aber C negativ, so fällt Q über A, und da sind zween Durchschnittspuncten schlechthin nothwendig. Wenn demnach A positiv, C aber negativ ist, so hat die Gleichung nothwendig zwo mögliche und zwo unmögliche Wurzeln.

§. 10.

Ist aber C positiv, so fällt Q unter A, und da sind zuweilen zween Durchschnitte möglich. Man sieht leicht, daß dieses theils von dem Winkel RAP, theils auch von der Grösse der Linie AQ $=$ C abhängt. Wir werden um beydes zu bestimmen, den Winkel RAP aufsuchen, unter welchem, wenn AQ angenommen wird, QM die Linie NAM berührt. Denn man sieht leicht, daß dieses der kleinste ist, unter welchem Durchschnitte möglich sind. Es sey demnach

$$AP = x,$$
$$PM = z$$
$$x^4 + Ax^2 = z,$$

so ist $\tang.\varphi = B = \frac{dz}{dx} = 4x^3 + 2Ax.$

$$PR = x\tang.\varphi = 4x^4 + 2Ax^2$$
$$PM = z = x^4 + Ax^2$$

demnach

$$PR - PM = 3x^4 + Ax^2 = C$$
$$x = \sqrt{(-\tfrac{1}{6}A + \sqrt{(\tfrac{1}{36}A^2 + C)})}$$

folglich

$$B = 4\left[-\tfrac{1}{6}A + \sqrt{(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{C}{3})}\right]^{3:2} + 2A\left[-\tfrac{1}{6}A + \sqrt{(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{C}{3})}\right]^{1:2}$$

Dieses ist demnach die kleinste Tangente, unter welcher zween Durchschnitte, und daher auch zwo Wurzeln der Gleichung

$$o = x^4 + Ax^2 \pm Bx + C$$

möglich sind. Wenn nemlich, wie wir es hier nehmen, A und C positiv sind, so muß

$$B > 4\left[-\tfrac{1}{6}A + \sqrt{(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{C}{3})}\right]^{3:2} + 2A[-\tfrac{1}{6}A + \sqrt{(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C)}]^{1:2}$$

seyn.

§. 11.

Diese Formel würde gar keinen Werth geben, wenn man darin C negativ setzen wolte, es sey denn, daß man auch A negativ machte. Dieses will nun sagen, daß nur in dem Fall, wo A negativ ist, der Punct Q über der Linie AP, oder innert der Linie NAM sey, und dadurch eine Tangente gezogen werden kann.

Wie

Wie dieses möglich wird, werden wir nun noch untersuchen, indem wir uns zu der Betrachtung des zweyten allgemeinen Falles wenden, in welchem nemlich A negativ ist.

§. 12.

Es sey demnach

$$x^4 - Ax^2 = +Bx - C = +z.$$

Man setze Fig. II.

$$AP = x$$

$$PM = z$$

so wird sich vermittelst der Gleichung

$$x^4 - Ax^2 = -z$$

die Linie NEBAMFL construiren lassen, welche allemal eine in A eingebogene Gestalt hat, weil die kleinern Ordinaten anfangs negativ und erst nachgehends positiv werden, nachdem $x^2 > A$ wird. Diese Linie hat ferner immer in A ein maximum, in E, F zwey minima, und zwischen E, A, F zween Wendungspuncten. Dieses macht, daß sich, jedoch unter gewissen Bedingungen, drey parallele Tangente ziehen lassen, so ofte nemlich eine an dem eingebogenen Theile gezogen wird.

§. 13.

Hiebey giebt es nun, in Ansehung der Durchschnitte, drey verschiedene Fälle. Einmal, so oft eine Linie den eingebogenen Theil EAF durchschneidet, so durchschneidet sie auch die auswertigen EN, FL. Man sieht leicht, daß die Linien EF, BD, deren erstere die beyden minima berührt, die andere aber die Tangente bey dem Wendungspunct B ist, die äussersten von denen sind, welche vier Durchschnitte machen können, und daß eben so der Winkel BDC unter allen der kleinste ist, ingleichen daß jede Linie, welche vier Durchschnitte machen solle, zwischen C und D durchgehen müsse, folglich in der Gleichung das vierte Glied, wenn es positiv ist, nicht grösser als AD, und wenn es negativ ist, nicht grösser als AC seyn könne, dafern alle vier Wurzeln sollen können real seyn. Diese zween Grenzpuncten lassen sich nun leicht bestimmen. Denn für C wird z ein minimum, demnach

$$dz = (4x^3 - 2Ax)\,dx = 0$$
$$x = \sqrt{\tfrac{1}{2}A}$$
$$AC = x^4 - Ax^2 = \tfrac{1}{4}A^2 - \tfrac{1}{2}A^2 = -\tfrac{1}{4}A^2$$

Sodann wird D durch die Tangente des Wendungspunct bestimmt. Für diesen ist

$$ddz = (12x^2 - 2A)\,dx^2 = 0$$
$$AG = x = \sqrt{\tfrac{1}{6}A}$$
$$GB = x^4 - Ax^2 = \tfrac{1}{36}A^2 - \tfrac{1}{6}A^2 = -\tfrac{5}{36}A^2$$

Es ist aber

$$(GB + AD) : AG = dz : dx = 4x^3 - 2Ax = -\tfrac{4}{3}A\sqrt{\tfrac{1}{6}A},$$

folglich

$$(\tfrac{5}{36}A^2 + AD) : \sqrt{\tfrac{1}{6}A} = \tfrac{4}{3}A\sqrt{\tfrac{1}{6}A}$$
$$AD = \tfrac{4}{18}A^2 - \tfrac{5}{36}A^2 = \tfrac{1}{12}A^2.$$

§. 14.

Fällt demnach das vierte Glied zwischen CD, so sind zwo Wurzeln nothwendig real, und die zwo andern können es seyn, wenn B nicht zu groß ist. Es sey z. E. das vierte Glied $C = AQ$. Man ziehe aus Q die Tangente QM, und durch M die Ordinate MP; so ist

$$AP = x$$
$$PM = +z$$

Nun ist $x^4 - Ax^2 = +z$

$$\frac{dz}{dx} = \text{tang.}\, MTP = 4x^3 - 2Ax = +B$$

$$Qm = -Bx = 4x^4 - 2Ax^2$$
$$PM \quad = x^4 - Ax^2$$

$$Qm - PM = 3x^4 - Ax^2 = +C.$$

Dieses giebt nun eben so wie vorhin (§. 10.)

$$B = 4\left[+\tfrac{1}{6}A \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{C}{3}\right)}\right]^{3:2} - 2A\left[+\tfrac{1}{6}A \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C\right)}\right]^{1:2}$$

welches demnach die Lage der aus dem Punct Q gezogenen Tangente angiebt, welche zugleich die Grenzlinie der realen Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^4 - Ax^2 \pm Bx \pm C$$

ist. Wir werden nun sehen, wie sich diese Grenzen nach den verschiedenen Werthen des letzten Gliedes C richten. Und da haben wir folgende Fälle:

I°. Wenn C positiv ist, so fällt Q unterhalb A. Ist nun in diesem Fall C grösser als $\frac{1}{4}A^2$, so fällt Q unter die Linie EF, zwo Wurzeln sind unmöglich, und sollen die übrigen beyden möglich seyn, so muß

$$B > 4[+\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C)]^{3:2} - 2A[+\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C)]^{1:2}$$

seyn, wiedrigenfalls sind alle vier unmöglich.

II. Ist aber C kleiner als $\frac{1}{4}A^2$, so fällt Q zwischen A C, und da sind zwo Wurzeln nothwendig real. Sollen es die beyden andern auch seyn, so muß

$$B < 4[+\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C)]^{3:2} - 2A[+\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 + \tfrac{1}{3}C)]^{1:2}$$

seyn. Denn in diesem Fall hat die Tangente QM eine umgekehrte Lage, weil sie in EF durch den 90ten Grad geht.

III. Ist hingegen C negativ und kleiner als AD, so fällt Q nicht nur über A, sondern die Formel giebt, in diesem Fall, für B zween reale Werthe. Dieses will nun sagen, daß wenn z. E. C = Aq ist, durch den Punct q zwo Tangenten qk, qn können gezogen werden. Demnach muß in diesem Falle

$$B < 4[+\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 - \tfrac{1}{3}C)]^{3:2} - 2A[+\tfrac{1}{6}A + \surd(\tfrac{1}{36}A^2 - \tfrac{1}{3}C)]^{1:2}$$

und

$$B > 4[+\tfrac{1}{6}A - \surd(\tfrac{1}{36}A - \tfrac{1}{3}C)]^{3:2} - 2A[+\tfrac{1}{6}A - \surd(\tfrac{1}{36}A^2 - \tfrac{1}{3}C)]^{1:2}$$

seyn.

seyn. Wiedrigenfalls sind nur zwo Wurzeln real.

IV. Ist endlich C negativ und grösser als AD, so giebt die Formel für B gar keinen realen Werth. Das will nun sagen, man könne durch den Punct Q, wenn derselbe über D hinauf fällt, keine Tangente ziehen. Es sind auch in diesem Fall nothwendig zwo Wurzeln real, und zwo unmöglich.

§. 15.

Wenn in der Gleichung das Glied B = o ist, so lassen sich alle diese Formeln sehr abkürzen. Denn so sind

I°. in der Gleichung

$$o = x^4 + Ax^2 + C$$

alle vier Wurzeln unmöglich.

II. In der Gleichung

$$o = x^4 \pm Ax^2 - C$$

sind immer zwo Wurzeln real und zwo unmöglich.

III. In der Gleichung

$$o = x^4 - Ax^2 + C$$

sind alle vier Wurzeln real, wenn C kleiner als $\frac{1}{4}A^2$ ist. Ist aber C grösser als $\frac{1}{4}A^2$ so sind alle vier Wurzeln unmöglich. Alles dieses erhellet auch daraus, daß die Gleichung

$$o = x^4 - ax^2 + b^2$$

aufgelöst, die Wurzeln

$$2x = \pm\surd(a + 2b) \pm \surd(a - 2b)$$ giebt.

§. 16.

Ist hingegen der zweyte Coefficient $A = 0$, so haben wir die erste Figur, und da sind immer zwo Wurzeln unmöglich. Die übrigen zwo sind real, wenn C negativ ist. (§. 9.) Ist aber C positiv, so sind diese zwo Wurzeln nur alsdann real, wenn

$$B > 4\left(\frac{C}{3}\right)^{3:4}$$

oder $27B^4 > 256\,C^3$ ist.

§. 17.

Man wird übrigens aus dem §. 10. und §. 14. ersehen, daß die hier gebrauchte Methode deswegen angieng, weil sich aus der Gleichung

$$3x^4 \pm Ax^2 = C$$

die Wurzel sehr leicht ausziehen liesse. Ungeachtet aber dieses Verfahren bey höhern Gleichungen so unbedingt nicht angeht, so finden sich doch ganze Classen derselben, bey denen es angebracht werden kann. So z. E. lassen sich auf diese Art bey jeder Gleichung von drey Gliedern

$$x^m + Ax + B = 0$$

und so auch bey jeder Gleichung von folgender Form

$$x^{2m} + Ax^m + Bx + C = 0$$

die Anzahl der realen Wurzeln und die Schranken ihrer Möglichkeit bestimmen. Ich werde mich aber hier dabey nicht lange aufhalten, sondern zu andern Betrachtung fortschreiten, die sich über die Gleichungen machen lassen.

§. 18.

§. 18.

Seit dem man gefunden, daß jede Gleichung als ein Product von einer gewissen Anzahl Gleichungen vom ersten Grade angesehen werden kann, und daß sich mit den Wurzeln verschiedene Veränderungen vornehmen lassen, so hat man mit solchen Veränderungen verschiedene Proben gemacht, und zu dem Ende für die Wurzel x, bald $y \pm a$, bald $y\, a$, bald $y : a$, bald auch y^n gesetzt, und dadurch die Gleichung in eine andere verwandelt, die man zu verschiedenen Absichten besser gebrauchen konnte. Besonders wird, wenn man $x = y^n$ setzt, und n eine ganze Zahl ist, die Gleichung in eine andere verwandelt, welche von n mal höherm Grade ist, und daher n mal mehr Wurzeln hat. Sind hiebey alle Wurzeln x negativ, so werden alle Wurzeln y unmöglich, so oft n eine gerade Zahl ist. Und so viele Wurzeln x negativ sind, wird man n mal so viel unmögliche Wurzeln y haben. Sind hingegen alle Wurzeln x positiv, und n ist eine gerade Zahl, so wird man für jede Wurzel x zwo mögliche, und $n - 2$ unmögliche Wurzeln y haben. Ist aber n eine ungerade Zahl, so erhält man für jede Wurzel x eine mögliche, und $n - 1$ unmögliche Wurzeln. Sind endlich einige Wurzeln x unmöglich, so erhält man für jede derselben n unmögliche Wurzeln y. Alles dieses folgt ohne Mühe aus der Gleichung

$$y^n - x = 0.$$

§. 19.

Will man hiebey für n eine gebrochene Zahl setzen, z. E. $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ rc. so wird man mehrentheils eine Gleichung erhalten, worin die Exponenten von y gebrochne Zahlen sind, und damit läßt sich nicht viel ausrichten. Ich sage mehrentheils: denn hat x an sich schon solche Dignitäten, die sich durch einen Bruch n aufheben, oder auf ganze Zahlen bringen lassen, so ist dieses ein Fall, bey welchem man schon oft mit Vortheil $y^n = x$ gesetzt hat. So z. E. hatten wir oben (§. 2.) die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = a^6 + 2a^4A + A^2a^2 &- B^2. \\ -4Ca^2 & \end{aligned}$$

Da sich hier alle Exponenten von a durch 2 dividiren lassen, so kann man

$$a = y^{1:2}$$

setzen, und dadurch die Gleichung in

$$\begin{aligned} 0 = y^3 + 2Ay^2 + A^2y &- B^2 \\ -4Cy & \end{aligned}$$

verwandeln, welche nun nur vom dritten Grade ist. Dieses wäre nun nicht angegangen, wenn in der ersten Gleichung ungerade Exponenten von a vorgekommen wären.

§. 20.

Man hätte sich aber nach der Betrachtung der bisher erwähnten Verwandlungen zu folgenden Aufgaben wenden können, die wir hier auflösen werden: **Eine Gleichung von jedem**

dem Grade in eine andere zu verwandeln, deren Wurzeln Quadrate, Cubi oder jede Dignitäten von den Wurzeln der erstern sind? Ungeachtet die Methode zur Auflösung dieser Aufgabe allgemein ist, so werden wir doch bey den Quadraten anfangen, weil dieser eine besondere Auflösung der Aufgabe zulassen.

§. 21.

Es sey demnach eine jede Wurzel der fürgegebenen Gleichung

$$x + a = 0.$$

Man nehme ganz willkührlich noch eine andere

$$x - a = 0$$

und multiplicire diese beyde Gleichungen mit einander, so hat man

$$x^2 - a^2 = 0.$$

Man setze nun

$$x^2 = y$$

so ist

$$y - a^2 = 0$$

demnach y das Quadrat der Wurzel x. Hiebey haben wir nun weiter nichts gethan, als daß wir zu der Wurzel — a noch eine andere + a genommen haben. Es mag nun a positiv oder negativ seyn, so erhält man immer

$$y - a^2 = 0$$

eine positive Wurzel der neuen Gleichung. Da man aber die Gleichung vorerst auflösen müste, wenn man dieses mit jeder Wurzel x besonders vor-

vornehmen wolte, so haben wir nur noch zu sehen, wie es ohne die Auflösung der Gleichung geschehen kann.

§. 22.

Nun weiß man, daß bey jeder Gleichung die positiven Wurzeln in negative, und die negativen in positive verwandelt werden, wenn man bey dem zweyten, vierten, sechsten &c. Gliede das Zeichen verwechselt. Man darf daher nur die Gleichung, so durch diese Verwechslung der Zeichen entsteht, mit der fürgegebenen multipliciren, so werden in dem Product alle ungerade Dignitäten von $x = 0$, und damit kann man $x^2 = y$ setzen, um die Gleichung zu erhalten, deren Wurzeln Quadrate von den Wurzeln der fürgegebenen Gleichung sind.

§. 23.

Es sey demnach überhaupt

$$0 = x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + c x^{m-3} + \text{\&c.}$$

so macht man

$$0 = x^m - a x^{m-1} + b x^{m-2} - c x^{m-3} + \text{\&c.}$$

Werden nun diese Gleichungen mit einander multiplicirt, so ist

$$\begin{array}{lllll}
0 = x^{2m} & + 2b\,x^{2m-2} & + 2d\,x^{2m-4} & + 2f\,x^{2m-6} & + \text{\&c.} \\
 & - aa\,.. & - 2ac\,.. & - 2ae\,.. & \\
 & & + bb\,.. & + 2bd\,.. & \\
 & & & - cc\,.. &
\end{array}$$

Setzt

Setzt man demnach

$$xx = y$$

so erhält man

$$\begin{aligned} o = y^m &+ 2b\,y^{m-1} + 2d\,y^{m-2} + 2f\,y^{m-3} + \text{ꝛc.} \\ &- aa.. \quad - 2ac.. \quad - 2ae.. \\ &\qquad\quad + bb.. \quad + 2bd.. \\ &\qquad\qquad\qquad\quad - cc.. \end{aligned}$$

eine Gleichung deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln der Gleichung

$$o = x^m + a\,x^{m-1} + b\,x^{m-2} + e\,x^{m-3} + \text{ꝛc.}$$

sind. Wir werden nun hievon ein und andern Gebrauch machen.

§. 24.

Es sey z. E. die cubische Gleichung

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

wird diese mit

$$o = x^3 - ax^2 + bx - c$$

multiplicirt, und in dem Producte $x^2 = y$ gesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} o = y^3 &+ 2by^2 - 2acy - cc \\ &- aay^2 + bby \end{aligned}$$

Es ist unnöthig zu erinnern, daß man jede der Coefficienten a, b, c negativ nehmen könne, wenn in einem fürgegebenen Fall nicht alle Glieder positiv sind.

§. 25.

Man setze nun die letzte Gleichung

$$o = y^3 + Ay^2 + By - CC,$$

so

so kann man den Rückweg nehmen, und die erstere wiederum daraus herleiten, indem man die Coefficienten a, b, c durch A, B, C bestimmt. Dieses will sodann sagen: *Wenn eine cubische Gleichung gegeben, eine andere zu finden, deren Wurzeln Quadratwurzeln der ersten sind.* Diese Aufgabe ist nun nicht mehr so einfach, wie die vorhergehende, weil man an statt einer Gleichung mehrere findet, die der Bedingung genügen leistet. Denn jede Quadratzahl hat sowohl eine positive als negative Wurzel, und beyde thun der Bedingung ein Genügen. Man setze die Wurzeln der Gleichung

$$0 = y^3 + Ay^2 + By - CC$$

seyn p^2, q^2, r^2, so sind die Quadratwurzeln davon

$$\begin{matrix} +p, & +q, & +r \\ -p & -q & -r \end{matrix}$$

aus diesen lassen sich nun 8 cubische Gleichungen machen, deren Wurzeln

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
$+p$	$+p$	$+p$	$+p$	$-p$	$-p$	$-p$	$-p$
$+q$	$+q$	$-q$	$-q$	$+q$	$+q$	$-q$	$-q$
$+r$	$-r$	$+r$	$-r$	$+r$	$-r$	$+r$	$-r$

sind. Man würde daher auf eine Gleichung vom 8ten Grade verfallen, wenn der letzte Coefficient $CC = cc$ nicht an sich schon zwo allgemeine Classen angäbe, wodurch die Gleichung auf den vierten Grad herunter gesetzt wird.

§. 26.

§. 26.

Um aber die Auflösung vorzunehmen, so haben wir

$$cc = CC \text{ und daher } c = C$$
$$2b - aa = A$$
$$bb - 2ac = B = bb - 2aC$$

Hieraus findet man

$$o = a^4 + 2Aa^2 - 8Ca + A^2 - 4B$$

§. 27.

Diese Gleichung werde ich eben hier nicht auflösen, sondern noch einen andern Ruckweg nehmen, und zeigen, wie wenn man jede Gleichung vom vierten Grade, deren zweytes Glied = o ist, mit der gegenwärtigen vergleicht, man auf die cubische Gleichung

$$o = y^3 + Ay^2 + By - CC$$

kommen, und nachdem man ihre Wurzeln p^2, q^2, r^2 gefunden, sodann auch die Wurzeln der Gleichung vom vierten Grade haben könne, welche man mit

$$o = a^4 + 2Aa^2 - 8Ca + A^2 - 4B$$

verglichen hatte. Denn da a der Coefficient des zweyten Gliedes der Gleichung

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

und folglich die Summe ihrer Wurzeln ist, so ist

$$a = p + q + r.$$

§. 28.

§. 28.

Da es genug ist, dieses Verfahren in einem Beyspiele zu zeigen, so werde ich die oben (§. 4.) schon gebrauchte Gleichung

$$0 = x^4 - 15x^2 + 10x + 24,$$

oder, wenn wir a für x setzen

$$0 = a^4 - 15a^2 + 10a + 24$$

dazu gebrauchen. Diese mit

$$0 = a^4 + 2Aa^2 - 8C + A^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - 4B$$

verglichen, giebt

$$A = -\tfrac{15}{2}$$
$$C = -\tfrac{5}{4}$$
$$B = +\tfrac{129}{16}$$

demnach, wenn diese Werthe in der Gleichung

$$0 = y^3 + Ay^2 + By - CC$$

gesetzt werden,

$$0 = y^3 - \tfrac{15}{2}y^2 + \tfrac{129}{16}y - \tfrac{25}{16}$$

eine cubische Gleichung, von deren Auflösung die Auflösung der fürgegebenen Gleichung vom 4ten Grade abhängt.

§. 29.

Man setze, um erstlich die Brüche aufzuheben,

$$y = \tfrac{1}{4}v$$

so ist

$$0 = v^3 - 30v^2 + 129v - 100$$

Ferner setze man, um das zweyte Glied wegzuschaffen,

$$v = z + 10,$$

so ist

$$0 = z^3 - 171z - 810.$$

Vergleicht man diese Gleichung eben so wie oben (§. 2.) mit

$$0 = z^3 - \tfrac{3}{4}rrz - \tfrac{1}{4}rrD,$$

so findet man

$$\tfrac{3}{4}rr = 171$$

$$\tfrac{1}{4}rrD = 810$$

folglich

$$r = \sqrt{228}$$

$$D = \frac{270}{19}$$

welches eben die Werthe sind, die wir oben (§. 4.) gefunden haben. Wir haben demnach auf eben die Art die Wurzel $z = 15$, und damit die beyden übrigen $z = -6$ und $z = -9$. Da nun $v = z + 10$ ist, so sind 25, 4, 1 die drey Werthe von v, und eben so $\frac{25}{4}$, 1, $\frac{1}{4}$ die drey Werthe von y. Da nun $y = x^2$ ist, so sind $\pm\frac{5}{2}$, ± 1, $\pm\frac{1}{2}$ die drey Werthe von x. Nun ist a deren Summe, demnach ist

$$a = \pm\tfrac{5}{2} \pm 1 \pm \tfrac{1}{2}$$

dieses giebt achterley Werthe, von denen wir aber nur

$$a = +\tfrac{5}{2} + 1 - \tfrac{1}{2} = +3$$

$$a = +\tfrac{5}{2} - 1 + \tfrac{1}{2} = +2$$

$$a = -\tfrac{5}{2} - 1 - \tfrac{1}{2} = -4$$

$$a = -\tfrac{5}{2} + 1 + \tfrac{1}{2} = -1$$

 gebrau-

gebrauchen, welche der fürgegebenen Gleichung Genügen thun.

§. 30.

So ofte in der Gleichung (§. 23.)

$$0 = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{etc.}$$

alle Wurzeln real sind, sie mögen nun positiv oder negativ seyn, so ofte sind auch in der andern Gleichung

$$\begin{array}{llll} 0 = y^m + 2by^{m-1} & + 2dy^{m-2} & + 2fy^{m-3} & + \text{etc.} \\ \quad\;\; - aa & - 2ac.. & - 2ae.. & \\ & + bb.. & + 2bd.. & \\ & & - cc.. & \end{array}$$

die Wurzeln nicht nur real, sondern sämtlich positiv, weil sie Quadrate von den Wurzeln x sind. Wird demnach diese zweyte Gleichung in Zahlen gerechnet, so wird sich jedesmal finden, daß die Zeichen + — der Ordnung nach abwechseln.

§. 31.

Findet sich aber diese einförmige Abwechselung nicht, so ist es nothwendig ein Zeichen, daß in der ersten Gleichung einige Wurzeln unmöglich seyn müssen. Es sey z. E. die Gleichung

$$0 = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

wird diese mit

$$0 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$$

multiplicirt, so ist das Product, wenn man $x^2 = y$ setzt,

$$0 = y^4 + 4y^3 + 10y^2 + 4y + 1.$$

Da nun hier gar keine Abwechselung der Zeichen ist, so hat die Gleichung

$$0 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$$

nothwendig unmögliche Wurzeln.

§. 32.

Es läßt sich aber diese Anmerkung nicht umkehren, weil der unmöglichen Wurzeln ungeachtet, die Zeichen zuweilen dennoch einförmig abwechseln können. Um dieses auf eine allgemeinere Art aufzuklären, und zugleich die Umstände zu bestimmen, wo die Abwechselung der Zeichen auch bey den unmöglichen Wurzeln statt hat, so sey eine derselben

$$0 = x + a + b\sqrt{-1}.$$

Sind nun alle Coefficienten der Gleichung rational, so hat die Gleichung nothwendig noch eine andere Wurzel von der Form

$$0 = x + a - b\sqrt{-1}.$$

Werden diese beyden Wurzeln mit einander multiplicirt, so ist das Product

$$0 = x^2 + 2ax + \begin{matrix} aa \\ +bb \end{matrix}$$

ein Factor der Gleichung. Man nehme nun den Factor

$$0 = x^2 - 2ax + \begin{matrix} aa \\ +bb \end{matrix}$$

und multiplicire damit den erstern, so ist, wenn man $x^2 = y$ setzt, das Product

$$0 = y^2 + 2(bb - aa)y + (aa + bb)^2$$

der correspondirende Factor derjenigen Gleichung, deren Wurzeln y, Quadrate der Wurzeln x werden sollen. Ist nun hiebey $a > b$, so wird in diesem Factor das zweyte Glied negativ, und damit hat, der unmöglichen Wurzel unerachtet, die Abwechselung der Zeichen statt. Man sieht leicht, daß eine Gleichung von lauter unmöglichen Wurzeln aus lauter solchen Wurzeln

$$0 = x \pm a \pm b\sqrt{-1}$$

wo $a > b$ ist bestehen, und damit in der zweyten Gleichung (§. 30.) eine einförmige Abwechselung der Zeichen statt finden kann. Man sieht aber auch, daß, wenn in allen Wurzeln $a < b$ ist, alsdann in dieser zweyten Gleichung nothwendig alle Zeichen + sind. Mischen sich aber beyde Fälle durcheinander, oder kommen zu den unmöglichen Wurzeln noch reale hinzu, so kann man für die Folge und Abwechselung der Zeichen keinen so unbedingten Schluß machen, ungeachtet man, wenn die Abwechselung der Zeichen nicht durchgängig ist, sicher schliessen kann, daß in der ersten Gleichung unmögliche Wurzeln seyn müssen.

§. 33.

Wenn man zu dem Factor

$$0 = y^2 + 2(bb - aa)y + (aa + bb)^2$$

den Factor

$$0 = y^2 - 2(bb - aa)y + (aa + bb)^2$$

nimmt, und indem man beyde mit einander

multi-

multiplicirt, in dem Producte $y^2 = z$ setzt, so erhält man

$$0 = z^2 - 2(a^4 - 6a^2 b^2 + b^4)y^2 + (aa+bb)^4$$

einen Factor derjenigen Gleichung, deren Wurzeln Biquadrate von x sind. In diesem Factor ist nun das zweyte Glied alsdenn negativ, wenn

$$a^4 + b^4 > 6a^2 b^2$$

oder $a^4 + 2a^2 b^2 + b^4 > 8a^2 b^2$

oder $a^2 + b^2 > 2ab\sqrt{2}$

ist, welches sich zuträgt, so ofte entweder

$$a > b(1 + \sqrt{2})$$

oder $b > a(1 + \sqrt{2})$

ist. Da demnach hier nur erfordert wird, daß a, b in grösserer Verhältniß ungleich seyn, als 1 zu $1 + \sqrt{2}$ ist; so trägt sich dieses öfters zu, als die Bedingung bey den Quadraten, welche fordert, daß $a > b$ seyn müsse. Es kann daher auch leichter geschehen, daß eine Abwechselung der Zeichen statt findet, wenn man eine Gleichung in eine solche verwandelt, deren Wurzeln Biquadrate der Wurzeln der erstern sind. Indessen kann allerdings auch das Gegentheil zutreffen.

§. 34.

So z. E. haben wir vorhin (§. 31.) gesehen, daß die Gleichung

$$0 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$$

mit

$$0 = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

vier Gleichungen vom ersten Grade, aus denen man

$$A = -a$$
$$B = +aa - b$$
$$C = ab$$
$$D = bb$$

erhält. Da nun nach der zweyten Absicht

$$\alpha = C + aB + bA$$
$$\beta = bD$$

ist, so erhält man hiedurch die gesuchte Gleichung

$$0 = z^2 - 3abz + b^3 + a^3 \,..$$

deren Wurzeln die Cubi der Wurzeln von

$$0 = x^2 + ax + b$$

sind.

§. 37.

Es sey z. E.

$$0 = x^2 - 10x + 9$$

eine Gleichung, deren Wurzeln offenbar 1 und 9 sind; so ist

$$a = -10$$
$$b = +9$$

demnach

$$a^3 - 3ab = -1000 + 270 = -730$$
$$b^3 = 729$$

und

$$0 = z^2 - 730z + 729$$

eine Gleichung deren Wurzeln wiederum offenbar 1 und 729, folglich die Cubi von 1 und 9 sind.

§. 38.

§. 38.

Um noch ein Beyspiel anzubringen, so sey die cubische Gleichung

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

und diese solle in eine andere

$$o = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

verwandelt werden, so, daß die Wurzeln der letztern die Cubi der Wurzeln der erstern seyn. Da nun hier $z = x^3$ ist, so verwandelt sich die letztere Gleichung in

$$o = x^9 + \alpha x^6 + \beta x^3 + \gamma.$$

Da diese vom neunten Grade ist, so muß die fürgegebene

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

mit einem Factor oder Gleichung vom sechsten Grade

$$\begin{aligned} o = x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 \\ + Ex + F \end{aligned}$$

multiplicirt, und in dem Producte

$$\begin{array}{llllllll} o = x^9 & + Ax^8 & + Bx^7 & + Cx^6 & + Dx^5 & + Ex^4 & + Fx^3 & \\ & + a.. & + aA.. & + aB.. & + aC.. & + aD.. & + aE.. & + aFx^2 \\ & & + b.. & + bA.. & + bB.. & + bC.. & + bD.. & + bE.. & + bFx \\ & & & + c.. & + cA.. & + cB.. & + cC.. & + cD.. & + cE.. & + cF \end{array}$$

das 2, 3, 5, 6, 8, 9te Glied $= o$ gesetzt werden, um die Coefficienten A, B, C, D, E, F zu bestimmen, und sodann die übrigen Glieder

$$\begin{array}{llll} o = x^9 + & Cx^6 & + Fx^3 & + cF \\ & + aB.. & + aE.. & \\ & + bA.. & + bD.. & \\ & + C.. & + cC.. & \end{array}$$

mit

$$o = x^9 + \alpha x^6 + \beta x^3 + \gamma$$

zu vergleichen. Wir haben demnach

$$o = A + a$$
$$o = B + aA + b$$
$$o = D + aC + bB + cA$$
$$o = E + aD + bC + cB$$
$$o = aF + bE + cD$$
$$o = bF + cE$$

sechs Gleichungen vom ersten Grade, durch deren Auflösung man

$$A = -a$$
$$B = +aa - b$$
$$C = +2c - ab$$
$$D = +bb - ac$$
$$E = -cb$$
$$F = +cc$$

findet. Da nun ferner

$$\alpha = C + aB + bA + c$$
$$\beta = F + aE + bD + cC$$
$$\gamma = cF$$

ist, so haben wir nur noch die gefundenen Werthe von A, B, C, D, E, F in diesen drey Gleichungen zu setzen, um die Coefficienten α, β, γ der gesuchten Gleichung

$$o = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

zu bestimmen, welche demnach folgende

$$\begin{array}{llll} o = z^3 & + 3cz^2 & + 3ccz & + c^3 \\ & - 3ab \,.. & - 3abc \,.. & \\ & + a^3 \,.. & + b^3 \,.. & \end{array}$$

seyn

seyn wird. Die Wurzeln dieser Gleichung sind demnach die Cubi der Wurzeln von der fürgegebenen

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

§. 39.

Es sey z. E. die Gleichung

$$o = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$$

deren Wurzeln 1, 2, 4 sind, so ist

$$a = -7$$
$$b = +14$$
$$c = -8$$

demnach

$$3c - 3ab + a^3 = -73$$
$$3cc - 3abc + b^3 = +584$$
$$c^3 = -512$$

folglich die gesuchte Gleichung

$$o = z^3 - 73z^2 + 584z - 512$$

deren Wurzeln 1, 8, 64, oder die Cubi von den Wurzeln 1, 2, 4 sind.

§. 40.

Wenn in der fürgegebenen Gleichung das zweyte Glied $= o$, oder die Gleichung

$$o = x^3 + bx + c$$

ist, so ist auch in der gefundenen Gleichung $a = o$, und dieses macht dieselbe um ein merkliches einfacher, weil sie sodann schlechthin nur

$$o = z^3 + 3cz^2 + 3ccz + c^3$$
$$\quad + b^3z$$

ist,

ist, und sich daher in

$$o = (z + c)^3 + b^3 z$$

verwandelt, welches, weil $z = x^3$ ist,

$$o = z + c + bx$$

und daher die Gleichung

$$o = x^3 + c + bx,$$

oder $$o = x^3 + bx + c$$

wieder herfürbringt.

§. 41.

Da wir hier

$$z = x^3$$

haben, so ist

$$o = x^3 - z.$$

Diese Gleichung hat ausser der Wurzel

$$o = x - \sqrt[3]{z}$$

noch zwo andere

$$o = x + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{z}.(1 \pm \sqrt{-3})$$

welche folglich ebenfalls Wurzeln der Gleichung

$$o = x^9 + \alpha x^6 + \beta x^3 + \gamma$$

sind. Da nun diese Gleichung durch die Multiplication der beyden Gleichungen

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$o = x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$

heraus gebracht worden, und die Wurzeln der erstern dieser Gleichungen

$$o = x - \sqrt[3]{z}$$

sind, so sind die Wurzeln der leztern Gleichung nothwendig

o =

$$0 = x + \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{z}.\,(1 \pm \sqrt{-3}).$$

Wenn demnach entweder die Gleichung

$$0 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

oder die Gleichung

$$0 = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$$

aufgelöst worden, so ist ebenfalls die Gleichung

$$0 = x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F$$

oder, wenn wir für die Coefficienten ihre Werthe setzen,

$$0 = x^6 - ax^5 + aax^4 + 2cx^3 + bbx^4 - cbx + cc$$
$$- bx^4 - abx^3 - acx^4$$

so gut als aufgelöst. Man hat sich aber darüber nicht zu verwundern: denn die Coefficienten dieser Gleichung werden sämtlich durch a, b, c bestimmt. Daher kann man nur drey, oder wenn man auch $x = v + k$, oder $x = x : k$ setzt, nur vier derselben willkührlich bestimmen. Die übrigen sind sodann durch diese zugleich mit bestimmt.

§. 42.

Wir können hier, ehe wir uns zu der Umkehrung dieser Aufgabe wenden, theils noch einer andern Methode Erwähnung thun, theils noch folgenden Lehrsatz anführen, welcher aus der bisher gebrauchten Methode fließt, und überhaupt so viel sagen will: wenn eine Gleichung

$$0 = x^{mn} + \alpha x^{(m-1)n} + \beta x^{(m-2)n} + \gamma x^{(m-3)n} + \text{ꝛc.}$$

durch

durch die Gleichung

$$o = x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + c x^{m-3} + \text{rc.}$$

getheilt werden kann, und in ersterer $x^n = z$ gesetzt wird, so sind die Wurzeln der Gleichung

$$o = z^m + \alpha z^{m-1} + \mathcal{E} x^{m-2} + \gamma z^{m-3} + \text{rc.}$$

die n^{te} Dignität der Gleichung

$$o = x^m + a x^{m-1} + b x^{m-2} + c x^{m-3} + \text{rc.}$$

§. 43.

Die andere Methode, deren wir hier nur Erwähnung thun werden, gründet sich auf den Newtonschen Satz, welcher angiebt, wie man, vermittelst der Coefficienten einer Gleichung, nicht nur die Summe der Wurzeln, sondern auch die Summe von jeden Dignitäten derselben finden könne. Diese Summen werden durch $\int x$, $\int x^2$, $\int x^3$, $\int x^4$ rc. angezeigt, so, daß $\int x^n$ die Summe der n^{ten} Dignität aller Wurzeln der Gleichung anzeige. Die Gleichung sey

$$o = x^m - a x^{m-1} + b x^{m-2} - c x^{m-3} + \text{rc.}$$

so ist

$$\begin{aligned}
\int x &= a \\
\int x^2 &= a \int x - 2b \\
\int x^3 &= a \int x^2 - b \int x + 3c \\
\int x^4 &= a \int x^3 - b \int x^2 + c \int x - 4d \\
&\&c.
\end{aligned}$$

Ferners, indem man $z = x^n$ setzt, sey wiederum die Gleichung

$$o = z^m - \alpha z^{m-1} + \mathcal{E} z^{m-2} - \gamma z^{m-3} + \text{rc.}$$

so

so ist ebenfalls

$$\int z = \alpha$$
$$\int z^2 = \alpha \int z - 2\beta$$
$$\int z^3 = \alpha \int z^2 - \beta \int z + 3\gamma$$
$$\int z^4 = \alpha \int z^3 - \beta \int z^2 + \gamma \int z - 4\delta$$
&c.

Da nun vermöge der Voraussetzung $z = x^n$ ist, so ist

$$\int z = \int x^n$$
$$\int z^2 = \int x^{2n}$$
$$\int z^3 = \int z^{3n}$$
&c.

Nun sind vermöge der erstern Gleichungen $\int x^n$, $\int x^{2n}$, $\int x^{3n}$ &c. durch a, b, c, d &c. gegeben, demnach hat man $\int z$, $\int z^2$, $\int z^3$ &c. und folglich lassen sich durch die letztern Gleichungen die Coefficienten α, β, γ, δ &c. und damit die Gleichung

$$0 = z^m - \alpha z^{m-1} + \beta z^{m-2} - \&c.$$

finden, deren Wurzeln die n^{te} Dignität von den Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^m - a x^{m-1} + b x^{m-2} - \&c.$$

seyn werden. Man sieht, ohne mein Erinnern, daß man dieses Verfahren weiter ausdehnen, und z. E.

$$\int z = \int x^n + A \int x^p + B \int x^q + \&c.$$
$$\int z^2 = \int x^{2n} + A^2 \int x^{2p} + B^2 \int x^{2q} + \&c.$$
&c.

setzen kann.

§. 44.

§. 44.

Um nun auf die Umkehrung dieser Aufgaben zu kommen, so werden wir zu dem Beyspiele des §. 36. zurücke kehren. Wir haben daselbst gesehen, daß wenn die Quadratgleichung

$$o = x^2 + ax + b$$

in

$$o = z^3 - 3abz + b^3$$
$$+ a^3 z$$

verwandelt wird, sodann die Wurzeln dieser letztern Gleichung Cubi von den Wurzeln der erstern sind. Es sey nun eine Quadratgleichung

$$o = z^2 + Az + B$$

gegeben, und diese solle in eine andere dergestalt verwandelt werden, daß dieser letztern Wurzeln Cubicwurzeln von denen der fürgegebenen Gleichung sind. Um dieses zu erhalten, so wird die Gleichung

$$o = z^2 + Az + B$$

mit

$$o = z^2 - 3abz + b^3$$
$$+ a^3 z$$

verglichen, um die Coefficienten a, b durch A und B zu bestimmen. Wir haben demnach

$$A = a^3 - 3ab$$
$$B = b^3$$

dieses giebt

$$b = \sqrt[3]{B}$$

und $\quad o = a^3 - 3a\sqrt[3]{B} - A.$

welches

welches eine cubische Gleichung ist, durch deren Auflösung man a findet. Die gesuchte Gleichung ist sodann

$$o = x^2 + ax + b.$$

Man sieht leicht, daß sowohl b als a drey Werthe hat, und daß man daher anstatt einer Gleichung neune findet, die der Aufgabe Genügen leisten.

§. 45.

Wir werden uns aber damit nicht aufhalten, sondern diese an sich schon umgekehrte Aufgabe noch auf eine andere Art umkehren. Es kann nemlich die letzte Gleichung

$$o = a^3 - 3a\sqrt[3]{B} - A$$

mit jeder Cubicgleichung

$$o = a^3 + pa + q$$

deren zweytes Glied mangelt, verglichen werden. Thut man dieses, so erhält man

$$A = -q$$
$$B = -\tfrac{1}{27}p^3$$

Da nun

$$o = z^2 + Az + B$$

ist, so darf man nur die gefundenen Werthe von A, B in dieser Gleichung setzen, um

$$o = z^2 - qz - \tfrac{1}{27}p^3$$

zu erhalten. Diese Gleichung aufgelöst, giebt die zwo Wurzeln

$$z = \tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}.$$

Nun ist $\qquad z = x^3$

demnach haben wir die zwo Wurzeln

$$x = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}q \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)})}$$

Nun ist vermöge der Gleichung

$$o = x^2 + ax + b$$

$-a$ die Summe der beyden Wurzeln x, demnach haben wir

$$-a = \sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q + \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]} + \sqrt[3]{[\tfrac{1}{2}q - \sqrt{(\tfrac{1}{4}q^2 + \tfrac{1}{27}p^3)}]}$$

welches die bekannte Cardanische Formel ist, die man nach den bisherigen Methoden, die Gleichung

$$o = a^3 + pa + q$$

aufzulösen, findet. Man sieht zugleich, daß die beyden Glieder, aus denen sie besteht, Cubicwurzeln von den Wurzeln der Gleichung $o = z^2 - qz - \frac{1}{27}p^3$ sind.

§. 46.

Um das Beyspiel des §. 38. ebenfalls noch umzukehren; so haben wir daselbst gesehen, daß wenn man jede cubische Gleichung

$$o = x^3 + ax^2 + bx + c$$

in

$$\begin{aligned} o = z^3 &+ 3cz^2 + 3ccz + c^3 \\ &- 3ab.. - 3abc... \\ &+ a^3.. + b^3.. \end{aligned}$$

verwandelt, sodann die Wurzeln dieser letztern Gleichung Cubi von den Wurzeln der erstern sind. Ist nun von diesen Gleichungen die letztere

tere gegeben, so, daß man

$$0 = z^3 + Az^2 + Bz + C^3$$

hat, so läßt sich die erstere finden, und dersel- ben Wurzeln werden sodann Cubicwurzeln der Wurzeln der fürgegebenen Gleichung seyn. Zu diesem Ende haben wir

$$A = 3c - 3ab + a^3$$
$$B = 3cc - 3abc + b^3$$
$$C^3 = c^3$$

und hieraus findet sich für a folgende Gleichung

$$0 = a^9 + 3(3C - A)a^6 + 3(3C - A)^2 . a^3 + (3C - A)^3$$
$$- \quad 27\, C.\, a^6 - (B - AC).\, a^3$$

eine Gleichung vom neunten Grade, welche aber in eine cubische verwandelt wird, wenn man $a^3 = v$ setzt. Ist a durch die Auflösung dieser Gleichung gefunden, so hat man

$$b = \frac{3C - A + a^3}{3a}$$

und damit die Gleichung, die zu suchen war,

$$0 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

welche aber, weil A 9 Werthe, C aber 3 hat, auf 27 Arten verändert werden kann. Man sieht überhaupt aus diesen Beyspielen, daß man auf desto weitläufigere Formeln verfällt, je höher die Dignitäten und Gleichungen sind, die man in einander zu verwandeln vornimmt.

§. 47.

Indessen wird es nicht undienlich seyn, hier noch anzuzeigen, daß sich die bisher gebrauchte

Methode ebenfalls auf andere Functionen der Wurzeln ausdehnen läßt. Man habe z. E. die Gleichung

$$o = x^2 + ax + b$$

und diese solle in eine andere

$$o = z^2 + \alpha z + \beta$$

verwandelt werden, so, daß jede Wurzel der letztern eine Function der Wurzeln der erstern sey, die wir durch

$$z = x^2 + mx + n$$

ausdrücken wollen. Um dieses zu erhalten, so setze man erstlich diesen Werth von z in der zweyten Gleichung. Nun ist

$$\begin{aligned} z^2 &= x^4 + 2mx^3 + 2nx^2 \\ &\qquad\qquad\quad + m^2x^2 + 2mnx + n^2 \\ +\alpha z &= \qquad\qquad\quad + \alpha x^2 + m\alpha x + n\alpha \\ +\beta &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \beta \end{aligned}$$

Da diese Gleichung vom vierten Grade ist, so muß die erstere

$$o = x^2 + ax + b$$

mit

$$o = x^2 + Ax + B$$

multipliciret werden, um ebenfalls ein Product vom vierten Grade

$$\begin{aligned} o = x^4 &+ ax^3 + bx^2 \\ &+ Ax^3 + Aax^2 + Abx \\ &\qquad\quad + Bx^2 + Bax + Bb \end{aligned}$$

zu haben. Vergleicht man nun die Coefficienten, so haben wir

$$2m = A + a$$
$$2n + \alpha + mm = b + Aa + B$$
$$2mn + m\alpha = Ab + Ba$$
$$n^2 + n\alpha + \beta = Bb$$

vier Gleichungen, durch welche sich α, β, A, B bestimmen lassen. Werden demnach diese aufgelöst, so findet sich

$$A = 2m - a$$
$$B = m^2 + b - ma$$
$$\alpha = ma - aa + 2b - 2n$$
$$\beta = bm^2 + bb - mba + n^2 - nma + na^2 - 2nb$$

und dadurch ist die Gleichung

$$o = z^2 + az + \beta$$

welche zu suchen war, bestimmt.

§. 48.

Es sey z. E. die Gleichung

$$o = x^2 - 10x + 16$$

in eine solche

$$o = z^2 + \alpha z + \beta$$

zu verwandeln, so, daß die Wurzeln der letztern eine Function

$$z = x^2 + 3x + 2$$

der Wurzeln der erstern seyn. Hier haben wir demnach

$$a = -10 \qquad m = +3$$
$$b = +16 \qquad n = +2$$

und hieraus finden sich die Werthe

$$A = +16 \qquad \alpha = -102$$
$$B = +55 \qquad \beta = +1080$$

demnach die gesuchte Gleichung

$$0 = z^2 - 102z + 1080.$$

Die Probe ist leicht gemacht. Denn die Wurzeln der Gleichung

$$0 = x^2 - 10x + 16$$

sind $+2$ und $+8$. Wird jede derselben in der Function

$$z = x^2 + 3x + 2$$

gesetzt, so erhält man die beyden Werthe $z = 12$ und $z = 90$. Und eben dieses sind auch die Wurzeln der für z gefundenen Gleichung

$$0 = z^2 - 102z + 1080.$$

§. 49.

Will man diese Aufgabe umkehren, und aus der Gleichung

$$0 = z^2 + \alpha z + \beta$$

die Gleichung

$$0 = x^2 + ax + b$$

finden, so müssen a, b durch α, β vermittelst der Gleichungen

$$\alpha = ma - aa + 2b - 2n$$
$$\beta = bm^2 + bb - mba + n^2 - nma + na^2 - 2nb$$

bestimmt werden. Man verfällt dadurch auf eine Gleichung vom vierten Grade, welche etwas weitläuftig ist. Ich werde sie nicht hersetzen, weil es hier bey der angezeigten Möglichkeit der Aufgabe sein bewenden haben kann.

§. 50.

§. 50.

Es läßt sich aber die Aufgabe noch auf eine andere Art umkehren. Man kann nehmlich die Function

$$z = x^2 + mx + n$$

und in derselben besonders die beyden Coefficienten m, n zum Quæsito machen, und da wird der hiebey vorkommende Fall am schicklichsten in Form eines Satzes und einer Aufgabe zugleich vorgetragen. Der Satz ist folgender: **Wenn zwo Quadratgleichungen**

$$0 = x^2 + ax + b$$
$$0 = z^2 + \alpha z + \beta$$

gegeben, so läßt sich, und zwar ohne die Gleichungen vorerst aufzulösen, die Wurzel der einen z als eine Function der Wurzel der andern ansehen, welche die rationale Form

$$z = x^2 + mx + n$$

hat. Die Aufgabe ist nun: **die Coefficienten** m, n **zu bestimmen.** Der Beweis und zugleich die Auflösung kömmt auf die (§. 47.) gefundene vier Gleichungen

$$2m = A + a$$
$$2n + \alpha + mm = b + Aa + B$$
$$2mn + m\alpha = Ab + Ba$$
$$nn + n\alpha + \beta = Bb$$

an. Werden aus diesen die beyden Grössen A, B, die wir nur, um die Aufgabe möglich zu machen, gebraucht haben, weggeschaft, so bleiben noch zwo Gleichungen für m und n, durch deren Auflösung

$$m = a \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha\alpha - 4\beta}{aa - 4b}\right)}$$

$$n = b - \tfrac{1}{2}\alpha \pm \tfrac{1}{2} a \sqrt{\left(\frac{\alpha\alpha - 4\beta}{aa - 4b}\right)}$$

gefunden, und damit die gesuchte Function

$$z = x^2 + mx + n$$

zugleich bestimmt wird.

§. 51.

Man setze z. E. wie vorhin die zwo Gleichungen

$$0 = x^2 - 10x + 16.$$
$$0 = z^2 - 102x + 1080.$$

so ist

$$a = -10 \qquad \alpha = -102$$
$$b = +16 \qquad \beta = +1080$$

Hieraus erhält man

$$\sqrt{(\alpha\alpha - 4\beta)} = \sqrt{6084} = 78$$
$$\sqrt{(aa - 4b)} = \sqrt{36} = 6$$

demnach $m = -10 \pm 13$

$$n = 16 + 51 \mp 65$$

dieses giebt

den einen Werth von $m = +3$.
den correspondirenden von $n = +2$.
den andern Werth von $m = -23$.
den correspondirenden von $n = +132$.

demnach die beyden Functionen

z =

$$z = xx + 3x + 2.$$
$$z = xx - 23x + 132.$$

Setzt man in jeder dieser Functionen die Werthe von x, welche 2 und 8 sind, so giebt jede die zween Werthe von z, nemlich 12 und 90. Demnach hat man die Wahl, welche von diesen Functionen man gebrauchen will. Solte man aber nur eine Wurzel von x wissen oder haben, oder dieselbe lieber gebrauchen wollen, so muß man sie in jeder von diesen zwo Functionen setzen, um die beyden Werthe von z zu erhalten.

§. 52.

Endlich kann die Aufgabe, wiewohl auf eine unbestimmtere Art, noch dergestalt umgekehrt werden, daß, wenn nur die Function

$$z = xx + mx + n$$

gegeben, zwo Gleichungen

$$o = xx + ax + b$$
$$o = zz + \alpha z + \beta$$

zu finden seyn, deren die erste x, die andere z besonders enthalte. Diese Aufgabe ist an sich unbestimmt, und dient daher fürnemlich nur, wenn in der fürgegebenen Function z und x als veränderlich angesehen werden. Denn hier sind die vier Coefficienten a, b, α, β vermittelst der vier Gleichungen

$$2m = A + a$$
$$2n + \alpha + mm = b + Aa + B$$
$$2mn + m\alpha = Ab + Ba$$
$$n^2 + n\alpha + \beta = Bb$$

zu suchen; demnach müssen A, B, als willkührliche Grössen beybehalten werden, und man findet

$$a = 2m - A$$
$$b = B - mA + mm$$
$$\alpha = AA + mA + 2B - 2n$$
$$\beta = BB - mAB + m^2B + n^2 - mnA - 2nB + nAA.$$

Da nun nur m und n gegeben sind, so können A, B willkührlich angenommen werden, und die Gleichungen

$$o = xx + ax + b$$
$$o = zz + \alpha z + \beta$$

werden immer der Function

$$z = xx + mx + n$$

ein Genügen thun; das will sagen, man wird aus der ersten dieser Gleichungen zwo Wurzeln x finden, welche den aus der zweyten gefundenen Wurzeln z entsprechen, und dieses geht nicht nur durch alle mögliche, sondern auch durch alle unmögliche Werthe von x und z.

§. 53.

Was bisher (§. 47. seqq.) von den Verhältnissen der beyden Quadratgleichungen

$$o = x^2 + ax + b$$
$$o = z^2 + \alpha z + \beta$$

und der Function

$$z = x^2 + mx + n$$

gesagt worden, ist in Absicht auf die dabey gebrauchte

gebrauchte Methode viel allgemeiner, weil es sich auf jede Gleichungen und rationale Functionen erstreckt. Alles dabey zielet überhaupt dahin, daß man mit den **Wurzeln der Gleichungen, ohne diese vorerst aufzulösen, jede Veränderungen vornehmen könne.** Und in diesem Stücke ist man in der Algebra noch zurücke geblieben, wie man es schon aus den bisher angeführten Beyspielen ersehen kann, welche ungleich weiter gehen, als wenn man nur $x+a$, $x-a$, ax, $x:a$ anstatt der Wurzel x setzt. Indessen hat man besonders mit den trigonometrischen Formeln Verwandlungen vorgenommen, welche denen, die wie hier für jede Gleichungen vorschlagen, sehr ähnlich sind, und an sich betrachtet, schwerer zu seyn scheinen, weil die Circulbögen, in Absicht auf die Sinus und Tangenten, transcendente Grössen sind.

§. 54.

Um aber dennoch auch, in Absicht auf jede Gleichungen, hierin den Weg gebähnt zu machen, so werden wir bey folgender Aufgabe anfangen. **Es seyn zwo Gleichungen**

$$0 = x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{etc.}$$

$$0 = y^n - \alpha x^{n-1} + \beta y^{n-2} - \gamma y^{n-3} + \text{etc.}$$

gegeben, und es solle, ohne diese vorerst aufzulösen, eine dritte Gleichung

$$0 = z^\lambda - Az^{\lambda-1} + Bz^{\lambda-2} - Cz^{\lambda-3} + \text{etc.}$$

daraus hergeleitet werden, so, daß jede Wur-

Wurzel z die Summe zwoer Wurzeln $x+y$ sey.

§. 55.

Ehe wir die Auflösung dieser Aufgabe hersetzen, werden wir einige Anmerkungen darüber voraus schicken. Einmal sieht man leicht, daß, wenn auch die Analysis so weit gebracht wäre, daß man die beyden ersten Gleichungen auflösen könnte, die dritte dennoch nicht wohl anders als durch eine weitläuftige Rechnung daraus würde hergeleitet werden, besonders in allen den Fällen, wo die Wurzeln irrational wären. Denn da würden nachgehends, wie wir bald sehen werden, diese irrationalen Größen sämtlich wieder aus der Rechnung wegfallen, weil, wenn die Coefficienten a, b, c, d rc. α, β, γ, δ rc. rational sind, die Coefficienten A, B, C, D rc. es nothwendig auch sind.

§. 56.

Sodann tragen wir hier die Aufgabe aufs allgemeinste vor. Wir nehmen in der dritten Gleichung so viele Wurzeln z an, als heraus kommen müssen, wenn jede Wurzel x zu jeder Wurzel y besonders addirt wird. Wenn demnach die Anzahl der Wurzeln der ersten Gleichung $=$ m, der andern $=$ n ist, so ist die Anzahl der Wurzeln, so die dritte Gleichung haben wird $=$ mn, und dieses bestimmt den Exponenten $\lambda =$ m n. Diese Anzahl kann alsdann vermindert werden, wenn in der ersten oder andern Gleichung, oder auch in beyden, etliche Wurzeln gleich sind. Man muß dieses aber voraus wissen, oder aus den Umständen schliessen können. Wir setzen hier alle Wurzeln ungleich, und um eine Einförmigkeit in der Rechnung beyzubehalten, alle positiv, weil, wenn in besondern Fällen einige, oder alle negativ sind, die Aenderung der Zeichen sich darnach einrichten läßt.

§. 57.

Diese so absolute Allgemeinheit trägt viel dazu bey, daß wir die Auflösung der Aufgabe einfacher machen, und auf ihre allgemeinste Gesetze bringen können. Und dazu werden uns die oben (§. 43.) angeführten Formeln von der Summe der Dignitäten der Wurzeln jeder Gleichung dienen können. Denn da hier die Coefficienten der beyden ersten Gleichungen gegeben sind, so sind, vermittelst dieser Formeln, auch die Summen von jeden Dignitäten ihrer Wurzeln gegeben. Es ist demnach nur die Frage, wie aus diesen Summen die Summen jeder Dignitäten der Wurzeln der dritten Gleichung gefunden werden können; das will sagen, wie sich aus $\int x^n$ und $\int y^n$ die Summe $\int (x+y)^n = \int z^n$ herleiten lasse. Denn sind diese gefunden, so dienen die vorbemeldeten Formeln (§. 43.) ebenfalls wiederum, um die gesuchten Coefficienten A, B, C &c. daraus zu bestimmen.

§. 58.

Man setze zu diesem Ende, P, Q, R &c. seyn die Wurzeln der ersten Gleichung; p, q, r &c. die Wurzeln der zweyten; so werden

$P+p$	$Q+p$	$R+p$ &c.
$P+q$	$Q+q$	$R+q$
$P+r$	$Q+r$	$R+r$
&c.	&c.	&c.

die Wurzeln der dritten seyn. Nun findet sich jede Dignität k dieser Wurzeln, vermittelst des *Newtonschen* Binomialsatzes. Es ist nemlich

$$(P+p)^k = P^k + k.P^{k-1}p + k.\frac{k-1}{2}.P^{k-2}p^2 + \&c.\ldots + p^k$$

$$(Q+p)^k = Q^k + k.Q^{k-1}p + k.\frac{k-1}{2}.Q^{k-2}p^2 + \&c.\ldots + p^k$$

$$(R+p)^k = R^k + k.R^{k-1}p + k.\frac{k-1}{2}.R^{k-2}p^2 + \&c.\ldots + p^k$$

&c.

Da man eben so viele Reihen für q, r, s &c. findet, als für p; so erhellt überhaupt hieraus folgendes:

1°. Wenn alle diese Dignitäten zusammen addirt werden, so erhält man so viele

P^k, Q^k, R^k &c.

als Wurzeln p, q, r &c. sind. Da nun die Anzahl dieser Wurzeln $=n$ ist, so ist die Summe von allen

$=n$

$= n(P^k + Q^k + R^k + \&c.) = n\,\mathfrak{f}x^k$.

2°. Auf gleiche Art erhält man so viele p^k, q^k, r^k &c. als Wurzeln P, Q, R &c. sind. Demnach ist die Summe von allen

$= m(p^k + q^k + r^k + \&c.) = m\,\mathfrak{f}y^k$.

3°. Dieses sind demnach die Summen der ersten und letzten Glieder aller Reihen. Die Summen der darauf folgenden ersten, zweyten, dritten ... w^{ten} Glieder, lassen sich auf eine allgemeine Formel bringen. Denn da sie einerley Coefficienten haben, so sind die w^{ten} Glieder, mit Weglassung des Coefficienten,

$$P^{k-w}(p^w + q^w + r^w + \&c.)$$
$$Q^{k-w}(p^w + q^w + r^w + \&c.)$$
$$R^{k-w}(p^w + q^w + r^w + \&c.)$$
&c.

daher ihre Summe

$$= \mathfrak{f}x^{k-w}.\,\mathfrak{f}y^w.$$

4°. Wird demnach in dieser Formel, der Ordnung nach, für w, 1, 2, 3, 4 2c. gesetzt, so erhält man

$$\mathfrak{f}(x+y)^k = \mathfrak{f}z^k = n\,\mathfrak{f}x^k + k\,\mathfrak{f}x^{k-1}.\mathfrak{f}y + \frac{k.k-1}{2}.\mathfrak{f}x^{k-2}\mathfrak{f}y^2 + \frac{k.k-1.k-2}{2\cdot 3}.\mathfrak{f}x^{k-3}.\mathfrak{f}y^3 + \&c.$$

welches die gesuchte Formel ist.

§. 59.

§. 59.

Diese Formel scheint in dem ersten und letzten Gliede einen besondern Coefficienten zu haben. Es läßt sich aber derselbe auch dadurch herleiten, daß $n = \int y^0$

$m = \int x^0$

ist. Denn $\int y^0$ will sagen, so viele Einheiten als die zweyte Gleichung Wurzeln hat, und $\int x^0$ so viele Einheiten, als Wurzeln der ersten Gleichung sind. Und damit bringen diese beyde Coefficienten keine Anomalie in die Formel. Diese Formel ist übrigens der Newtonschen in allem ähnlich, und unterscheidet sich nur darin, daß, anstatt daß in der Newtonschen, um eine Dignität heraus zu bringen, nur Dignitäten mit einander multiplicirt werden, in dieser ganzen Summen von Dignitäten mit einander multiplicirt werden müssen, und dadurch aber auch eine Summe von Dignitäten heraus gebracht wird, deren jede ein Binomium ist.

§. 60.

Setzen wir nun in dieser Formel für k der Ordnung nach 1, 2, 3, 4, 5, 6 2c. und bemerken dabey, daß wo ein Exponent von x, $= 0$ wird, man $\int x^0 = m$ setzen müsse, so haben wir

$$\int z = n \int x + m \int y$$
$$\int z^2 = n \int x^2 + 2 \int x . \int y + m \int y^2$$
$$\int z^3 = n \int x^3 + 3 \int x^2 . \int y + 3 \int x . \int y^2 + m \int y^3$$
$$\int z^4 = n \int x^4 + 4 \int x^3 . \int y + 6 \int x^2 . \int y^2 + 4 \int x . \int y^3 + m \int y^4 \text{ \&c.}$$

§. 61.

§. 61.

Um nun dieses Verfahren durch das einfachste Beyspiel zu erläutern, so seyn zwo Quadratgleichungen

$$0 = x^2 - ax + b$$
$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

gegeben, und es solle eine Gleichung gefunden werden, deren Wurzeln $z = x + y$ sind. Diese Gleichung ist nun (§. 56.)

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

weil die Summe der Exponenten $n + m = 2 + 2 = 4 = \lambda$ ist. Nun ist vermöge der Formel des §. 43.

$\int x = a$	$\int y = \alpha$
$\int x^2 = a^2 - 2b$	$\int y^2 = \alpha^2 - 2\beta$
$\int x^3 = a^3 - 3ab$	$\int y^3 = \alpha^3 - 3\beta\alpha$
$\int x^4 = a^4 - 4a^2b + 2bb$	$\int y^4 = \alpha^4 - 4\beta\alpha^2 + 2\beta\beta$

folglich

$$\int z = 2(a + \alpha)$$
$$\int z^2 = 2a^2 - 4b + 2\alpha^2 - 4\beta + 2a\alpha$$
$$\int z^3 = 2a^3 - 6ab + 2\alpha^3 - 6\alpha\beta + 3\alpha a^2 - 6\alpha b + 3a\alpha^2 - 6a\beta$$
$$\int z^4 = 2a^4 - 8ab + 4bb + 2\alpha^4 - 8\alpha^2\beta + 4\beta\beta + 4a^3\alpha - 12ab\alpha + 4\alpha^3 a - 12\alpha\beta a + 6a^2\alpha^2 - 12a^2\beta - 12\alpha^2 b + 24b\beta$$

Da nun (§. 43.)

$$A = fz$$
$$2B = Afz - fz^2$$
$$3C = fz^3 - Afz^2 + Bfz$$
$$4D = Afz^3 - Bfz^2 + Cfz - fz^4$$

ist, so findet sich, wenn man die Werthe von fz, fz^2, fz^3, fz^4 in diesen Formeln setzt, und die Reduction vornimmt

$$A = 2(a + \alpha)$$
$$B = (a + \alpha)^2 + (a\alpha + 2b + 2\beta)$$
$$C = (a\alpha + 2b + 2\beta).(a + \alpha)$$
$$D = (a\beta + \alpha b).(a + \alpha) + (\beta - b)^2$$

und damit ist die gesuchte Gleichung

$$o = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

bestimmt, und gefunden, deren Wurzeln z die Summe $x + y$ der Wurzeln der Gleichungen

$$o = x^2 - ax + b$$
$$o = y^2 - \alpha x + \beta$$

sind.

§. 62.

Will man anstatt $z = x + y$, die Differenz $z = x - y$ haben, so darf man nur in der zweyten Gleichung α negativ nehmen, weil dieses die Wurzeln y verneinend macht.

§. 63.

Solle aber

$$z = \pi x + \varrho y$$

seyn; so müssen beyde Gleichungen vorerst in solche verwandelt werden, deren Wurzeln

$\xi =$

$\xi = \pi x$, und $\eta = \varrho y$ sind. Man wird demnach

$$0 = \xi^2 - a\pi\xi + b\pi^2$$
$$0 = \eta^2 - \alpha\varrho\eta + \beta\varrho^2$$

haben, und in den vier Gleichungen, wodurch A, B, C, D bestimmt worden, $a\pi$ anstatt a, und $\alpha\varrho$ anstatt α setzen müssen, um die gesuchte Gleichung

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

heraus zu bringen.

§. 64.

Solle aber

$$z = \pi x^2 + \varrho y^3 + \tau$$

seyn, so müssen einige Verwandlungen mehr vorgehen. Man macht nemlich nach den oben gegebenen Methoden aus

$$0 = x^2 - ax + b$$

eine Gleichung

$$0 = \xi^2 + 2b\xi + bb \atop - aa\xi$$

deren Wurzeln $\xi = xx$, oder Quadrate von x sind. Sodann setzt man $\pi xx = \pi\xi = \zeta$, um dadurch

$$0 = \zeta^2 + 2\pi b\zeta + bb\pi\pi \atop - aa\pi\zeta$$

zu erhalten. Endlich setzt man $\zeta + \tau = v$, und so erhält man

$$
\begin{aligned}
0 = v^2 &- 2\tau v + \tau\tau \\
&+ 2\pi b v - 2\pi b\tau \\
&- aa\pi v + aa\pi\tau \\
&+ bb\pi\pi
\end{aligned}
$$

Ferners verwandelt man die zweyte Gleichung

$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

nach der oben angegebenen Methode (§. 36.) in

$$
\begin{aligned}
0 = \eta^2 &- 3\alpha\beta\eta + \beta^3 \\
&+ \alpha^3\eta
\end{aligned}
$$

deren Wurzeln $\eta = y^3$, oder Cubi von y sind. Sodann setzt man $\varrho\eta = \varrho y^3 = \sigma$, und erhält dadurch

$$
\begin{aligned}
0 = \sigma^2 &- 3\alpha\beta\varrho\sigma + \beta^3\varrho^2 \\
&+ \alpha^3\varrho\sigma
\end{aligned}
$$

Da man auf diese Art endlich $z = v + \sigma$ hat, so darf man nur in den 4 Gleichungen, wodurch A, B, C, D bestimmt werden (§. 60.)

$-2\tau + 2\pi b - aa\pi$ anstatt a

$\tau\tau - 2\pi b\tau + aa\pi\tau + b^2\pi^2$ anstatt b

und

$-3\alpha\beta\varrho + \alpha^3\varrho$ anstatt α

$\beta^3\varrho^2$ anstatt β

setzen, um dadurch die Gleichung

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

zu bestimmen, deren Wurzeln sodann

$$z = v + \sigma = \zeta + \tau + \sigma = \pi\xi + \tau + \varrho\eta = \pi x^2 + \tau + \varrho y^3$$

folglich

$$z = \pi x^2 + \varrho y^3 + \tau$$

seyn werden.

§. 65.

§. 65.

Man kann auf eine ähnliche Art

$$z = Mx^k + Nx^h + \&c.$$
$$+ Px^k + Qy^\lambda + \&c.$$
$$+ R$$

setzen, und die Gleichung

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

aus den beyden Gleichungen

$$0 = x^2 - ax + b$$
$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

ohne diese vorerst aufzulösen, heraus bringen. Denn diese beyden Gleichungen lassen sich nach der Regel des §. 47 in zwo andere

$$0 = \xi^2 - a'\xi + b'$$
$$0 = \eta^2 - \alpha'\eta + \beta'$$

dergestalt verwandeln, daß

$$\xi = Mx^k + Nx^h + \&c. + R$$

und

$$\eta = Py^k + Qy^\lambda + \&c.$$

sey, und so hat man sodann

$$z = \xi + \eta.$$

wodurch sich die Coefficienten in der gesuchten Gleichung

$$0 = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

bestimmen lassen.

§. 66.

Wir werden nun aber sehen, wie die Rechnung ausfällt, wenn z nicht die Summe $x + y$, sondern das Product xy ist. Es sey demnach wiederum, wie §. 54.

$0 = x^m - ax^{m-1} + bx^{m-2} + cx^{m-3} + \text{ꝛc.}$

$0 = y^n - \alpha y^{n-1} + \beta y^{n-2} - \gamma y^{n-3} + \text{ꝛc.}$

so ist (§. 54. 56.)

$0 = z^{mn} - Az^{mn-1} + Bz^{mn-2} - Cz^{mn-3} + \text{ꝛc.}$

Es seyn ebenfalls, wie (§. 58.) P, Q, R &c. die Wurzeln der ersten Gleichung, p, q, r &c. die Wurzeln der andern; so sind, weil $z = xy$ seyn solle, die Wurzeln der dritten

$$\begin{array}{lll} Pp & Qp & Rp \text{ \&c.} \\ Pq & Qq & Rq \\ Pr & Qr & Rr \\ \text{\&c.} & \text{\&c.} & \text{\&c.} \end{array}$$

Da dieses nun keine Binomia sind, so gebrauchen wir den Newtonschen Lehrsatz nicht, sondern es ist überhaupt

$$\begin{array}{llll} \int z^k = & + P^k p^k + & Q^k p^k + & R^k p^k \text{ \&c.} \\ & + P^k q^k + & Q^k q^k + & R^k q^k \\ & + P^k r^k + & Q^k r^k + & R^k r^k \\ & \text{\&c.} & \text{\&c.} & \text{\&c.} \end{array}$$

das will sagen,

$$\int z^k = \int y^k (P^k + Q^k + R^k + \text{\&c.}) = \int y^k \cdot \int x^k$$

folglich, wenn man der Ordnung nach $k = 1, 2, 3, 4$ ꝛc. setzt,

$$\begin{aligned} \int z &= \int x . \int y \\ \int z^2 &= \int x^2 . \int y^2 \\ \int z^3 &= \int x^3 . \int y^3 \\ &\text{\&c.} \end{aligned}$$

und

und hieraus vermöge der Formeln des §. 43.

$$+\ A = \int x \int y$$
$$-2B = \int x^2 . \int y^2 - A \int x . \int y$$
$$+3C = \int x^3 . \int y^3 - A \int x^2 . \int y^2 + B \int x . \int y$$
$$-4D = \int x^4 . \int y^4 - A . \int x^3 . \int y^3 + B \int x^2 . \int y^2 - C \int x . \int y .$$

&c.

Da nun $\int x$, $\int x^2$, $\int x^3$ &c. $\int y$, $\int y^2$, $\int y^3$ &c. durch a, b, c &c. α, β, γ &c. gegeben sind, (§. 43.) so hat man vermittelst dieser Formeln auch A, B, C, D &c. und damit die gesuchte Gleichung

$$0 = z^{mn} - A z^{mn-1} + B z^{mn-2} - \&c.$$

deren Wurzeln $z = xy$ seyn werden. Man sieht zugleich aus diesem Beweise, daß

A durch a, α
B durch a, α, b, β
C durch a, α, b, β, c, γ
&c.

bestimmt wird, so viel auch die fürgegebenen beyden Gleichungen Glieder und Coefficienten haben mögen.

§. 67.

Ungeachtet übrigens die Beweise, so wir sowohl für $z = x + y$, als für $z = xy$ gegeben haben, bey ihrer Allgemeinheit noch sehr einfach sind, so verfällt man dennoch in weitläuftige Rechnungen, wenn man sie in besondern Fällen entwickeln, und die Coefficienten A, B, C, D &c. nicht durch $\int x$, $\int x^2$ &c. $\int y$, $\int y^2$ &c.

sondern durch a, b, c &c. α, β, γ &c. ausdrücken will, dafern diese nicht in Zahlen gegeben sind. Ich habe daher eine andere Methode gesucht, wodurch diese Weitläuftigkeit in besondern Fällen abgekürzt werden kann. Es seyn z. E. zwo Quadratgleichnungen

$$o = x^2 - ax + b$$
$$o = y^2 - \alpha y + \beta$$

gegeben, und eine dritte Gleichung

$$o = z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D$$

zu finden, so, daß $z = xy$ sey. Man setze

$$x = z : y$$

in die erste Gleichung

$$o = x^2 - ax + b$$

so verwandelt sich diese in

$$o = z^2 - azy + by^2$$

Nun giebt die zweyte Gleichung mit b multiplicirt

$$o = by^2 - \alpha by + \beta b$$

wird diese abgezogen, so bleibt

$$o = z^2 - b\beta + (\alpha b - az)y$$

demnach

$$y = (b\beta - z^2) : (\alpha b - az)$$

Dieser Werth von y in der Gleichung

$$o = y^2 - \alpha y + \beta$$

gesetzt, und die Reduction vorgenommen, giebt die gesuchte Gleichung

$$\begin{aligned} o = z^4 - a\alpha z^3 + a^2\beta z^2 &- a\alpha b\beta z + b^2\beta^2 \\ + \alpha^2 b&.. \\ - 2b\beta&.. \end{aligned}$$

deren Wurzeln $z = xy$ sind.

§. 68.

Solte aber z nicht das Product xy, sondern der Quotient $x:y$, oder ein Product aus $x^m y^n$ seyn, so gelangt man besser zum Ziele, wenn man vorerst die beyden Gleichungen

$$0 = x^2 - ax + b$$
$$0 = y^2 - \alpha y + \beta$$

in zwo andern Quadratgleichungen verwandelt, deren Wurzeln

$$\xi = x^m$$
$$\eta = y^n$$

sind, welches nach den oben angegebenen Methoden geschieht. Denn so erhält man

$$z = \xi\eta$$
$$0 = \xi^2 - G\xi + H$$
$$0 = \eta^2 - K\eta + L$$

und folglich die gesuchte Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = z^4 - GKz^3 &+ G^2Lz^2 - GHKLz + H^2L^2 \\ &+ K^2Hz^2 \\ &- 2HLz^2 \end{aligned}$$

welche immer eine Biquadratgleichung seyn wird, so groß auch die Exponenten m, n seyn mögen.

IX.

Quadratur und Rectification der krummen Linien durch geradlinichte Vielecke, welche um dieselben und in denselben beschrieben werden können.

§. 1.

Tab. III. Archimedes ist der erste gewesen, welcher sich, da die Quadratur und Rectification des Circuls nicht genau gefunden noch durch Zahlen ausgedrucket werden konnte, in Sinn kommen liesse, diese beyden Grössen, vermittelst der um den Circul und in denselben beschriebenen Vielecke dergestalt zu bestimmen, daß er die Schranken angeben könnte, zwischen welchen sie fiele. Die durchaus gleichförmige Krümmung des Circuls machte, daß man die sogenannten regulären Vielecke dazu gebrauchen konnte, bey welchen sich von einer Seite auf den ganzen Umkreis schliessen liesse; und einige geometrische Lehrsätze verhalfen dazu, daß man durch fortgesetztes Halbiren aus jedem angenommenen Vielecke andere von 2, 4, 8, 16, 32 ꝛc. mal mehr Seiten berechnen konnte.

§. 2.

§. 2.

Diese Schicklichkeiten fallen bey jeden andern krummen Linien gröstentheils weg. Es lassen sich zwar um und in denselben geradlinichte Vielecke beschreiben, dabey aber werden, wenn man die Seiten gleich macht, die Winkel ungleich, und hinwiederum erhält man bey gleichen Winkeln ungleiche Seiten; dieses macht, daß sich nicht so unbedingt von jeder Seite auf den ganzen Umkreis des Vieleckes schliessen läßt. Ueberdies läßt sich auch nicht so leicht bestimmen, wie wenn das Vieleck um die Linie gezogen oder angenommen worden, daß demselben entsprechende Vieleck in derselben müsse gezogen werden, weil sich, wenn man nicht zwo oder mehr Bedingungen zugleich annimmt, unzählige ziehen lassen, die sämtlich einander unähnlich sind. Hingegen ist bey dem Circul die Anzahl der Seiten, und die Bedingung, daß sie einander gleich seyn sollen völlig zureichend.

§. 3.

Da demnach bey der Ziehung der Vielecke um jede andere krumme Linien, die nicht Circul sind, viel willkührliches bleibt, so werden wir bey dem anfangen, was für sich am einfachsten, und besonders in der Ausübung am leichtesten ist. Und hier bieten sich sogleich zween Fälle an. Denn hat man nach beliebigen Regeln ein Vieleck in eine krumme Linie beschrie-

beschrieben, so ist unter allen Vielecken, die von gleichvielen Seiten um dasselbe beschrieben werden können, dasjenige das gleichförmigste und regulärste, dessen Seiten mit den Seiten des inner der krummen Linie gezogenen Parallel sind. Die Regularität wird grösser und zu den vorhabenden Absichten bequemer, wenn man die Winkel gleich macht, welche jede zwo Seiten des Vieleckes mit einander machen.

§. 4.

Fig. I. So z. E. sey AMNB eine halbe Ellipse. Solte in und um dieselbe ein Sechseck beschrieben werden, so macht man den Winkel MAB = 60 Gr. und zieht AM. Sodann wird AMN = MNB = 120 Gr. gemacht, und MN, NB gezogen, so ist AMNB die Hälfte des Sechseckes in der Ellipse. Ferner zieht man die Tangente am, mn, nb mit AM, MN, NB parallel, und so ist amnb die Hälfte des Sechseckes um die Ellipse. Diese Art die Vielecke in und um eine krumme Linie zu zeichnen, hat in Absicht auf die Ausübung etwas sehr leichtes und einfaches, weil sich dabey die Durchschnittspuncten M, N, B, m, n, b von selbst ergeben, und weil es sehr leicht ist, Tangenten an eine krumme Linie zu ziehen, welche mit der Chorde derselben parallel seyn.

§. 5.

Es verschwindet aber diese Leichtigkeit größtentheils, wenn man bey dem äussern Vielecke

ecke anfängt, und sodann das Innere nach demselben ziehen will, weil sich die Puncte A, M, N, B nicht eben so leicht durch die Puncten a, m, n, b bestimmen lassen. Mit der Bedingung, daß die innern Seiten den äussern parallel seyn sollen, reicht man nicht aus, weil sich unter dieser Bedingung unzählige Vielecke ziehen lassen, in dem man z. E. den Punct M auf dem ganzen Bogen $\mu\,\nu$, der zwischen den Berührungspuncten μ, ν liegt, annehmen kann, wo man will. Geht man aber von der Bedingung der parallelen Lage beyder Vielecke ab, so ist der einfachste und kenntlichste Fall derjenige, wo, nachdem das äussere Vieleck gezogen worden, das Innere in die Berührungspuncten μ, ν, ς falle. Auf diese Art stellt $\alpha\mu\nu\varsigma\gamma$ die Hälfte des Sechseckes vor. Die Bestimmung der Berührungspuncte ist es nun, was hiebey die meiste Schwürigkeit verursacht. Hingegen hat diese letztere Art der Verzeichnung beyder Vielecke den Vortheil, daß sich dabey einzelne Stücke der krummen Linie, dergleichen $\mu M \nu$ ist, besonders betrachten, und mit dem Triangel $\mu m \nu$ vergleichen lassen. Ueberdies ist der Winkel $E m a$ das Maaß der Krümmung des Bogens $\mu M \nu$, weil derselben in μ die Richtung μm, in ν die Richtung νm hat. Werden aus μ, ν parallele Ordinaten $\mu\alpha$, νC auf $A B$ gezogen, so findet sich

$$E m \mu = m \nu C - a \mu \alpha.$$

Denn

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + ex^6 + \text{rc.}$$

ausdrücken. Ich sage überhaupt und ohne Rücksicht auf gewisse Puncte einiger krummen Linien, wo statt ganzer Exponenten gebrochene zum Vorschein kommen, oder wo einige der ersten Glieder dieser Reihe = o werden. Man setze A wäre ein solcher Punct, so darf man nur anstatt aus der Tangente A P die Abscissenlinie zu machen, die Abcissen auf M T nehmen, und man wird die Reihe

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + \&c.$$

immer ganz erhalten. In dieser Reihe bleiben nemlich die beyden ersten Glieder, welche sonst

$$A + Bx$$

seyn würden, weg, weil y zugleich mit $x = o$ wird, und weil Bx nur vorkömmt, wo die Abscissenlinie die krumme Linie unter einem Winkel schneidet, deren Tangente $= B$ ist.

§. 9.

Wenn wir demnach die Reihe

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

als die allgemeinste Gleichung zwischen y und x annehmen, so ist

$$dy = dx(2ax + 3bx^2 + 4cx^3 + 5dx^4 + \text{rc.})$$

Werden nun diese Werthe in den erst gefundenen Reihen (§. 7.) gesetzt, und die für den Bogen AM angezeigten Integrationen vorgenommen,

men, so erhält man den Bogen $AM = x +$

$$\begin{array}{l}
\frac{2}{3}a^2x^3 + \frac{3}{2}abx^4 + \frac{8}{5}acx^5 + \frac{5}{3}adx^6 + \frac{12}{7}aex^7 + \text{etc.} \\
\qquad\qquad\qquad + \frac{9}{16}bb \ldots + 2bc \ldots + \frac{15}{7}bd \ldots \\
\qquad\qquad\qquad - \frac{2}{5}a^4 \ldots - 2a^3b \ldots + \frac{8}{7}cc \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{18}{7}a^3c \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{27}{7}a^2b^2 \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{4}{7}a^6 \ldots
\end{array}$$

die Chorde $AM = x +$

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{2}a^2x^3 + abx^4 + acx^5 + adx^6 + aex^7 + \text{etc.} \\
\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{2}bb \ldots + bc \ldots + bd \ldots \\
\qquad\qquad\qquad - \frac{1}{8}a^4 \ldots - \frac{1}{2}a^3b \ldots + \frac{1}{2}cc \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{1}{2}a^3c \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - \frac{3}{4}b^2a^2 \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{16}a^6 \ldots
\end{array}$$

Ferners die Summe der Tangenten $AT + TM =$

$$\begin{array}{l}
x + a^2x^3 + \frac{5}{2}abx^4 + 3acx^5 + \frac{7}{2}adx^6 + 4aex^7 \\
\qquad\qquad\qquad - a^4 \ldots - \frac{11}{2}a^3b \ldots - 7a^3c \ldots \\
\qquad\qquad\qquad + \frac{3}{2}b^2 \ldots + \frac{7}{2}bc \ldots - \frac{45}{4}a^2b^2 \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 4bd \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 2cc \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 2a^6 \ldots
\end{array}$$

§. 10.

Vergleicht man nun diese drey Reihen mit einander, so finden sich die Coefficienten a, b, c, d &c. in allen auf einerley Art verwickelt, und der Unterschied besteht nur in den Zahlen, womit sie in jeder Reihe besonders multiplicirt sind. Diese Zahlen finden sich nun aber so beschaffen, daß, wenn man $\frac{1}{3}(AT + TM)$ zu

$\frac{2}{3}$ von der Chorde addirt, man eine Reihe

$$
\begin{aligned}
\frac{AT + TM + 2AM}{3} = x + \tfrac{2}{3}a^2x^3 &+ \tfrac{3}{2}abx^4 + \tfrac{5}{3}acx^5 + \tfrac{11}{6}adx^6 + 2aex^7 + \text{ꝛc.}\\
&\quad + \tfrac{5}{6}bb \ldots + \tfrac{11}{6}bc \ldots + 2bd \ldots\\
&\quad - \tfrac{5}{12}a^4 \ldots - \tfrac{13}{6}a^3b \ldots + cc \ldots\\
&\qquad\qquad - \tfrac{8}{3}a^3c \ldots\\
&\qquad\qquad - \tfrac{17}{4}a^2b^2 \ldots\\
&\qquad\qquad + \tfrac{17}{24}a^6 \ldots
\end{aligned}
$$

erhält, deren drey ersten Glieder mit der für den Bogen AM gefundenen Reihe übereintreffen, und welche folglich nur um $\frac{AT + TM + 2AM}{3}$ —

$$
\begin{aligned}
AmM = &+ \tfrac{1}{15}acx^5 + \tfrac{1}{6}adx^6 + \tfrac{2}{7}aex^7 + \text{ꝛc.}\\
&- \tfrac{1}{15}bb \ldots - \tfrac{1}{6}bc \ldots - \tfrac{1}{7}bd \ldots\\
&- \tfrac{1}{60}a^4 \ldots - \tfrac{1}{6}a^3b \ldots - \tfrac{1}{7}cc \ldots\\
&\qquad\qquad - \tfrac{2}{21}a^3c \ldots\\
&\qquad\qquad - \tfrac{11}{28}b^2a^2 \ldots\\
&\qquad\qquad - \tfrac{23}{168}a^6 \ldots
\end{aligned}
$$

grösser ist, als der Bogen. Da dieser Unterschied erst bey der fünften Dignität der Abscisse x anfängt, so wird derselbe bey jeden Halbiren der Abciſſe, oder auch des Bogens, 32 mal kleiner. Man kann also hieraus beurtheilen, was man sich von dieser Art, die Länge einer krummen Linie durch Näherung zu bestimmen, zu versprechen hat, oder von wie wenigen Graden der Krümmung man den Bogen AmM annehmen müsse, wenn der Fehler, den man zuläßt, wenn man für dessen Länge $\frac{AT + TM + 2AM}{3}$

an-

annimmt, eine gewisse Grösse nicht überschreiten sollen.

§. 11.

Wir wollen um dieses auf eine leichte Art verständlicher zu machen, den Halbmesser des Krümmungskreises zur Einheit annehmen, und die Fehler bestimmen, die man zuläßt, wenn man auf diese Art die Länge eines Bogens des Krümmungskreises sucht. Es sey demnach AM ein Circulbogen, dessen Halbmesser $= 1$ ist; so ist AM dessen Chorde, $AT = TM$ die Tangente der Hälfte des Bogens. Man setze nun den Bogen stuffenweise 5, 10, 15 Gr. so wird man für

5 Gr.	$\frac{AT + TM + 2AM}{3}$	$= 0,0872665$
10		$= 0,1745334$
15		$= 0,2618033$
20		$= 0,3490823$
2c.		

erhalten, da hingegen die Länge des Bogens selbst für

$5°$	$= 0,0872665$
10	$= 0,1745329$
15	$= 0,2617994$
20	$= 0,3490659$
2c.	

ist. Zieht man diese Zahlen von den ersten ab, so bleibt für

5 Gr. = = = = = = = $= 0,0000000$
10 = = = = = = = = $= 0,0000005$
15 = = = = = = = = $= 0,0000039$
20 = = = = = = = = $= 0,0000165$
2c.

Woraus man sieht, daß, wenn man einen Fehler, der sich auf $\frac{1}{00000}$ des Halbmessers für einen Bogen von 20 Graden beläuft, nicht achten will, man auf diese Art Bögen von 20 Graden Krümmung rectificiren kann. Nimmt man aber lauter Bögen von 5 Graden, so ist der Fehler nicht so groß, daß er auf 10 Millionen 1 betrüge. Da nun die gemeinen Tafeln der Sinus, Tangenten, Secanten ebenfalls nur bis auf 10000000te Theile berechnet sind, und man sich fast bey allen Rechnungen damit begnügt, so erhellet hieraus, daß man sich aus gleichen Gründen begnügen kann, bey der Rectification jeder krummen Linie, dieselbe in solche Stücke zu theilen, deren Krümmung 5 Gr. beträgt, und daß man sodann für die Länge jedes Bogens AmA schlechthin nur

$$\frac{AT + TM + 2AM}{3}$$

nehmen darf. Der Fehler wird immer kleiner als $\frac{1}{10000000}$ Theil des Halbmessers des Krümmungskreises seyn.

§. 12.

Will man sich aber statt der Berechnung der Construction bedienen, so wird die Figur selten

selten so groß gezeichnet, daß $\frac{1}{60000}$ des Halbmessers des Krümmungskreises merklich wäre, daher kann man kürzer verfahren, und mit einem male die Länge solcher Stücke der krummen Linien finden, deren Krümmung sich bis auf 20 Gr. beläuft. Wir haben nun noch zu sehen, was sowohl bey der Berechnung als bey der Construction zu thun ist.

§. 13.

Es sey demnach AMN jede krumme Linie. Fig. III. Auf AP werden die Abscissen AP, AQ, und die senkrechten Ordinaten PM, QN genommen. TMR, VRN seyn die Tangenten in M und N; R derselben Durchschnittspunct, und MN die Chorde, so ist der zwischen M und N liegende Bogen um desto genauer

$$= \frac{MR + RN + 2MN}{3}$$

je kleiner die Krümmung desselben ist, so, daß bey jeder doppelt kleinern Krümmung der Fehler bey 32 mal geringer wird (§. 10.).

§. 14.

Man setze nun

$$AP = x \quad AQ = \xi \quad MTP = \omega$$
$$PM = y \quad QN = \eta \quad NVQ = \varphi$$

so wird

$$\text{tang.}\, \omega = dy : dx$$
$$\text{tang.}\, \varphi = d\eta : d\xi$$

und folglich

$$\text{tang. } VRT = \text{tang. } (\omega - \varphi) = \frac{dy.d\xi - d\eta.dx}{dx.d\xi + dy.d\eta}$$

seyn. Hiedurch wird, weil VRT die Krümmung des Bogens ist, dieselbe bestimmt, und man kann in Absicht auf die zu erhaltende Genauigkeit nach §. 11. erörtern, ob man den fürgegebenen Bogen MN, dessen Länge zu finden, ganz beybehalten könne, oder denselben in Theile zerfällen müsse, indem man zwischen PQ noch eine oder mehrere Abscissen annimmt. Da im letztern Fall für jeden Theil einerley Rechnung vorzunehmen ist, wie für den ganzen Bogen, so können wir AM als einen solchen Theil angeben, und die Rechnung, wodurch die Chorde MN, nebst den Tangenten MR, RN, oder überhaupt die Seiten des Triangels MRN bestimmt werden, wird folgendermassen gefunden.

§. 15.

Man ziehe NH, MK mit der Abscissenlinie AQ und KRL mit den Ordinaten parallel, so ist

$$MH = ML + KN = \xi - x$$
$$LH = LR + RK = \eta - y$$

Nun ist

$$ML = MR \text{ cos. } \omega \qquad LR = MR \text{ sin. } \omega$$
$$KN = NR \text{ cos. } \varphi \qquad RK = NR \text{ sin. } \varphi$$

demnach

$$MR \text{ cos. } \omega + NR \text{ cos. } \varphi = \xi - x$$
$$MR \text{ sin. } \omega + NR \text{ sin. } \varphi = \eta - y.$$

Wer-

Werden diese Gleichungen aufgelöst, so findet sich

$$MR = \frac{(\eta - y)\cos.\varphi - (\xi - x)\sin.\varphi}{\sin.(\omega - \varphi)}$$

$$NR = \frac{-(\eta - y)\cos.\omega + (\xi - x)\sin.\omega}{\sin.(\omega - \varphi)}$$

Da nun die Chorde

$$MN = \surd((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2)$$

ist, so lassen sich vermittelst dieser dreyen Formeln die drey Seiten MR, RN, NM des Triangels MRN und daher die durch Näherung gesuchte Länge des Bogens, welche

$$\frac{MR + RN + 2MN}{3}$$

seyn wird, leicht finden.

§. 16.

Man kann auch, wenn man sich der trigonometrischen Tabellen bedienen will,

$$dy : dx = \text{tang. } \omega$$

$$d\eta : d\xi = \text{tang. } \varphi$$

$$(\eta - y) : (\xi - x) = \text{tang. } \psi$$

machen, und nachdem man auf diese Art die Winkel ω, φ, ψ, welche TMP, VNQ, NMH sind, gefunden, und die Chorde

$$MN = \surd((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2)$$

berechnet ist, so wird man

$$\frac{MR + RN + 2MN}{3} = \frac{\text{f}(\psi - \varphi) + \text{f}(\omega - \psi) + 2\,\text{f}(\omega - \varphi)}{3\,\text{f}(\omega - \varphi)} \cdot MN$$

für die durch Näherung gesuchte Länge des Bogens erhalten.

§. 17.

Diese Formel fleußt aus den ersten Sätzen der Trigonometrie, weil

$$\psi - \varphi = RNM$$
$$\omega - \psi = RMN$$
$$\omega - \varphi = MRV$$

und die Seiten RM, RN, MN in Verhältniß der Sinus dieser Winkel sind. Uebrigens läßt sich diese Formel in sofern noch zusammenziehen, als

$$ſ(\psi - \varphi) + ſ(\omega - \psi) = 2\,ſ\frac{\omega - \varphi}{2} \cdot coſ.\frac{2\psi - \omega - \varphi}{2}$$

und

$$ſin.(\omega - \varphi) = 2\,ſ\frac{\omega - \varphi}{2} . coſ.\frac{\omega - \varphi}{2}$$

ist. Denn werden diese Werthe substituirt, so erhält man

$$\frac{MR + RN + 2MN}{3} = coſ.\left(\frac{2\psi - \omega - \varphi}{2}\right) MN : 3\,coſ.\frac{\omega - \varphi}{2} + \frac{2MN}{3}.$$

§. 18.

Um dieses Verfahren durch ein leichtes Beyspiel zu erläutern, so sey AMN eine Parabel, und

$$2x = yy$$

demnach

$$2dx = 2ydy$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} = tang.\,\omega$$

und

und daher auch

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{\eta} = \text{tang.}\,\varphi.$$

Man setze z. E. P sey der Brennpunct, folglich $y = 1$, $x = \frac{1}{2}$, $\omega = 45$ Gr. und die Krümmung des Bogens NM werde von 5 Gr. angenommen, so ist $\varphi = 45^\circ - 5^\circ = 40^\circ$. Demnach $1 : \eta = \text{tang. } 40$ Gr.

$$\begin{aligned}
\eta &= 1{,}1917536\\
\log.\eta &= 0{,}0761865\\
2\log.\eta &= 0{,}1523730\\
\log.2 &= 0{,}3010300\\
\hline
\log.\xi &= 0{,}8513430 - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
\xi = 0{,}7101384 & \eta = 1{,}1917536\\
x = 0{,}5000000 & y = 1{,}0000000\\
\hline
\xi - x = 0{,}2101384 & \eta - y = 0{,}1917536
\end{array}$$

$$\frac{\eta - y}{\xi - x} = 0{,}9125205 = \text{tang.}\,\psi$$

$$\psi = 42^\circ.\,22'.\,52''$$

$$\frac{\omega + \varphi}{2} = 42\,.\,30\,.\,0$$

$$\frac{\omega + \varphi}{2} - \psi = 0.\ 7.\ 8 \quad \log.\cos. = 0{,}9999991 - 1$$

$$\frac{\omega - \varphi}{2} = 2.30.\ 0 \quad \log.\cos. = 0{,}9995865 - 1$$

$$\text{diff.}\quad 0{,}0004126$$

Ferner $NM = 0{,}2844777$ $\log.MN = 0{,}4540483 - 1$

$$\log.(MR + RN) = 0{,}4544609 - 1$$

$$MR+RN = 0,2847481$$

$$\tfrac{1}{3}(MR+RN) = 0,0949160$$
$$\tfrac{2}{3}\ MN = 0,1896518$$
$$0,2845678$$

Und dieses ist demnach bis auf einen $\frac{1}{10000000}$ Theil des halben Parameters der Parabel die Länge des Bogens MN, welche zu suchen war.

§. 19.

Nimmt man aber den Bogen grösser an, z. E. von 15 Grad Krümmung, so, daß $\omega = 45°$, $\phi = 30$ Grad sey, so findet man

$$x = \tfrac{1}{2} \qquad \xi = \tfrac{3}{2}$$
$$y = 1 \qquad \eta = \sqrt{3}$$

demnach

$$\xi - x = 1$$
$$\eta - y = \sqrt{3} - 1 \quad \text{daher } NM^2 = 1,2393137$$
$$\text{tang.}\,\psi = \sqrt{3} - 1 = 0,7320508$$
$$\psi = 36°.\ 12'.\ 22''$$
$$\tfrac{1}{2}(\omega - \phi) = 37\ .\ 30\ .\ 0$$

$$\tfrac{1}{2}(\omega + \phi) - \psi = 1\ .\ 17\ .\ 38 \quad \log.\text{cos.} = 0,9998892 - 1$$
$$\tfrac{1}{2}(\omega - \phi) = 7\ .\ 30\ .\ 0 \quad \log.\text{cos.} = 0,9962686 - 1$$
$$\text{diff.} = 0,0036206$$
$$\log.NM = 0,0931812$$
$$\log.(RM+RN) = 0,0968018$$
$$RM+RN = 1,2496888$$

$$\tfrac{1}{3}(RM+RN) = 0,4165629$$
$$\tfrac{2}{3}\ MN = 0,8262091$$
$$1,2427720.$$

Die-

Dieses wäre demnach die durch diese Näherung gefundene Länge des Bogens. Es ist aber die wahre Länge

$$= 1,2427361$$

demnach der Unterschied $0,0000359$ welcher sich kaum auf $\frac{1}{35000}$ Theil des Bogens beläuft.

§. 20.

Wenn man sich statt der Rechnung mit der Construction begnügen will, so kann man mehrentheils noch grössere Bögen vornehmen, weil man bey den Constructionen selten so scharf verfährt, daß man auf 35000 nicht um 1 fehlen solte. Ueberdies wird die Arbeit kürzer, weil die Seiten der Triangel MRN ehender gemessen als berechnet sind. Hingegen kann die Ziehung der Tangenten MR, RN, oder der Chorden MN Schwürigkeiten und Weitläufftigkeiten haben. Denn ungeachtet sich diese Linien, jede für sich betrachtet, leicht ziehen lassen, so kömmt hier die Bedingung vor, daß, wenn die Tangenten gezogen sind, die Chorden in die Berührungspuncte gezogen werden; oder hinwiederum, daß, wenn die Chorden gezogen sind, die Tangenten an die Endpuncten der Chorden gezogen werden. Hiebey kömmt es auf besondere Vortheile an, die man aus der Natur der vorhabenden krummen Linie vorerst finden muß, so wie man dergleichen für die parabolischen, logarithmischen und andere Linien gefunden.

§. 21.

§. 21.

Es kommen aber besonders in der angewandten Mathematik Fälle vor, wo die krumme Linie schlechthin durch Versuche bestimmt wird, und wo die Gleichung dazu noch nicht bekannt ist. Und da ist die Frage: wie, wenn man an solche Linien Tangenten gezogen, der Berührungspunct gefunden werden könne? Diese Frage läßt sich für alle diejenigen Berührungspuncten, wo entweder die krumme Linie einen Diameter hat, oder wo wenigstens der Halbmesser des Krümmungskreises weder o noch ∞ ist, folgendermassen auflösen: Es
Fig. III. sey AMB ein Stück einer krummen Linie, und an dieselbe sey die Tangente TM gezogen. Um den Berührungspunct M zu finden, ziehe man mit der Tangente parallele Chorden AB, so viel man will, und so nahe beysammen, als man will. Jede Chorde theile man in zween gleiche Theile, und so wird sich durch die Theilungspuncte C, eine Linie MC ziehen lassen, welche in den Berührungspunct M trift. Diese Linie ist gerade und ein Diameter, wenn AMN ein Kegelschnitt ist. In andern Fällen kann sie ebenfals gerade seyn, wenn nemlich die krumme Linie einen oder mehrere Diameter hat, und einer derselben in den Punct M trift. In allen übrigen Fällen ist CM eine krumme Linie, und zwar ist ihre Krümmung desto geringer, je weniger sich die Linie AMB von der Krümmung eines Kegelschnittes entfernt. Da

nun

nun bey denen krummen Linien, wo diese Bedingung wegfallen kann, sie nur bey einzelnen Puncten, wie z. E. bey den Wendungspuncten wegfällt, so kann diese Methode überhaupt betrachtet so gut als allgemein angesehen werden. Daß aber der Gebrauch davon viel allgemeiner sey läßt sich leicht erachten. Man setze z. E. AB sey eine Abscissenlinie, so habe die Ordinate in M ein Maximum. Die größte Ordinate findet sich durch Ziehung der mit AB parallelen Tangente ohne Mühe. Will man aber die Ordinate selbst ziehen, so muß vorerst der Punct M gefunden werden. Und dazu dient die erst angegebene Methode, immer vorausgesetzt, daß die Gleichung, wodurch die Natur der Linie AMB ausgedruckt wird, nicht bekannt sey.

§. 22.

Um nun zu sehen, wiefern die bisher angeführten Betrachtungen ebenfalls zur Quadratur der krummen Linien dienen können, wenn diese vermittelst der Vielecke durch Näherung gesucht wird, so werden wir zur 2ten Figur zurücke kehren, und da beut sich die Anmerkung von selbst an, daß wenn der Bogen AmM ein Stücke einer krummen Linie ist, sodann ATM ein Stück des um dieselbe beschriebenen Vieleckes sey, so wie die Chorde AM eine Seite des in derselben beschriebenen Vieleckes ist. Der Unterschied des Flächenraumes ergiebt sich theils aus dem Abschnitte AMm, und um Fig. II.

so

so viel ist die krumme Linie grösser als das zu der Seite A M gehörende Theil des in der krummen Linie beschriebenen Vielecks; theils aus dem Raume AmMT, um welchen die Linie kleiner ist als der zu den Seiten ATM gehörende Theil des um die krumme Linie beschriebenen Vieleckes.

§. 23.

Wir wollen damit anfangen, daß wir den Raum AmMP suchen, und hiezu werden wir die vorhin gebrauchte Benennung anwenden. (§. 6. seqq.) Es ist demnach

$$AmMP = \int y\,dx = \tfrac{1}{3}ax^3 + \tfrac{1}{4}bx^4 + \tfrac{1}{5}cx^5 + \tfrac{1}{6}dx^6 + \text{etc.}$$

hingegen ist der Raum des

$$\triangle AMP = \tfrac{1}{2}xy = \tfrac{1}{2}ax^3 + \tfrac{1}{2}bx^4 + \tfrac{1}{2}cx^5 + \tfrac{1}{2}dx^6 + \text{etc.}$$

Nimmt man demnach $\frac{2}{3}$ von diesem Triangel, so ist

$$\tfrac{2}{3}\triangle AMP = \tfrac{1}{3}xy = \tfrac{1}{3}ax^3 + \tfrac{1}{3}bx^4 + \tfrac{1}{3}cx^5 + \tfrac{1}{3}dx^6 + \text{etc.}$$

hievon der Raum AmMP abgezogen, bleibt

$$\tfrac{2}{3}\triangle AMP - AmMP = \tfrac{1}{12}bx^4 + \tfrac{2}{15}cx^5 + \tfrac{1}{6}dx^6 + \text{etc.}$$

Sofern man nun diesen Unterschied für nichts achten kann, läßt sich der Raum AmMP als $\frac{2}{3}$ von dem Raum des Triangels AMP ansehen, und eben so wird der Raum AmMQ $= \frac{2}{3}$ APMQ seyn. Denn AMmA =

AMP

$AMP - AmMP = \frac{1}{3} AMP = \frac{1}{6} APMQ$, und folglich $AMmQ = (\frac{1}{6} + \frac{1}{2}) APMQ = \frac{2}{3} APMQ$.

§. 24.

Alles dieses hat nach geometrischer Schärfe statt, wenn der Bogen A m M ein Stück einer Parabel ist. Demnach kömmt es in jedem andern Fall der Wahrheit um desto näher, je weniger die Krümmung des Bogens A m M von der Krümmung eines denselben osculirenden parabolischen Bogens abweicht.

§. 25.

Wir können aber ferners das Segment AMmA, mit dem Triangel AMT vergleichen, dessen Inhalt $= \frac{1}{2}. AT.PM$ ist. Werden demnach die Werthe

$$\begin{array}{l} AT = \frac{1}{2}x + \frac{bxx}{4a} + cx^3 + \frac{3}{4}d.x^4 + \&c. \\ \qquad\qquad\qquad - \frac{3bb}{8aa} \ldots - \frac{5bc}{4aa} \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{9b^3}{8a^3} \ldots \end{array}$$

$$PM = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

mit einander multiplicirt, so findet sich die Hälfte des Productes $\triangle AMT =$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{4}ax^3 + \frac{3}{4}bx^4 + \frac{1}{2}cx^5 + \frac{5}{8}dx^6 + \&c. \\ \qquad\qquad\qquad - \frac{bb}{16a} \ldots - \frac{bc}{4a} \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{3b^3}{8a^2} \ldots \end{array}$$

Hinge-

Hingegen ist das Segment $AmMA = \triangle AMP - AmMP$, folglich $AmMA = \frac{1}{6}ax^3 + \frac{1}{4}bx^4 + \frac{3}{10}cx^5 + \frac{1}{3}dx^6 +$ &c. Wird demnach wiederum $\frac{2}{3}$ von dem Triangel AMT genommen und das Segment $AmMA$ davon abgezogen, so bleibt $\frac{2}{3} AMT - AmMA = \frac{1}{4}bx^4 + \frac{1}{30}cx^5 + \frac{1}{12}dx^6 +$ ꝛc.

$$- \frac{bb}{24a}\ldots - \frac{bc}{6a}\ldots$$
$$+ \frac{b^3}{4a^2}\ldots$$

Dieser Unterschied wird ebenfals $= 0$, so ofte AmM ein Stück einer Parabel ist. Demnach ist derselbe in jedem andern Fall desto unmerklicher, je weniger AmM von der Krümmung des osculirenden parabolischen Bogens abweicht. Man kann daher, so oft die Krümmung des Bogens von wenigen Graden ist, für das Segment $AmMA$, $\frac{2}{3}$ des $\triangle AMT$ nehmen.

§. 26.

Will man aber das Segment $AmMA$ mit beyden Triangeln AMT und AMP vergleichen, so darf man nur $\frac{1}{4} AMP + \frac{1}{6} AMT$ zusammen addiren, und das Segment wird nur um

$$+ \frac{11}{120}cx^5 + \frac{5}{48}dx^6 + \&c.$$
$$+ \frac{b}{24a}\ldots$$
$$- \frac{b^3}{16a^2}\ldots$$

grös-

grösser seyn. Da dieser Unterschied, welcher bey jedem parabolischen Bogen ebenfalls $= 0$ wird, sich erst bey der fünften Dignität der Abscisse x äussert, so sieht man leicht, daß man auf diese Art der Wahrheit sehr viel näher kömmt, und der Bogen bey gleichem Fehler merklich grösser seyn kann.

§. 27.

Es sey z. E. AmM ein Circulbogen $= \omega$, dessen Halbmesser $= 1$, so ist $AP = \text{sin.}\,\omega$, $Mp = 1 - \text{cos.}\,\omega$, $AT = TM = \text{tang.}\,\frac{1}{2}\omega$, demnach

$$\tfrac{1}{4}\triangle AMP = \tfrac{1}{8}(1 - \text{cos.}\,\omega)\,\text{ſ}\omega = \tfrac{1}{8}\,\text{ſ}\omega - \tfrac{1}{16}\,\text{ſ}\,2\omega$$

$$\tfrac{1}{6}\triangle AMT = \tfrac{1}{12}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega\,(1 - \text{cos.}\,\omega) = \tfrac{1}{6}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{12}\,\text{sin.}\,\omega$$

und

$$\tfrac{1}{4}\triangle AMP + \tfrac{1}{6}\triangle AMT = \tfrac{1}{6}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}\omega + \tfrac{1}{24}\,\text{sin.}\,\omega - \tfrac{1}{16}\,\text{ſ}\,2\omega.$$

Dieses giebt für einen Bogen von 20 Graden den Werth . . . 0,0034645.
Es ist aber der wahre Inhalt des Segmentes . . . 0,0035228

diff. 0,0000583.

Der Unterschied ist $\frac{1}{60}$ Theil des Segmentes, oder $\frac{1}{35000}$ Theil des Quadrats des Halbmessers, oder der Einheit, welche bey dieser Ausmessung zum Grunde liegt. Wäre der Bogen nur von 10 Gr. so würde man nach dieser Formel 0,0004405 anstatt 0,0004423

 finden,

finden, und daher der Unterschied nur 0,0000018 seyn.

§. 28.

Indessen, wenn es nur um das Segment AmMn zu thun ist, so kann man es bey der ersten Methode (§. 23.) bewenden lassen, wenn man nemlich die Chorde AM mit der Höhe nm multiplicirt und von dem Producte $\frac{2}{3}$ nimmt. Man setze z. E. wiederum AmM sey ein Circulbogen von ω Graden, so ist die Chorde $AM = 2 \sin. \frac{1}{2}\omega$, und die Sagitte $nm = 1 - \cos. \frac{1}{2}\omega$, daher

$$\tfrac{2}{3}.AM.nm = \tfrac{4}{3}(\sin. \tfrac{1}{2}\omega - \tfrac{1}{2}\sin.\omega)$$

dies giebt für den Bogen von 20 Graden 0,0035175 anstatt des wahren Inhaltes 0,0035228, der Unterschied ist nun hier nur 0,0000053, bey 11 mal kleiner als vorhin, welches daher rührt, weil hier anstatt des Segmentes AmMQ das Segment AmMnA quadrirt worden.

§. 29.

Fig. V. Es sey, um nun zu allgemeinern Betrachtungen fortzuschreiten, AμmM ein Stück einer beliebigen krummen Linie, AP eine Tangente, A deren Berührungspunct, AN, MP auf AP senkrecht, MN parallel, und man habe das Segment AMN zu quadriren. Um dieses auch bey solchen krummen Linien, für welche man die Gleichung nicht weiß, und die folglich

folglich aus Versuchen construirt, oder auch von freyer Hand gezogen sind, so genau man es gebraucht oder verlangt, oder auch so genau es die Grösse der Figur zuläßt, zu erhalten, kann man die Linie in m, μ in beliebige kleinere Theile theilen, und in dem man A μ, μm, mM durch gerade Linie zusammen zieht, das dadurch entstehende Vieleck N A μ m M besonders, und nach den erst angegebenen Methoden die kleinen Segmente A μ, μm, mM jedes besonders quadriren, und die Summe wird dem Wahren desto näher kommen, in je mehr Theile man den Bogen AM getheilt hat. Es ist dabey eben nicht nothwendig, daß die Theile einander genau gleich seyn, jedoch ist es gut, wenn sie nicht gar zu ungleich sind, weil die grössern Segmente nach den erst angegebenen Methoden minder genau quadrirt werden als die kleinern.

§. 30.

Wir wollen aber das Willkührliche, welches bey dieser Eintheilung bleibt, so einschränken, daß wir die Abscisse AP in beliebiger Anzahl gleicher Theile theilen, und aus den Theilungspuncten, dergleichen π, p sind, Ordinaten $\pi\mu$, pm aufrichten, und durch Ziehung der Parallelen $\mu\nu$, mn, die Rectangel A$\nu\mu\pi$, Anmp vollenden. Nun kann der Inhalt dieser Rectangel, sowohl durch Rechnung als durch Construction, immer leicht gefunden werden. Die Frage ist demnach, ob sich aus denselben der Inhalt des Segmentes AMN, oder auch der Segmente Amn, $A\mu\nu$ eben so leicht, und um desto genauer finden lasse, in je mehr gleiche Theile AP getheilt worden? Und zwar, welches wohl zu merken, ohne daß man weiter nichts als den Inhalt der Rectangel $A\mu$, Am, AM &c. wisse.

§. 31.

Die Bedingung, die wir zur Auflösung dieser Frage, annehmen, ist, daß die Abscissen auf der Tangente AP, und zwar von dem Berührungspunct A an gerechnet, genommen werden. Sodann, da wir die Anzahl der Theile willkührlich und daher unbestimmt lassen, so werden wir $A\pi$ den ersten, π p den zweyten, pP den dritten Theil nennen, und auf diese Art fortfahren, um sodann die Wahl zu behalten, bey welchem wir stehen bleiben wollen.

§. 32.

Es sey demnach

$A\pi = x$	$\pi\mu = y'$	$A\pi\mu\nu = R'$	$A\mu\nu = S'$
$Ap = 2x$	$pm = y''$	$Apmn = R''$	$Amn = S''$
$AP = 3x$	$PM = y'''$	$APMN = R'''$	$AMN = S'''$
&c.	&c.	&c.	&c.

Und die Verhältniß zwischen x, y, werden wie vorhin (§. 8.) und aus eben den Gründen, durch die Reihe

$$y' = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

ausgedrückt; so wird man

y''=

$$y'' = 4ax^2 + 8bx^3 + 16cx^4 + 32dx^5 + \text{ꝛc.}$$
$$y''' = 9ax^2 + 27bx^3 + 81cx^4 + 243dx^5 + \text{ꝛc.}$$
$$y^{\text{IV}} = 16ax^2 + 64bx^3 + 256cx^4 + 1024dx^5 + \text{ꝛc.}$$
&c.
$$R' = ax^3 + bx^4 + cx^5 + dx^6 + \text{ꝛc.}$$
$$R'' = 8ax^3 + 16bx^4 + 32cx^5 + 64dx^6 + \text{ꝛc.}$$
$$R''' = 27ax^3 + 81bx^4 + 243cx^5 + 729dx^6 + \text{ꝛc.}$$
$$R^{\text{IV}} = 64ax^3 + 256bx^4 + 1024cx^5 + 4096dx^6 + \text{ꝛc.}$$
&c.

und
$$S' = \tfrac{2}{3}ax^3 + \tfrac{3}{4}bx^4 + \tfrac{4}{5}cx^5 + \tfrac{5}{6}dx^6 + \text{ꝛc.}$$
$$S'' = \frac{2\cdot 8}{3}ax^3 + \frac{3\cdot 16}{4}bx^4 + \frac{4\cdot 32}{5}cx^5 + \frac{5\cdot 64}{6}dx^6 + \text{ꝛc.}$$
$$S''' = \frac{2\cdot 27}{3}ax^3 + \frac{3\cdot 81}{4}bx^4 + \frac{4\cdot 243}{5}cx^5 + \frac{5\cdot 729}{6}dx^6 + \text{ꝛc.}$$
$$S^{\text{IV}} = \frac{2\cdot 64}{3}ax^3 + \frac{3\cdot 256}{4}bx^4 + \frac{4\cdot 1024}{5}cx^5 + \frac{5\cdot 4096}{6}dx^6 + \text{ꝛc.}$$
&c.

erhalten. Um nun hiebey die Brüche zu vermeiden, und nicht jedes Segment besonders mit den Rectangeln zu vergleichen, werden wir überhaupt
$$S = \alpha ax^3 + \beta bx^4 + \gamma cx^5 + \delta dx^6 + \text{ꝛc.}$$
setzen, weil die Werthe von α, β, γ, δ &c. nachgehends ohne Mühe für die Segmente S', S'', S''' ꝛc. können gesetzt werden.

§. 33.

Da nun die Reihen, so wir für jede Rectangel und Segmente gefunden, nur in den Zahlen, womit ihre Glieder multiplicirt werden, von einander verschieden sind, so läßt sich für jedes Segment eine Reihe von Zahlen m, n, p, q, r &c. gedenken, so, daß

$$S = mR' + nR'' + pR''' + qR^{IV} + \text{ꝛc.}$$

werde. Da nun hiebey x nicht veränderlich seyn könnte, dafern diese Vergleichung nicht auch bey jedem Gliede statt hätte, so erhalten wir dadurch

$$\alpha = m + 8n + 27p + 64q + 125r + \text{ꝛc.}$$
$$\beta = m + 16n + 81p + 256q + 625r + \text{ꝛc.}$$
$$\gamma = m + 32n + 243p + 1024q + 3125r + \text{ꝛc.}$$
$$\delta = m + 64n + 729p + 4096q + 15625r + \text{ꝛc.}$$
$$\varepsilon = m + 128n + 2187p + 16384q + 78125r + \text{ꝛc.}$$

§. 34.

Da diese Gleichungen in allwegen ins Unendliche fortgehen, so kömmt es nun darauf an, wie viele Glieder man beybehalten will, oder auch in wie viele Theile die Abscisse AP getheilt wird. So viele Glieder man beybehält, so viele Gleichungen werden auch beybehalten, um m, n, p &c. dadurch zu bestimmen. Da aber alle Coefficienten geometrische Progreßionen sind, so findet sich in der Auflösung etwas einförmiges, welches macht, daß die verschiedenen Werthe, so m, n, p, q &c. erhalten, wenn man 1, 2, 3 ꝛc. von diesen Buchstaben beybehält, nach gewissen Gesetzen können aus einander hergeleitet werden. So z. E. um die verschiedene Werthe des m zu finden, schaft man

man aus diesen Gleichungen, der Ordnung nach, n, p, q &c. weg. Nun wird erstlich n weggeschaft, wenn jede Gleichung verdoppelt von der nächstfolgenden abgezogen wird. Denn so bleibt

$$\beta - 2\alpha = -m + 27p + 128q + 375r + \text{etc.}$$
$$\gamma - 2\beta = -m + 81p + 512q + 1875r + \text{etc.}$$
$$\delta - 2\gamma = -m + 243p + 2048q + 9375r + \text{etc.}$$
$$\varepsilon - 2\delta = -m + 729p + 8192q + 46875r + \text{etc.}$$
&c.

Hier sind die Coefficienten ebenfalls geometrische Progressionen. Daher wird p weggeschaft, wenn jede Gleichung dreyfach genommen, von der nächstfolgenden abgezogen wird; so bleibt

$$\gamma - 5\beta + 6\alpha = 2m + 128q + 750r + \text{etc.}$$
$$\delta - 5\gamma + 6\beta = 2m + 512q + 3750r + \text{etc.}$$
$$\varepsilon - 5\delta + 6\gamma = 2m + 2048q + 18750r + \text{etc.}$$
&c.

Um eben so q wegzuschaffen, wird jede Gleichung vierfach genommen von der nächstfolgenden abgezogen; demnach bleibt

$$\delta - 9\gamma + 26\beta - 24\alpha = -6m + 750r + \text{etc.}$$
$$\varepsilon - 9\delta + 26\gamma - 24\beta = -6m + 3750r + \text{etc.}$$
&c.

Aus diesen Gleichungen wird r weggeschaft, wenn jede fünffach genommen von der nächstfolgenden abgezogen wird. Und so bleibt

$$\varepsilon - 14\delta + 71\gamma - 154\beta - 120\alpha = 24m + \text{etc.}$$

Auf diese Art erhält man, der Ordnung nach, die Werthe

$$m = \alpha$$
$$m = 2\alpha - \beta$$
$$2m = 6\alpha - 5\beta + \gamma$$
$$6m = 24\alpha - 26\beta + 9\gamma - \delta$$
$$24m = 120\alpha - 154\beta + 71\gamma - 14\delta + \varepsilon$$
&c.

Und man sieht aus der Art wie die Buchstaben m, p, q, r &c. weggeschaft worden, daß in diesen Werthen von m die Coefficienten durch die Multiplication der Factoren

$1.(2-1).(3-1).(4-1).(5-1)$ ꝛc.

erzeugt werden.

§. 35.

Aus denen in vorhergehenden §. gefundenen Ueberresten, lassen sich nun ferner die Werthe von jedem der übrigen Buchstaben finden. Denn man darf nur anstatt denselben wegzuschaffen, m wegschaffen. So z. E. wenn man die Werthe von q finden will, so zieht man die Gleichungen

$$\gamma - 5\beta + 6\alpha = 2m + 128q + 750r + \text{ꝛc.}$$
$$\delta - 5\gamma + 6\beta = 2m + 512q + 3750r + \text{ꝛc.}$$
$$\varepsilon - 5\gamma + 6\delta = 2m + 2048q + 18750r + \text{ꝛc.}$$
&c.

jede von der nächstfolgenden ab, und so bleibt

$$\delta - 6\gamma + 11\beta - 6\alpha = 384q + 3000r + \text{ꝛc.}$$
$$\varepsilon - 6\delta + 11\gamma - 6\beta = 1536q + 15000r + \text{ꝛc.}$$
&c.

Hier wird nun, um q beyzubehalten, r weggeschaft, indem man jede Gleichung fünffach genom-

ad pag. 281.

$+m=$	$\frac{\alpha}{1}$	$\frac{2\alpha-\beta}{1.1}$	$\frac{6\alpha-5\beta+\gamma}{1.1.2}$	$\frac{24\alpha-26\beta+9\gamma-\delta}{1.1.2.3}$	$\frac{120\alpha-154\beta+71\gamma-14\delta+\varepsilon}{1.1.2.3.4}$	$\frac{720\alpha-1044\beta+580\gamma-155\delta+20\varepsilon-\zeta}{1.1.2.3.4.5}$	&c.
$-n=$	. .	$\frac{\alpha-\beta}{8.1}$	$\frac{3\alpha-4\beta+\gamma}{8.1.1}$	$\frac{12\alpha-19\beta+8\gamma-\delta}{8.1.1.2}$	$\frac{60\alpha-107\beta+59\gamma-13\delta+\varepsilon}{8.1.1.2.3}$	$\frac{360\alpha-702\beta+461\gamma-137\delta+19\varepsilon-\zeta}{8.1.1.2.3.4}$	&c.
$+p=$	. .	. . .	$\frac{2\alpha-3\beta+\gamma}{27.2.1}$	$\frac{8\alpha-14\beta+7\gamma-\delta}{27.2.1.1}$	$\frac{40\alpha-78\beta+49\gamma-12\delta+\varepsilon}{27.2.1.1.2}$	$\frac{240\alpha-508\beta+372\gamma-121\delta+18\varepsilon-\zeta}{27.2.1.1.2.3}$	&c.
$-q=$	. .	. . .	. . .	$\frac{6\alpha-11\beta+6\gamma-\delta}{64.3.2.1}$	$\frac{30\alpha-61\beta+41\gamma-11\delta+\varepsilon}{64.3.2.1.1}$	$\frac{180\alpha-396\beta+307\gamma-107\delta+17\varepsilon-\zeta}{64.3.2.1.1.2}$	&c.
$+r=$	. .	. . .	. . .	. . . . .	$\frac{24\alpha-50\beta+35\gamma-10\delta+\varepsilon}{125.4.3.2.1}$	$\frac{144\alpha-324\beta+260\gamma-95\delta+16\varepsilon-\zeta}{125.4.3.2.1.1}$	&c.
$-s=$	. .	. . .	. . .	. . . . .	. . . .	$\frac{120\alpha-274\beta+225\gamma-85\delta+15\varepsilon-\zeta}{216.5.4.3.2.1}$	&c.

&c.

genommen von der nächstfolgenden abzieht; und so bleibt

$\varepsilon - 11\,\delta + 41\,\gamma - 61\,6 + 30\,\alpha = -384\,q +$ 2c. &c.

Hier werden demnach, weil man, anstatt wie vorhin (§. 34.) vierfach abzuziehen, um m wegzuschaffen nur einfach abgezogen worden, die Coefficienten der Werthe von q nicht durch die Multiplication der Factoren

$1.(2-1).(3-1).(4-1).(5-1).$ 2c.

sondern der Factoren

$1.(2-1).(3-1).(1-1).(5-1)$:c.

erzeugt. Man kann zugleich aus dieser Anmerkung abnehmen, wie die Factoren für n, p, r &c. aussehen müssen, da für jeden dieser Buchstaben statt der 2, 3, 5 2c. fachen, eine einfache Subtraction vorgenommen wird.

§. 36.

Wir wollen nun die Werthe von m, n, p, q &c. in nebenstehender Tabelle vorstellen.

§. 37.

Die Bildung dieser Tabelle beruht fürnehmlich auf der Bestimmung der Coefficienten, so in den Zählern dieser Brüche vorkommen. Und dabey liegen die untersten Brüche oder Glieder jeder Columne zum Grunde. Diese entstehen eben so wie die obersten aus der Multiplication der Binomialfactoren

$1.(2-1).(3-1).(4-1).(5-1)$ 2c.

die übrigen entspringen aus diesen durch ähnliche Factoren. So z. E. für q

$(6-11+6-1).(5-1)=30-61+41-11+1$

$(30-61+41-11+1).(6-1)=180-396+307-107+17-1$ &c.

Die Nenner aber sind Producte aus Cubiczahlen und den natürlichen Zahlen 1, 2, 4 &c.

§. 38.

Fig. V. Um nun den Gebrauch dieser Tabelle zu zeigen, so wollen wir z. E. setzen, die fürgegebene Abscisse A P werde in 3 gleiche Theile getheilt, und es solle das Segment A M N quadrirt werden. Hier haben wir demnach (§. 32.)

$$S = S''' = \frac{2 \cdot 27}{3} ax^4 + \frac{3 \cdot 81}{4} bx^4 + \frac{4 \cdot 243}{5} cx^5$$

folglich

$$\alpha = \frac{2 \cdot 27}{3} = 18$$

$$\beta = \frac{3 \cdot 81}{4} = \frac{243}{4}$$

$$\gamma = \frac{4 \cdot 243}{5} = \frac{972}{5}$$

und in vorstehender Tabelle die dritte Columne

$$+m = \frac{6\alpha - 5\beta + \gamma}{2}$$

$$-n = \frac{3\alpha - 4\beta + \gamma}{8}$$

$$+p = \frac{2\alpha - 3\beta + \gamma}{54}$$

Wes

Werden in diesen Formeln die Werthe von α, β, γ gesetzt, so erhält man

$$m = -\tfrac{27}{40}$$
$$n = -\tfrac{27}{40}$$
$$p = +\tfrac{107}{120}$$

demnach

$$AMN = \tfrac{107}{120} APMN - \tfrac{27}{40} Apmn - \tfrac{27}{40} A\pi\mu\nu$$

woraus man sieht, der wievielte Theil von den drey Rectangeln müsse genommen werden, um den Inhalt des Segmentes durch diese Näherung zu erhalten. Man erhält denselben vollkommen, wenn die Gleichung für die krumme Linie wirklich nicht mehr als die drey ersten Glieder

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4$$

hat, oder auch nur

$$y = ax^2 + bx^3$$

oder endlich auch nur

$$y = ax^2$$

ist.

§. 39.

Um aber ein Beyspiel zu geben, wo dieses nicht vorkömmt, und wo man folglich in der That nur eine Näherung erhält, so wollen wir setzen AM sey ein Circulbogen von 30 Gr. und dessen Halbmesser = 1. Hier haben wir demnach

$$AP = \sin. 30° = \tfrac{1}{2} \quad PM = 1 - \sqrt{\tfrac{3}{4}} = 0,1339746$$
$$Ap = \tfrac{2}{3} AP = \tfrac{1}{3} \quad pm = 1 - \sqrt{\tfrac{8}{9}} = 0,0571910$$
$$A\pi = \tfrac{1}{3} AP = \tfrac{1}{6} \quad \pi\mu = 1 - \sqrt{\tfrac{35}{36}} = 0,0139868$$

und

und hieraus

$$APMN = 0,0669873$$
$$Apmn = 0,0190637$$
$$A\pi\mu\nu = 0,0023311$$

demnach den Inhalt des Segmentes AMN

$$= \tfrac{107}{120} APMN - \tfrac{27}{40}(Apmn + A\pi\mu\nu)$$
$$= 0,0452888$$

Es ist aber der wahre Inhalt $= 0,0452930$

demnach der Unterschied nur $= 0,0000042$

Da sich dieser Unterschied erst bey der sechsten Dignität der Abscisse x zu äussern anfängt, so wird derselbe 64 mal geringer, wenn man den Bogen nur halb so groß annimmt.

§. 40.

Setzt man, die Abscisse A P solle in 4 gleiche Theile getheilt werden, und man wolle ebenfalls das ganze Segment A M N quadriren, so haben wir $S = S^{IV}$, demnach (§. 32.)

$$\alpha = \frac{2.64}{3} = \frac{128}{3}$$
$$\beta = \frac{3.256}{4} = 192$$
$$\gamma = \frac{4.1024}{5} = \frac{4096}{5}$$
$$\delta = \frac{5.4096}{6} = \frac{10240}{3}$$

und aus der Tabelle (§. 36.)

+m

$$+m = \frac{24\alpha - 26\beta + 9\gamma - \delta}{6}$$

$$-n = \frac{12\alpha - 19\beta + 8\gamma - \delta}{16}$$

$$+p = \frac{8\alpha - 14\beta + 7\gamma - \delta}{54}$$

$$-q = \frac{6\alpha - 11\beta + 6\gamma - \delta}{384}$$

Werden in diesen Formeln die Werthe von α, β, γ, gesetzt, so findet man nach geschehener Reduction

$$m = -\tfrac{64}{45}$$
$$n = -\tfrac{4}{15}$$
$$p = -\tfrac{63}{135}$$
$$q = +\tfrac{83}{90}$$

demnach erhält man

$$S = \tfrac{83}{90}R^{IV} - \tfrac{63}{135}R''' - \tfrac{4}{15}R'' - \tfrac{64}{45}R'$$

§. 41.

Diese Formel giebt für das Segment eines Circulbogens von 30 Gr.

$$S = 0{,}0452925$$

welcher Werth von den wahren nur um 0, 0000005 verschieden ist.

§. 42.

Wollte man hingegen die Abscisse AP nur in zween Theile theilen, so würde man, ebenfals für das ganze Segment AMN (§. 32. 36.)

$\alpha =$

$$\alpha = \tfrac{16}{3}$$
$$\beta = 12$$
$$+m = 2\alpha - \beta$$
$$-n = \alpha - \beta$$

und hieraus

$$m = -\tfrac{4}{3}$$
$$n = +\tfrac{5}{6}$$

demnach

$$S = \tfrac{5}{6}R'' - \tfrac{4}{3}R'$$

finden. Diese Formel giebt für das Segment eines Circulbogens von 30 Gr.

$$S = 0{,}0452481$$

welches um 0, 0000449 zu wenig ist.

§. 43.

Würde man aber die Abscisse AP ganz behalten, so würde man (§. cit.)

$$\alpha = m = \tfrac{2}{3}$$

demnach

$$S = \tfrac{2}{3}R'$$

erhalten. Dieses giebt für das Segment eines Circulbogens von 30 Gr.

$$S = 0{,}0446582$$

welches um 0,0006348 zu wenig ist. Man sieht demnach aus diesen für einerley Segment gefundenen Unterschieden

0,0006348
0,0000449
0,0000046
0, 0000005

Um wie viel man dem Wahren näher kömmt, wenn

wenn man die Abscisse in mehrere Theile theilt. Ueberdies werden diese Unterschiede, wenn der Bogen selbst kleiner ist, in ungleicher Verhältniß kleiner. Denn wenn man nur die Hälfte des Bogens nimmt, so wird der erste Unterschied 16, der andere 32, der dritte 64, der vierte 128 mal kleiner.

§. 44.

Was aber bey allem diesem besonders anzumerken ist, besteht darin, daß die Coefficienten der Reihe

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

wodurch die Natur der krummen Linie AM überhaupt ausgedruckt wird, keinen Einfluß auf die Bestimmung der Buchstaben m, n, p, q, r &c. haben, ungeachtet sie daraus hergeleitet sind. In der That bestimmt diese Gleichung oder Reihe in jedem fürgegebenen Fall nur die Grösse der Rectangel R', R'', R''' &c. aus welchen sodann S vermitelst der Formel

$$S = mR' + nR'' + pR''' + \&c.$$

gefunden wird.

§. 45.

Sehen wir aber genauer nach, wie die Buchstaben m, n, p &c. bestimmt werden, so findet sichs, daß wenn in der Reihe

$$y = ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5 + \&c.$$

wechselsweise einige Glieder $= 0$ sind, die Buchstaben m, n, p &c. auf eine andere Art bestimmt werden können. Wir wollen z. E. $b = d = f = \&c. = 0$ setzen, und so werden wir statt den (§. 33.) angenommenen Gleichungen folgende

$$\alpha = m + 8n + 27p + 64q + \text{ꝛc.}$$
$$\gamma = m + 32n + 243p + 1024q + \text{ꝛc.}$$
$$\varepsilon = m + 128n + 2187p + 16384q + \text{ꝛc.}$$
$$\eta = m + 512n + 19683p + 262144q + \text{ꝛc.}$$
&c.

haben, weil die für β, δ, ζ &c. daselbst angenommene Gleichungen hier wegbleiben können.

§. 46.

Die Auflösung dieser Gleichungen ist nun der vorhergehenden ganz ähnlich. So wird um m zu finden, nach und nach n, p, q &c. weggeschaft. Man zieht nemlich, um anfangs n wegzuschaffen, jede Gleichung vierfach genommen, von der nächstfolgenden ab, und so bleibt

$$\gamma - 4\alpha = -3m + 135p + 768q + \text{ꝛc.}$$
$$\varepsilon - 4\gamma = -3m + 1215p + 12288q + \text{ꝛc.}$$
$$\eta - 4\varepsilon = -3m + 10935p + 196608q + \text{ꝛc.}$$
&c.

Um ferner p wegzuschaffen, wird jede Gleichung 9 mal genommen, von der nächstfolgenden abgezogen, und so bleibt

$$\varepsilon - 13\gamma + 36\alpha = 24m + 5376q + \text{ꝛc.}$$
$$\eta - 13\varepsilon + 36\gamma = 24m + 86016q + \text{ꝛc.}$$
&c.

Eben

Eben so wird q weggeschaft, wenn jede Gleichung 16 mal genommen, von der nächstfolgenden abgezogen wird, und so bleibt

$$\eta - 29\varepsilon + 244\gamma - 576\alpha = -360m + \text{ꝛc.}$$

Auf diese Art sind nun der Ordnung nach die Werthe, so m erhält,

$$m = \alpha$$

$$m = \frac{4\alpha - \gamma}{3}$$

$$m = \frac{36\alpha - 13\gamma + \varepsilon}{3.8.}$$

$$m = \frac{576\alpha - 244\gamma + 29\varepsilon - \eta}{3.8.15.}$$

&c.

Die Coefficienten entstehen nun hier aus der Multiplication der Factoren

$$1.(4-1).(9-1).(16-1).(25-1).\text{ꝛc.}$$

§. 47.

Die Werthe der übrigen Buchstaben n, p, q &c. finden sich auf eine ähnliche Art. So z. E. wird für p erstlich

$$\gamma - \alpha = 8(4-1)n + 27(9-1)p + 64(16-1)q + \&c.$$

ferner

$$\varepsilon - 5\gamma + 4\alpha = 27.(9-1).(9-4)p + 64(16-1).(16-4)q + \&c.$$

sodann

$$\eta - 21\varepsilon + 84\gamma - 64\alpha = 27.(9-1)(9-4)(9-16)p + \&c.$$

&c.

Hingegen erhält man für n

$$\gamma - \alpha = 8(4-1)n + 27(9-1)p + 64(16-1)q + \&c.$$

$$\varepsilon - 10\gamma + 9\alpha = 8.(4-1)(4-9)n + 64(16-1)(16-9)q + \&c.$$

$$\eta - 26\varepsilon + 169\gamma - 144\alpha = 8.(4-1)(4-9)(4-16)n + \&c.$$

&c.

Und eben so für q

$$\gamma - \alpha = 8(4-1)n + 27(9-1)p + 64(16-1)q + \&c.$$

$$\varepsilon - 5\gamma + 4\alpha = 27(9-1).(9-4)p + 64.(16-1).(16-4)q + \&c.$$

$$\eta - 14\varepsilon + 49\gamma - 36\alpha = 64.(16-1).(16-4).(16-9).q + \&c.$$

&c.

§. 48.

Hieraus erwächst sodann folgende Tabelle

$+m=$

$+m=$	α	$\frac{4\alpha-\gamma}{4-1}$	$\frac{36\alpha-13\gamma+\varepsilon}{(4-1).(9-1)}$	$\frac{576\alpha-244\gamma+29\varepsilon-\eta}{(4-1).(9-1).(16-1)}$	ꝛc.
$-n=$	...	$\frac{\alpha-\gamma}{8.(4-1)}$	$\frac{9\alpha-10\gamma+\varepsilon}{8.(4-1).(9-4)}$	$\frac{144\alpha-169\gamma+26\varepsilon-\eta}{8.(4-1).(9-4).(16-4)}$	ꝛc.
$+p=$	...	- - -	$\frac{4\alpha-5\gamma+\varepsilon}{27.(9-1).(9-4)}$	$\frac{64\alpha-84\gamma+21\varepsilon-\eta}{27.(9-1).(9-4).(16-9)}$	ꝛc.
$-q=$	...	- - -	- - - - - - -	$\frac{36\alpha-49\gamma+14\varepsilon-\eta}{64.(16-1).(16-4).(16-9)}$	ꝛc.

§. 49.

Der Gebrauch dieser Tabelle ist dem von der vorhergehenden ganz ähnlich, dagegen aber nicht so allgemein, weil er sich nur auf die Fälle erstreckt, wo

$$y = ax^2 + cx^4 + ex^6 + gx^8 + \&c.$$

ist. Man setze z. E. die Abscisse werde nur in zween Theile getheilt, so haben wir $S = S''$, und daher (§. 32. 45.)

$$\alpha = \frac{2 \cdot 8}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\gamma = \frac{4 \cdot 32}{5} = \frac{128}{5}$$

und aus der zweyten Columne der Tabelle (§. 48.)

$$+m = \frac{4\alpha - \gamma}{4-1} = \frac{4\alpha - \gamma}{3}$$

$$-n = \frac{\alpha - \gamma}{8 \cdot (4-1)} = \frac{\alpha - \gamma}{24}$$

folglich

$$m = -\tfrac{64}{45}$$

$$n = +\tfrac{38}{45}$$

und daher

$$S = \tfrac{38}{45} R'' - \tfrac{64}{45} R'$$

§. 50.

Da bey dem Circul die Bedingung

$$y = ax^2 + cx^4 + ex^6 + gx^8 + \&c.$$

vorkömmt, so wollen wir wiederum einen Circulbogen

culbogen von 30 Gr. für AM setzen, und da giebt die erst gefundene Formel

$$S = 0,0452767$$

welches nur um 0,0000163 von dem Wahren abweicht. Ein Unterschied, der beynahe drey mal geringer ist, als derjenige, den wir für eben diesen Fall (§. 42.) aus den ersten Formeln gefunden haben.

§. 51.

Wir können nun ferners eben diese Methode auch auf diejenigen Fälle ausdehnen, wo die bisher vorausgesetzte Bedingung (§. 31.) wegfällt, und daher die Lage der Abscissenlinie ganz willkührlich gelassen wird. Es sey demnach BM ein Stück einer krummen Linie. Auf AP werden die Abscissen von A an gerechnet, und die Ordinaten seyn auf dieser Linie senkrecht. Solte nun das Stück ABMP quadrirt werden, so kann man wiederum, wie vorhin, die Abscisse AP in eine beliebige Anzahl gleicher Theile theilen; und da ist die Frage, wie der gesuchte Inhalt von ABMP durch die vermittelst solcher Theilung entstehende Rectangel APMN, Apmn, $A\pi\mu\nu$ &c. bestimmt werden könne, und wie durch eben dieselbe der Inhalt der einzeln Theile $AB\mu\pi$, ABmp rc. bestimmt werde? Fig. VI.

§. 52.

Es sey

$$A\pi = x \quad Ap = 2x \quad AP = 3x \text{ \&c.}$$
$$\pi\mu = y' \quad pm = y'' \quad PM = y''' \text{ \&c.}$$

und die Verhältniß zwischen x, y werden durch die Reihe

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{\&c.}$$

ausgedrückt. Man nenne ferner die Segmente S′, S″, S‴ &c. und die Rectangel R′, R″, R‴ &c. so haben wir

$$\begin{aligned}
R' &= ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \text{ꝛc.} \\
R'' &= 2ax + 4bx^2 + 8cx^3 + 16dx^4 + 32ex^5 + \text{ꝛc.} \\
R''' &= 3ax + 9bx^2 + 27cx^3 + 81dx^4 + 243ex^5 + \text{ꝛc.} \\
R^{IV} &= 4ax + 16bx^2 + 64cx^3 + 256dx^4 + 1024ex^5 + \text{ꝛc.}
\end{aligned}$$
&c.

Ferner

$$\begin{aligned}
S' &= ax + \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}cx^3 + \tfrac{1}{4}dx^4 + \tfrac{1}{5}ex^5 + \text{ꝛc.} \\
S'' &= 2ax + \tfrac{4}{2}bx^2 + \tfrac{8}{3}cx^3 + \tfrac{16}{4}dx^4 + \tfrac{32}{5}ex^5 \,\text{--} \\
S''' &= 3ax + \tfrac{9}{2}bx^2 + \tfrac{27}{3}cx^3 + \tfrac{81}{4}dx^4 + \tfrac{243}{5}ex^5 \,\text{--} \\
S^{IV} &= 4ax + \tfrac{16}{2}bx^2 + \tfrac{64}{3}cx^3 + \tfrac{256}{4}dx^4 + \tfrac{1024}{5}ex^5 \,\text{--}
\end{aligned}$$

wofür wir überhaupt

$$S = \alpha ax + \beta bx^2 + \gamma cx^3 + \delta dx^4 + \varepsilon ex^5 + \text{ꝛc.}$$

setzen, welche Reihe sich auch auf die zwischen die Theilungspuncte fallende Abscissen x ausdehnet, weil auch diese Räume ∫y d x durch die Rectangel R′, R″, R‴ &c. bestimmen lassen.

§. 53.

Man setze nun wiederum

$$S = mR' + nR'' + pR''' + qR^{IV} + \&c.$$

so erhält man aus gleichem Grunde, wie §. 33. die Gleichungen

$$\alpha = m + 2n + 3p + 4q + 5r + \text{ꝛc.}$$
$$\beta = m + 4n + 9p + 16q + 25r + \text{ꝛc.}$$
$$\gamma = m + 8n + 27p + 64q + 125r + \text{ꝛc.}$$
$$\delta = m + 16n + 81p + 256q + 625r + \text{ꝛc.}$$
$$\varepsilon = m + 32n + 243p + 1024q + 3125r + \text{ꝛc.}$$

&c.

Demnach sind die Gleichungen wodurch m bestimmt wird

$$\alpha = m + 2n + 3p + 4q + 5r + \&c.$$
$$\beta - 2\alpha = (1-2)m + 3(3-2)p + 4(4-2)q + 5(5-2)r + \&c.$$
$$\gamma - 5\beta + 6\alpha = (1-2).(1-3)m + 4(4-2).(4-3)q + 5(5-2)(5-3)r + \&c.$$
$$\delta - 9\gamma + 26\beta - 24\alpha = (1-2).(1-3).(1-4)m + 5.(5-2).(5-3).(5-4)r + \&c.$$
$$\varepsilon - 14\delta + 71\gamma - 154\beta + 120\alpha = (1-2).(1-3).(1-4).(1-5)m + \&c.$$

&c.

Ferner die Gleichung wodurch n bestimmt wird

$$\beta - \alpha = 2(2-1)n + 3(3-1)p + 4(4-1)q + 5(5-1)r + \&c.$$
$$\gamma - 4\beta + 3\alpha = 2(2-1)(2-3)n + 4.(4-1)(4-3)q + 5(5-1)(5-3)r + \&c.$$

$$\delta - 8\gamma + 19\beta - 12\alpha = 2(2-1).2-3).(2-4)n + 5.(5-1).(5-3).(5-4).r + \&c.$$

$$\varepsilon - 13\delta + 59\gamma - 107\beta + 60\alpha = 2.(2-1).(2-3).(2-4).(2-5)n + \&c.$$

&c.

Eben so die Gleichungen, wodurch die Werthe von p bestimmt werden

$$\beta - \alpha = 2(2-1)n + 3(3-1)p + 4(4-1)q + 5(5-1)r + \&c.$$

$$\gamma - 3\beta + 2\alpha = 3(3-1)(3-2)p + 4(4-1).(4-2)q + 5.(5-1).(5-2)r + \&c.$$

$$\delta - 7\gamma + 14\beta - 8\alpha = 3(3-1)(3-2)(3-4)p + 5.(5-1).(5-2).(5-4)r + \&c.$$

$$\varepsilon - 12\delta + 49\gamma - 78\beta + 40\alpha = 3(3-1).(3-2).(3-4)(3-5)p + \&c.$$

&c.

Wiederum die Gleichungen, wodurch q bestimmt wird

$$\beta - \alpha = 2(2-1)n + 3(3-1)p + 4(4-1)q + 5.(5-1)r + \&c.$$

$$\gamma - 3\beta + 2\alpha = 3(3-1)(3-2)p + 4(4-1)(4-2)q + 5(5-1).(5-2)r + \&c.$$

$$\delta - 6\gamma + 11\beta - 6\alpha = 4(4-1)(4-2)(4-3)q + 5.(5-1).(5-2).(5-3)r + \&c.$$

$$\varepsilon - 11\delta + 41\gamma - 61\beta + 30\alpha = 4(4-1)(4-2)(4-3)(4-5)q + \&c.$$

&c.

Sodann die Gleichungen, wodurch r bestimmt wird

β —

ad pag. 297.

$+m=$	α	$\frac{2\alpha-\beta}{1}$	$\frac{6\alpha-5\beta+\gamma}{1.2}$	$\frac{24\alpha-26\beta+9\gamma-\delta}{1.2.3}$	$\frac{120\alpha-154\beta+71\gamma-14\delta+\varepsilon}{1.2.3.4}$	$\frac{720\alpha-1044\beta+580\gamma-155\delta+20\varepsilon-\zeta}{1.2.3.4.5}$	&c.
$-n=$	. .	$\frac{\alpha-\beta}{2.1}$	$\frac{3\alpha-4\beta+\gamma}{2.1.1}$	$\frac{12\alpha-19\beta+8\gamma-\delta}{2.1.1.2}$	$\frac{60\alpha-107\beta+59\gamma-13\delta+\varepsilon}{2.1.1.2.3}$	$\frac{360\alpha-702\beta+461\gamma-137\delta+19\varepsilon-\zeta}{2.1.1.2.3.4}$	&c.
$+p=$	. .	. . .	$\frac{2\alpha-3\beta+\gamma}{3.2.1}$	$\frac{8\alpha-14\beta+7\gamma-\delta}{3.2.1.1}$	$\frac{40\alpha-78\beta+49\gamma-12\delta+\varepsilon}{3.2.1.1.2}$	$\frac{240\alpha-508\beta+372\gamma-121\delta+18\varepsilon-\zeta}{3.2.1.1.2.3}$	&c.
$-q=$	. .	. . .	. . .	$\frac{6\alpha-11\beta+6\gamma-\delta}{4.3.2.1}$	$\frac{30\alpha-61\beta+41\gamma-11\delta+\varepsilon}{4.3.2.1.1}$	$\frac{180\alpha-396\beta+307\gamma-107\delta+17\varepsilon-\zeta}{4.3.2.1.1.2}$	&c.
$+r=$	. .	. . .	. . .	. . . . .	$\frac{24\alpha-50\beta+35\gamma-10\delta+\varepsilon}{5.4.3.2.1}$	$\frac{144\alpha-324\beta+260\gamma-95\delta+16\varepsilon-\zeta}{5.4.3.2.1.1}$	&c.
$-s=$	. .	. . .	. . .	. . . . .	. . . .	$\frac{120\alpha-274\beta+225\gamma-85\delta+15\varepsilon-\zeta}{6.5.4.3.2.1}$	&c.

&c.

$$\beta - \alpha = 2(2-1)n + 3(3-1)p + 4(4-1)q + 5(5-1)r + \&c.$$
$$\gamma - 3\beta + 2\alpha = 3(3-1)(3-2)p + 4(4-1)(4-2)q + 5(5-1)(5-2)r + \&c.$$
$$\delta - 6\gamma + 11\beta - 6\alpha = 4(4-1)(4-2)(4-3)q + 5(5-1)(5-2)(5-3)r + \&c.$$
$$\varepsilon - 10\delta + 35\gamma - 50\beta + 24\alpha = 5.(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)r + \&c.$$
&c.

§. 54.

Aus diesen Gleichungen entstehet sodann beygefügte Tabelle.

§. 55.

Vergleicht man diese Tabelle mit der erstern (§. 36.) so ist sie davon nur in den Cubiczahlen verschieden, welche hier in den Nennern nicht vorkommen, und an deren Statt nur die ledigen Zahlen, oder die Cubicwurzeln, hier als Theiler erscheinen.

§. 56.

Der Gebrauch dieser Tabelle ist dem von beyden vorhergehenden ganz ähnlich. Es sey z. E. ABMP zu quadriren, und die Absciße AP in drey gleiche Theile getheilt; so haben wir $S = S'''$, demnach (§. 52.)

$$\alpha = 3$$
$$\beta = \tfrac{9}{2}$$
$$\gamma = \tfrac{27}{3} = 9$$

und aus der dritten Columne dieser Tabelle

$$+m = \frac{6\alpha - 5\beta + \gamma}{2}$$

$$-n = \frac{3\alpha - 4\beta + \gamma}{2}$$

$$+p = \frac{2\alpha - 3\beta + \gamma}{6}$$

Setzt man in diesen Formeln die Werthe von α, β, γ, so erhält man

$$m = \frac{9}{4}$$
$$n = 0$$
$$p = \frac{1}{4}$$

demnach, weil $n = 0$ wird,

$$S''' = \tfrac{1}{4}R''' + \tfrac{9}{4}R'$$

Man kann daher, so oft man sich mit einer Trisection der Abscisse begnügen will, das mittlere Rectangel weglassen, und schlechthin

$$ABMP = \tfrac{1}{4}ANMP + \tfrac{9}{4}A\nu\mu\pi$$

setzen.

§. 57.

Dieses Phänomenon, daß man nemlich eines von den Rectangeln gar nicht gebraucht, kömmt auch in andern Fällen vor. So z. E. wenn man sich mit der Bisection der Abscisse begnügt, hat man (§. 52. 54.) $S = S''$

$$\alpha = 2$$
$$\beta = \tfrac{4}{2} = 2$$
$$m = 2\alpha - \beta = 2$$
$$n = \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$$

folg-

folglich schlechthin

$$S'' = 2R'.$$

§. 58.

Eben so wenn man die Abscisse in 4 Theile theilt, $S = S^{IV}$, und (§. cit.)

$$\alpha = 4$$
$$\beta = \tfrac{16}{2} = 8$$
$$\gamma = \tfrac{64}{3}$$
$$\delta = \tfrac{256}{4} = 64$$

$$+m = \frac{24\alpha - 26\beta + 9\gamma - \delta}{6} = \tfrac{8}{3}$$

$$-n = \frac{12\alpha - 19\beta + 8\gamma - \delta}{4} = \tfrac{1}{3}$$

$$+p = \frac{8\alpha - 14\beta + 7\gamma - \delta}{6} = \tfrac{8}{9}$$

$$-q = \frac{6\alpha - 11\beta + 6\gamma - \delta}{24} = 0$$

demnach

$$S^{IV} = * \tfrac{8}{9} R''' - \tfrac{2}{3} R'' + \tfrac{8}{3} R'$$

§. 59.

Hingegen erhält man, wenn die Abscisse in fünf gleiche Theile getheilt wird

$$S^{V} = \tfrac{19}{144} R^{V} - \tfrac{25}{288} R^{IV} + \tfrac{25}{18} R''' - \tfrac{175}{144} R'' + \tfrac{425}{144} R'$$

wobey alle fünf Rectangel müssen berechnet werden.

§. 60.

Ueberhaupt betrachtet, sind diese Formeln weniger convergirend als diejenigen, so wir oben für den Fall der fünften Figur gefunden haben. Man hat den Grund davon darin zu suchen, daß hier in der Reihe

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.$$

die ersten zwey Glieder beybehalten werden. Da nun z. E. wenn man die Abscisse A P in drey Theile theilt, und dadurch

$$ABMP = \tfrac{1}{4} ANMP + \tfrac{3}{4} A\nu\mu\pi$$

erhält, (§. 56.) diese Formel eigentlich nur da nach aller Schärfe statt hat, wo

$$y = a + bx + cx^2$$

ist, so sieht man leicht, daß in jeden andern Fällen der Fehler, den man dadurch zuläßt, von den übrigen Gliedern

$$dx^3 + ex^4 + fx^5 + \&c.$$

herrührt, und in Absicht auf den Raum ABMP,

$$= \tfrac{1}{4} dx^4 + \tfrac{1}{5} ex^5 + \tfrac{1}{6} fx^6 + \&c.$$

ist. Daher muß auch die Abscisse $A\pi = x$ klein genug seyn, wenn man diesen Unterschied solle weglassen können. Da dieser Unterschied sich hier bey der vierten Dignität von x anfängt, so kömmt man den Wahren 16 mal näher, wenn x um die Hälfte kleiner angenommen wird.

§. 61.

§. 61.

Diese Formeln haben übrigens die Bequemlichkeit, daß man dadurch krumme Linien, so genau man will, quadriren kann, so bald sie construirt sind; und in so ferne haben sie selbst auch in der practischen Geometrie ihren Nutzen, wo nicht selten Felder auszumessen vorkommen, deren Grenzlinien sich in die Krümme ziehen. Solche kann man nun in Segmente, dergleichen ABMP ist, eintheilen, und ihren Inhalt, vermittelst der Rectangel $A\mu$, Am, AM, bestimmen.

§. 62.

Man nimmt zu diesem Ende, wenn z. E. a q eine solche Linie ist, auf A Q, so viele gleiche Theile A B, B C, C D &c. man will, und richtet aus denselben Perpendiculairen Aa, Bb auf. Auf diese Art wird man, wenn man diese Theile zu 3 und 3 nimmt nach der Formel des §. 56.

$$AadD = \tfrac{9}{4} AB.Bb + \tfrac{1}{4} AD.Dd = \tfrac{3}{4} AB(Dd + 3Bb)$$
$$DdgG = \tfrac{3}{4} AB(Gg + 3Ee)$$
$$GgkK = \tfrac{3}{4} AB(Kk + 3Hh)$$
$$KknN = \tfrac{3}{4} AB(Nn + 3Ll)$$
$$NnqQ = \tfrac{3}{4} AB(Qq + 3Oo)$$

daher den ganzen Inhalt

$$AaqQ = \tfrac{3}{4} AB(Dd + Gg + Kk + Nn + Qq) + \tfrac{9}{4} AB(Bb + Ee + Hh + Ll + Oo)$$

erhalten, welcher desto genauer seyn wird, von jewe-

jeweniger Graden die Krümmung der Bögen ab, bc, cd &c. ist.

§. 63.

Man erhält aber den Inhalt genauer, wenn man die Theile auf AQ zu 4 und 4 nimmt. Alsdann dient die Formel des 58 §. und es ist

$$\begin{aligned} AaeE &= \tfrac{8}{3} AB.Bb - \tfrac{2}{3} AC.Cc + \tfrac{8}{9} AD.Dd \\ &= \tfrac{4}{3} AB(2Bb - Cc + 2Dd) \\ EeiI &= \tfrac{4}{3} AB(2Ff - Gg + 2Hh) \\ IiNn &= \tfrac{4}{3} AB(2Kk - Ll + 2Mn) \end{aligned}$$

&c.

daher der Inhalt

$$\begin{aligned} AanN &= \tfrac{8}{3} AB(Bb + Dd + Ff + Hh + Kk + Mm) \\ &- \tfrac{4}{3} AB(Cc + Gg + Ll). \end{aligned}$$

§. 64.

Will man den Inhalt noch genauer haben, so nimmt man die Theile auf AQ zu 5 und 5, und gebraucht die Formel des §. 59. Denn so wird

$$\begin{aligned} AafF &= \tfrac{425}{144} AB.Bb - \tfrac{175}{144}.AC.Cc + \tfrac{25}{18}.AD.Dd \\ &- \tfrac{25}{288} AE.Ee + \tfrac{19}{144}.AF.Ff \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} AafF &= \tfrac{10}{288} AB(85.Bb - 70.Cc + 120.Dd - 10.Ee + 19.Ff) \\ FflL &= \tfrac{10}{288} AB(85.Gg - 70.Hh + 120.Ii - 10.Kk + 19.Ll) \\ LlqQ &= \tfrac{10}{288} AB(85.Mm - 70.Nn + 120.Oo - 10.Pp + 19.Qq) \end{aligned}$$

seyn.

§. 65.

§. 65.

Man kann aber auch schlechthin nur die Puncte a, d, g, k, n, q durch gerade Linien zusammenhängen, welche sodann ein geradlinichtes Vieleck ausmachen, welches sich leicht berechnen läßt. Und so bleiben nur noch die Segmente zu berechnen, welche auf diesen Chorden stehen, und theils zu dem Vielecke addirt, theils subtrahirt werden müssen, je nachdem sie ausser- oder innerhalb demselben liegen. Es sey AmMnA ein solches Segment, so wird die Chorde AM mit der Höhe mn multiplicirt, und von dem Producte $\frac{2}{3}$ genommen, weil, wie wir oben (§. 23. 28.) gesehen haben, der Inhalt desto genauer $= \frac{2}{3}$. AM. mn ist, je weniger der Bogen AmM von der Krümmung der denselben osculirenden Parabel abweicht. Fig. II.

§. 66.

Bey den bisher (§. 52 seqq.) betrachteten Formeln, haben wir noch immer gesetzt, daß die Absciffen von A gegen P gerechnet, und daher sämtlich positiv genommen werden. Nimmt man aber eben so viele negative Absciffen mit in die Rechnung, so wird diese ganz geändert, und man reicht damit doppelt weiter, weil man die gleichnahmigten Rectangel auf beyden Seiten in eines zusammen nehmen kann. Es sey z. E. das Segment P′M′MP zu quadriren, so wird die Absciffe P′P in 2, 4, 6, 8 rc. gleiche Theile Fig. VI. Fig. VIII.

Theile getheilt, und aus den Theilungspuncten perpendiculaire Ordinaten aufgerichtet. Die mittlere dieser Ordinaten sey A B. Und die Abscissen werden von dem Punct A an gegen P und P′ vor- und rückwerts gerechnet. Zieht man die Puncte M′ M, m′ m, $\mu' \mu$ durch gerade Linien zusammen, so ergeben sich die Trapeze P′ M′ M P, p′ m′ m p, $\pi' \mu' \mu \pi$, deren Inhalt der Summe zweyer gleichnahmigten Rectangel A P′ . P′ M′ + AP . PM &c. gleich ist.

§. 67.

Man setze nun wiederum $A\pi = x, \pi\mu = y$, und

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \&c.$$

und nenne die Trapeze T′, T″, T‴ &c. die denselben entsprechende Segmente S′, S″, S‴ &c. so findet man

$$T' = 2ax + 2cx^3 + 2ex^5 + 2gx^7 + \text{etc.}$$
$$T'' = 4ax + 16cx^3 + 64ex^5 + 256gx^7 + \text{etc.}$$
$$T''' = 6ax + 54cx^3 + 486ex^5 + 4374gx^7 + \text{etc.}$$
&c.
$$S' = 2ax + \tfrac{2}{3}cx^3 + \tfrac{2}{5}ex^5 + \tfrac{2}{7}gx^7 + \text{etc.}$$
$$S'' = 4ax + \tfrac{16}{3}cx^3 + \tfrac{64}{5}ex^5 + \tfrac{256}{7}gx^7 + \text{etc.}$$
&c.

wofür wir überhaupt

$$S = 2\alpha ax + 2\gamma cx^3 + 2\varepsilon ex^5 + 2\eta gx^7 + \text{etc.}$$

setzen,

setzen, um auf eine allgemeine Art die Trapeze T', T'', T''' &c. mit jeden Segmenten vergleichen zu können.

§. 68.

Zu diesem Ende setzen wir wiederum

$$S = mT' + nT'' + pT''' + \&c.$$

und erhalten dadurch die Gleichungen.

$$\alpha = m + 2n + 3p + 4q + 5r + \text{etc.}$$
$$\gamma = m + 8n + 27p + 64q + 125r + \text{etc.}$$
$$\varepsilon = m + 32n + 243p + 1024q + 3125r + \text{etc.}$$
$$\eta = m + 128n + 2187p + 16384q + 78125r + \text{etc.}$$

&c.

§. 69.

Hieraus erhält man folgende Tabelle, welche von derjenigen, so wir oben (§. 48.) aus ganz ähnlichen Gleichungen gefunden, nur darinn verschieden ist, daß in den Nennern statt der Cubiczahlen 1, 8, 27, 64 etc. ihre Wurzeln 1, 2, 3, 4 etc. vorkommen.

$+m=$	α	$\frac{4\alpha-\gamma}{4-1}$	$\frac{36\alpha-13\gamma+\varepsilon}{(4-1).(9-1)}$	$\frac{576\alpha-244\gamma+29\varepsilon-\eta}{(4-1).(9-1).(16-1)}$	2c.
$-n=$	...	$\frac{\alpha-\gamma}{2(4-1)}$	$\frac{9\alpha-10\gamma+\varepsilon}{2(4-1)(9-4)}$	$\frac{144\alpha-169\gamma+26\varepsilon-\eta}{2.(4-1)(9-4)(16-4)}$	2c.
$+p=$	...	. . .	$\frac{4\alpha-5\gamma+\varepsilon}{3(9-1)(9-4)}$	$\frac{64\alpha-84\gamma+21\varepsilon-\eta}{3.(9-1).(9-4).(16-9)}$	2c.
$-q=$	...	. . .	. . . . . .	$\frac{36\alpha-49\gamma+14\varepsilon-\eta}{4(16-1).(16-4).(16-9)}$	2c.

§. 70.

Setzt man nun z. E. die Abscisse $P'P$ werde in 6 gleiche Theile getheilt, so haben wir $S = S'''$, und daher (§. 67.)

$$\alpha = 3$$
$$\gamma = \frac{27}{3} = 9$$
$$\varepsilon = \frac{243}{5}$$

und aus der dritten Columne dieser Tabelle

$$+m = \frac{36\alpha - 13\gamma + \varepsilon}{24}$$
$$-n = \frac{9\alpha - 10\gamma + \varepsilon}{30}$$
$$+p = \frac{4\alpha - 5\gamma + \varepsilon}{120}$$

demnach

$$m = \frac{33}{20}$$
$$n = \frac{12}{25}$$
$$p = \frac{13}{100}$$

und

$$S''' = \tfrac{33}{20} T' + \tfrac{12}{25} T'' + \tfrac{13}{100} T'''$$

§. 71.

Da nun

$$T' = A\pi(\pi\mu + \pi'\mu')$$
$$T'' = 2A\pi(pm + p'm')$$
$$T''' = 3A\pi(PM + P'M')$$

ist, so ist der ganze Raum

$$P'M'MP = \tfrac{33}{20} A\pi(\pi\mu + \pi'\mu') + \tfrac{24}{25} A\pi (pm + p'm') + \tfrac{39}{100} A\pi(PM + P'M').$$

Diese Formel fängt nun erst bey der siebenten Dignität des x an von dem wahren Inhalt des Segments P'M'MP abzuweichen.

§. 72.

Man kan aber das Convergiren dieser Formeln noch weiter treiben, weil sich der hier betrachtete Fall (§. 66. seq.) auf denjenigen reduciren läßt, den wir oben (§. 45. seq.) betrachtet haben. Fig. IX. Es sey HKO eine jede krumme Linie, die Abscissen werden auf VR von A an vor- und rückwärts genommen, und die Ordinaten seyn auf denselben senkrecht. Man mache nun AR = AV, und indem man die Ordinaten VH, RO aufrichtet, und die Chorde HCO zieht, so ziehe man sodann hCo durch C mit VR parallel, so wird man auf diese Art die krumme Linie hBo construiren können, die ihren Scheitelpunct in B hat, deren Axe AB ist, und deren Theile auf beyden Seiten dieser Axe einander ähnlich sind, und so wird auch jeder Raum

$$VhBoR = VHBOR$$

seyn. Denn man setze jede Abscisse

$$AQ = x \qquad QN = y$$
$$AT = -x \qquad TL = \eta$$
$$Qn = Tl = z.$$

und $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.$
so ist

$$\eta = a - bx + cx^2 - dx^3 + \&c.$$

Dem-

demnach

$$\frac{y+\eta}{2} = a + cx^2 + ex^4 + gx^6 + \&c.$$

Nun aber ist

$$\frac{y+\eta}{2} = \frac{QN+TL}{2} = Ac = Qn = Tl = z$$

demnach

$$z = a + cx^2 + ex^4 + gx^6 + \&c.$$

Da nun hier lauter gerade Dimensionen sind, so ist die Linie hBo auf beyden Seiten der Linie AB sich selbst ähnlich, — B ihr Scheitelpunct und BC ihre Axe. Ferner ist der Raum

$$ABNQ = \int y dx = ax + \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}cx^3 + \tfrac{1}{4}dx^4 + \tfrac{1}{5}ex^5 + \&c.$$

$$ABLT = \int \eta dx = ax - \tfrac{1}{2}bx^2 + \tfrac{1}{3}cx^3 - \tfrac{1}{4}dx^4 + \tfrac{1}{5}ex^5 + \&c.$$

folglich der ganze Raum

$$QNBLT = 2ax + \tfrac{2}{3}cx^3 + \tfrac{2}{5}ex^5 + \tfrac{2}{7}gx^7 + \&c.$$

Eben diese Reihe findet sich aber auch für den Raum QnBlT, demnach sind diese beyden Räume einander gleich. Es ist daher gleichviel, ob man VHBOR oder VhBoR quadrirt. Nun läßt sich das Rectangel VhoR für sich berechnen, demnach hat man nur noch das Segment hCoBh zu quadriren, und für dieses hat man die Gleichung

$$z - a = cx^2 + ex^4 + gx^6 + \&c.$$

welche eben die ist, die wir bey dem oben (§. 45. seqq.) betrachteten Fall zum Grunde legten. Es wird demnach hiedurch ihr Gebrauch vollends allgemein gemacht.

§. 73.

Wenn es hiebey nur darum zu thun ist, das Segment HBOCH zu quadriren, so wird die Lage der Abscissenlinie gleichgültig, und man thut dabey am besten, wenn man sie mit der Chorde HO parallel zieht, oder die Abscissen selbst auf dieser Chorde von dem Mittel C gegen O und H gerechnet nimmt, und die Ordinaten senkrecht aufrichtet. Dadurch erhält man den Vortheil, daß das Segment hBoCh sowohl länger als schmähler, und daher aus beyden Gründen die Krümmung des Bogens hBo vermindert wird. Ich werde mich aber nicht länger hiebey aufhalten, sondern diesen Betrachtungen noch einige andere beyfügen, welche die durch Näherung zu bestimmende Rectification und Quadratur des Circuls besonders betreffen.

§. 74.

Fig. XI. Es sey AMNB ein halber Circul, und man habe die Länge des Bogens AM zu bestimmen. Zu diesem Ende richte man auf AB die Tangente AQ senkrecht auf, und trage den dritten Theil des Bogens AM aus B in N. Man ziehe sodann durch NM eine gerade Linie bis in Q, so wird AQ der Länge des Bogens AM desto näher kommen, von jewenigern Graden derselbe ist.

§. 75.

§. 75.

Um dieses zu beweisen, setze man den Halbmesser $AC = 1$, den Winkel $NCB = \omega$, so ist

$$MCA = 3\omega$$
$$CMN = CNM = 2\omega$$
$$CFN = \omega,$$

demnach
$$CF = 2\cos.\omega$$
$$AF = 1 + 2\cos.\omega.$$

Nun ist
$$AQ = AF.\ \mathrm{tang.}\,\omega$$

folglich
$$AQ = (1 + 2\cos.\omega)\ \mathrm{tang.}\,\omega = \mathrm{tang.}\,\omega + 2\sin.\omega.$$

Man kann demnach aus dem §. 11. sehen, wie dieser Werth dem wahren Werthe des Bogens näher kömmt. Oder da

$$\mathrm{tang.}\,\omega = \omega + \tfrac{1}{3}\omega^3 + \tfrac{2}{15}\omega^5 + \tfrac{17}{315}\omega^7 + \&c.$$
$$2\sin.\omega = \omega - \tfrac{1}{3}\omega^3 + \tfrac{1}{60}\omega^5 - \tfrac{1}{2520}\omega^7 + \&c.$$

folglich
$$AQ = 3\omega * + \tfrac{3}{20}\omega^5 - \tfrac{3}{56}\omega^7 + \&c.$$

ist, so sieht man hieraus, daß AQ von der wahren Länge des Bogens AM erst in der fünften Dignität von ω anfängt verschieden zu seyn, oder daß

$$AQ - AM = \tfrac{1}{1620}AM^5 - \tfrac{1}{41824}AM^7 + \text{ꝛc.}$$

ist.

§. 76.

Man kommt aber der Wahrheit ungleich näher, wenn man auf folgende Art verfährt: Es sey AMB ein halber Circul, und die Länge Fig. XII.

des Bogens A M zu suchen. Zu diesem Ende richtet man A Q auf A B senkrecht auf, und ziehe aus M den Sinus M P. Man theile A P in 5 gleiche Theile, und trage C e aus B in E. Wird nun durch E und M eine gerade Linie E M Q gezogen, so wird A Q noch genauer, als vorhin, der Länge des Bogens gleich seyn. Denn setzt man $AC = CB = BD = 1$, $AM = \varphi$, so ist

$$CP = \cos\varphi, \quad PM = \sin\varphi$$
$$AP = (1 - \cos\varphi)$$
$$ED = \tfrac{1}{5} AP = \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{5}\cos\varphi$$
$$BE = \tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{5}\cos\varphi$$
$$PE = \tfrac{9}{5} + \tfrac{6}{5}\cos\varphi$$
$$AE = \tfrac{14}{5} + \tfrac{1}{5}\cos\varphi.$$

Da nun

$$AQ = \frac{PM.AE}{PE}$$

ist, so ist

$$AQ = \frac{(14 + \cos\varphi)\sin\varphi}{9 + 6\cos\varphi} = \frac{28\sin\varphi + \sin 2\varphi}{18 + 12\cos\varphi}$$

Da nun

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{1}{2.3}\varphi^3 + \frac{1}{2.3.4.5}\varphi^5 - \text{etc.}$$
$$\sin 2\varphi = 2\varphi - \frac{8}{2.3}\varphi^3 + \frac{32}{2.3.4.5}\varphi^5 - \text{etc.}$$
$$\cos\varphi = 1 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{2.3.4}\varphi^4 - \text{etc.}$$

ist, so findet sich, wenn man diese Reihen in der Formel AQ setzt, und die Theilung vornimmt

AQ =

$$AQ = v - \frac{1}{2700}v^7 + \text{etc.}$$

so, daß also der Unterschied zwischen AQ und dem Bogen AM sich erst in der 7ten Dignität des Bogens zu äussern anfängt. Und wenn auch der Bogen $v = 1$ wird, so ist dieser Unterschied dennoch nur $\frac{1}{2700}$ Theil des Halbmessers. Nimmt man aber den Bogen um die Hälfte kleiner, so wird der Fehler bey jeder Bisection 128 mal geringer. Wenn demnach die Länge eines Circulbogens durch Construction zu bestimmen ist, so ist die hier angegebene so leicht und so genau man es verlangen kann.

§. 77.

Werden aber die beyden erst angegebene Constructionen mit einander verglichen, so findet sichs ohne Mühe, daß auch bey der letztern Construction der Bogen BN von dem dritten Theile des Bogens AM gar unmerklich verschieden ist, und daß man folglich dadurch einen Bogen sehr genau in 3 Theile theilen kann. Denn wenn je der Bogen AM gar zu groß ist, so darf man nur denselben halbiren, und den dritten Theil von seiner Hälfte suchen, und diese sodann verdoppeln.

X.
Anmerkungen und Zusätze zur Gnomonic.

§. 1.

Tab. III. IV. V. Man wird nicht leicht eine Wissenschaft finden, die in so viele verschiedene Formen gebracht, und auf so unzählig mannigfaltige Art angewandt worden, als die Gnomonic. Man kann anstehen, ob es möglich sey, eine Art von Sonnen-Uhren zu erdencken, die nicht schon irgend beschrieben und angebracht worden wäre. Selbst auch die Methode, jede Sonnenuhr zu zeichnen, und die dazu dienlichen Instrumente und Tabellen sind eben so häufig als mannigfaltig. Es scheint daher daß, was man noch etwann darüber erfinden kann, schlechthin nur eine Nachlese ist, und daß man alle über die Gnomonic herausgekommene Schriften müsse durchgangen haben, wenn man sich berechtiget achten will, es eine Nachlese zu nennen.

§. 2.

Betrachtungen von dieser Art, bothen sich mir bey dem Entschlusse an, hier einige Anmerkungen über die Gnomonic zu liefern. Ich habe lange nicht alle Schriften über diese Wissen-

Wissenschaft gelesen, und in soferne muß ich unentschieden lassen, ob, was ich hier vortragen werde, durchaus neu sey oder nicht. Ich kann aber darauf zählen, daß sich viele meiner Leser in eben dem Fall befinden, und daß es folglich denselben so gut neu seyn werde, als es mir ware, da ich darauf verfiele. Verschiedenes davon wird dienen zu zeigen, daß öfters die ersten Erfinder zufrieden sind, wenn sie etwas finden.

I. Anmerkungen über die Azimuthaluhren.

§. 3.

Die Azimuthaluhren sind vielleicht zuerst erfunden, und zuletzt berichtigt worden. Ich will sagen, der erste, der sich in Sinn kommen liesse, die Zeit nach dem Schatten der Sonne zu messen, steckte etwan einen Stab gerade aufgerichtet in die Erde, beschrieb einen Circul darum, und theilte denselben, so gut er es verstunde, in Stunden, und vermuthlich machte er jede Stunde gleich groß. Von diesem ersten Anfange an, bis zu der Bemerkung, daß man die Stunden ungleich machen, und sie entweder von Tag zu Tag ändern, oder dem Zeiger eine schiefe mit der Weltaxe parallele Lage geben müsse, war noch sehr weit, und es musten vorerst die Gründe der sphärischen Astronomie erfunden werden, welche sodann

zeig-

zeigten, daß man nicht bey Azimuthaluhren, sondern bey Aequinoctialuhren den Anfang machen müsse.

§. 4.

Indessen muß man doch sagen, daß der erste Einfall, die Zeit nach dem Schatten eines aufrechtstehenden Stabes zu messen, auf die genaueste Sonnenuhr führte, weil in der That die Azimuthaluhren allein von den Anomalien der Refraction frey sind. Da sich aber die Stundenwinkel davon beständig ändern, so haben sie die Unbequemlichkeit, daß man entweder einen Calender dabey anbringen, oder den Zeiger beweglich machen muß, und auch in dem letztern Fall wird der Calender dabey nothwendig. Man hat daher diesen vorgezogen, und die Azimuthaluhr dergestallt zeichnen
Fig. I. gelehrt, daß die Stunden in der Ellipse ADBE herum liegen, der Zeiger aber auf der Linie Gg, als der kürzern Axe der Ellipse, hin und her geschoben wird. Die Methode, sowohl die Ellipse als den Calender in Gg zu zeichnen, findet sich in mehreren gnomonischen Schriften. Sie wird aber darin nur als eine Azimuthalsonnenuhr beschrieben, und weder durch die Eigenschaften der Ellipse kenntlicher, noch durch andere dabey mit vorkommende Umstände, brauchbarer gemacht. Hierin besteht nun meine Nachlese, und die Zeichnung der Uhr wird sich folgender massen angeben lassen:

§. 5

Machet den Winkel DFC so groß als die Polhöhe des Ortes, für welchen die Uhr dienen solle, und nachdem ihr DF willkührlich angenommen, so ziehet DC aus D auf FC senkrecht. Traget DF aus C in A und B, und machet CE = CD, so ist AB die grössere, DE die kleinere Axe, und F der Brennpunct der Ellipse ADBE. Traget CF in Cf, so ist f der andere Brennpunct. Machet ferner jeden Winkel GfC der Declination der Sonne gleich, so wird sich auf Gg der Thierkreis oder der Calender zeichnen lassen. Endlich machet jeden Winkel DCK dem Stundenwinkel, und CK der halben Axe CB gleich, und fället aus K die Perpendiculair KP auf AB, so wird H der Punct seyn, wo die Stunde muß hingeschrieben werden. Und wenn die Declination der Sonne = GfC ist, so ist DGH das Azimuth der Sonne zu der Stunde H. DE ist die Mittagslinie, D liegt gegen Mitternacht, und der Zeiger wird in G aufgerichtet. Ferner ist für eben den Tag jede Linie GH allemale dem Cosinus der Sonnenhöhe gleich, und wird aus G die Normallinie GL auf die Ellipse gezogen, so zeigt sie die Stunde des Aufganges der Sonne, so wie die andere Normallinie Gl die Stunde des Niederganges bezeichnet, und zugleich der Halbmesser des Circuls ist, auf welchem GH den Cosinus der der Sonnenhöhe giebt. Auf eben diesem Circul

cul ist CK der Cosinus der Declination der Sonne.

§. 6.

Der Beweis von allen diesen Sätzen wird nicht schwer, wenn man sich die ganze Figur als eine ortographische Projection der Sphäre vorstellt. Man fälle nemlich aus jeden Puncten des Parallelkreises der Sonne, Perpendiculairen auf die Fläche des Horizontes, so bezeichnen diese die Ellipse ADBE. Der Diameter AB behält seine Länge, welche den doppelten Cosinus der Declination gleich ist. Hingegen wird DE in Verhälniß des Halbmessers zum Sinus der Polhöhe verkürzt. Und dieses ist der Grund, warum der der Polhöhe gleich gemachte Winkel DFC in den Brennpunct F trift. Denn FD ist in der Ellipse allemal = AC = CB, und so wird hier CB: CD = FD:CD = 1 : sin. eleu. poli. Fällt man ferner aus dem Scheitelpunt der Sphäre eine Perpendiculairlinie auf den Horizont, so trift diese in G. Hingegen ist C die Projection desjenigen Punctes der Weltaxe, welcher in der Fläche des Parallelkreises der Sonne liegt, und von dem Mittelpunct der Sphäre um den Sinus der Declination entfernt ist. Da dieser Mittelpunct in G fällt, so ist GC die Projection von diesem Sinus der Declination, und wegen der schiefen Lage der Weltaxe im Verhältniß des Halbmessers zum Cosinus der Polhö-

Polhöhe verkürzt. G H ist für jede Stunde die Projection des Sinus des Abstandes der Sonne vom Scheitelpunct, und folglich des Cosinus der Sonnenhöhe. Diese Linie hat in der Lage GL, Gl ihre beyden Maxima; und L, l sind die Projection der Puncte, wo der Parallelkreis der Sonne den Horizont durchschneidet. Nimmt man demnach G L = 1 an, so ist CB der Cosinus der Declination, CF = Cf im Verhältniß des Cosinus der Polhöhe kleiner, und CG in Verhältniß der Tangente der Declination kleiner als CF, folglich in zusammengesetzter Verhältniß der Tangente und des Cosinus der Declination und des Cosinus der Polhöhe kleiner als CL = 1, demnach in Verhältniß des Sinus der Declination und des Cosinus der Polhöhe. Hieraus ergiebt sich, warum der Calender in G g aus dem Brennpunct f kann verzeichnet werden. Endlich ist C P allemal die Projection des Sinus des Stunden-Bogens, welcher, wenn CK = CB als Halbmesser angenommen wird, dem Winkel D C K gleich wird.

§. 7.

Die erst angegebene Verzeichnung der Azimuthaluhren hat für diejenigen, welche die Ellipsen aus der höhern Geometrie kennen, etwas geschmeidiges, wodurch sie faßlicher wird. Der Gebrauch des Brennpuncts wird dadurch merkwürdig, daß er sowohl die Polhöhe DFC

als

als die Declination der Sonne GfC, und damit den auf G g gezeichneten Calender bestimmen hilft. Es ist ferners merkwürdig, daß die aus jedem Punct G auf die Ellipse gezogene Normallinien G L, G l die Stunde des Auf- und Unterganges der Sonne angeben. Es ist unnöthig hier mit anzumerken, daß die Puncte L, F, G, f, l sämtlich in dem Umkreise eines Circuls liegen, weil dieses aus dem, daß GL, G l Normallinien sind, für sich folgt. Da man aber, um diesen Circul zu ziehen, nur drey Puncte nöthig hat, so kann man die Puncte L, l bestimmen, wenn man den Circul durch f, G, F zieht; und hinwiederum wird G bestimmt, wenn der Circul durch L, F, G gezogen wird. Im ersten Fall findet man aus der Declination die Länge des Tages LADBL, im andern aus der Länge des Tages die Declination. Endlich ist hiebey merkwürdig, daß diese Azimuthaluhr, vermittelst der Linie GH, nicht nur die Stunde H, und ihr Azimuth DGH angiebt, sondern ihre Länge selbst den Cosinus der Sonnenhöhe vorstellt, wenn GL zum Halbmesser angenommen wird.

§. 8.

Es kömmt aber bey dieser Azimuthaluhr noch ein anderer Umstand vor, welcher unerwarteter ist. Man darf nemlich nur setzen, daß AC die Mittagslinie sey, und über derselben einen Zeiger aus C aufrichten, welcher mit derselben einen Winkel mache, der der Polhöhe DFC gleich sey, so wird, wenn man in A 12 Uhr schreibt, und so die Stunden ändert, die Uhr eine Horizontaluhr für eben die Polhöhe seyn, für welche sie vorhin eine Azimuthaluhr war. Denn bey den Horizontaluhren sind die Tangenten der Stundenwinkel in der Verhältniß des Halbmessers zum Sinus der Polhöhe kleiner als die Tangenten der Stundenbögen. Es sey demnach jeder Stundenbogen =KCB, seine Tangente =KP, wenn man nemlich CP als einen Halbmesser ansieht. Da nun PH in der Verhältniß von FD zu CD, oder des Halbmessers zum Sinus der Polhöhe kleiner ist als PK, so ist PH die Tangente des Stundenwinkels der Horizontaluhr, und folglich HCB der Stundenwinkel selbst.

§. 9.

Ungeachtet aber die Ellipse ADBE eben so wohl zu einer Azimuthaluhr als zu einer Horizontaluhr gebraucht werden kann; so macht dennoch die verschiedene Lage der Mittagslinie, als welche im ersten Fall die kürzere, im andern Fall aber die längere Axe ist, daß man sie nicht zugleich zu beyden Absichten gebrauchen kann, wenn man sich des Schattens beyder Zeiger bedienen will. Will man aber an dem Zeiger der Azimuthaluhr, welcher auf der Linie Gg senkrecht steht, einen gleichfalls aufrechtstehenden Spiegel befestigen, so, daß derselbe mit beyden

Axen der Ellipse einen Winkel von 45 Graden mache, so wird der, vermittelst des Spiegels, reflectirte Schatten des Azimuthalzeigers, die Stunden von D an gerechnet, eben so zeigen, wie der auf C B stehende Zeiger der Horizontaluhr die Stunde, von B an gerechnet, weisen wird, wenn die längere Axe in der Mittagslinie liegt. In jeder andern Lage treffen beyde Stunden nicht zusammen. Man hat sich auch dieses Umstandes längst schon bedient, um durch die Vereinigung der Azimuthal- und Horizontaluhren die Lage der Mittagslinien zu finden, dabey aber jede Uhr besonders verzeichnet. Läßt sich aber der Spiegel gut anbringen, so gebraucht es, nach der hier angegebenen Methode, dieser gedoppelten Zeichnung nicht, weil man bey der Ellipse A D B E bleiben, und schlechthin nur die Zahlen, sowohl von D als von B an gerechnet, herum schreiben darf.

II. Bestimmung des Azimuth durch die Höhe der Sonne.

§. 10.

In den Anweisungen zur Gnomonic begnügt man sich mehrentheils die Verfertigung der Sonnen-Uhren, und etwann auch der Mond- und Sternuhren anzugeben, das will sagen, man macht die Bestimmung der Zeit darin zur Hauptabsicht; und dieses hat

hat allerdings seine gute Gründe, weil man den übrigen Umständen seltener als der Zeit nachfragt. Indessen hat die Bestimmung des Azimuth, und folglich der Mittagslinie, noch genug Erhebliches, daß man die dazu dienlichen Mittel vervielfältigen sollte. In der Gnomonic selbst kömmt die Frage von Bestimmung der Mittagslinien bey den meisten Sonnenuhren vor. In der practischen Geometrie kann sie ebenfalls sehr gute Dienste leisten; und bey der Schiffahrt wird sie unentbehrlich. Da das Azimuth am unmittelbarsten aus der Höhe der Sonne gefunden wird, so werde ich einige darüber angestellte Untersuchungen hier mit anbringen.

§. 11.

Es ist unnöthig aus dem vorhingesagten zu wiederholen, daß die erstbeschriebene Azimuthaluhr dazu dienen kann, sofern man GL, als den Sinus totus, und GH als den Cosinus der Sonnenhöhe ansieht, (§. 5.) und sofern GI, GL das Azimuth der auf- und untergehenden Sonne ist. Es ist vielmehr die Frage, das Azimuth unmittelbar auf den Quadranten zu verzeichnen, mit welchem die Höhe der Sonne gemessen wird. Dazu dienen nun folgende Betrachtungen:

§. 12.

Es sey HZON der Mittagskreiß, HCO der Horizont, GCF der Aequator, KSI Fig. II.

X 2 ein

ein Parallelkreiß des Aequators, S der Ort der Sonne, SZ ihr Abstand vom Zenith, SP ihr Abstand vom Pole, SPZ der Stunden-Winkel, SZI der Azimuthalwinkel. Man setze:

$$PZ = e$$
$$PS = c$$
$$ZS = k$$
$$PZS = a$$

so giebt die Trigonometrie folgende Gleichung:

$$\cos c = \cos e . \cos k + \sin e . \sin k . \cos a$$

oder wenn man durch sin. k dividirt

$$\cos c . \operatorname{cosec} k = \cos e . \cot k + \sin e . \cos a.$$

§. 13.

Fig. III. Da wir den sphährischen Triangel PSZ in einen geradlinichten verwandeln, in welchem e ein Winkel werde, so seyn in dem geradlinichten Triangel $\alpha\ \varepsilon\ \mathfrak{S}$ vier auf einander folgende Stücke, nemlich die Winkel ϑ, ε und die Seiten α, $\mathfrak{S}$; so wird die Verhältniß dieser vier Stücke durch die Gleichung

$$\alpha \operatorname{cosec} \varepsilon = \mathfrak{S} . \cot \varepsilon + \mathfrak{S} . \cot \vartheta$$

ausgedrückt. Wird diese Gleichung mit der letztern des vorhergehenden §. verglichen, so läßt sich

$$\operatorname{cosec} \varepsilon = \operatorname{cosec} k$$
$$\cot \varepsilon = \cot k$$

demnach

$$\varepsilon = k$$

setzen.

setzen. Dadurch aber wird

$$\alpha = \cos c'$$

$$\beta = \cos e$$

und da nun nur noch

$$\beta \cot \delta = \sin e . \cos a$$

bleibt, so findet sich

$$\cot \delta = \frac{\sin e . \cos a}{\beta} = \tang e . \cos a$$

Und auf diese Art sind die vier Stücke $\varepsilon, \alpha, \beta, \delta$ des geradlinichten Triangels durch die vier Stücke k, c, e, a des sphärischen Triangels dergestalt bestimmt, daß die Seite k des letztern im erstern der Winkel ε wird. Es ist demnach in dem geradlinichten Triangel der Winkel ε das Complement der Sonnenhöhe, die Seite β der Sinus der Polhöhe, die Seite α der Sinus der Declination. Und da

$$\cot \delta = \tang e . \cos a$$

ist, so ergiebt sich hieraus, daß der Winkel δ dem Bogen NL gleich ist. Denn der Triangel LGN ist in G rechtwinklicht, und

$$GN = 90° - e$$

$$GNL = a$$

demnach

$$\cos a = \cot e . \cot NL = \cot e . \cot \delta$$

$$d = NL.$$

§. 14.

Wir führen diesen letztern Umstand nur an, um zu zeigen, daß der Winkel δ auch auf der

Sphäre eine Bedeutung hat. Es ist aber zu unserm Vorhaben genug, wenn wir aus der Gleichung

$$\cot \delta = \operatorname{tang} e . \cos a$$

die Anmerkung ziehen, daß sich der Winkel δ schlechthin nach dem Azimuth a verändert, und daher beständig ist, so lange man bey einerley Azimuth bleibt. Da nun die demselben gegenüberstehende Seite $\varepsilon = \cos e$ durchaus beständig ist, so wird der Punct δ allemal in dem Umkreise des Circuls $\varepsilon\,\delta\,\gamma$ liegen, und auf diese Art wird α durch ε, oder hinwiederum ε durch α bestimmt. Es ist demnach nur die Frage, diesen Circul für jedes Azimuth zu bestimmen. Dieses wird nun am leichtesten geschehen, wenn wir den Winkel ε rechtwinklicht nehmen.

§. 15.

Fig. IV. Es sey demnach AC zu AB wie der Sinus totus zur Tangente e, und A ein rechter Winkel. Ferner sey für jedes Azimuth

$$AB : AD = 1 : \cos a$$

so wird

$$AC : AD = 1 : \operatorname{tang} e . \cos a = 1 : \cot \delta$$

demnach

$$\delta = CDA$$

seyn. Man halbire DC in E, und aus E beschreibe man mit dem Halbmesser ED den Bogen ADC, so ist dieses der für das Azimuth a gesuchte Bogen. Nimmt man nun jedes Azimuth

muth von 10 zu 10 Graden, so werden die denselben entsprechende Bögen auf eben die Art beschrieben, wie sie die Figur vorstellt. Zieht man durch E eine Parallele HEG mit AB, so liegen alle Mittelpuncte auf HG, und es ist für jedes Azimuth

$$HF : EF = 1 : \cos a.$$

§. 16.

In dieser Figur ist nun

$$AC = 6 = \cos e$$

folglich

$$CB = CM = \text{sin. tot.}$$

ferner jede Linie

$$Cd = \cos c = \alpha$$
$$dCA = k$$
$$dCK = 90^\circ - k$$

und der Circul ADdC zeigt das dazu gehörige Azimuth an.

§. 17.

Daferne das auf diese Art zu verfertigende Instrument nur für die Sonnenhöhen und deren Azimuthe dienen solle, so gebraucht man nicht die ganze Figur, sondern man macht CL dem Sinus der grösten Declination der Sonne gleich; und indem man aus C den Bogen Ll beschreibt, so ist der Theil LlC alles, was man von der Figur gebraucht. Auf CL werden aus C die Sinus der Declination für jede Grade der Ecliptic getragen, und mit

L I concentrische Bögen aus C beschrieben. Wo nun diese Declinationsbögen die Azimuthalbögen durchschneiden, da ergiebt sich zugleich die dazu gehörende Höhe der Sonne durch den Winkel, den die aus C in diese Durchschnittspuncte gezogenen Linien mit CK machen. Die fünfte Figur stellt einen solchen für die Grade der Ecliptic verzeichneten Azimuthalquadranten grösser und deutlicher vor, und die Verzeichnung auf eine bloß practische Art vorgetragen, ist folgende.

§. 18.

Fig. V. Nach einer beliebig angenommenen Scale mache man C F dem halben Sinus der Polhöhe, F H dem halben Cosinus derselben gleich und den Winkel F von 90 Graden. Sodann sehe man F H als einen Halbmesser an, und trage auf denselben aus F gegen H und G alle Sinus des Azimuth, von Grad zu Grad, oder von 5 zu 5, oder, wie es in der Figur geschehen, von 10 zu 10 Graden, so hat man eben so viele Mittelpuncte, aus welchen man durch C eben so viele Circulbogen zieht, und auf dieselbe die Grade des Azimuth von Mittag und von Mitternacht an gerechnet, zeichnet. Der Winkel H C N wird von 90 Graden gemacht, und so erhält man N C L die ganze Oefnung, so der Quadrant haben muß. Ferner mache man C L dem Sinus der größten Declination der Sonnen gleich, und beschreibe

aus

aus C den äusserſten Bogen LKN, welcher ſodann in Grade getheilet wird, die von K aus vor- und rückwärts gezählet werden, ſo, daß der 90ſte Grad in L falle. Sodann werden auf CL aus C die Sinus der Declination von allen Graden der Ecliptic aufgetragen, oder welches einerley iſt, man ſieht CL als einen Halbmeſſer an, und trägt alle Sinus darauf, oder man fällt aus jeden Grade des Bogens LK Perpendicularen auf CL, und ſchreibt die nördliche Zeichen des Thierkreyſes da, wo die Sinus ihrer Declination hinfallen. Auf CN werden auf gleiche Art die ſüdlichen Zeichen geſchrieben. Die Dioptern werden auf CL angemacht, ſo, daß für die nördliche Zeichen C, für die ſüdlichen L gegen die Sonne gerichtet wird. Den in C angemachten Faden CP mit dem Gleichgewichte P und der daran beweglichen Perle p, läßt man frey herunter hängen, nachdem man denſelben anfangs auf CL, oder CN gelegt, um die Perl auf den Ort der Sonne zu ſchieben. Auf dieſe Art wird z. E. wenn die Sonne im 23ſten Grad ♉, oder 7 Grad ♌ und 20 Grad hoch iſt, die Perl in p ſeyn, und den 95ſten Grad des Azimuth, von Mittag an gerechnet, oder auf den 85ſten Grad von Mitternacht an gerechnet, anzeigen. Wäre bey gleicher Höhe der Sonne eben die Declination ſüdlich, ſo würde die Perl in q auf den 21ſten Grad von Mittag, oder auf den 159ſten Gr. von Mitternacht an gerechnet, fallen.

fallen. Will man aber den Quadranten feste stellen, und die Dioptern anstatt des Fadens, auf ein bewegliches Lineal bringen, so muß CK immer horizontal liegen, und die auf CL, CN geschriebene Grade und Zeichen werden auf das Lineal gezeichnet.

§. 19.

Wer leicht einige gnomonische Schriften gelesen hat, wird ohne Mühe auf die Anmerkung fallen, daß man längst schon einen Quadranten von dieser Art gesucht hat, auf welchem die hier verzeichneten Azimuthalbögen, Stundenbögen wären, und zwar mit dem Bedinge, daß es Circulbögen blieben. Denn wenn man andere krumme Linien dazu gebrauchen will, so lassen sich unzählige dergleichen verzeichnen. Man findet auch hin und wieder solche Quadranten beschrieben, wo man mit Hindansetzung der geometrischen Schärfe Circulbögen dazu gebraucht. Mit geometrischer Schärfe läßt sich eben dieser Azimuthalquadrant dazu gebrauchen, wenn man die Declination und die Sonnenhöhe verwechselt. Man nimmt nemlich die Declination auf dem Bogen KL, oder KN, und den Sinus der Sonnenhöhe auf CL, oder CN, und verwandelt die Grade des Azimuth, so die Perl anzeigt, in Stunden, indem man sie durch 15 theilt. So z. E. wenn man setzt, die Declination sey 20 Grad nördlich, die Sonnenhöhe $18\frac{1}{2}$ Grad, so wird die

Perl,

Perl, wie vorhin, in p seyn, und von Mittag an gerechnet 95 Grad, oder, durch 15 getheilt, 6 St. 20 Min. angeben, welches Nachmittags-Stunden sind. Theilt man aber die von Mitternacht an gerechnete 85 Grad durch 15, so erhält man 5 St. 40 Min. welches Vormittags-Stunden sind.

§. 20.

Der Grund, warum diese Verwechselung angeht, ist, weil man in beyden Fällen in dem Triangel PZS drey Seiten und einen Winkel hat. Der Quadrant ist für den Azimuthalwinkel Z construirt. Will man statt dessen den Stundenwinkel P nehmen, so steht diesem nicht mehr die Seite PS, sondern die Seite ZS gegenüber. Demnach müssen diese Seiten verwechselt werden. Da die Seite PZ an beyden Winkeln liegt, so bleibt sie in beyden Fällen unverändert. Da übrigens die Scale CL nur bis auf $23\frac{1}{2}$ Grad geht, so sieht man leicht, daß sie nicht für alle Sonnenhöhen dient, und daß man folglich dieselbe bis auf den Sinus der größten Sonnenhöhe verlängern müsse. Fig. II. Fig. V.

§. 21.

Ich werde mich aber dabey nicht länger aufhalten, sondern vielmehr die Anmerkung machen, daß alle die gnomonische Instrumente, wobey das, was man sucht, auf einer ganzen

Fläche

Fläche herum getragen und gesucht werden muß, auf eine solche Art ins weitläuftige fallen, daß man, so sinnreich sie auch ausgesonnen sind, statt derselben, mit gutem Grunde, einfachere wünschen kan. So z. E. fällt das Geschmei-
Fig. I. dige der Azimuthaluhr der ersten Figur in die Augen. Die Stunden liegen auf einer einigen Linie herum, und der Zeiger wird auch nur auf der Linie Gg, als auf einer ganz einfachen Scale auf den Ort der Sonne gestellt. Ich habe daher auf Mittel gedacht, bey den Quadranten eben solche Abkürzungen und Geschmeidigkeiten zu erhalten, und werde nun das, so ich für das Azimuth gefunden, folgender massen vortragen.

§. 22.

Fig. II. Da die Sonnenhöhe, deren Complement der Bogen ZS ist, auf dem Quadranten durch einen Winkel vorgestellt und gemessen wird, so habe ich nach den bekannten trigonometrischen Regeln den Triangel E C A genommen, dessen drey Seiten ihre Pole in den Ecken P, Z, S haben. Hier ist nun

ECA die Höhe des Aequators $= e$

CEA das Complement der Sonnenhöhe $= k$

CAM das Complement der Declination $= c$

EC das Complement des Azimuth $= 180° - a$

CA der Stundenbogen $=$ S P Z.

Nun war es die Frage, den Triangel AEC dergestalt zu projiciren, daß das Auge in dem

Nadir

Nadir des Puncts E und die Tafel auf der aus dem Auge in E gezogenen Linien senkrecht war. Man weiß, daß auf diese Art die Bögen EC, EA durch gerade Linien vorgestellt werden, deren Länge den Tangenten der Hälfte dieser Bögen gleich ist, daß der Winkel E bleibt, und AC durch einen Circulbogen vorgestellt wird, welcher die Linien EC, EA unter den Winkeln A, C schneidet.

§. 23.

Man mache demnach den Winkel Fig. VI.

$AEC = k$
$EC = \tan \frac{1}{2} a$
$EQ = \cot a$
$CQR = 90$ Gr.
$QCR = 90 - c$

aus R beschreibe man den Bogen CAM, so wird der Winkel

$ACE = e$
$MAE = c$

und EAE der Declination der Sonne gleich seyn.

§. 24.

Nun ist

$QC = \cot a + \tan \frac{1}{2} a = \operatorname{cosec} a$

demnach

$QE : QC = \cot a : \operatorname{cosec} a = \cos a$

Nimmt man folglich QC und damit den ganzen Triangel QCR und den Bogen CM als bestän-

beständig an, und betrachtet QC als einen Halbmesser, so ist QE der Cosinus des Azimuth, und auf diese Art können die Azimuthe auf die Linie QC getragen werden. Da der Winkel AEC=k dem Abstand der Sonne vom Scheitelpunct gleich ist, so bleibt QC in allen Fällen vertical, und AE ist immer nach der Sonne gerichtet, und schneidet auf EC die Grade des Azimuth ab. Macht man demnach in R ein bewegliches Lineal AR, und auf denselben in A ein ander bewegliches Lineal AE mit Diopter an, so muß der Winkel EAR immer der Declination der Sonne gleich gemacht, und so befestigt werden. Sodann dreht man den ganzen Winkel oder die beyden Lineale EAR bis AE gegen die Sonne gerichtet ist, so wird AE das Azimuth in E auf der Scale CQ abschneiden.

§. 25.

Nach dieser Anleitung läßt sich das Instrument aus zween Sectoren so verfertigen, wie
Fig. VII. es die 7te Figur vorstellt. Der erste Sector NRCM hat einen Bogen NMC, welcher doppelt so groß als die Höhe des Aequators ist. Die Chorde dieses Bogens NQC wird als ein Diameter angesehen, und die Sinus versus jeder Graden aus C gegen N getragen, und die Grade dazu hingezeichnet, welche sodann jede Azimuthe, von Mittag an gerechnet, vorstellen. Der andere Sector RDAF hat einen

Bogen,

Bogen, der doppelt so groß als die Obliquität der Ecliptic ist. Die Linie AR theilt denselben in zween gleiche Theile, und ist von gleicher Länge wie der Halbmesser des ersten Sectors. A ist der Mittelpunct, aus welchem die Bögen D F beschrieben, und auf welche die Grade der Declination aufgetragen werden. Dieser zweyte Sector dreht sich in R um das Centrum des erstern, hingegen wird in seinem Centro A das Lineal A B angemacht, und mit Dioptern versehen, welche mit der Linie AB parallel sind.

§. 26.

Solte nun damit das Azimuth der Sonne gefunden werden, so wird das Instrument in die Verticalfläche der Sonne gestellt, so, daß die Chorde N C vertical stehe. Das Lineal AB wird in B auf den Grad der Ecliptic gedreht, in welchem die Sonne ist. Sodann dreht man den Sector ADRF bis die Diptern gegen die Sonne gerichtet sind, so wird die Schärfe des Lineals A B auf der Chorde N QC das Azimuth der Sonne abschneiden, die Höhe der Sonne selbst aber wird MRA +BAR seyn.

§. 27.

Man thut hiebey wohl, wenn man den Sector DAFR etwas grösser als 47 Grad macht, damit, wenn das Lineal AB auf o♋

liegt,

liegt, es sich nicht an dem Arm AD so anschliesse, daß der Grad des Azimuth auf NQC, den es anzeigen solle, ganz bedeckt werde. Aus gleichem Grunde ist es gut, wenn man das Gewinde A nicht sehr groß macht, damit es, wenn A nahe an C kömmt, die Grade auf CQ nicht bedecke. Uebrigens da dieses nur um die Mittagszeit geschieht, wo ohnehin das Azimuth nicht sehr genau durch die Sonnenhöhe bestimmt werden kann, so hat es auch nichts auf sich, wenn gleich die 20 oder 30 erste Grade bedeckt werden, da es an sich rathsamer ist, daß man sie nie gebrauche, daß will sagen, das Azimuth Morgens früher, Nachmittags später zu bestimmen suche. Da endlich das Gewind A nie höher gegen R hinauf zu stehen kömmt, als bis dahin, wo der Arm AD horizontal liegt, so kann man von dem Sector CMNR den Theil, der noch höher ist, weglassen, und so wird er von nicht mehrern Graden seyn, als die gröste Sonnenhöhe; dabey aber bleibt die Chorde und ihre Eintheilung und Lage eben so, als wenn man den Sector ganz beybehielte. Es ist fast unnöthig zu erinnern, daß man an dem Gewinde A einen Stift befestigen kann, welcher auf einem um NMC herum beschriebenen concentrischen Bogen, Grade anzeige. Diese mögen dienen, den Sector ADRF, nach geschehener Observation, um so viel hinauf zu drehen, als die Refraction beträgt, wenn das Instrument groß

groß genug ist, daß man bey kleinern Sonnenhöhen derselben, darauf Rechnung tragen kann.

III. Sector, um aus der Sonnenhöhe die Zeit zu bestimmen.

§. 28.

Das erst beschriebene Azimuthalinstrument hat nun den vorhin (§. 21.) verlangten Vortheil der einfachen und bloß linearen Scalen, und ist überdies sehr leicht und ohne weitläuftige Vorbereitung zu gebrauchen. Ueberdies kommt der Umstand dabey vor, daß die Ungleichheit der Grade auf der Chorde NQC gleichsam der Maaßstab von der Zuverläßigkeit der Observation angiebt, weil diese nur so weit geht, als die Theile, welche sich in jedem Fall auf NC noch unterscheiden lassen. Ich habe daher gesucht, ob diese Vortheile auch bey einem Sector erhalten werden könnten, welcher anstatt des Azimuth die Stunden angeben würde.

§. 29.

Zu diesem Ende kehrte ich zu dem Triangel ECA zurücke (§. 22.) wobey nunmehr Fig. II.

ECA = e

CEA = k

CAM = c

AC = SPZ = ω

zu betrachten vorkömmt. Diesen proiicirte ich so, daß das Aug im Nadir des Eckes A und
Fig. VIII. die Tafel auf der aus dem Auge durch A gehenden Linien senkrecht war. Es sey demnach

$$MAC = c$$
$$AC = \text{tang.} \tfrac{1}{2} \omega$$
$$AQ = \cot \omega$$
$$AQR = 90 \text{ Grad}$$
$$RCQ = 90 - e$$

so wird, wenn man aus R den Bogen CN beschreibt, der Winkel

$$ECA = e$$
$$AEC = k$$

demnach AER die Höhe der Sonne seyn. Zieht man ferner RM auf EAM, und KR auf RQ senkrecht, so ist

$$KRM = 90° - MAC = 90 - c$$

folglich KRM der Declination der Sonne gleich, und

$$MRE = 90° - MER = k$$

demnach wenn RM vertical ist, so ist RE gegen die Sonne gerichtet, weil MRE ihrem Abstand vom Scheitelpunct gleich ist. Endlich haben wir

$$QC = \text{tang} \tfrac{1}{2} \omega + \cot \omega = \operatorname{cosec} \omega$$
$$QA : QC = \cot \omega : \operatorname{cosec} \omega = \cos \omega$$

Wird daher CQ und damit der ganze Triangel CRQ und der Bogen CN als beständig genommen, und CQ als ein Halbmesser angesehen, so ist AQ der Cosinus des Stunden-

bogens

bogens ∞, und auf diese Art lassen sich auf QC die Stunden zeichnen, wenn man sie dahin zeichnet, wo die Cosinus ihrer Bögen hintreffen.

§. 30.

Will man demnach aus dieser Figur ein Instrument machen, so muß Fig. IX.

KRM die Declination der Sonne
RM vertical
ER gegen die Sonne gerichtet
EA horizonthal

seyn. Dieses kann nun auf folgende Art erhalten werden.

§. 31.

An dem Sector HCLNR wird der Bogen CL$=$LN der Höhe des Aequators gleich gemacht, die Chorde CQN gezogen, und indem man sie als einen Diameter ansieht, so trägt man die Sinus versus der Stundenbögen aus C gegen N darauf, um die Stunden und Minuten darauf zu verzeichnen. Von L in K zählt man 90 Grade, und trägt aus K vor- und rückwerts die Declination jeder Grade der Ecliptic, um die Zeichen des Thierkreises darauf zu zeichnen. In dem Centro R wird ein bewegliches Lineal RA angemacht und mit Dioptern versehen. In E aber wird ein Winkelhacken ABD angehenkt, so, daß durch die Schwere des Gewichtes D die Schärfe des Lineals AB allemal in eine horizontale Lage kommt. Endlich hängt aus R der Faden RM mit dem Gewichte M herunter.

§. 32.

Soll nun die Stunde gefunden werden, so wird der Sector in die Verticalfläche der Sonne gestellt, so, daß der Faden RM auf den Ort der Sonne falle. Sodann richtet man die Diopteren EN gegen den Mittelpunct der Sonne, und läßt den Winkelhacken ADB frey hangen und sich in Ruhe setzen. Dieser wird sodann in A die Stunde und Minute anzeigen.

§. 33.

Man kann diesen Sector mit Wegschaffung des rechten Winkels KRL folgendermassen abändern und geschmeidiger machen. Der Bo-
Fig. X. gen NC bleibt wie vorhin der doppelten Höhe des Aequators gleich, und die Chorde NQC wie eben so, in Stunden getheilt. Hingegen werden die Grade der Declination aus L vor- und rückwärts getragen. An dem Lineal RE läßt man aus E einen Faden EP mit dem Gewichte P herunter hangen, und die Diopteren FB werden in D rechtwinklicht an dem Lineal RED befestigt.

§. 34.

Um nun damit die Stunde zu finden, dreht man das Lineal RED auf das Zeichen und Grad der Ecliptic, in welchem die Sonne ist, und wendet sodann den ganzen Sector so, daß das Lineal eine verticale Lage bekomme, oder der Faden E P auf E R treffe, oder, welches einerley ist, der Ort der Sonne in M vertical über R sey. Sodann dreht man das Lineal, um die Diopteren B F gegen die Sonne zu richten, und läßt den Faden frey hangen und sich in Ruhe setzen, so wird derselbe in A die Stunde und Minuten weisen, die zu finden war.

IV. Methode diese Sectoren für jede Polhöhe universal zu machen.

§. 35.

Die erst beschriebene Sectoren, wodurch vermittelst der Höhe der Sonne sowohl das Azimuth als die Zeit gefunden wird, haben ausser der einfachen und blos linearen Scale noch den Vortheil, daß sie fast, ohne weitere Zubereitung, für jede Polhöhen allgemein gemacht werden können. Die Möglichkeit dieses beträchtlichen Vortheils rührt daher, daß die Eintheilung der Scale C N für jede Polhöhen einerley ist, und daß sich schlechthin nur der Winkel Q R C ändert, als welcher allemal der Höhe des Aequators gleich gemacht werden muß. Setzt man demnach Q C N beständig, so wird Q R desto länger, je grösser die Tangente der Polhöhe Q C R ist, und aus gleichem Grunde verlängert sich C R = E R in Verhältniß der Secante der Polhöhe. Dieses fordert demnach, daß man auf der Linie RQ noch ein Lineal befestige, und auf demselben die Tangente der Polhöhe aus R gegen Q trage, damit man die Scale CN, welche nunmehr beweglich gemacht werden muß, auf die Polhöhe schieben und befestigen könne. Eben so müssen auch die Secanten der Polhöhe auf dem Lineale RE aufgetragen werden, um den Faden EP jedesmal da anzuhängen, wo die Polhöhe gezeichnet steht. Beyden Linealen RQ, RE giebt man die Länge, welche die größte Pohlhöhe erfordert, wo man zu observiren gedenkt; und anstatt dem Instrumente die Figur eines Sectors zu geben, kann man es in ein Rectangel verwandeln, dessen Breite =CN, die Länge aber der Secante der größten Polhöhe gleich ist, für welche man es zu gebrauchen gedenkt.

§. 36.

Fig. XI. Auf diese Art verwandelt wird nun das Instrument in der 11. Figur vorgestellt, wie es vom Aequator bis unter dem Polarcircul gebraucht werden kann. Die Stundenleiter NC läßt sich an den beyden Rahmen HN, GC schieben und bey jeder Polhöhe befestigen. Auf NC sind die Stunden nach den Sinus versus der Stundenbögen, auf HN und GC die Tangenten der Polhöhen, und auf RED ihre Secanten aufgetragen. Auf dem Bogen M

finden

finden sich die Zeichen und Grade des Thierkreises nach ihrer Declination. Die Dioptern FB sind ebenfalls auf DR rechtwinklicht. Wird nun NC auf die Polhöhe geschoben und befestigt, der Faden EP bey der Polhöhe E angeschraubt, der Ort der Sonne M vertical über R gestellt, und die Dioptern BF gegen die Sonne gerichtet, so schneidet der Faden in A die Stunde und Minuten ab. Die Verticallinie MR geht immer in K durch den Punct des Auf- und Unterganges der Sonne. KQ ist der Sinus der Ascensionaldifferenz, QA der Sinus des Stundenbogens, von 6 Uhr an gerechnet, KRE = REA das Complement der Sonnenhöhe, RKA = KAE das Complement der Declination, und

$$RE : KA = \sin RKA : \sin KRE.$$

§. 37.

Alles dieses geht nun bey dem vorhin (§. 25 seqq.) beschriebenen Azimuthalsector auch an, und die Verwandlung fällt so aus, wie es die 12te Figur vorstellt. Die Azimuthalscale NC, welche nach den Sinus versus des Azimuth eingetheilt ist, läßt sich an den beyden Rahmen HN, GC schieben, und bey der Polhöhe, die nach ihren Tangenten aufgetragen ist, befestigen. Auf dem andern Sector DAF, sind auf AR die Grade der Polhöhe nach ihren Secanten, und auf dem Bogen DF die Zeichen und Grade des Thierkreises Fig. XII.

nach ihrer Declination aufgetragen. Die Polhöhe fällt in R, und der Sector läßt sich um diesen Punct drehen, so wie die Diopteren AB sich um sein Centrum A drehen läßt. NC oder HG wird immer vertical gestellt, und AB in B auf den Ort der Sonne gelegt, sodann der ganze Sector DAF so gedreht, daß AB gegen die Sonne gerichtet sey; und so wird die Schärfe AB auf NC den Grad des Azimuth, von Mittag an gerechnet, abschneiden.

§. 38.

Die Genauigkeit dieser Instrumente hängt fürnehmlich von der Länge der Scale NC ab, weil sich auf derselben desto kleinere Theile noch unterscheiden lassen, je länger sie gemacht wird. Ist diese Länge von einem Fuß, oder 1440 Decimaltheile von Linien, so wird in Q eine Minute Zeit noch die Grösse von drey solcher Decimaltheile haben, oder beynahe $\frac{1}{3}$ Linie groß seyn. Von Q gegen C und N werden sie immer kleiner. Es ist dieses aber kein Fehler des Instruments, weil sich die Zeit aus der Sonnenhöhe desto minder genau finden läßt, je näher die Sonne bey dem Mittage ist. Man setze

Fig. X.

Fig. II.

$$PZ = e$$
$$ZS = k$$
$$PS = c$$
$$ZPS = \omega$$

so haben wir die Gleichung

$$\cos k = \cos e . \cos c + \sin e . \sin c . \cos \omega$$

Wird

Wird nun e, c beständig angenommen, und k, ω differentiirt, so ist

$$\sin k . dk = \sin e . \sin c . \sin \omega . d\omega$$

folglich ist

$$d\omega = \frac{\sin k}{\sin c . \sin e . \sin \omega} . dk$$

der Fehler in der Zeit, wenn dk der Fehler in der Höhe der Sonne ist. Setzt man nun, Fig. X.
die Höhe der Sonne werde mit dem Sector NEC gemessen, und CR sey = 1, so ist auf der Stundenleiter NC ein kleiner Theil der Zeit z. E. eine Minute desto weniger zu erkennen,

1°. je kleiner QC = sin e ist,

2°. je schiefer der Faden EAP die Linie NC schneidet, folglich je kleiner sin EAQ = sin c ist,

3. je mehr die Zeittheile in A kleiner sind als in Q, folglich je kleiner sin ω ist.

Demnach wächst aus diesen Gründen die Schwürigkeit, einen kleinen Zeittheil auf NC zu erkennen, in zusammengesetzter Verhältniß von sin c . sin e . sin ω. Dieses ist nun eben der Theiler der erstgefundenen Formel

$$d\omega = \frac{\sin k}{\sin c . \sin e . \sin \omega} . dk$$

Der Zähler ist

$$\sin k \, dk = -d \cos k . = d \sin MRD$$

und giebt folglich an, um wie viel der Perpendicul EP von der Verticale MR weggerückt wird, wenn man mit dem Instrument statt der wahren Sonnenhöhe eine grössere nimmt. Da die Möglichkeit diesen Fehler zu erkennen, mit dessen Grösse zunimmt, so nimmt die Schwürigkeit, denselben zu erkennen, in umgekehrter Verhältniß ab, und dieses macht, daß $fk.dk$ die übrige Factoren $fc.fe f\omega$ nicht multiplicirt, sondern dadurch getheilt wird. Da wir demnach die Formel

$$d\omega = \frac{fk.dk}{fc.fe.f\omega}$$

unmittelbar und ganz auf dem Instrumente finden, so ziehen wir die Folge daraus, daß es einerley ist, ob man die Zeit in A observirt, oder ob man die Höhe der Sonne mit dem Sector QNR nimmt und daraus die Zeit berechnet.

§. 39.

Man muß ferner bey diesen, und überhaupt bey allen gnomonischen Instrumenten, welche nach dem Ort der Sonne gerichtet werden müssen, diesen Ort genau wissen, und zwar nicht nur für die Mittagszeit, sondern für die Stunde der Observation. Da man nun diese Stunde erst durch das Instrument finden will, so kann man den Ort der Sonne anfangs so annehmen, wie derselbe für die Mittagszeit aus den Astronomischen Tafeln berechnet wird, und damit sehen, wie viel Uhr es seyn würde. Man sucht sodann den Ort der Sonne für diese Zeit, und stellt entweder die Observation aufs neue

an,

an, oder giebt auch nur den Instrument die Lage, die es würde gehabt haben, wenn man gleich anfangs den wahren Ort der Sonne gebraucht hätte. So z. E. müssen bey dieser Veränderung die Dioptern B F unbeweglich bleiben, und nur der Sector N C R gedreht werden, bis der wahre Ort der Sonne in die Verticallinie M R trift. Uebrigens, wenn das Instrument groß genug ist, daß sich solche kleinere Veränderungen darauf bemerken lassen, so muß man ebenfalls der Refraction Rechnung tragen, und dies geschieht, wenn man nach geschehener Observation die Dioptern so viel der horizontalen Lage näher rückt, als die Refraction beträgt.

V. Constructionen für die Sonnenhöhe.

§. 40.

Da bey dem erstbeschriebenen Sector der Winkel MRE der Höhe der Sonne, und E A Q den Abstand der Sonne vom Pol gleich ist, so darf man nur durch jede Zeit A eine Linie AE mit R M parallel ziehen, um die Höhe der Sonne E R M zu haben. Da nun M R allemal durch den Ort der Sonne M gezogen ist, so wird die Höhe der Sonne für jeden Tag und Stunde ohne Mühe bestimmt.

§. 41.

§. 41.

So leicht und allgemein nun diese Construction ist, so werde ich dessen unerachtet noch eine andere hersetzen, welche zwar nicht so allgemein ist, dabey aber dennoch etwas sehr einfaches und leichtes an sich hat. Man nimmt für den fürgegebenen Tag die Mittagshöhe und die Mitternachtstiefe der Sonne, oder welches einerley ist, die Summe und Differenz der Aequatorshöhe und der Declination. Sodann, indem man in dem Circul AFBL den
Fig. XIII. verticalen und horizontalen Diameter FL, AB gezogen, trägt man die Mittagshöhe aus B in D, die Mitternachtstiefe aus B in E, oder aus A in M, und zieht DG, EH mit dem Horizonte A B parallel. Auf GH beschreibt man den Circul GJHP und theilt denselben in 24 Stunden. Wird sodann durch jede Stunde J die Linie P J K horizontal, oder mit A B parallel gezogen, so findet sich B K, die dazu gehörende Höhe der Sonne, N G Q ist die Tageslänge, und N H Q die Nachtlänge, DE die doppelte Höhe des Aequators, R J der Sinus der Sonnenhöhe in beständiger Verhältniß des Products der beyden Chorden N J, Q J. Denn da N Q die Chorde des Nachtbogens, N J Q der Hälfte desselben gleich, folglich N Q zu sin. N J Q in beständiger Verhältniß ist, so ist auch N J ∽ sin N Q J

Q J ∽ sin Q N J

Nun

Nun ist

$$JR = NJ . \sin QNJ$$

demnach

$$JR \backsim NJ . QJ.$$

Es ist aber, wenn man die wirkliche Gleichung sucht

$$\sin NJQ = NQ : GH$$

demnach

$$NQ = GH . \sin NJQ$$
$$NJ = GH . \sin NQJ$$
$$JR = GH . \sin NQJ . \sin QNJ$$

Nun ist, wenn man $AC = 1$ setzt

$$CG = \cos. (c - e)$$
$$CH = - \cos(c + e)$$

demnach

$$GH = \cos(c - e) - \cos(c + e) = 2 \sin c . \sin e$$

und daher der Sinus der Sonenhöhe

$$JR = 2 \sin c . \sin e . \sin NQJ . \sin QNJ$$

Es ist aber, wenn J eine Nachmittagsstunde ist, der Bogen NPJ die Zeit vom Aufgange der Sonne, JQ die Zeit bis zum Untergang der Sonne. Demnach läßt sich, wenn die Tageslänge bekannt ist, die Höhe der Sonne durch die blosse Addition von vier Logarithmen berechnen. Da übrigens DE die doppelte Aequatorshöhe ist, so ist die Chorde DE für jede Declination der Sonne von beständiger Grösse, und eben die, so in der 9ten, 10ten und 11ten Figur CN ist. Demnach läßt sich auch aus dieser 12ten Figur ein ähnliches Instrument herleiten.

VI.

VI. Anmerkungen über die Horizontal- und Verticaluhren.

§. 42.

Die Kunst Sonnenuhren zu machen wird häufig auch von solchen Leuten ausgeübt, die von allen dazu gehörigen Gründen schlechthin nichts verstehen. Unter andern Anlässen, die ich gehabt habe, ohne Rücksicht auf so viele selbst auf dem Lande anzutreffende Sonnenuhren diese Anmerckung zu machen, fande ich einen solchen Künstler, der ungefähr wußte, daß bey dem Horizonthal- und mittäglichen Verticaluhren die Stunden nicht gleich nahe bey einander sind. Dieses brachte ihn, oder einen seiner Vorgänger, auf den Einfall aus A und B die Bögen B D, A D zu beschreiben, jeden in sechs gleiche Theile zu theilen, und aus der Mitte C die Stundenlinien in die Theilungspuncte zu ziehen, sodann den Zeiger unter einen halben Winkel, das will sagen, unter 45 Graden auf C D aufzurichten. So wird unstreitig die Uhr leicht und geschwinde gezeichnet, nur muß man für die Genauigkeit derselben nicht gut stehen, weil diese eine beträchtliche Verbesserung der Methode erfordert, wenn man statt der Tangenten oder Aequinoctiallinie, solche Circulbögen, dergleichen A D, BD sind, dazu gebrauchen will.

Fig. XIV.

§. 43.

Man ziehe nemlich den Circul HDM, und Fig. XV. darin die beyden Diameter HM, VD perpendiculär. Den Circul HDM theile man in 24 gleiche Theile als Stunden. Sodann mache man VDC der Höhe des Aequators, und VDP der Hälfte desselben gleich, und aus dem Centro C beschreibe man durch D den Circul ADE. Aus P ziehe man in jede Stunden des Circuls HDM blinde Linien, und wo diese den Circul ADE durchschneiden, da ziehe man aus V Linien, welches die Stundenlinien der Horizontaluhr für die Polhöhe DCV seyn werden.

§. 44.

Die Figur ist eine Projection der Sphäre auf den Horizont, wenn das Aug im Zenith ist. HDM ist der Horizont, ADE der Aequator, P der Pol, V das Zenith, VF ein Verticalcircul, DG der Stundenbogen auf dem Aequator, oder die Zeit vom Mittage an in Grade verwandelt, GDF die Höhe des Aequators, demnach, weil der Triangel DFG in F rechtwinklicht ist,

$$\cos GDF = \cot DG . \tan DF$$

daher ist DF der Stundenbogen, oder DVF der Stundenwinkel für die Horizontalsonnenuhr. Die blinden Linien PG sind schlechthin nur, um den Aequator ADE nach dem Regeln der Projection in Grade einzutheilen.

§. 45.

Nimmt man zu dem Winkeln VDC, VDP statt der ganzen und halben Aequatorshöhe, die ganzen und halbe Polhöhe, so erhält man statt der Horizontaluhr eine mittägliche Verticaluhr. Diese Verzeichnungsart ist dadurch geschmeidiger und in allem eben so einfach als die gewöhnliche, weil man hier anstatt einer geraden Aequinoctiallinie, welche für die Morgen- und Abendstunden, gar zu sehr verlängert werden muß, den Aequinoctialcircul ADE gebraucht.

§. 46.

Man kann sich ferner eben dieser Projectionsart bedienen, um eine Vorbereitung zu finden, nach welcher sodann jede Horizontal- und Verticaluhren für jede Polhöhen, durch blosse Zeichnung eines halben Circuls gezeichnet werden könnten. Die Vorbereitung selbst ist folgende:

§. 47.

Fig. XVI. Aus dem Durchschnitte der Perpendicularen ACB, DCE zieht man den Circul ABDE, und beschreibt sodann durch die Punct D, E Circulbögen, welche die Linie DE unter Winkeln von 15, 30, 45, 60, 75 Graden durchschneiden. Es ist klar, daß die Halbmesser dieser Bögen Secanten dieser Grade seyn, ihre Mittelpuncte auf AB liegen, und von C um die Tangenten dieser Grade entfernt seyn werden. Dieses ist nun die Vorbereitung.

§. 48.

§. 48.

Sollte nun eine Horizontaluhr verzeichnet werden, so macht man A P der Polhöhe gleich, zieht P Q mit A B parallel, und beschreibt aus der Mitte E den halben Circul P M K, so ist K M die Mittagslinie, der Zeiger wird in K aufgerichtet, und die Durchschnittspuncten 1, 2, 3 ꝛc. 11, 10, 9 ꝛc. geben die Stundenbögen der Horizontaluhr, wenn man aus denselben gerade Linien in k zieht. Macht man hingegen M P der Höhe des Aequators gleich, so erhält man auf eben die Art eine mittägliche Verticaluhr.

§. 49.

Es sey K das Zenith, P H Q M der Horizont, K Q der Halbmesser, K D werde der Tangente und K E der Cotangente der halben Aequatorshöhe gleich gemacht, so sind D, E die beyden Pole, D N E ein Mittagskreis, M D N = M E N der Stundenwinkel, und M E die Polhöhe. Da nun in dem rechtwinklichten Triangel M E N Fig. XVII.

$$\sin EM = \cot MEN . \tang MN$$

so ist M N der Stundenbogen, oder M K N der Stundenwinkel für die Horizontaluhr. Man setze nun C A = 1, so ist C K = dem Sinus der Polhöhe, K Q = K M deren Cosinus. Da nun vermög der Projectionsart, jede Mittagscircul E N D, die Mittagslinie E D unter eben den Winkeln schneiden, unter welche sie auf der

Sphäre den Mittagskreis schneiden, so ergiebt sich hieraus die Construction der Uhr, wie sie in der 16ten Figur vorgestellet worden, wo die Buchstaben A, B, C, D, E K, M, P, Q eben die Bedeutung haben, wie in der 17ten Figur.

§. 50.

Man findet sehr häufig kleine Horizontaluhren, die man bey sich tragen kann, und wo die Mittagslinie entweder durch den darauf gezeichneten Thierkreis, oder vermittelst einer Magnetnadel gefunden wird. Solche Uhren sind nun allerdings für eine gewisse Polhöhe, und dieses mag der Grund seyn, warum Reisende sich lieber Aequinoctialuhren anschaffen, welche auf jede Polhöhe können gerichtet werden. Man kann aber diesen Vortheil auf eine eben so leichte Art bey jeder Horizontaluhr erhalten. Man setze z. E. die Uhr sey für den 55ten Grad der Polhöhe gezeichnet, so wird sie unter dieser Polhöhe in der That eine horizontale Lage haben. Will man sie aber unter einer andern Polhöhe z. E. unter dem 50sten Grade gebrauchen, so muß man sie gegen Mittag um 5 Grade erhöhen, damit der Zeiger einen Winkel von 50 Gr. mit dem Horizonte mache. Zu diesem Ende kann das Plättgen
Fig. XVIII oder Täfelgen AC, auf welchem die Uhr verzeichnet ist, vermittelst eines Gewindes in A an ein anderes AB angeschraubt werden. Um demselben sodann die behörige Erhöhung

zu

zu geben, wird in B ein Circulbogen, dessen Centrum in A ist, so angemacht, daß man ihn sowohl legen als aufrichten kann. Oder man läßt durch C eine Stellschraube auf B gehen, durch deren Umdrehen man A C nach Erforderniß erhöhen kann. Es ist dabey möglich die Schraubengänge mit der Distanz A B so zu proportioniren, daß bey jedem Umgange der Schraube A C um einen Grad erhöht wird. Dieses geschieht, wenn A C so lang als $57\frac{3}{10}$ Schraubengänge genommen wird. Das leichteste und aus andern Absichten zugleich das vortheilhafteste Mittel aber ist das Unterschieden eines rechtwinklichten Prisma D. Denn A C wird um desto mehr erhöht, je näher D gegen A geschoben wird. Wie weit aber das Prisma D an jedem Orte müsse geschoben werden, läßt sich am bequemsten finden, wenn man auf dem untern Plättgen A B eine Landcharte verzeichnet. Denn so wird die Uhr auch von denen gebraucht werden können, die von der Polhöhe gar keinen Begrif haben.

§. 51.

Da die Höhe des Prisma D als beständig angesehen wird, so ist A D in Verhältniß der Cotangente des Winkels C A B. Da diese Cotangente unendlich wird, wenn C A D $= 0$ ist, so thut man am besten, wenn man dem Winkel C A B 5 Grade giebt, wenn D in B zu liegen kömmt, das will sagen, die Son-

nenuhr wird für eine Polhöhe verzeichnet, die 5 Grade grösser ist, als die gröste, so man auf der Landcharte anbringen will. Man setze z. E. es solle der 55te Grad der Polhöhe in B fallen, welches ungefähr die nördliche Grenzlinie von Deutschland ist, so sieht man die Länge AB als die Cotangente von 5 Graden an, und trägt nach gleichem Maaßstabe die Cotangenten von 6, 7, 8, 9, 10, 11 ꝛc. Graden aus A gegen B, und nach eben dem Maaßstabe erhält das Prisma D die Höhe von dem Halbmesser. Die Sonnenuhr auf dem obern Plättgen AB wird für den 60sten Grad der Polhöhe verzeichnet. Die Grade der Länge bleiben hiebey willkührlich. Man kann sie daher sowohl nach der Breite der Sonnenuhr, als nach dem Districte der Erdfläche richten, welches man auf die Landcharte bringen will. Man kann
Fig. XIX. aus der 19ten Figur sehen, wie die Sache ausfällt. AD ist der Halbmesser und zugleich die Höhe des Prisma, AB die Tangente von 85 Grad, und die übrigen Puncte der Scale AB sind die Tangenten von 84, 83, 82, 81 ꝛc. Graden. Die Uhr AC ist auf die Polhöhe 60 Grad gezeichnet, und daher ist bey B der 55ste Grad gesetzt, weil, wenn das Prisma in B untergestellt wird, die Fläche der Uhr um 5 Gr. erhöht, demnach der Zeiger um 5 Grad vertieft, daß will sagen, auf die Polhöhe von 55 Grad gerichtet wird.

§. 52.

§. 52.

Es wird dem Leser von selbst beyfallen, daß die beyden Instrumente, so die 11te und 12te Figur vorstellt, ebenfalls von der Art sind, daß eine Landcharte darauf verzeichnet werden kann, und zwar desto besser, weil die in GC und HN verzeichnete Grade der Breite oder Polhöhe weniger ungleich sind. Fig. XI. et XII.

§. 53.

Wenn die Abweichung der Magnetnadel an einerley Ort beständig bliebe, so liessen sich auf der Landcharte die sogenannten Halleyschen Linien zeichnen, um den Gebrauch der Sonnenuhr auch auf diese Art allgemein zu machen. Man kann aber auch auf der Uhr selbst den Thierkreis zeichnen, und zwar für die Polhöhe von 60 Gr. für welche die Uhr horizontal ist. Unter jeder andern Polhöhe giebt man durch Unterschiebung des Prisma der Uhr die behörige Erhöhung, und dreht sie sodann herum, bis der Schatten auf den Ort der Sonne trift, um dadurch zugleich die Stunde und die Lage der Mittagslinie zu finden. Fig. XIX.

VII. Beschreibung eines halben Circuls, um aus der Höhe der Sonne die Zeit zu finden.

§. 54.

Fig. XX. Wir haben dieses Instrument oben (§. 19.) nur kurz angezeigt, und werden nun die Art dasselbe zu verzeichnen noch angeben. Man beschreibe auf einem Diameter CB, von beliebiger Länge, den halben Circul CNB, und mache den Winkel BCK der Polhöhe gleich. Aus dem Mittelpunct H ziehe man HF mit CK parallel, und aus C die Linie CF auf HF senkrecht. Man beschreibe sodann mit dem Halbmesser FH aus F den Circulbogen HQ, und theile denselben in Stunden. Aus jeder Stunde ziehe man Perpendicularen auf HF, so wird man eben so viele Centra haben, aus welchen durch C Circulbögen CD gezogen werden müssen, welche, wenn LCK = MCK der Obliquität der Ecliptic gleich gemacht wird, innert den Linien MC, LC sodann gezogen werden. Diesen Bögen werden die Stunden beygeschrieben, und aus K gegen L und M die doppelte Grade der Declination jeder Zeichen und Grade des Thierkreises aufgetragen. Endlich wird in C ein Faden CP mit einer Perl N und Gewichte P angehängt, und die Dioptern auf CB mit dieser Linie parallel angemacht.

§. 55.

§. 55.

Soll nun damit die Stunde gefunden werden, so richtet man die Diopteren C B gegen die Sonne, und läßt den Faden frey hangen. Sodann schiebt man die Perl in N auf den 12ten Stundenkreis, und legt den Faden auf den Ort der Sonne, z. E. in CR, so fällt die Perl in S auf 4 Uhr 25 Min. Nachmittag, oder 7 Uhr 35 Min. Vormittag.

§. 56.

Dieses Instrument hat zugleich den Vortheil, daß es nach geometrischer Schärfe genau ist, und auf eine sehr einfache und leichte Art verzeichnet werden kann. Bey den Quadranten, die man in den meisten Anweisungen zur Gnomonic angiebt, fehlt es an beyden. Denn werden sie durch lauter Circulbögen construirt, so geht der geometrischen Schärfe ab. Construirt man sie aber vermittelst der für jede Stunden und Zeichen voraus berechneten Sonnenhöhen durch krumme Linien, so muß man diese von freyer Hand ziehen, und die Arbeit wird weitläuftig. In dem Gebrauche ist gegenwärtiger halbe Circul von den Quadranten auch nur in sofern verschieden, daß man bey den Quadranten die Perl anfangs auf den Ort der Sonne schiebt, und sodann die Höhe der Sonne sucht, hier aber bey der Höhe anfängt, und dann die Perl aus N in S bringt.

VIII. Beschreibung eines gleichschenklichten Triangels, um aus der Sonnenhöhe die Stunden zu finden.

§. 57.

Fig. XXI. Man nimmt auf der verticalen Linie A E als einen Halbmesser an, und trägt die Sinus versus der Stunden aus A aufwerts. Sodann nimmt man auf gleicher Scale die Tangente der Polhöhe als einen Halbmesser an, und trägt die Tangenten der Declination jeder Zeichen und Grade des Thierkreises aus E aufwerts und unterwerts. Endlich nimmt man auf eben der Scale die halbe Secante der Polhöhe als einen Halbmesser an, und trägt auf den beyden Schenkeln C D, C F die Secanten der Declination jeder Zeichen und Grade des Thierkreises aus C gegen D und F. Diese beyden Schenkel haben in C ein Gewinde wie die beyden Schenkel eines Proportionalcirkuls. In D wird gleichfalls ein bewegliches Gewinde angebracht, so, daß sich nicht nur C D an A D herumdrehen lasse, sondern daß der Mittelpunct des Gewindes D auf den sowohl auf C D als auf A D gezeichneten jedesmaligen Ort der Sonne geschoben werden könne. In F aber wird an dem Schenkel C F ein Stift angemacht, so, daß derselbe ebenfalls auf den auf diesem Schenkel gezeichneten jedesmaligen Ort

Ort der Sonne geschoben und befestigt werden könne. Die Dioptern können auf C D oder auf F C kommen, weil jeder dieser Schenkel einerley Winkel mit dem Horizonte macht. Ist nun das Gewind in D und der Stift in F auf den Ort der Sonne gestellt, so rückt man den Stift F auf der Stundenlinie AB herauf oder herunter bis die Dioptern FC oder CD gegen die Sonne gerichtet sind, alsdenn zeigt der Stift die Stunde und Minute, die zu finden war.

§. 58.

Es sey, um dieses zu beweisen,

p die Polhöhe
d die Declination
h die Höhe der Sonne
ω die Stunde oder der Stundenbogen, von Mittag an gerechnet;

so ist vermög der Construction

$$AE = 1$$
$$ED = \text{tang } d \,.\, \text{tang } p$$
$$CD = CF = \tfrac{1}{2} \sec d \,.\, \sec p$$
$$EF = \cos \omega$$
$$DCF = 2h$$
$$DF = 2DC \,.\, \sin h = \sec d \,.\, \sec p \,.\, \sin h$$

Nun ist

$$DF = DE + EF$$

 folg-

folglich

$$\sec d . \sec p . \sin h = \tan g\, d . \tan g\, p + \cos \omega$$

oder, wenn man durch $\sec d . \sec p$ dividirt

$$\sin h = \sin p . \sin d + \cos p . \cos d . \cos \omega$$

Da dieses die bekannte Gleichung zwischen der Polhöhe, Declination, Sonnenhöhe und Stundenbogen ist, so ist die Construction diejenige, welche diese Gleichung erfordert.

Beyträge
zum Gebrauche
der
Mathematik
und
deren Anwendung
durch
J. H. Lambert.

Mit Kupfern.

Zweyter Theil
Zweyter Abschnitt.

Berlin,
im Verlag der Buchhandlung der Realschule,
1770.

XI.
Gedanken über die Grundlehren des Gleichgewichts und der Bewegung.

§. 1.

Man ist überhaupt der Meynung, daß diejenigen Lehren, welche an Richtigkeit, Schärfe, Gewißheit und Augenscheinlichkeit (euidenz) den geometrischen, wo nicht durchaus gleich, jedennoch am nächsten kommen sollen, die mechanischen sind. Man hat daher schon längsten die Frage aufgeworfen: ob sich die ersten Sätze der Mechanic nicht eben so nothwendig und a priori erweisen lassen, als es Euclid in Absicht auf die geometrischen gethan? Diese Frage läßt sich auch dadurch noch gewissermassen rechtfertigen, weil man selbst in der Meßkunst, wenn von der Entstehensart oder Erzeugung der Figuren die Rede ist, Sätze zum Grunde legt, die von der Bewegung entlehnt sind. So z. E. erklärt man die Entstehung einer Linie durch das Fortfliessen eines Puncts. Die Entstehung eines Circuls durch das Herumdrehen einer geraden Linie um einen Punct ꝛc. Nun sind zwar solche mechanische Ausdrücke in der theoretischen Geometrie fremde. Indessen kann man derselben Tab. VI. VII.

selben dennoch nicht entbehren, sobald man die Geometrie practisch machen, oder auch nur die Möglichkeit der Figuren erweisen will. **Euclid** gebraucht sie zu dieser letztern Absicht, und da er voraus sieht, daß sich ohne die vorerst erwiesene Möglichkeit der Figuren, von denselben nichts categorisches erweisen läßt, so läßt er gleich auf die Grundsätze, seine Forderungen oder Postulata von Ziehung und Verlängerung gerader Linien und von Zeichnung eines Circuls folgen, und fängt sodann seine Theorie mit zwoen Aufgaben an, um dadurch die Möglichkeit seiner folgenden Lehren feste zu setzen.

§. 2.

Soferne man demnach in der Mechanic nur auf diejenigen Begriffe und Sätze sehen wolte, die selbst in der Geometrie gebraucht werden, so fern ist es unstreitig, daß die Mechanic mit der Geometrie, in Absicht auf die Nothwendigkeit, Schärfe, Gewißheit und Augenscheinlichkeit zu gleichen Schritten gehen würde. Allein dabey bleibt die Mechanic nicht stehen. In der Geometrie nimmt man die Bewegung, ohne auf etwas anders als auf die **Direction** und den **durchlaufenen Raum** zu sehen. Dieses ist in der Mechanic nicht genug. Denn das wenigste, was man noch mitnehmen muß, ist die **Zeit** und **Geschwindigkeit**. Und bleibt man bey diesen vier Begriffen, so läßt sich ohne alle Widerrede eine Theorie errichten,

richten, die der Meßkunst nichts nachgiebt. Man vergleicht darin die Bewegung einzeler Puncte nach jeder beliebigen Direction und Geschwindigkeit, welche man nach belieben annimmt und ändert, ohne darauf zu sehen, woher beyde entstehen, wenn die Bewegung in der That vorgeht. Man begnügt sich dabey mit der an sich ganz klaren Vorstellung, daß wir uns *in Gedanken* von jedem Punct des Raumes in jeden andern nach jeder beliebigen Richtung und Geschwindigkeit versetzen können, ungefehr wie wir in Gedanken den Umriß jeder Figur durchlaufen. In so fern aber ist dieser erste Theil der Mechanic, den wir die Phoronomie nennen können, eben so wie die Geometrie, und in eben dem Sinne, schlechthin nur ideal, weil alles dabey nur auf Vorstellungen beruht.

§. 3.

Wolte man aber dabey verbleiben, so würde unstreitig der Mechanic ihr wesentlichster Theil fehlen. Man sieht leicht, daß die *Kräfte* darinn betrachtet, und in jeden Absichten mit einander verglichen werden müssen. Und eben dieses ist es, worin die Vergleichung der mechanischen und geometrischen Evidenz nicht mehr so leicht zu seyn scheint. Die Kräfte liegen nicht so vor Augen, wie die Figuren. In der Bewegung läßt sich höchstens nur ihre *Wirkung* sehen, und auch dieses nur zum Theil. Und bey dem Gleichgewichte, wo alles in Ruhe ist, würden wir von dem Daseyn wirkender Kräfte, kaum träumen, wenn wir nicht den Begrif der Kraft durch das Gefühl hätten. In der That versichern wir uns auch nur dadurch, daß das, was wir bey dem Gleichgewichte eine Kraft nennen, im Stande ist, eine Bewegung herfür zu bringen, wenn das Gleichgewicht gehoben wird.

§. 4.

Durchgehen wir in dieser Absicht die Geschichte der Mechanic, so werden wir auch finden, daß eben daher, weil die Theorie des Gleichgewichtes näher an den Begrif gränzt, den wir unmittelbar durch das Gefühl von der Kraft haben, diese Theorie weit früher in Richtigkeit gebracht worden ist, als diejenige, wo die Kräfte mit der Bewegung verglichen werden. Indessen, wenn ich sage, sie sey in Richtigkeit gebracht worden, so verstehe ich dadurch eben nicht, daß es auf eben die Art geschehen sey, wie **Euclid** die Geometrie in Richtigkeit gebracht hat. Es kann zwar seyn, daß verschiedene Sätze der Meßkunst anfangs durch einzelne Erfahrungen gefunden worden, und daß man erst nachgehendes den Beweis, und besonders den Beweis von ihrer Allgemeinheit gesucht hat; so, daß die Erfahrung eigentlich nur als ein Anlaß diente, auf den Satz aufmerksam zu machen, und den Beweis dazu zu finden. In der Mechanic hingegen

gegen war die Erfahrung nicht nur durchaus der Weg, worauf man ihre Sätze fand, sondern es kommen noch dermalen selbst unter ihren ersten Sätzen solche vor, die man ihrer bisher angegebenen Beweise unerachtet, noch anstehen könnte, für wahr anzusehen, wenn man nicht wüßte, daß sie durch die Erfahrung bewährt erfunden werden. Man darf sich nur der Streitigkeiten erinnern, die in den neuern Zeiten über die Gesetze der Bewegung und das Maaß der Kräfte sind geführt worden, um sich zu versichern, daß man eben dergleichen in der Geometrie haben müßte, wenn diese nicht evidenter wäre, als es bisher die Mechanic gewesen.

§. 5.

Hiebey ist nun nicht die Frage, ob man statt eines an sich richtigen Beweises, nicht einen andern finden könne, der kürzer, netter, leichter oder auch noch klarer sey? Diese Frage kann um desto eher vorkommen, weil man nicht selten durch Umwege beweist, oder aus andern Umständen den Vortrag dunkler macht, als er seyn könnte und sollte. Die Frage ist, ob der Beweis in der That beweise, ob sich der Satz in der That durchaus gedenkbar und verständlich machen und eben so durchaus erweisen lasse ꝛc. Denn was man hiebey erzwingen will, wird nicht erwiesen, sondern höchstens nur scheinbar gemacht. Die Scharfsinnigkeit artet in Spitzfündigkeit aus, welche das Irrige auf jede Sätze des Beweises unvermerkt vertheilt, und was nicht so vertheilt werden kann, in die Difinitionen schiebt, damit sich sodann, was man daraus herleiten will, daraus herleiten lasse. Und so ist die Begierde einen Satz erwiesen zu sehen, der feinste Sophist, den man sich gedenken kann. Man wird in den Streitschriften über das Leibnitzische Maaß der Kräfte, und so auch in denen über die Maupertuische actio minima ausnehmende Beyspiele hievon finden. Man sieht aber solche Sophismata nur alsdann ganz deutlich, wenn das, was in der Sache selbst gedenkbar ist, ein für allemal ist ins Reine gebracht worden. Denn nur alsdenn sieht man deutlich ein, wie man das, was vorhin über die Sache gedacht worden, oder was man geglaubt hatte, dabey zu denken, anders denken müsse, damit es durchaus gedenkbar sey. Uebrigens geschieht es selten, daß die, so in der Streitigkeit verwickelt sind, auf diese Spur kommen, zumal wenn sie nicht gesonnen sind, ihr Wort zurück zu nehmen.

§. 6.

Wenn aber auch alles, was man bisher in der Static oder Lehre vom Gleichgewichte, und in der Dynamic oder Lehre von den bey der Bewegung vorkommenden Kräften, durch die Erfahrung, als bewährt befunden, angesehen

werden

werden kann, so bleiben doch noch zwo Fragen zu erörtern. Die erste betrift die Allgemeinheit, weil diese sich, vermittelst der Erfahrung, nur durch Induction erweisen läßt. Und da unsere Erfahrungen niemals eine geometrische Schärfe haben, so bleibt bey denen Sätzen, so wir daraus finden, immer noch der Anstand, ob der Satz in Kleinigkeiten nicht Ausnahmen leide, so wie z. E. die Haarröhrgen bey dem waagrechten Stande flüßiger Materien kleine Ausnahmen machen, oder wie die Strahlenbrechung in der Luft den Weg des Lichtes ein wenig krümmet. Die andere Frage ist, ob die mechanischen Sätze, so wie wir sie durch die Erfahrung in der gegenwärtigen Welt finden, von der Einrichtung des Weltgebäudes abhängig, oder eben so wie die geometrischen, für sich nothwendig sind; so, daß sie, wo sie vorkommen, nicht anders vorkommen können? Man sieht leicht, daß wenn und wiefern letzteres statt findet, die Mechanic eben so wie die Geometrie nothwendig und a priori erweisbar ist. Man sieht auch, daß wenn diese letztere Frage entschieden ist, die erstere eben so weit erleichtert und entschieden werde. Denn was man a priori erweisen kann, geschieht mit der Bestimmung der Allgemeinheit und Schärfe. Soll nun diese zweyte Frage erörtert werden, so muß es immer so geschehen, als wenn die Hauptsätze der Static und Dynamic noch erst zu erfinden wären, und was die Erfahrung davon angiebt, mag höchstens als eine Veranlassung dienen, um zu sehen, ob und wie fern es sich a priori erweisen lasse. Man weiß überhaupt schon so viel, daß es hiebey auf einige wenige Sätze ankommt, daß man in der Static ganz ausreicht, wenn die Theorie des **Hebels und der Zusammensetzung der Kräfte** einmal erwiesen ist, und daß man in der Dynamic ebenfalls nur die **Entstehung der Bewegung, vermittelst der Kräfte,** ins Reine bringen darf, um sodann jedes übrige daraus zu folgern. Ich werde nun das, was ich bey dem Ueberdenken dieser Theorien gefunden, hier vortragen, und hin und wieder auch mit anmerken, was mir bey einigen bisher gebräuchlichen Beweisen minder einleuchtend, oder aus welchen Gründen es seyn mag, mangelhaft zu seyn vorgekommen.

Erste Grundlehren der Static.

I. Der Begrif der Kraft.

§. 7.

Vor etwann 100 Jahren, oder besser zu sagen, vor des Galilaei und Cartesii Zeiten, wäre es in einem Lehrbuche von der Static oder Hebekunst kaum nöthig gewesen,

sich

sich bey dem Begriffe der **Kraft** lange aufzuhalten. Dermalen aber wird es dadurch nöthiger, weil man nach Durchlesung alles dessen, was darüber, und besonders bey Anlaß der **Leibnitzischen** und **Maupertuisischen** Streitigkeiten, ist geschrieben worden, diesen an sich ganz einfachen Begrif bald nicht mehr zu finden weiß. Man hat seitdem bald aus jeden Modificationen der Kraft besondere Kräfte gemacht, und daher **lebende** (vires vivas), **todte** (mortuas), **eingepflanzte** (insitas), **beschleunigende** (acceleratrices) rc. Kräfte auf die Bahn gebracht. Und besonders hat **Bilfinger** denselben noch seine vires indifferentes, consentientes, coincidentes, dissentientes, repugnantes, disiunctas, parallelas, mixtas, puras &c. beygefügt. Zu diesen kamen sodann noch die actio, potentia, pressio, sollicitatio, der Impetus, Conatus, Impactus &c. lauter Begriffe, wozu die Sprache Wörter darbothe, die wegen des unbestimmten Umfanges der Bedeutung schwer zu bestimmen, und daher desto dienlicher waren, aus willkührlichen Definitionen derselben Sätze herzuleiten, die man, so verwirrt sie waren, beweisen haben wolte. Ich gestehe gerne, daß ich die meisten dieser Wörter, der davon gegebenen Definitionen unerachtet, niemal recht habe verstehen können. In der That konnte ich mir auch leicht gedencken, daß die ersten Grundsätze der Mechanic viel einfacher seyn müßten, als daß ein solcher Kram von Wörtern und Definitionen dazu nöthig wäre. So z. E. begrif ich wohl, daß wenn das Product aus der Masse eines Körpers in das Quadrat der Geschwindigkeit in der Mechanic gut gebraucht werden kann, dasselbe Kürze halber mit einem Namen benennt werden könne. Und da die Wörter willkührliche Zeichen der Begriffe sind, so verstunde ich in sofern auch, daß man dieses Product eine Kraft, und wenn man so will, eine lebende Kraft nennen könne. Ob aber dadurch das Wort Kraft, oder auch das Wort lebende Kraft nicht vieldeutig wurde, das war eine ganz andere Frage, wobey mir immer vorkam, daß sie bey genauerer Untersuchung würde bejaht werden müssen. Und sollte dieses seyn, so würde Leibnitz in allen Absichten besser gethan haben, wenn er bemeldtes Product mit jedem andern Worte, nur nicht mit dem Wort Kraft, benennt hätte. Wenigstens wäre dadurch alles, was bey dem darüber entstandenen Gezänke Wortstreit heißt, schlechthin unterblieben, und die Frage, ob dieses Product in allen Fällen beständig bleibe, und unter die Finalursachen der Welt gerechnet werden müsse, hätte eine ganz andere Gestalt bekommen. Ueber die Maupertuisische actio minima lassen sich ganz ähnliche Betrachtungen machen, und noch um desto mehr, weil das Wort actio in der Sprache längst schon vieldeu-

vieldeutig ist, und z. E. in den Ausdrücken: actio radiorum solarium, actio ignis &c. eben so verwickelte Begriffe andeutet, als wenn man menschliche Handlungen damit benennt, die aus sehr vielen einfachern zusammengesetzt sind.

§. 8.

Da übrigens diese Anmerkungen mehr die Dynamic als die Static betreffen, so sind auch in der That die statischen Begriffe weniger verwirrt worden. Man drückt darin das, was man Kraft und Last nennt, um es recht verständlich zu machen, durch Gewichte aus, und bestimmt für jede Fälle die Verhältnisse zwischen beyden. Indessen muß ich anmerken, daß man im Deutschen das Wort Kraft gebraucht, da man hingegen im Lateinischen anstatt *Vis* lieber *Potentia* sagt. Man hat sich aber an diesen Unterschied der Benennungen nicht zu kehren, theils weil diese Wörter in der Sprache ohnehin vieldeutig sind, und daher in der Static nicht nach der Unbestimmtheit des Sprachgebrauches definirt werden müssen, theils und fürnehmlich aber auch, weil in der Static die Sache selbst vorgezeigt wird. Ueberdies werden darin Kraft und Last, nur Beziehungsweise, so genennt, weil in der That beyde Gewichte eine Kraft äussern. Dafern sie aber ungleich sind, so stellt man sich vor, daß das Grössere vom Kleinern gehoben, oder wenigstens im Gleichgewicht gehalten werden müsse; und in sofern wird das Grössere die Last, das Kleinere aber die Kraft genennet, zumal da öfters statt desselben die Kräfte der Menschen oder der Thiere gebraucht werden.

§. 9.

Ungeachtet man aber den kleinern Gewichte deswegen den Namen der **Kraft** beylegt, weil dasselbe das grössere im Gleichgewichte halten kann, so haben wir dennoch den Begrif der Kraft nicht von daher, sondern viel unmittelbarer in uns selbsten. Wenn wir nemlich eine Last heben oder fortdrücken, so empfinden wir, daß wir etwas anwenden müssen, und das, was wir empfinden, daß wir es anwenden musten, nennen wir die Kraft. Wir empfinden eben dieses, wenn wir z. E. einen Stein werfen wollen, und wir empfinden es desto mehr, je schwerer derselbe ist, und je geschwinder er soll geworfen werden.

§. 10.

Diese Beschreibung, wie wir zu dem an sich ganz klaren und einfachen Begrif der Kraft gelangen, mag nun um desto eher statt der Worterklärung dienen, weil wir von der Kraft eben so wenig eine Worterklärung geben können noch sollen, als von dem Farben, dem Lichte ꝛc. In der That besteht der Unterschied auch nur darin, daß das Auge sieht, was aus-

ser

ser ihm ist, da wir hingegen die Kraft in uns selbst empfinden. Wir können daher die Kraft nicht vorlegen, wie die Farben, um sie zu sehen; sie muß in uns empfunden werden. Und daher haben wir auch, um das Wort verständlich zu machen, nur anzuzeigen, wie man zu dieser Empfindung gelange. Der Begrif, den uns sodann diese Empfindung giebt, ist eben so klar als der Begrif den uns das Anschauen von den Farben giebt. Und so verschwindet jeder Wortstreit.

§. 11.

Ich erwähnte vorhin (§. 9.) mit gutem Vorbedachte, daß wir bey dem Werfen eines Steines empfinden, daß wir eben das anwenden müssen, was wir bey Hebung eines Gewichtes anwenden, auch wenn wir dasselbe schlechthin nur halten. Im letztern Fall währt die Kraft mit gleicher Stärke in einem fort, im erstern aber empfinden wir derselben allmählige Verstärkung, und die Geschwindigkeit, die daher erwächst. Wenn man demnach je wolte die Dynamic auf die Erfahrung gründen, so würde die hier angeführte die unmittelbarste seyn, weil wir dabey die Kraft, die wir anwenden, ihre allmählige Verstärkung und die daher entstehende Geschwindigkeit unmittelbar selbst empfinden. Und da diese Erfahrung uns offenbar angiebt, daß es einerley Kraft ist, die im ersten Fall nur hält, zieht, drückt 2c. im andern aber in Bewegung setzt; so sieht man leicht, daß die bloß drückenden Kräften von den bewegenden Kräften nur in der Art, wie sie angewandt werden, verschieden sind.

§. 12.

In der Static, wo nur das Gleichgewicht der Kräfte betrachtet wird, nimmt man die Kräfte schlechthin nur, sofern sie einen Druck äussern, und jede für sich weder stärker noch schwächer wird. Man nimmt dabey an, daß Kräfte gleich sind, wenn sie gleichen Druck äussern, das will sagen, wenn eine statt der andern gesetzt werden kann, daß eine Kraft doppelt, drey, vier, n fach so stark ist, als eine andere, wenn statt jener zwo, drey, vier, n von diesen müssen gesetzt werden. Ferner setzt man, daß zwo, drey, oder mehrere Kräfte, die auf ein Object, oder um es einfacher zu machen, auf einen Punct wirken, einander das Gleichgewicht halten, wenn dieses Object oder dieser Punct unbewegt bleibt, oder keiner von diesen Kräften nachgiebt. Da diese Sätze mit dem Begrif der Kräfte in unzertrennlicher Verbindung sind, so werden sie mit demselben eben so vorausgesetzt, wie man in der Geometrie den Begrif des Raums und die damit verknüpften Grundsätze voraus setzt. Und in sofern,

sofern, sage ich, daß sich die Static eben so nothwendig wie die Geometrie a priori erweisen lasse. Ich werde zu diesem Ende gegenwärtigen Abschnitt mit folgendem Lehrsatze beschliessen, weil er eigentlich noch hieher gehört.

§. 13.

Wenn zwo gleiche Kräfte in gerader Linie A B, C B gegen einander auf ein Object B wirken, so halten sie einander das Gleichgewicht. Fig. I. Man setze, nicht, so wird das Object der einen Kraft, z. E. der Kraft A nachgeben, und gegen D fortgedrückt werden. Da nun die Kraft C eben den Druck äussert, so wird B auch gegen E fortgedrückt. Demnach ist es in D und E zugleich. Da nun dieses ungereimt ist, so geht das Läugnen des Schlußsatzes nicht an, demnach halten die beyden Kräfte einander das Gleichgewicht.

II. Die unbiegsame Linie.

§. 14.

Wie man in der Geometrie gerade Linien gebraucht und dabey anfängt, so gebraucht man dieselben in der Static ebenfals, jedoch mit dem Zusatze, daß sie **unbiegsam** (linea inflexilis) sey. Und da wo man die Kräfte durch **Gewichte** vorstellt, fügt man noch bey, daß diese Linie ohne Schwere (expers grauitatis) sey. Wir könnten allgemeiner setzen, daß sie ohne Masse seyn müste, wenn nicht dieses schon mit zu dem Begrif einer mathematischen Linie gehörte, als welche, da sie ohne Breite und ohne Dicke ist, mit keiner Masse ausgefüllt seyn kann. Der Grund, warum man so strenge verfährt, ist weil man vermittelst einer solchen Linie die Wirkung mehrerer Kräfte unter einander vergleichen will, und da muß die Linie nicht durch ihre eigene Masse oder Schwere ein Hinderniß abgeben. Daß sie unbiegsam seyn müsse, nimmt man in der Static ebenfalls aus guten Gründen an. Durchgeht man aber die meisten Staticken, so findet man nicht, daß der Einfluß, den diese Bedingung in die Beweise ihrer Lehrsätze hat, in denselben behörig ausgedrückt wäre. Ich werde demnach bemüht seyn, diesen Mangel zu ersetzen, um das, was diese Unbiegsamkeit auf sich hat, deutlich zu machen. Der erste von den dahin gehörigen Lehrsätzen ist folgender:

§. 15.

Fig. II. Es sey A B eine dergleichen unbiegsame Linie, deren Mitte C ein unbeweglicher Punct sey, oder welches hier einerley ist, auf einem unbeweglichen Punct liege. Man setze nun gegen die beyden Endpuncte A, B drücken zwo gleiche Kräfte nach der perpendiculairen Richtung D A, E B, EB, so sage ich, diese Kräfte halten ein ander das Gleichgewicht, das will sagen, die Linie bleibe in unveränderter Lage. (§. 12.) Wird dieses geläugnet, so setze man, die Linie verändere ihre Lage, so, daß z. E. der Punct A in G fortgedrückt werde. Da nun aus gleichem Grunde der Punct B in F gedrückt wird, der Mittelpunct C aber, vermög der Voraussetzung, unbeweglich ist, so wird die Lage der Linie AB nunmehr GCF, demnach die Linie gebogen seyn. Dieses ist aber der Voraussetzung zuwider. Demnach geht das Läugnen der Folge nicht an. Und so sind die Kräfte im Gleichgewichte.

§. 16.

Wolte man hiebey die Linie ungebogen seyn lassen, so wird eben so bewiesen, daß sie zugleich die Lage GH und die Lage FJ haben, folglich an zweyen Orten zugleich seyn müste. Welches nicht bloß etwann der Voraussetzung zuwider, sondern schlechthin ungereimt seyn würde.

§. 17.

Wolte man endlich um auch diesem auszuweichen, setzen, die Lage der Linie werde GKF seyn, so wird der Mittelpunct C in K kommen, und folglich, der Voraussetzung zuwider, bewegt werden.

§. 18.

§. 18.

Ich häufe übrigens diesen dreyfachen Beweis unter andern auch deswegen hier auf, weil der Lehrsatz, und besonders der Archimedische Beweis dem Herrn von Leibnitz Anlaß gegeben, seinen zureichenden Grund als ein Principium in der Weltweisheit anzubringen, und dem Grunde des Widerspruches theils entgegen, theils an die Seite zu setzen. Man sieht aus allen drey Beweisen, daß das Gegentheil des Satzes auf Widersprüche gebracht wird, und daher der Satz nicht unter die contingenten Wahrheiten gehört, die man allein aus dem zureichenden Grunde herleiten zu können glaubt.

§. 19.

Diese drey Beweise beruhen nun sämtlich auf der Unbiegsamkeit der Linie A C B. Es ist aber dieses nicht der einige Gebrauch, den man davon machen kann. Der andere Gebrauch, den wir noch anzugeben haben, ist ungleich erheblicher. Er gründet sich darauf, daß, indem die beyden Kräfte in A und B drücken, es eben so viel ist, als wenn eine doppelt so grosse Kraft in C drückete. Dieses würde nicht seyn, wenn die Linie biegsam wäre, weil sodann von beyden Kräften ein Theil darauf würde verwendet werden, um die Linie zu biegen, oder wenn diese, ohn alle Verwendung einiger Kraft, biegsam ist, so

würde

würde dieselbe gebogen, ohne daß der Punct C den geringsten Druck auszuhalten hätte. Läßt man aber die Linie schlechthin unbiegsam, so hat der Punct C weder mehr noch minder Druck auszuhalten, als er von einer Kraft auszuhalten hat, welche so groß als die Summe beyder Kräfte D, E ist. Denn setzt man mehr, so ist offenbar in der Wirkung etwas, das in der Ursache nicht ist. Setzt man weniger, so geht der Ursache etwas ab, daß auf nichts verwendet wird.

§. 20.

Man setze aber, es drücken gegen die unbiegsame Linie GH in A und D zwo gleiche Kräfte, die wir jede $= 1$ setzen wollen, so muß denselben in der Mitte C eine Kraft $= 2$ entgegen gesetzt werden, um das Gleichgewicht zu halten. Wo dieses nicht wäre, so müßte die Kraft in C entweder größer oder kleiner seyn. Wir wollen sie z. E. kleiner und folglich $= 2 - \alpha$ setzen. Wird demnach in C eine Kraft $= 2 - \alpha$ angebracht, so ist, dieser Hypothese zufolge, die Linie in Ruhe, und jeder Punct derselben so gut als unbeweglich. Man nehme nun die Puncte E, F von C doppelt so weit entfernt als die Puncte A, D sind. Wolte man demnach jede der Kräfte A, D halbiren, und in jedem Punct E, F eine Hälfte, in B aber zwo Hälften anbringen, so würde, eben der Hypothese zufolge, das Gleichgewicht gehoben. Fig. III.

Denn

Denn diese so vertheilte Hälften wirken nun nicht mehr als wenn in A und D zwo Kräfte $= 1 - \frac{1}{2}\alpha$ wären. Man muß demnach diese Hälften um einen Theil, den wir $= \beta$ setzen wollen, verstärken, wenn anders das Gleichgewicht bleiben solle. Demnach wird in den Puncten E, F eine Kraft $= \frac{1}{2} + \beta$, und in B eine Kraft $= 1 + 2\beta$ angebracht. Man nehme nun wiederum die Puncte G, H doppelt, so weit von C entfernt, als E und F sind. Und da wird, wenn man die Kräfte in E und F wegnimmt, in den Puncten G, H mehr als ihre Hälfte, und in B mehr als zwo von ihren Hälften angebracht werden müssen, wenn anders das Gleichgewicht bleiben solle. Es seyn demnach in G und H die Kräften $= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\beta + \gamma$ und in $B = \frac{1}{2} + \beta + 2\gamma$, so werden nun in B die Kräfte $= (1 + 2\beta) + (\frac{1}{2} + \beta + 2\gamma)$ seyn. Da man nun auf diese Art immer fortfahren kann, doppelt entferntere Puncte zu nehmen; so ist klar, daß wenn dieses unendlich fortgesetzt wird, in B die Kräfte

$$
\begin{array}{l}
+1+2\beta \\
+\frac{1}{2}+\beta+2\gamma \\
+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\beta+\gamma+2\delta \\
+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\beta+\frac{1}{2}\gamma+\delta+2\varepsilon \\
+\ \&c.
\end{array}
$$

seyn werden, deren Summe $= 2 + 4\beta + 4\gamma + 4\delta +$ &c. ist. Diese Summe ist nun, auch, ohne Rücksicht, auf die äussersten Puncte, an sich schon grösser als 2, und um so so viel mehr grösser als die in C angebrachte Kraft $= 2 - \alpha$. Demnach können beyde einander nicht gleich seyn, dafern man nicht $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \varepsilon = \&c. = 0$ setzt. Da nun ersteres das Gleichgewicht erfordert, so muß auch letzteres seyn. Demnach ist es falsch, daß in C eine kleinere Kraft als $= 2$ erfordert werde. Daß aber auch keine grössere erfordert werde, leitet sich daher, weil man bey dieser Voraussetzung die Gleichung $2 + \alpha = 2 - 4\beta - 4\gamma - 4\delta - \&c.$ erhalten würde, welche ebenfalls nicht angeht, dafern man nicht $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \&c. = 0$ setzt. Auf diese Art erhält man nun den Vortheil, daß, wo an einer unbiegsamen Linie zwo gleiche Kräfte angebracht sind, wie z. E. in A und D, man statt derselben in der Mitte B eine doppelt so grosse anbringen kann; und hinwiederum, daß man jede Kraft B wegnehmen, und statt derselben in zween von B gleich entfernten Puncten z. E. in A und D halb so grosse Kräfte kann anbringen, ohne daß das Gleichgewicht verändert, oder die Linie GH verrückt oder bewegt werde.

III. Die Dimensionen der Kraft.

§. 21.

Man kann den Druck, den eine Kraft äussert, in verschiedenen Absichten betrachten, je nachdem dieselben auf einen Punct, oder auf

auf eine Linie, oder auf eine Fläche, oder endlich auf einen ganzen körperlichen Raum wirkt. Die Wirkungen selbst sind aber unstreitig Heterogen, und es gebraucht daher einige Vorsichtigkeit, wenn man sie unter einander vergleichen will. Man setze z. E. eine Kraft wirke auf eine ganze Linie, so wirkt sie unstreitig auch auf jeden Punct derselben. Beyde Wirkungen aber sind der Dimension nach verschieden. Denn wenn man die ganze Wirkung auf die Linie, durch eine Linie ausdrückt, so wird die Wirkung auf einen Punct nicht durch eine Linie, sondern nur durch einen Punct ausgedrückt werden können. Und hinwiederum, wenn man die Wirkung auf einen Punct durch eine Linie vorstellt, so muß die Wirkung auf die ganze Linie durch einen Flächenraum, und aus gleichem Grunde die Wirkung auf eine Fläche durch einen körperlichen Raum, und so endlich auch die Wirkung auf einen körperlichen Raum durch die vierte Dignität vorgestellt werden. Das will nun sagen, daß die Dimensionen der Kraft, zugleich mit den Dimensionen des Objectes zunehmen, worauf dieselbe wirkt.

§. 22.

Man kann sich hiebey ferner gedenken, daß der Druck, den die Kraft auf jeden Punct äussert, entweder bey allen durchaus gleich sey, oder daß sie nicht durchaus gleich, oder gar

auch

auch bey jedem Punct grösser oder kleiner sey. Man kann zum Unterschiede im ersten Fall die Kraft **gleich vertheilt**, im andern aber dieselbe **ungleich vertheilt** nennen. Es ist für sich klar, daß der erste Fall unendlich viel einfacher ist als der andere, und daß man dabey gewinnt, wenn man bey dem ersten anfängt, und sodann Mittel findet, den andern auf denselben zu reduciren.

§. 23.

Ehe wir aber dahin fortschreiten, müssen wir noch anmerken, daß wir diese verschiedene Dimensionen der Kräfte noch auf eine andere Art in Vergleichung bringen können. Es ist nemlich möglich, daß wir eben die Kraft, die zum Exempel auf eine ganze Linie vertheilt war, als auf einen einigen Punct gerichtet, ansehen können. Und da wird diejenige, so vorhin auf eine ganze Fläche vertheilt war, nunmehr auf eine Linie, und die, so auf einen körperlichen Raum vertheilt war, nun nur auf einen Flächenraum vertheilt. Dadurch geht aber offenbar an ihren Dimensionen nichts ab, ungeachtet die Dimensionen des Objectes, jede um eins, vermindert werden. Denn so lange z. E. die Kraft auf die ganze Linie vertheilt war, wirkte sie zwar auch auf jeden Punct, aber mit einer blos linearen Wirkung. Wird sie aber ganz auf einen Punct gerichtet, so ist die Wirkung auf denselben nun nicht mehr linear, sondern sie muß eben so, wie vorhin, durch einen Flächenraum vorgestellt werden, weil sie, vor wie nach, von zwoen Dimensionen ist. So sehr sie nun, als auf einen Punct gerichtet, angesehen wird, ist sie im Grunde betrachtet, dennoch als eine Kraft anzusehen, die auf eine ganze Linie wirkt, wenn sie nicht nach diesen relativen, sondern nach ihren absoluten Dimensionen betrachtet wird. Denn auch nur mit solchen Kräften läßt sie sich addiren und subtrahiren. Wohin aber eine solche bloß ideale Reduction dienen könne, wird sich aus folgenden Lehrsätzen sehen lassen.

§. 24.

Fig. IV. Es sey A B eine unbiegsame Linie, C deren Mitte. Auf die Linie drücke eine durchaus gleich vertheilte Kraft, und der Druck auf jeden Punct P werde durch die Linie Pp vorgestellt, so wird erstlich der Flächenraum des Rectangels AabB die ganze Kraft vorstellen. Sodann, sage ich, daß, wenn eine gleiche Kraft bey dem Punct C angebracht wird, welche aufwerts drücke, so werde die Linie unbewegt bleiben, oder es werde die vertheilte Kraft der auf den Punct C wirkenden das Gleichgewicht halten. Man nehme jede zween Puncten P, Q von C gleich entfernt an, so läßt sich vermög des §. 20. den beyden Kräften Pp, Qq in C eine Kraft

= Pp

$= Pp + Qq = 2Pp$ entgegen setzen, welche denselben das Gleichgewicht hält. Da nun dieses für jede Puncte P, Q statt hat, so wird die Linie ebenfalls im Gleichgewicht bleiben, wenn eine der ganzen Kraft A a b B gleiche Kraft in C angebracht wird. Es ist für sich klar, daß wenn man diese ganze Kraft ebenfalls durch eine Linie CD vorstellen will, diese Linie mit den Linien Aa, Pp, Qq, Bb nicht mehr einerley Einheit habe, sondern erstere von zwo Dimensionen, letztere aber von einer Dimension ist. Denn der Kraft A a b B läßt sich in C keine bloß lineare Kraft, dergleichen Aa, Pp &c. sind, entgegen setzen. Sie würden immer von ungleicher Dimension seyn.

§. 25.

Man kann auch, um sich dieses noch deutlicher zu machen, für jede Puncte P, C die Distanz $CM = CP = CQ$ machen, und dadurch jedem Punct M der Linie CD eine Kraft beylegen, welche $= Pp + Qq = 2Pp$ ist. Macht man daher durchaus $Mm = Mn = Pp$; so wird, wenn $CD = CA = CB$ gemacht worden, das Rectangel EFGH die ganze Kraft der Linie CD vorstellen, da die Kraft jedes Puncts $M = mn = Pp + Qq$ ist. Denn man sieht leicht, daß wenn die ganze Kraft AabB durch eine Linie CD vorgestellt wird, sodenn jedem Punct M eine lineare Kraft gegeben wird. Da nun Fig. V.

CD = CA = CB gemacht worden, so entspricht jeden Puncten P, Q ein Punct M, dessen Kraft = m M m denen beyden Kräften P p + Q q, sofern diese ihren gemeinsamen Druck in C äussern, (§. 20.) das Gleichgewicht hält. Daher hält auch die ganze Kraft EGHF der ganzen Kraft AabB, die ihren Druck in C vereinigt, das Gleichgewicht.

§. 26.

Fig. VI. Man setze nun eine rectangulare Fläche ABDE, deren Mittelpunct C ist. Auf dieselbe drücke eine durchaus gleich vertheilte Kraft, so läßt sich derselben in dem Mittelpunct C eine gleichgrosse Kraft von gleicher Dimension entgegen setzen, und beyde werden einander das Gleichgewicht halten. Man ziehe durch C jede beliebige gerade Linie FCG, so wird vermög der Natur der Rectangel FC = CG seyn. Demnach läßt sich die auf FG wirkende Kraft, als in C vereinigt, ansehen. (§. 24.) Da nun dieses für jede Linie FG statt hat, so wird auch die auf die ganze Fläche wirkende Kraft, als in C vereinigt, angesehen werden können. Demnach läßt sich derselben in C eine Kraft von gleicher Grösse und Dimension entgegen setzen, und so werden beyde im Gleichgewichte seyn. (§. 15.)

§. 27.

§. 27.

Es ist für sich klar, daß eben dieses bey jeden Flächen statt findet, die einen Mittelpunct, das will sagen, einen solchen Punct C haben, welcher jede durch dieselben bis an beyde Ende des Umkreises F, G gezogene Linie F C G in zween gleiche Theile theilt, dergleichen z. E. reguläre Vierecke, Sechsecke, Achtecke ꝛc. der Circul, die Ellipse ꝛc. sind.

§. 28.

Uebrigens versteht sich von selbst, daß solche Flächen, eben so wie vorhin die Linien als unbiegsam angesehen werden. Und eben so ist kaum nöthig zu erinnern, daß die Kraft als auf dieselben senkrecht drückend genommen worden, ungeachtet das bisher gesagte auch bey dem schiefen Drucke statt findet, so lange derselbe durchaus parallel, und folglich auf jede Puncte der Linien und Flächen gleich schief ist. Denn welcher Unterschied auch immer zwischen dem senkrechten und schiefen Drucke seyn mag, so kann man dessen ungeachtet annehmen, daß jede gleiche und gleich schief drückende Kraft, gleichen Druck äussere, und folglich in den vorhin angeführten Fällen, das Gleichgewicht dennoch bleibe. Indessen müssen wir doch sagen, daß dieses als einen Grundsatz nur für den Fall zugegeben werden kann, wo die gleich schiefe Richtung der Kraft auf beyden Sei-

Fig. VII. ten A C, C B des Mittelpuncts C nicht parallel, sondern nach den Linien a A, c C und b B, d C einander entgegen gerichtet sind. Denn in der That ist auch nur in diesem Fall auf beyden Seiten des Puncts C alles einerley. Der einige Fall, der sich nächst diesem noch ohne fernere Umstände für sich betrachten läßt, ist derjenige, wo der Neigungswinkel $cCA = o$ wird; das ist, wo die Kraft zwar auf jeden Punct der Linie A B, aber durchaus in der Direction der Linie selbst wirkt.

§. 29.

Hiebey ist erstlich für sich klar, daß die Kraft, vorwie nach, von zwoen Dimensionen bleibt. Sodann kann, um derselbe das Gleichgewicht zu halten, in jedem Punct der Linie eine Kraft von gleicher Grösse und Dimension, aber in entgegengesetzter Richtung angebracht werden, und das Gleichgewicht wird bleiben. Es versteht sich für sich, daß hier die Unbiegsamkeit der Linie zugleich den Begrif in sich schleußt, daß dieselbe, weder auseinander gedehnt, noch durch das Zusammendrücken verkürzt werden könne, daß sie folglich eine absolute Steifigkeit habe. Denn wird die das Gleichgewicht haltende Kraft in B angebracht, und die Linie liesse sich zusammendrücken, so würde ein Theil der Kraft darauf verwendet. Eben so, wenn die das Gleichgewicht haltende Kraft in jedem andern Punct P angebracht

wird,

wird, so würde A P zusammengedrückt, P B aber ausgedehnt, und in beyden Absichten gienge das Gleichgewicht verlohren. Diese Steifigkeit aber vorausgesetzt, so kann der Punct P auch ausser dem Theil der Linie seyn, auf welchen die auf jede Puncte derselben vertheilte Kraft wirkt. Man setze z. E. diese Kraft wirke auf jede Puncte der Linie A C, so läßt sich in jedem Punct P eine Kraft von gleicher Dimension und Grösse, aber in entgegengesetzter Richtung anbringen, und diese wird der auf A C wirkenden Kraft das Gleichgewicht halten.

§. 30.

Man gedenke sich nun eine solide Sphäre, und auf jeden Punct derselben wirke eine gleich vertheilte Kraft, in durchaus paralleler Richtung; so lassen sich aus jedem Punct der der Kraft entgegen gekehrten halben Oberfläche der Sphäre, Linien gedenken, die mit der Richtung der Kraft parallel laufen. Und die Kraft, sofern sie auf jede Puncte einer solchen Linie wirkt, läßt sich als auf einen einzeln Punct derselben wirkend gedenken. Man nehme für diesen Punct denjenigen an, wo die Linie von der Fläche durchschnitten wird, welche durch den Mittelpunct der Sphäre und senkrecht durch die Richtungslinien der Kraft geht. Wo nun dieser Punct hintrift, da liegt denselben ein anderer in gleicher Entfernung vom Mittelpunct gegenüber, in welchem eine gleich grosse Kraft vereinigt ist. Da sich nun statt dieser beyden Kräfte eine doppelt so grosse im Mittelpunct anbringen läßt, und eben dieses für jedes Paar correspondirender Puncte gilt, so folgt daraus, daß die ganze Kraft, so auf jede Puncte der Kugel wirkt, sich als ein Mittelpunct derselben vereinigt gedenken lasse. Einen ähnlichen Beweis findet man für jede Körper die einen Mittelpunct haben, der nemlich jede durch denselben beyderseits bis an den Umkreiß, oder die Oberfläche gezogene Linie in zween gleiche Theile theilt. Ich begnüge mich aber dieses nur überhaupt anzuzeigen, um dadurch anzugeben, wie weit sich das Vertheilen und Vereinigen der Kräfte ausdehnen läßt, und wie man dabey der verschiedenen Dimensionen Rechnung zu tragen hat.

IV. Der Hebel.

§. 31.

Fig. VIII. Es sey nun wiederum eine unbiegsame Linie AB. Auf dieselbe drücken auf beyden Seiten und in entgegengesetzter Richtung, gleiche und durchaus gleich vertheilte Kräfte, die wir, weil sie auf jeden Punct $= A\alpha = Aa$ sind, durch den Flächenraum der Rectangel $AabB$, $A\alpha\beta B$ vorstellen können: so ist erstlich für sich klar, daß sie einander das Gleichgewicht

gewicht halten, und die Linie A B unbewegt bleiben werde. Da sich die auf jeden Punct wirkende Kraft als für sich wirkend gedenken läßt, so können wir z. E. die gesamte herunter drückende Kraft A a b B durch Ziehung einer jeden beliebigen Linie E e als in zwo Kräfte A a e E und E e b B getheilt, oder aus zwo solchen Kräften bestehend ansehen. Man nehme nun zwischen A E den Mittelpunct H, und zwischen E B den Mittelpunct F, so läßt sich nach Anleitung des vorhergehenden Abschnittes gedenken, daß anstatt dieser beyden auf A E, E B vertheilten Kräfte, zwo denselben der Grösse und Dimension nach gleiche Kräfte auf die Puncte H, F wirken, und das Gleichgewicht eben so wie vorhin erhalten. Auf eben die Art wird sich die ganze aufwerts drückende Kraft A α 6 B als in den Mittelpunct C vereinigt gedenken lassen.

§. 32.

Nun ist die Frage, die auf die drey ungleich entfernte Puncte E, C, F drückende und ebenfalls ungleiche Kräfte mit den Entfernungen E C, C F zu vergleichen. Dieses wird desto leichter geschehen können, weil die drey Rectangel A a e E, E e b B, A α 6 B, deren Raum das Maaß dieser drey Kräfte ist, gleiche Höhe haben, und daher schlechthin in Verhältniß ihrer Länge sind. Nun ist

$$HF = HE + EF = \tfrac{1}{2}AE + \tfrac{1}{2}EB = \tfrac{1}{2}AB = AC$$

Demnach da HF und AC den Theil HC gemeinsam haben, so bleibt, wenn man diesen von beyden wegnimmt,

$$AH = CF$$

Eben so wenn man von HF und CB den beyden gemeinsamen Theil CF wegnimmt, bleibt

$$HC = FB.$$

Es sind aber HC und CF die Entfernungen der Puncte H, F von den Mittelpunct C; hingegen sind FB und AH die Hälften der auf F und H concentrirten Kräften, die wir Kürze halber F und H nennen wollen. Da demnach

$$\tfrac{1}{2}F = HC$$
$$\tfrac{1}{2}H = CF$$

ist; so ist

$$HC : CF = \tfrac{1}{2}F : \tfrac{1}{2}H = F : H$$

das will sagen: **die auf die Puncte H und F drückende Kräfte AaeE, EebB sind in umgekehrter Verhältniß der Entfernung dieser Puncte H, F vom Mittelpunct C.**

§. 33.

Hinwiederum, da die aufwerts drückende Kraft A$\alpha$$\beta$B durch die ganze Länge BA vorgestellt wird, und die Distanz beyder Puncte $FH = AC = CB = \tfrac{1}{2}BA$ ist; so wird, wenn wir die in C vereinigte Kraft A$\alpha$$\beta$B = C nennen,

$$\tfrac{1}{2}C = FH$$

seyn. **Demnach werden jedesmal drey**

Kräfte J H, G F, D C, die auf eine unbiegsame Linie A B einander entgegen drücken, im Gleichgewichte seyn, wenn

$$C:HF = H:CF = F:CH$$

ist, das will sagen: wenn jede Kraft zu der Distanz der beyden andern Kräfte einerley Verhältniß hat.

§. 34.

Da nun, wo auf einer geraden Linie drey Puncte angenommen werden, die beyden äusserslen nicht nur mehr von einander entfernt sind, als jeder derselben von dem Mittlern: sondern die gröste Entfernung die Summe der beyden kleinern ist; so ist klar, daß ebenfalls nicht nur die mittlere Kraft C jedesmal die gröste, sondern genau die Summe der beyden kleinern Kräfte H, F ist, die derselben entgegen wirken; und daß von diesen beyden kleinern Kräften jede in Verhältniß ihrer Grösse näher bey der grösten ist. Alles dieses folgt für sich aus der erst angeführten Proportionalität der Kräfte und ihrer Entfernungen. Denn da jede Kraft in Verhältniß der Distanz der beyden andern Kräfte ist; so müssen die beyden kleinern Kräfte am meisten voneinander entfernt, und daher die äussersten seyn, weil ihre Distanz in Verhältniß der grösten Kraft, und daher die gröste seyn solle. Demnach fällt die gröste Kraft immer zwischen die beyden kleinern,

nern, und wirket denselben entgegen, weil beyde erfordert werden, um ihr das Gleichgewicht zu halten. Eben so muß die kleinste Kraft am meisten entfernt seyn. Denn da sie in Verhältniß der Distanz der beyden andern Kräfte ist, so ist diese Distanz am kleinsten, demnach sind die beyden grössere Kräfte einander am nächsten. Endlich da die beyden kleinern Kräfte in umgekehrter Verhältniß ihrer Distanz von der grösten sind; so ist die Summe von beyden, in Verhältniß der Summe dieser beyden Distanzen, demnach in Verhältniß der Distanz der beyden kleinern oder äusserten Kräfte selbst. In eben dieser Verhältniß ist aber auch die gröste Kraft. Demnach ist diese der Summe der beyden kleinern gleich.

§. 35.

Wenn demnach zwo Kräfte auf zween Puncte einer unbiegsamen Linie drücken, und es solle ein Gleichgewicht erhalten werden, so muß man irgend noch eine dritte Kraft anbringen. Es ist demnach die Frage, sowol die Grösse dieser Kraft als den Punct, wo sie angebracht werden muß, zu bestimmen. Die Grösse der gesuchten Kraft bestimmt sich leicht. Denn sie ist die Summe der beyden fürgegebenen Kräfte, wenn diese auf gleicher Seite angebracht sind. Widrigenfalls ist sie die Differenz derselben. Im ersten Fall wirkt sie zwischen beyden und denselben entgegen. Im andern

andern Fall fällt sie auf die Seite der kleineren Kraft, um mit derselben der grösseren, welche immer in der Mitte ist, entgegen zu wirken. Da die gröste Kraft allemal die Distanz der beyden kleinern so theilt, daß jede derselben der grösten desto näher ist, je grösser sie ist; so wird dadurch auch die Distanz der gesuchten Kraft leicht gefunden. Denn im ersten Fall, wo der Punct C gesucht wird, hat man immer

$$C:HF = H:CF = F:HC.$$

Und so wird CF, oder auch HC gefunden. Im andern Fall, wo der Ort einer der äussersten Kräfte z. E. H gesucht wird, hat man

$$H:CF = F:CH$$

und so wird CH gefunden. Und eben so findet man CF durch

$$F:HC = H:CF$$

das will nun sagen: **Wie sich die Kraft deren Distanz von einer der gegebenen Kräfte gesucht wird, zu der gegebenen Distanz dieser Kräfte verhält; so verhält sich die andere der gegebenen Kräfte zu der gesuchten Distanz.** Diese wird sodann immer entweder von der Mitte auswerts, oder von einem der äussern Puncte gegen die Mitte getragen, weil sie allemal entweder CF, oder CH ist.

§. 36.

Da es bey Bestimmung der Lage eines Puncts willkührlich ist, wo man zu zählen anfängt,

fängt, so kann man auch jeden beliebigen Punct z. E. B annehmen, um die Lage eines der drey Puncte F, C, H zu bestimmen. Denn wenn man deren Entfernung von B, f, c, h nennt; so wird man

$$C:h-f=H:c-f=F:h-c$$

haben. Und dadurch kann nach Belieben f, oder c, oder h gefunden werden.

§. 37.

Es giebt aber diese Analogie noch einen andern Umstand an, der für sich betrachtet zu werden verdient. Denn aus

$$C:(h-f)=H:(c-f)$$

erhält man

$$Cc-Cf=Hh-Hf$$

und hieraus

$$Cc=Hh+f(C-H)$$

Nun ist

$$C-H=F$$

demnach, wenn dieser Werth gesetzt wird

$$Cc=Hh+Ff.$$

Hier hat man nun jede Kraft mit ihrer Entfernung von dem willkührlich angenommenen Punct B multiplicirt, und die Producte dergestallt verglichen, daß die beyden kleinern dem größten gleich sind. Dieser Umstand ist desto beträchtlicher, weil er in Absicht auf jeden Punct B statt hat, so oft die drey Kräfte C, H, F im Gleichgewicht sind.

§. 38.

§. 38.

Ferner wird vermittelst der Gleichung

$$Cc = Hh + Ff$$

die Distanz der grösten Kraft immer gefunden, wenn man

$$c = \frac{Hh + Ff}{C}$$

und daher

$$c = \frac{Hh + Ff}{H + F}$$

macht; das will sagen: Wenn man jeden der beyden kleinern Kräfte mit ihrer Entfernung von dem willkührlich angenommenen Punct B multiplicirt, und die Summe der Producte durch die Summe der beyden kleinern Kräfte dividirt; so wird, was heraus kömmt, die Entfernung der grösten Kraft von eben dem Punct B seyn.

§. 39.

Man sieht leicht, daß wenn der Punct B zwischen den beyden kleinern Kräften angenommen wird, sodann die eine der Entfernungen h, f negativ werde. Und eben so sieht man, daß eine der Kräfte F, H negativ wird, sobald sie nicht auf eben der Seite sind, sondern einander entgegen wirken. Denn so wird man z. E. wenn mit Beybehaltung des Puncts B die Distanz h zu suchen ist,

h =

$$R\gamma.(Aa+Bb+Cc)=R\epsilon(Aa+Bb)+RC.Cc$$

$$R\delta.(Aa+Bb+Cc+Dd)=R\gamma=(Aa+Bb+Cc)+RD.Dd$$

&c.

ist; so sieht man ohne Mühe, daß jede dieser Gleichungen in der nächstfolgenden kann gesetzt werden; und daß man daher der Ordnung nach

$$R\epsilon.(Aa+Bb)=Aa.AR+Bb.BR$$

$$R\gamma.(Aa+Bb+Cc)=Aa.AR+Bb.BR+Cc.CR$$

$$R\delta.(Aa+Bb+Cc+Dd)=Aa.AR+Bb.BR+Cc.CR+Dd.DR$$

&c.

erhält. Das will nun sagen: Um den Punct zu finden, wo die gesamten Kräfte ihre Wirkung vereinigen, und wo folglich denselben eine ihrer Summe gleiche Kraft entgegen gesetzt werden muß, um das Gleichgewicht zu erhalten, muß jede Kraft mit ihrer Entfernung von dem nach belieben angenommenen Punct R multiplicirt, und die Summe ihrer Producte durch die Summe der Kräfte dividiret werden. Was heraus kömmt, ist die Entfernung des gesuchten Puncts von eben dem Punct R.

§. 43.

§. 43.

Man kann hier ebenfalls die Anmerkung machen, daß wenn die fürgegebenen Kräfte nicht sämtlich auf gleicher Seite sind, und daher an sich schon einander entgegen wirken, die entgegen wirkenden negativ müssen genommen werden: Und daß eben dieses von den Entfernungen gelte, wenn der Punct R zwischen den Kräften angenommen wird. Dabey ist es nun möglich, daß wenn die Kräfte einander entgegen wirken, ihre Summe = o werde. In diesen Fällen wird erstlich die gesuchte Distanz unendlich, so oft die Summe der Producte nicht ebenfalls = o ist. Sodann da die Kraft, so man um das Gleichgewicht zu erhalten, anbringen wolte, der Summe der Kräfte gleich ist, so wird dieselbe in diesen Fällen = o. Demnach müßte man in einer unendlichen Entfernung von R eine Kraft = o anbringen, um das Gleichgewicht zu erhalten. Was dieses für einen Verstand habe, müssen wir auf eine andere Art erörtern. Die Summe der Kräfte ist nemlich = o, wenn die Summe der aufwerts drückenden Kräfte der Summe der unterwerts drückenden gleich ist. Nun ist aus dem Vorhergehenden klar, daß sowol die erstern als die letztern ihre Wirkung in irgend einem Punct vereinigen, und daß man statt derselben ihre Summe in diesem Punct anbringen kann. Sind nun die Kräfte so vertheilt, daß dieses in einem und eben dem Punct geschieht, so ist für sich klar, daß ein Gleichgewicht statt habe, (§. 13.) weil beyde Summen gleich sind. Geschieht es aber nicht in einem und eben dem Punct, so ist schlechthin kein Gleichgewicht möglich. Denn wo und auf welcher Seite man noch eine Kraft anbringen wolte, so würde die Summe von allen nicht mehr $= 0$ seyn, weil die Summe der gegebenen Kräfte an sich schon $= 0$ ist. Dafern aber eine Kraft $= 0$ als eine Kraft angesehen wird, die kleiner als jede gedenkbare Kraft ist, so muß sie in einer Entfernung angebracht werden, die grösser als jede gedenkbare Entfernung ist. Dieses giebt die Regel für den hier betrachteten Fall an, wenn sie die Kraft $= 0$, die Entfernung unendlich macht. Denn damit muß die Kraft $= 0$ als unendlich klein angesehen werden. Da aber eine solche Kraft nicht gegeben werden kann, so ist dieses eben so viel, als wenn man sagt, daß kein Gleichgewicht erhalten werden könne, dafern man nicht mehr als nur eine Kraft, und zwar in entgegengesetzter Richtung, anbringen will.

§. 44.

Wird aber in einem vorkommenden Fall nicht nur die Summe der Kräfte, sondern auch die Summe der Producte $= 0$, so wird die gesuchte Entfernung $= \frac{0}{0}$, das will sagen, jede beliebige. Und da die anzubringende Kraft eben-

ebenfalls $=0$ ist, so will dieses sagen, es werde ohne irgend eine Kraft anzubringen unter den fürgegebenen Kräften an sich schon ein Gleichgewicht seyn. In diesem Fall läßt sich z. E. für vier Kräfte die Formel

$$R\delta = \frac{Aa.AR + Bb.BR + Cc.CR + Dd.DR}{Aa + Bb + Cc + Dd}$$

weil sowol der Nenner als der Zähler $=0$ ist, allemale in zwo andere vertheilen, wo die negativen Werthe in der einen, die positiven in der andern sind. Man setze z. E. B und C negativ, so erhalten wir für die herunterdrückende Kräfte der Distanz

$$\frac{Aa.AR + Dd.DR}{Aa + Dd}$$

für die heraufdrückende aber die Distanz

$$\frac{Bb.BR + Cc.CR}{Bb + Cc}$$

und dadurch finden sich die Puncte, wo statt der Kräfte ihre Summen $Aa + Dd$ und $Bb + Cc$ angebracht werden können. Nun sind in diesen Brüchen die Zähler und so auch die Nenner, demnach die Distanzen selbst einander gleich. Daher treffen die beyden Puncte, wo die Summen der Kräfte angebracht werden müssen, in eins zusammen. Da nun diese Summen einander gleich sind, und einander entgegen wirken, so hat allerdings ein Gleichgewicht statt. Ist aber endlich nur die

Summe der Producte (§. 42.) $= 0$, so wird auch schlechthin nur die gesuchte Distanz $= 0$. Und dieses zeigt an, daß R selbst der Punct ist, wo die das Gleichgewicht haltende Kraft muß angebracht werden.

§. 45.

Man setze nun, eine Kraft sey auch eine
Fig. X. ganze Linie A B, aber ungleich vertheilt, so, daß z. E. wenn man den auf jeden Punct E wirkenden linearen Druck durch P M vorstellt, die Grösse dieses Druckes in jedem Punct P durch die Ordinate P M der krummen Linie D M E vorgestellt werde. Auf diese Art wird nun die ganze Kraft durch den Flächenraum A D E B, und der auf jede Absciſſe A P wirkende Theil derselben durch den Raum A D M P vorgestellt seyn. Sollte nun der Punct der Linie A P gefunden werden, wo diese Kraft ihre Wirkung vereinigt, und wo folglich eine andere von gleicher Grösse und Dimension angebracht werden kann, die derselben entgegen wirke und das Gleichgewicht halte; so kann man eben so, wie vorhin, einen beliebigen Punct R annehmen, und indem man jeden linearen Druck M P mit der Entfernung P R multiplicirt, das Product durch eine Ordinate P N vorstellen, und so wird der Raum A F G B durch den Raum A D E B getheilt, die verlangte Entfernung des Puncts geben, wo die der Kraft

ADEB

A D E B gleiche Kraft, zur Erhaltung des Gleichgewichtes, angebracht werden muß.

§. 46.

Wenn man einen Punct der unbiegsamen Linie unbeweglich setzt, so wird dadurch die Möglichkeit, wie bey nicht vorhandenen Gleichgewichte die Linie bewegt wird, auf eine einige gebracht. Denn so kann sie sich schlechthin nur um diesen Punct drehen. Eine unbiegsame Linie, die sich um einen unbeweglichen Punct drehen läßt, nennt man, im engsten Verstande, einen Hebel, und wenn es eine mathematische Linie ist, einen mathematischen Hebel. Denn wird er auf der einen Seite des unbeweglichen Puncts herunter gedrückt, so dreht er sich auf der andern Seite aufwerts, so oft eine Uebenwucht da, oder das Gleichgewicht nicht da ist. Ich habe bisher sowol von dem unbeweglichen Punct, als auch von dem dabey möglichen Herumdrehen, ganz abstrahirt; theils weil die Bedingungen des Gleichgewichtes nicht solten aus der Art hergeleitet werden, wie der Hebel bey unterbleibenden Gleichgewichte seine Lage und Stelle ändert, theils auch weil ich statt des unbeweglichen Puncts viel allgemeiner eine Kraft anbrachte, und eben daher die Bedingungen des Gleichgewichts rein und ohne mit eingemengte fremde Umstände erhielte. An diesem letztern Endzwecke würde der unbewegliche Punct eine gedoppelte Hinderniß gewesen seyn. Denn einmal da derselbe unbeweglich ist, so hält er den Druck jeder möglichen Kraft aus; und weil es ein Punct ist, so läßt sich dabey auch nicht sehen, nach welcher Direction derselbe den Druck der unbiegsamen Linie aufhält. Dieses muß aus andern Gründen bestimmt werden, das will sagen, man thut besser, wenn man statt des Puncts eine Kraft anbringt. Sodann schränkt ein solcher Punct durch seine Unbeweglichkeit, die Möglichkeit von der Bewegung der Linie auf eine einige ein. Wenn man daher auch erweist, daß sich die Linie nicht drehen werde, so ist dadurch noch nicht erwiesen, daß sie nicht auf eine derjenige Arten werde bewegt werden, die der unbewegliche Punct, blos weil er unbeweglich ist, verhindert oder unmöglich macht. Das will nun wiederum sagen, daß man besser thut, wenn die Linie für sich schlechthin frey ist, und jede Möglichkeiten, bewegt zu werden, behält. Werden sodann die Kräfte unter den Bedingungen des Gleichgewichtes daran angebracht, so fordert die wesentlichste dieser Bedingungen, daß sie nach wie vor eben so unbewegt bleibe, als wenn sie durchaus und schlechthin unbeweglich wäre. Und so ist jeder Punct daran so gut, als wäre er unbeweglich. So unbewegt muß auch jeder bleiben, welche Aenderung man auch immer, mit Beybehaltung des Gleichgewichtes, mit den Kräften vornimmt. So z. E.

wenn

wenn man setzt, das anfangs auf die Linie A B Fig. VIII. nur die beyderseits gleiche, gleichvertheilete und durchaus gleich entgegengesetzte Kräfte E e b B, E f 6 B drücken, so bleibt sie nicht nur dadurch eben so unbewegt, als wenn sie für sich ganz allein in Ruhe wäre; sondern sie wird eben so verbleiben, wenn zu diesen Kräften Neue hinzu kommen, die unter eben den Bedingungen auf den Theil A E drücken. Ob nun hiebey, so lange nemlich die Linie unbewegt bleibt, ein Punct derselben, z. E. C, unbeweglich sey oder nicht, das ist in sofern gleichviel. In jeden andern Absichten aber ist es nicht mehr gleichviel, weil, sobald man einen Punct C unbeweglich setzt, sogleich jede Kräfte anfangen eine Beziehung auf denselben zu haben. Denn ein solcher Punct muß immer statt der den übrigen Kräften das Gleichgewicht haltenden Kraft genommen werden, so sehr er auch zuweilen schlechthin gar keinen Druck aushält. So wäre auch ein solcher Punct in dem §. 31. immer ein Hindernis oder etwas ganz Ueberflüßiges gewesen, da wir die auf AE, EB, AB vertheilte Kräfte A a e E, E e b B, A α 6 B auf ihre Mittelpuncte H, F, C richteten. Denn man nehme C als den unbeweglichen Punct an, so würde die nunmehr auf C gerichtete Kraft A α 6 B, just auf den Punct der Linie gerichtet seyn, der wegen seiner Unbeweglichkeit diese Kraft, so wie jede mögliche Kraft aufhält, und daher ihre Wirkung auf die

Linie = o macht. Und so würde man nicht sehen, ob das Gleichgewicht wegen der Kräfte, oder wegen des unbewegten Punets C bleibt. Ist aber die Linie ganz frey, so fällt diese Verwirrung weg, und da ist es genug, daß jede lineare Kraft für sich wirkt, um die Puncte H, F, C, als die Mittelpuncte anzusehen, in welchen die Kräfte AaeE, EebB, AαεB ihre Wirkung vereinigen; diese Kräfte mögen jede allein, oder beysammen angebracht seyn.

§. 47.

Es ist aber noch ein anderer Grund, warum man bey dem Hebel einen unbeweglichen Punct angenommen. Denn ausser dem daß man in der practischen Mechanic immer den eigentlich sogenannten Hebel auf eine unbewegliche Stütze legt, oder ihn irgend ansperrt, und dabey eigentlich auch nur die Verhältniß zwischen der sogenannten Kraft und Last bestimmen will; so hält man sich selbst in der Theorie dabey auf, die unbewegte Linie, wenn die angebrachten Kräfte im Gleichgewichte sind, um einen selbst unendlich kleinen Winkel zu drehen, um den Weg, den die durch die Kräfte gedrückte Puncten durchlaufen, mit den Kräften zu vergleichen. Und da findet sichs, daß, wo nur zwo Kräfte sind, jede in umgekehrter Verhältniß des Weges ist. Denn man setze den unbeweglichen Punct in C, die beyden Kräfte in H, F. Da die Linie gerade bleibt, so ist der unend-

unendlich kleine Bogen den H durchläuft, zu demjenigen den F durchläuft, wie HC zu CF. Nun sind die Kräfte umgekehrt wie HC zu CF: demnach sind sie auch in umgekehrter Verhältniß durchlaufenen Bögen. Wenn die Kraft in H bleibt, so wird die Kraft F desto kleiner, je grösser CF wird. In eben dieser Verhältniß hat sie bey dem Herumdrehen einen desto grösseren Weg zu durchlaufen, und desto geschwinder läuft sie auch. Daher, wenn F als die zu bewegende Last angesehen wird, so gewinnt man, bey einerley Kraft, an der Zeit und dem Wege, was man an der Last vermindert; und hinwiederum wird an der Zeit und dem Wege verlohren, was man an der Last vermehrt. Da die Rollen, Räderwerke, Flaschenzüge 2c. ebenfalls auf die Theorie des Hebels reducirt werden, so dehnt sich dieser Satz sehr weit aus. Cartesius sahe denselben für so einleuchtend an, daß er ihn zum ersten Grundsatze seiner Static machte. Denen aber, die an Kraft, Zeit und Weg zugleich gewinnen, und dadurch das perpetuum mobile erzwingen wollen, ist dieser Satz lange nicht so sehr einleuchtend; und vermuthlicher entweder gar nicht, oder wenigstens nicht in seinem ganzen Umfange und Nachdrucke, bekannt. Es sind aber noch ganz andere Gründe, warum ich diesen Satz, und gewissermassen in Form einer kleinen Ausschweifung, hier näher betrachten werde. §. 48.

§. 48.

Ich habe in dem Vortrage desselben gesagt: 1°. Daß die Kräfte H, F im Gleichgewichte seyn. Und in so fern ist die Linie A B in unbewegter Ruhe. 2°. Daß sodann die Linie gedreht werde, und zwar 3°. daß dieses nur um einen unendlich kleinen Winkel geschehen. Nun wird dieser Winkel deswegen unendlich klein genommen, damit die Direction der Kräfte so gut als unverändert bleibe. Diese ändert sich zwar, um es wie im Vorbeygehen zu sagen, genau so viel als der Winkel, aber die Wirkung, welche sich nach dem Sinu incidentiae richtet, ändert sich unendlich mal weniger, oder so zu reden, nur um einen unendlich kleinen Theil des unendlich kleinen Winkels. Daher kann der Winkel unter jeden unendlich kleinen noch ein merklich grösser seyn, ohne daß die Wirkung verändert werde. Jedoch, wenn man alles ganz strenge nehmen will, so darf man nur das ganze System, ich will sagen, die Kräfte zugleich mit der Linie um den Punct C drehen, so viel man will. Die durchlaufene Bögen werden genau in umgekehrter Verhältniß des Weges bleiben. So hat es bey Räderwerkern, Rollen und Flaschenzügen statt, wo man Weg, Zeit und Kraft vergleicht, ohne eben beyde erstern unendlich klein zu setzen.

§. 49.

§. 49.

Dieses ist nun aber eigentlich nicht das, woran man sich aufhält, und so werde ich auch nicht dabey verweilen. Die Frage ist vielmehr, ob man bey dem Gleichgewichte, wo alles in Ruhe ist, den Begrif einer Bewegung zum Grunde legen können; woher das Umdrehen komme, und was die dabey sich einfindende Zeit, Geschwindigkeit und durchlaufener Raum mit den vorhin im Gleichgewichte gewesenen Kräften für eine Verbindung haben? Dieses muß mit einem gewissen Grade von Deutlichkeit und Bewußtseyn untersucht werden. Denn es soll daraus, und selbst auch für die Theorie der Bewegung, folgen, daß die Geschwindigkeit der Last, und daher auch der von derselben in einer bestimmten gleichen Zeit durchlaufene Weg oder Raum allemal in Verhältniß der Kraft, und umgekehrt, in Verhältniß der Last selbst sey. Es ist nur zu sehen, ob, oder wie dieses daraus folge?

§. 50.

Einmal folgt nun, wenn wir noch von erst bemeldten Fragen abstrahiren, so viel ganz richtig: Erstlich, wenn die Kraft in H verstärkt wird, so muß man, um das Gleichgewicht beyzubehalten, die Last F in eben der Verhältniß von C weiter wegrücken. Da sie nun bey dem Herumdrehen

in eben

in eben der Verhältniß geschwinder bewegt wird, und daher auch einen eben so viel grössern Weg durchläuft; so ist unstreitig, daß sich Weg und Geschwindigkeit der Last in gleicher Verhältniß mit der Kraft vergrössern. Und dieses war das erstere.

§. 51.

Das andere hat eben so wenig Anstand. Die Kraft in H bleibe unverändert; man vergrössere aber die Last, so muß diese, um das Gleichgewicht zu erhalten, in eben der Verhältniß näher gegen C gerückt werden. Daher bewegt sie sich bey dem Herumdrehen in eben der Verhältniß langsamer, und in eben der Verhältniß durchläuft sie in gleicher Zeit einen kleinern Weg. Also sind Weg und Geschwindigkeit in umgekehrter Verhältniß der Last. Und dieses war das andere.

§. 52.

Alles dieses hat demnach keinen Anstand. Allein die Frage, woher das Umdrehen komme, und welche Verbindung es mit den einander das Gleichgewicht haltenden Kräften habe, bleibt hiebey noch ganz unerörtert. Bis dieses aber nicht erörtert ist, kann man immer sagen, daß, unerachtet allerdings die Geschwindigkeit der Last sich gerade wie die Kraft, und umgekehrt, wie die Last selbst verhalte, dieselbe dennoch

noch weder von der Kraft noch von der Last herrühre, weil diese sich schlechthin nur im Gleichgewicht halten, und daher sich selbst überlassen, in Ruhe bleiben, und folglich weder von einer wirklichen Geschwindigkeit, noch auch nicht einmal von einer Sollicitation, daraus eine erwachsen könnte, die Rede vorkomme.

§. 53.

Da dieses an sich ganz offenbar ist, so sieht man auch wohl, daß um ein Herumdrehen zu verursachen, eine Ueberwucht da seyn müsse, und so verstärkt man die Kraft um etwas, oder auch nur um einen unendlich kleinen Theil. Dadurch dreht sich nun die Linie, aber die Geschwindigkeiten bleiben in Verhältniß der nicht verstärkten Kraft, ungeachtet sie nicht von derselben, sondern schlechthin nur von dem hinzugekommenen Theile herrühren. Um aber hiebey das relative mit dem absoluten nicht zu vermengen, so müssen wir die Anmerkung nicht beyseite setzen, daß in vorhin angeführtem Satze von der absoluten Geschwindigkeit gar nicht die Rede sey; sondern daß, wenn diese nach belieben angenommen worden, schlechthin nur erwiesen wird, daß die Last sich geschwinder oder langsamer bewege, je nachdem sie von C mehr oder weniger entfernt ist. Denn man weiß, daß wenn eine Linie sich um einen Punct dreht, allemal alle Geschwindigkeit dabey vorkommen. Und daher wächst die Geschwin

Geschwindigkeit der Last in gleicher Verhältniß mit der Entfernung, wie groß oder klein die absolute oder anguläre Geschwindigkeit auch immer seyn mag.

§. 54.

Indessen müssen wir doch sagen, daß, unerachtet die absolute Geschwindigkeit allein von der Ueberwucht, als ihrer wirkenden Ursache, herrührt, sie sich dennoch nach der Kraft und Last und deren Entfernung von C richte. Man setze z. E. H und F seyn Gewichte, welche folglich durch die Kraft der Schwere gedrückt und im Gleichgewichte erhalten werden; um dieses zu heben, werde die Kraft H um einen, wenn man so will, unendlich kleinen Theil x vermehrt; so hat man in aller Form ein pendulum compositum, welches unendlich langsame Schwürigkeit macht. Rechnet man nach, so findet sichs, daß die wiewol unendlich kleine Geschwindigkeit sich, umgekehrt, wie die Quadratwurzel von $(H.HC^2 + F.FC^2)$ und gerade wie die Quadratwurzel von $HC.x$ verhalte, und sich demnach sowol nach den Gewichten als auch nach ihrer Entfernung von C, und besonders auch nach der Quadratwurzel der Ueberwucht x richte. Ich entlehne diese, sonst hieher nicht gehörende Rechnung, aus der wenigstens auf Erfahrung gegründeten Theorie der Pendul, weil man sich öfters auf den mit Gewichten und einer kleinen Ueberwucht

beschwer-

beschwerten Hebel berufen hat, um die Kraft nach den einfachen geraden Verhältniß der Geschwindigkeit zu schätzen, welche durch dieselbe verursacht wird. Denn hier ist die Kraft x, die Geschwindigkeit $\sqrt{x}$.

§. 55.

Es giebt andere Fälle, wo, wenn auch Kraft und Last im Gleichgewichte sind, dennoch eine beträchtliche Ueberwucht erfordert wird, um die Maschine auch nur mit einer langsamen und gemeiniglich gleichförmigen Geschwindigkeit in Bewegung zu setzen und zu erhalten. Es sind nehmlich alle die, wo eine merkliche Friction oder auch der Widerstand einer flüßigen Materie zu überwältigen ist. Allein diese Hindernisse sind in Absicht auf die einander das Gleichgewicht haltende Kraft und Last, ganz fremde, ungeachtet sie sich zugleich mit beyden vergrössern, und daher auch eine stärckere Ueberwucht fordern, wenn Kraft und Last vermehrt werden. Da man fast immer die Wirkung des Anreibens und des Widerstandes der flüßigen Materie für geringe geachtet, so hat man in der Static und Berechnung der Maschinen der Ueberwucht wenig Rechnung getragen. In der That ist auch die Ueberwucht allein nicht zureichend, die Last zu bewegen, die Kraft selbst, welche nemlich die Last im Gleichgewichte zu halten vermag, muß unstreitig das ihrige auch dazu beytragen. Allein die Geschwindigkeit der Last, verhältnißweise genommen, richtet sich nur nach der Kraft. Und so kann man auch nicht sagen, daß die absolute Geschwindigkeit der Last, entweder der Ueberwucht, oder der Summe der Ueberwucht und der Kraft nothwendig und in allen Fällen proportional sey. Es läßt sich aber einigermassen begreiflich machen, worin das Blendwerk besteht, wenn man an Zeit und Kraft zugleich gewinnen will. Denn es scheint, als wenn dabey die Kraft und Zeit jede besonders gerechnet, und beyde in eine Summe gebracht werde. Es sey die Kraft k, die Zeit t, die Last oder die Wirkung w, so ist

$$w = kt$$

Da aber dieses keine Summe, sondern ein Product ist, so will man

$$w = k + t$$

zu einem maximo machen. Wenigstens scheint man es sich dunkel vorzustellen. Dagegen ist aber verschiedenes zu erinnern: denn einmal sind Zeit und Kraft heterogene Grössen, und so lassen sie sich nicht so schlechthin addiren. Man müßte vorerst Mittel finden, sie auf einerley Maaßstab zu bringen. Setzt man aber vermög der ersten Gleichung

$$t = w : k$$

so ist die zweyte

$$w = k + w : k$$

oder

oder

$$w = \frac{kk}{k-1} = k+1+\frac{1}{k-1}$$

Diese Gleichung liesse sich nun differentiiren, und das Differential

$$dw = dk + \frac{dk}{(k-1)^2} = 0$$

setzen, und so würde

$$k = 2$$

seyn. Wenn man nun aber auch verstünde, was dieses sagen will, so würde dennoch bey diesem Werthe von k, die Wirkung w nicht ein maximum, sondern ein minimum seyn. Dieses ist nun noch das schlimmste in der ganzen Sache: denn man hatte eigentlich ein maximum in der Wirkung verlangt. Man sieht also, daß sich mit der Gleichung

$$w = k + t$$

wenn sie auch einen Beistand hätte, nichts ausrichten läßt. Man setze auch, es sey k die Anzahl der Arbeiter und t die Tage, w aber stelle die Bezahlung, oder die Tagelöhne vor, so wird wiederum die Formel

$$w = kt$$

ganz richtig seyn. Und die andere Formel

$$w = k + t$$

könnte nun hier ein minimum geben. Allein sie läßt, als wenn die Arbeiter besonders, und die Tage besonders bezahlt würden. So geht es aber in der Welt nicht zu.

§. 56.

Ich werde nun noch diesen Abschnitt mit einer kleinen Anmerkung über die in den deutschen Anweisungen zur Hebekunst gebräuchliche Benennungen von zwoen Arten des Hebels machen. Wenn nemlich der unbewegliche Punct in C zwischen der Kraft H und der Last F ist; so nennt man dieses einen Hebel der ersten Art. Ist aber der unbewegliche Punct am Ende, so, daß Kraft und Last auf einer und eben der Seite desselben sind, so wird es ein Hebel der zweyten oder andern Art genennt, wie z. E. wenn der unbewegliche Punct in F, die Last in C, die Kraft in H ist. Ich kann nicht sagen, wer diese so gar nichts bedeutende oder vorstellende Benennungen im Deutschen eingeführt hat. Die Griechen verfuhren mit ihrem homodromus und heterodromus viel vernünftiger. Denn diese Wörter geben an sich schon an, ob Kraft und Last auf einer oder auf beyden Seiten des Unbeweglichen oder Ruhepuncts ist. Es ist unstreitig, daß es im Deutschen die Wörter einseitig und doppelseitig, oder auch einärmigt und doppelärmigt eben so gut angeben würden, und daß es nur darauf ankömmt, sie in den Anfangsgründen zur Static statt der vorangeführten und den lernenden unbedeutenden und anstößigen Benennungen zu gebrauchen.

V. Der Druck der Kräfte auf ebene Flächen.

§. 57.

Es seyn in drey Puncten einer ebenen Fläche A, B, C drey Kräfte a, b, c angebracht, welche senkrecht auf die Fläche drücken, und es solle denselben eine Kraft entgegen wirken, und das Gleichgewicht halten; so ist zu bestimmen, wo diese vierte Kraft angebracht werden, und wie groß sie seyn müsse? Man nehme erstlich von diesen Kräften zwo, z. E. a, b; so ist klar, daß sich auf der Linie AB ein Punct Q finden läßt, wo statt derselben ihre Summe angebracht werden kann (§. 40.) und man findet (§. 33.) Fig. IX.

$$(a+b):AB = a:BQ = b:AQ$$

Setzt man demnach die Kräfte $a+b$ in Q, so wird sich auf der Linie QC ebenfalls ein Punct P finden, wo die in Q und C angebrachten Kräfte $a+b+c$ ihre Wirkung vereinigen. (§. 40.) Und man findet ebenfalls (§. 33.)

$$(a+b+c):QC = (a+b):PC:c:QP$$

Da demnach die Fläche gleich gedrückt wird, wenn die drey Kräfte $a+b+c$ in P angebracht werden; so wird das Gleichgewicht erhalten, wenn man denselben in P eine ihrer Summe $a+b+c$ gleiche Kraft p entgegen setzt; (§. 13.) und so ist diese Kraft und der Punct, wo sie angebracht werden muß, bestimmt.

stimmt. Diese Aufgabe läßt sich folgendermassen umkehren:

§. 58.

Wenn auf einen Punct einer Fläche P eine Kraft p senkrecht drückt, und es sollen derselben in drey beliebigen Puncten A, B, C drey Kräfte entgegen wirken, und das Gleichgewicht halten; so ist zu bestimmen, wie groß jede der drey Kräfte seyn müsse? Man nenne die drey Kräfte a, b, c; so ist aus dem vorhergehenden §. klar, daß erstlich

$$a + b + c = p$$

seyn müsse. Sodann ziehe man aus einem der drey Puncte A, B, C, z. E. aus C eine gerade Linie durch P in Q, und so muß (§. 33.)

$$(a + b + c) : QC = c : QP$$

seyn. Dadurch findet man, weil $a + b + c = p$ ist,

$$c = p . QP : QC$$

ferner muß (§. 33.)

$$(a + b) : AB = a : BQ = b : AQ$$

seyn. Da nun $a + b = p - c$ ist, so findet man hiedurch

$$a = (p - c) . BQ : AB.$$

$$b = (p - c) . AQ : AB.$$

oder wenn man den Werth von c setzt

$$a = \frac{p . (QC - QP) . BQ}{QC . AB}$$

$$p = \frac{p . (QC - QP) . AQ}{QC . AB}$$

und

und so sind die drey Kräfte a, b, c gefunden. In der practischen Static sind A, B, C sehr häufig die drey Puncte, auf welchen ein dreyfüßiges Gestelle steht, welches eine Last trägt. Man findet demnach hiedurch, welchen Theil der Last jeder Fuß trägt. Ich habe übrigens beyde Auflösungen so angegeben, daß man daraus sehen kann, was zu thun ist, wenn auf mehrere Puncte einer Fläche Kräfte drücken. Man wird damit immer fortkommen, wenn die Fläche zwar unbiegsam aber weder in einem Punct, noch in einer Linie unbeweglich ist. Hingegen in practischen Fällen, wo man unbewegliche Grundflächen vor sich hat, da ist es z. E. möglich, daß bey einem vierfüßigen Gestelle, der eine Fuß wenig oder nichts trägt, ungeachtet derselbe der Rechnung nach würde zu tragen haben. Dieses geschieht, so wenig auch einer der Füsse zu lang oder zu kurz ist.

§. 59.

Da der Punct P nothwendig auf der Linie CQ liegen, und

$$(a+b+c) : QC = a : QP$$

seyn muß, (§. 57) so ist klar, daß es der einige ist, der der Bedingung der Aufgabe (§. cit.) Gnügen thut. Ich merke dieses, da es sonst an sich klar ist, und aus der Auflösung der Aufgabe erhellet, hier nur deswegen an, weil die Lage dieses Punct auf dreyerley Arten gefunden werden kann, weil man die völlige Wahl hat, die Linie

C Q aus C, oder aus A, oder aus B auf die gegenüberstehende Seite zu ziehen, wenn man eben die Bedingung beobachtet, unter welcher sie aus C in den Punct Q gezogen worden.

§. 60.

Fig. XII. Man setze nun in beliebigen Puncten A, B, C, D &c. einer ebenen unbiegsamen Fläche seyn Kräfte angebracht, die sämtlich senkrecht auf dieselbe drücken; so lassen sich nach Anleitung der Aufgabe (§. 57.) der Ordnung nach die Puncte P, Q, R &c. finden, wo die zwo, drey, vier ꝛc. ersten Kräfte ihren Druck vereinigen. Man ziehe durch A zwo beliebige Linien AK, AG, und aus den Puncten B, C, D &c. P, Q, R &c. parallele Linien Bb, Cc, Dd &c. Pp, Qq, Rr &c. ingleichem Bβ, Cγ, Dδ &c. Pl, Qm, Rn &c. welche die gezogenen Linien AG, AK durchschneiden. Nun sage ich: wenn die in A, B, C, D &c. angebrachten Kräfte, in A, b, c, d angebracht wären, so würden p, q, r &c. die Puncte seyn, wo die zwo, drey, vier ꝛc. ersten ihre Wirkung vereinigen; und daß eben so l, m, n &c. die Vereinigunspuncte seyn würden, wenn die Kräfte in A, β, γ, δ &c. angebracht wären. Denn wegen der parallelen Linien hat man

$$AB:AP = Ab:Ap = A\beta:Al$$
$$PC:PQ = pc:pq = l\gamma:lm$$
$$QD:QR = qd:qr = m\delta:mn$$
&c.

Da

Da nun (§. 57.) wenn a, b, c, d ꝛc. die Kräfte vorstellen

$AB:AP=(a+b):b$
$PC:PQ=(a+b+c):c$
$QD:QR=(a+b+c+d):d$
&c.

ist; so ist klar, daß auch

$Ab:Ap=A\varepsilon:Al=(a+b):b$
$pc:pq=l\gamma:lm=(a+b+c):c$
$qd:qr=m\delta:mn=(a+b+c+d):d$
&c.

ist, und folglich die Puncte p, q, r &c. l, m, n &c. diejenigen sind, wo die in A, b, c, d &c. A, ε, γ, δ &c. angebrachten Kräfte ihre Wirkung vereinigen, wenn der Ordnung nach davon die zwo, drey, vier ꝛc. ersten zusammen genommen werden.

§. 61.

Wenn man demnach anstatt die Puncte P, Q, R &c. unmittelbar durch die Puncte A, B, C, D &c. zu suchen, vorerst die Puncte p, q, r &c. l, m, n &c. sucht, so kann aus diesen, welcher von jenen man will, gefunden werden; weil man z. E. um R zu finden, nur die Ordinaten nR, rR ziehen darf. (§. 42.)

§. 62.

Man setze nun den Fall, wo die Kräfte nicht in den Puncten A, B, C, D &c. angebracht, sondern auf den Linien AB, BC, CD &c.

gleichförmig oder ungleichförmig vertheilet sind, und, der Continuität nach, auf jeden Punct dieser Linien drücken; so lassen sie sich auf eine ähnliche Art auf Ab, bc, cd &c. Aβ, βγ, γδ &c. vertheilt gedenken. Da sie aber dabey nicht in gleicher Verhältniß dichter werden, so hat man allerdings dessen Rechnung zu tragen, in dem man, um die Dichtigkeit gleichförmig zu erhalten, die Kräfte in eben der Verhältniß stärker nimmt, in welcher man sie dichter nehmen müßte. Man setzt z. E. die auf CD vertheilten Kräfte müssen auf γδ gebracht werden, so wird jede lineare Kraft, die nemlich auf einen Punct der Linie CD drückt, mit CD multiplicirt, und durch γδ dividirt, oder, welches einerley ist, mit der Cosecante des Winkels CDδ multiplicirt. Eben so multiplicirt man sie mit der Cosecante des Winkels CDd, wenn die auf CD vertheilten Kräfte auf cd solten gebracht werden. Ist diese Reduction durchaus vorgenommen, so kömmt die Auflösung der Frage nunmehr auf die oben (§. 45.) vorgetragene Aufgabe an, weil, wenn man die Vereinigungspuncte der auf Aδ, Ad angebrachten Kräfte gefunden, sich der Vereinigungspunct für die auf ABCD angebrachten Kräfte ohne Mühe finden läßt. Aus allen diesem sieht man nun, was zu thun ist, wenn ABCD eine krumme Linie ist, und die Kräfte auf derselben, so viel man will, ungleich vertheilt sind. Denn da wird die auf jeden Punct drückende Kraft mit der Cosecante des Winkels multiplicirt, den die krumme Linie und deren Tangente daselbst mit der Ordinate macht. Man setze jede Abscisse A d = x, ihre Ordinate d D = y werde rechtwinklicht genommen. Die lineare auf den Punct D drückende Kraft sey = K; den Bogen AD nenne man = v, so wird die Kraft, welche auf den Punct d anzubringen ist = K. d v : d x, die so auf den Punct δ anzubringen ist = K d v : d y seyn. Ist nun z. E. R der Vereinigungspunct aller auf den Bogen A D wirkenden Kräften, so findet sich nach Anleitung des §. 45 die Distanz

$$An = \int Ky\,dv : \int K\,dv$$

und

$$Ar = \int Kx\,dv : \int K\,dv$$

so, daß also die Bestimmung des Puncts R von drey Integrationen abhängt. Liesse sich $\int K\,dv$ nicht integriren, sondern nur die beyden andern Ausdrücke, so würde man auch nur die Lage der Linie A R bestimmen können, weil

$$\text{tang. } RAr = \frac{Rr}{Ar} = \frac{An}{Ar} = \int Ky\,dv : \int Kx\,dv$$

ist.

§. 63.

Wenn eine Kraft auf eine ganze Fläche ihren Druck senkrecht äussert, z. E. auf den Raum der krummen Linie C A B, und dabey durchaus ungleich vertheilt ist; so kann man nach einer beliebigen Richtung A E Parallellinien P M ziehen, und es werden sich die auf jede Fig. XIII.

dieser

dieser Linien drückenden Kräfte, als in einen Punct derselben N vereinigt gedenken lassen, welcher nach Anleitung des §. 45. gefunden wird. Dadurch wird der Druck, der auf die ganze Fläche wirkenden Kraft, auf den Druck einer Kraft reducirt, welche auf die krumme Linie AND vertheilt, und von gleicher Grösse und Dimension ist. Nur hat man zu merken, daß hier auch der ungleichen Dichtigkeit Rechnung getragen werden muß, weil z. E. die auf das kleine Trapezium pmMP drückende Kraft, wenn dasselbe gleiche Breite Nq behält, auf Nn desto weniger dichte vereinigt wird, je schiefer dieses Element des Bogens Nn gegen NP geneigt ist. Man muß daher, wenn man die auf AND vereinigte Kräfte auf einen Punct R bringen will, in der vorhin (§. 62.) angegebenen Rechnung nicht Nn, sondern nur Nq gebrauchen. Man setze $AQ = x$, $QN = y$, die in dem Punct N vereinigte drückende Kraft $= K$; so wird man dahero nun

$$SR = \int Kydy : \int Kdy$$

erhalten. Da nun diese Formel schlechthin nur von der Ordinate y, das will sagen, von der Distanz der Parallele MP von AE abhängt; so hat man auch nicht nöthig, den Ort des Puncts N wirklich zu suchen, weil es genug ist, die ganze auf jede Parallele MP drückende Kraft K, durch den Abstand dieser Parallele, ausgedrückt zu wissen, um die Distanz SR vermit-

vermittelst der Formel

$$SR = \int Kydy : \int Kdy$$

zu bestimmen. Will man nun mit Beybehaltung eben der Parallelen die Abscisse AS finden, so wird man, weil die auf Nn vereinigte Kraft nicht Kdv, sondern nur Kdy ist, nach Anleitung des §. 62.

$$AS = \int Kxdy : \int Kdy$$

erhalten. Und in dieser Formel kömmt nun x und y vor, weil dabey ganz andere Umstände sind. Denn wenn man für AS eine der ersten ähnliche Formel haben will, so muß man Parallelen annehmen, welche auf AE senkrecht sind, und die diesen neuen Parallelen in Puncte auf derselben vereinigen, und so wird man, wenn die auf die Paralle QN wirkende Kraft $= L$ ist, für eben den Raum PAM

$$AS = \int Lxdx : \int Ldx$$

erhalten. Man sieht leicht, daß diese Formel mühsamer gebraucht wird, weil sie eine nochmalige und ganz verschiedene Berechnung der Kräfte voraussetzt.

§. 64.

Alles wird hiebey viel einfacher, wenn die Fläche ein geradlinichtes Vieleck, und die auf dasselbe drückende Kraft durchaus gleich vertheilt ist. Denn da läßt sich die Fläche in geradelinichte Triangel vertheilen, und der Vereinigungspunct für jeden Triangel leicht gefunden.

Fig. XIV. den. Es sey A C B ein solcher Triangel, so vereinigt sich die auf A B drückende Kraft in der Mitte P (§. 24.). Und aus gleichem Grunde finden sich auf der Linie C P die Vereinigungspuncten der auf jede mit A B gleichlaufenden Linien wirkenden Kräfte, weil C P alle diese Linien halbirt. Demnach muß auch der Vereinigungspunct der ganzen auf A C B drückenden Kraft auf der Linie C P seyn. Da nun eben dieses von der Linie A Q gilt, welche aus A in der Mitte von C B gezogen wird, so ist nothwendig der Durchschnittspunct R derjenige, in welchem die ganze auf den Triangel A B C wirkende Kraft ihre Wirkung vereinigt, weil sonst kein Punct bey den Linien A Q, C P gemeinsam ist, und weil es der Vereinigungspuncte nicht mehrere giebt. (§. 59.)

VI. Der Druck der Kräfte auf körperliche Räume.

§. 65.

Wenn eine Kraft auf jede Puncte eines soliden Raumes vertheilt ist, und auf jede nach einer parallelen Richtung drückt; so läßt sich dabey, in gewisser Absicht betrachtet, nicht blos ein Punct, sondern eine ganze Linie finden, so, daß wenn eine Kraft, die der fürgegebenen an Grösse und Dimension gleich ist, in entgegengesetzter Richtung bey einem beliebigen

Punct

Punct dieser Linie angebracht wird, ein Gleichgewicht erhalten werde. Ich sage, in gewisser Absicht betrachtet. Denn es wird sich zeigen lassen, daß es auf dieser Linie einen Punct giebt, welcher vorzüglicher, als jeder andere, den Namen des Vereinigungspuncts verdient.

§. 66.

Wir wollen, um diese Betrachtungen deutlicher zu machen, die Richtung der Kraft vertical nennen, und uns anfangs nur eine durch den Körper gehende verticale Linie vorstellen, welche es auch immer sey. Da die Kraft auf jede Puncte des Körpers wirkt, so wirkt sie auch auf jede Puncte dieser Linie, und zwar, weil sie vertical ist, nach der Richtung der Linie selbst. Da wir dieser Linie, so wie dem Körper selbst eine absolute Steifigkeit (§. 29.) geben, so läßt sich der ganzen auf jede Puncte derselben wirkenden Kraft eine Kraft von gleicher Grösse und Dimension, und in welchem Punct der Linie man will, entgegen setzen, so, daß diese derselben das Gleichgewicht halten wird. (§. cit.) Wir wollen uns nun der freyen Wahl dieses Puncts dergestallt bedienen, daß wir uns unter dem Körper eine horizontale, und folglich auf die Direction der Kraft senkrechte Fläche gedenken, und bemeldten Punct da setzen, wo die Linie die Fläche durchschneidet. Und so werden wir für jede durch den Körper gehende Verticallinie auf dieser Fläche einen

Durchschnittspunct haben, wo sich die entgegen wirkende und das Gleichgewicht haltende Kraft anbringen läßt. Diese entgegen wirkende Kräfte, werden demnach auf dem ganzen Raum der Fläche, so weit nemlich aus dem Körper verticale Linien darauf fallen, und zwar so ungleich man es auch setzen will, vertheilt. Es erhellet aber aus dem vorhergehenden (§. 63.) daß, so sehr sie auch ungleich vertheilt seyn mögen, sich mit Beybehaltung des Gleichgewichtes ihrer Summe in einem Punct vereinigt und in gleicher Direction anbringen lassen. Diesen Punct gedenke man sich in der durch denselben gezogenen ebenfalls absolute steifen Verticallinie, so ist wiederum klar, daß man diese Summe in jedem beliebigen Punct dieser Linie wird anbringen, und immer das Gleichgewicht erhalten können. Dieses ist demnach die Linie, von welcher im vorhergehenden §. die Rede war. Und man sieht zugleich, daß es bey jeder Stellung oder Lage jedes Körpers eine solche giebt, weil der Beweis beydes willkührlich seyn läßt. Da eine solche Linie die Directionslinie der vereinigten Kraft ist, so werden wir sie,/ Kürze halber, so nennen. Es ist dabey nun allerdings merkwürdig, daß unerachtet es deren bey jedem Körper unzählige giebt, sie sich dennoch sämtlich, jedoch unter gewissen Bedingungen, in einem Punct durchschneiden. Und dieses ist nun der Punct, von dem vorhin §. 65.

eben-

ebenfalls die Rede war. Das Vorzügliche davon besteht darin, daß er allen diesen Directionslinien gemeinsam ist, und daß folglich jede sehr leicht gezogen werden kann, wenn man einmal diesen Punct weiß. So ist auch klar, daß wenn dieser Punct unbeweglich gesetzt wird, so, daß sich der Körper daran auf alle Arten drehen läßt, derselbe, wie man ihn auch immer gedreht hat, durch die Wirkung der Kraft nicht gedreht wird, sondern schlechthin in Ruh, das will sagen, auf allen Seiten im Gleichgewichte bleibt. Wir haben aber theils zu zeigen, daß es bey jedem Körper einen solchen Punct giebt, und welches die Bedingungen sind, die wir annehmen müssen, um diese Aussage nicht allgemeiner anzugeben, als sie in der That statt finden können. Um demnach alles dieses auf die deutlichste Art vorzutragen, werden wir bey dem Einfachsten anfangen, und so fortfahren, daß wir nur wenige Schritte bis zum Ziele werden zu thun haben.

§. 67.

Es seyn zween Puncte A, B einer unbiegsamen Linie A B; so ist aus dem obigen klar, daß wenn auf dieselben zwo Kräften a, b senkrecht drücken, ein Punct C gefunden werden kann, wo statt der beyden Kräfte ihre Summe a + b in einer gleichfalls auf die Linie senkrechten Richtung angebracht werden kann; und daß Fig. XV.

$$(a+b):AB=a:CB=b:AC$$

ist. (§. 33.) Man setze nun, die Kräfte a, b drücken auf eben die Puncte A, B in einer zwar parallelen aber gegen die Linie schiefen Richtung DA, EB; so nehmen wir hiebey die Bedingung an, daß jeder dieser Puncte, für sich betrachtet, eben so gedrückt werde, als wenn er für sich ganz allein wäre, oder, welches einerley ist, daß wenn keine Kraft entgegen wirkt, die Linie AB sich in einer immer parallelen Richtung herunter bewegen, und die Puncte A, B zu gleicher Zeit auf $A\alpha$, $B\epsilon$ eben so weit kommen, als wenn jeder für sich herunter gedrückt würde. Man gedencke sich in A, B zwo ebenfalls unbiegsame Linien in der Direction $DA\alpha$, $EB\epsilon$ befestigt, so, daß sie die Linie $\alpha\,\epsilon$ unter rechten Winkeln berühren, und gegen dieselbe den von beyden auf A, B wirkenden Kräften empfangenen Druck äussern. Da demnach dieser Druck a, b ist; so läßt sich derselbe in einem Punct γ als vereinigt gedenken, und es wird

$$(a+b):\alpha\epsilon=a:\gamma\epsilon=b:\alpha\gamma$$

demnach

$$\alpha\gamma:\gamma\epsilon=AC:CB$$

demnach die Linie $C\gamma$ mit $A\alpha$, $B\epsilon$ parallel seyn, oder, welches einerley ist, die durch γ senkrecht gezogene Linie, wird durch den Punct C gehen. Wird daher eine Kraft $= a+b$ in entgegengesetzter Richtung auf einen Punct der Linie γ C angebracht, so bleibt das System im Gleichgewichte.

§. 68.

Hiebey ist nun für sich klar, daß sich in einem Körper, auf dessen jede Puncte parallele Kräfte drücken, unzählige solcher schiefen Linien, dergleichen A B ist, gedenken lassen, und daß wir daher, der schiefen Lage ungeachtet, den Druck auf die Puncte A, B eben so absolut setzen konnten, wie derselbe in Absicht auf jede in dem Körper befindliche Puncte genommen wird. Da nun ferner in dem Beweise, daß die durch γ senkrecht gezogene Linie durch den Punct C geht, der Neigungswinkel D C A gar nicht vorkömmt, folglich dieser Satz bey jeder schiefen Lage der Linie A B statt hat; so hat der Punct C vor jeden Puncten der Linie C γ das voraus, daß wenn die Kraft $a + b$ in C angebracht wird, sie immer in der Linie Cγ ist, und daher der Punct C bey jeder schiefen Lage als der Vereinigungspunct der Kraft angesehen werden kann, jedoch immer auch mit der Voraussetzung, daß die Kraft $a + b$ den Punct C, ungeachtet derselbe in der Linie AB genommen wird, eben so absolute herauf drücke, als wenn derselbe ganz allein wäre.

§. 69.

Man setze nun drey unbiegsame Linien AB, BC, CA in Form eines Triangels an einander bevestigt. Auf die 3 Endpuncten drücken Fig. XI.

die Kräfte a, b, c in beliebiger jedoch parallelen Richtung; so erhellet aus erstgesagtem, daß statt der Kräfte a, b ihre Summe a + b nach eben der Richtung, mit einerley Erfolg, in dem Vereinigungspunct Q könne angebracht werden, so, daß

$$(a+b):AB = a:QB = b:QA$$

ist. Diese Aenderung vorgenommen, so erhellet auf eben die Art, daß statt der in Q und C angebrachten Kräfte a + b, c in P ihre Summe a + b + c in eben der Richtung, mit eben dem Erfolge angebracht werden könne, so, daß

$$(a+b+c):QC = (a+b):PC = c:QP$$

ist. Demnach, welche Richtung die Kräfte, so jedoch parallel auf die Puncte A, B, C wirken, auch immer haben, so wird das System in Ruhe bleiben, wenn der Punct P unbeweglich, oder die Summe der Kräfte in entgegengesetzter Richtung auf denselben angebracht ist.

§. 70.

Man sieht nun hieraus ohne Mühe, daß was wir in vorhergehendem Abschnitte von dem Vereinigungspunct, der auf ebene unbiegsame Flächen senkrecht wirkenden Kräfte, erwiesen haben, auch von jeder schiefen jedoch parallelen Richtung gelte; immer aber mit der Voraussetzung, daß jeder Punct der Fläche eben so gedrückt werde, als wenn derselbe für sich allein wäre. (§. 67. 68.) Gedenkt man sich dem-

nach

nach in einem Körper unzählige parallele ebene Flächen, so hat jede derselben ihren Vereinigungspunct, auf welchen die auf jede Puncte derselben wirkenden Kräfte concentrirt angebracht werden können. Diese Vereinigungspuncte liegen sämtlich in einer mehrentheils krummen Linie, und so lassen sich die auf dieser Linie von den Flächen concentrirte Kräfte in einen einigen Punct concentriren, welcher, wenn er unbeweglich ist, bey jeder jedoch parallelen Richtung der Kräfte, den Körper in Ruhe und auf jeden Seiten im Gleichgewicht erhält. Uebrigens ist klar, daß hiebey vorausgesetzt wird, daß wenn die auf jeden Punct des Körpers wirkende Kraft, ungleich vertheilt ist, die auf jeden Punct wirkende bey jeder geänderten Richtung eben die bleibe, oder, wenn sie grösser oder kleiner wird, bey jeden Puncten, auf eine proportionale Art, grösser oder kleiner werde. Und dieses ist die andere Bedingung, die wir hier, wo sie deutlicher konnte vorgetragen werden, noch haben beyfügen sollen.

§. 71.

Die Bestimmung des Vereinigungspuncts der Kräfte, so auf jede Puncten eines Körpers in paralleler Richtung, und überhaupt unter den bereits vorgetragenen Bedingungen wirken, kommt auf die Bestimmung zwoer Directionslinien der vereinigten Kraft (§. 66.) an, wozu wir die Methode im vorhergehenden

(§. cit.) angegeben haben. Die Berechnung kann in vielen Fällen ungemein weitläuftig werden; so wie sie sich hingegen sehr abkürzt, wenn der Körper mit lauter ebenen Flächen umgränzt und die Kraft durchaus gleich vertheilt ist. Denn da läßt er sich in trianguläre Pyramiden theilen, und für jede wird der Vereinigungspunct der auf jede Puncte derselben wirkenden Kraft leicht gefunden. Denn man sucht denselben für zwo ihrer Flächen oder Seiten, und zieht aus denselben in die gegenüberstehende Ecke gerade Linien; und so wird der Durchschnittspunct dieser Linien der gesuchte Vereinigungspunct der Pyramide, oder der auf dieselbe gleich vertheilten Kraft seyn. Der Beweis hievon ist demjenigen, den wir (§. 64.) für den geradelinichten Triangel gegeben haben, völlig ähnlich.

§. 72.

Da die auf den ganzen Körper vertheilte Kraft ihre Wirkung in einem Punct vereinigt, (§. 70.) so läßt sich der ganze Körper gleichsam als in diesen Punct concentrirt gedenken, auf welchen die ganze Summe der Kraft wirkt. Zu diesem Punct kann noch einer oder mehrere andere kommen, nemlich, wenn z. E. der Körper irgend einen unbeweglichen Punct hat, oder auch wenn derselbe in einem oder mehrern Puncten mit andern Körpern zusammen hängt, und ein System ausmacht, dessen Theile untereinader bewegt werden können. So z. E. kann

kann im ersten Fall A einen Körper, B den Fig. XV.
unbeweglichen Punct vorstellen, und da wird
kein Ruhestand seyn, dafern nicht das System
A B in der Directionslinie der Kraft G / ist.
Denn die auf A wirkende Kraft entfernt den
Körper von sich, oder treibt ihn fort, so weit
es die Einrichtung des Systems zuläßt. Die-
ses giebt immer ein maximum. Im andern
Fall sind z. E. B, C Körper, A, D unbeweg- Fig. XI.
liche Puncte, AB, BC, CD Linien, die sich
um die Puncte A, B, C, D drehen lassen. Die
Körper B, C haben auf der Linie B C ihren
Vereinigungspunct. Und wirkt die Kraft
nach der Direction A K, so äussert sie ihre
Wirkung auf diesen Punct durch Forttreiben,
bis derselbe von der Linie A G so weit entfernt
ist, als es der Mechanismus des Systems zu-
läßt. Und dieses giebt wiederum ein maximum.

§. 73.

Wird die Figur eines Körpers mit dem Be-
dinge geändert, daß er von einerley Grösse
bleibt, und die auf jeden Punct wirkende Kraft,
nach wie vor, auf denselben gleichen Druck
äussert, so bleibt die ganze auf den Vereini-
gungspunct gerichtete oder concentrirte Wir-
kung, vor wie nach, eben dieselbe, nemlich die
Summe jeder einzeln Kräfte. Dieses macht
demnach, daß ein Körper sich unter einer viel
allgemeinern Bedingung, als in einen Punct
concentrirt, gedenken läßt. Am allgemeinsten

aber ist diese Bedingung, wenn die Summe der auf jede Puncte des Körpers parallel wirkenden Kräfte einerley bleibt, diese Kräfte mögen sich unter sich verändern, so viel man will.

VII. Einige statische Definitionen und Sätze.

§. 74.

Wir können nun, ehe wir weiter gehen, das bisher gesagte auf die in der Natur vorkommende Kraft der Schwere anwenden, welche überhaupt die auf der Erdfläche befindliche Körper unterwerts drückt. In dieser Absicht wird in jedem Körper oder System der Punct, wo die Kraft der Schwere ihre Wirkung vereinigt, der Mittelpunct der Schwere, centrum grauitatis, genennt. Wir müssen aber einige Erfahrungen zu Hülfe nehmen, um zu sehen, was es damit für eine Bewandniß habe?

§. 75.

Die erste ist, daß die Richtungslinie der vereinigten Kraft der Schwere allemal unterwerts geht. Man sieht dieses, es sey daß man einen Körper den Druck der Schwere überlasse, das will sagen, fallen lasse, oder daß man denselben an einen Faden, das will sagen, biegsame Linie, hänge. Die Schwere,

oder

oder das Gewicht des Körpers wird nach dem Drucke geschätzt, den die Kraft der Schwere auf denselben äussert. Da dieser Druck nach der Richtungslinie der vereinigten Kraft sich äussert, und diese Richtungslinie immer vertical, demnach parallel ist, so läßt sich, um die Gewichte zu vergleichen, der Hebel dazu gebrauchen. Und da giebt die Erfahrung folgendes an:

§. 76.

Der Hebel A B liege auf dem unbeweglichen Punct C, und sey entweder gar nicht, oder auf beyden Seiten gleich schwer, damit derselbe für sich im Gleichgewichte sey. In H, F hängen zween Körper an, welche folglich nach der verticalen Richtung J H, G F herunter gedrückt werden. Halten sie nun einander das Gleichgewicht, und die Entfernungen C H, C F sind ungleich, so ist auch das Gewicht beyder Körper in eben der Verhältniß ungleich, weil Fig. VIII

$$H : F = CF : CH$$

ist. (§. 35.) Dieses folgt aus der erstgegebenen Definition des Gewichtes.

§. 77.

Nun giebt die Erfahrung an, daß so viel man die Figur des Körpers ändert, nur daß von seiner Materie nichts verlohren gehe, auch wenn man denselben hohl macht, das Gleichgewicht immer bleibe; daß eben dieses statt habe, an welchem Punct seiner Oberfläche man denselben anhänge. Hingegen aber, daß, man mag inwendig oder auswendig von seiner Materie wegnehmen, das Gleichgewicht aufhöre, und der Körper leichter werde. Hieraus folgert man, die Kraft der Schwere drücke nicht auf den leeren Raum, und auch nicht blos auf die Oberfläche, sondern auf die sowohl in- als auswendige Materie des Körpers.

§. 78.

Theilt man den Körper in beliebige Stücke, so giebt die Erfahrung ebenfalls, daß die Summe der einzeln Gewichte eines jeden Stückes, dem Gewicht des ungetheilten Körpers gleich ist. Und daraus folgt, daß jeder Theil der Materie der Körper durch die Kraft der Schwere, für sich gedrückt, und dieser Druck durch die Verbindung dieses Theils mit andern weder vermehrt noch vermindert wird. So wird auch daraus begreiflich, daß sich bey gleichartigen Körpern, das Gewicht mit dem Raum, den sie einnehmen, in gleicher Verhältniß vergrössert. Denn man gedenke sich einen solchen Körper in gleich grosse Theile vertheilt oder zerlegt. Da nun die Summe des Gewichts dieser Theile, jedes einzeln gewogen, dem Gewichte des ganzen Körpers, zufolg ersterwähnter Erfahrung, gleich ist, die Theile selbst auch wegen der Gleichartigkeit, gleich viel Materie

haben,

haben, und wenn auch ihre Figur nicht gleich seyn sollte, diese am Gewichte nichts ändert (§. 77.) so folgt hieraus, auch wenn es nicht unmittelbar durch die Erfahrung erörtert werden könnte, daß jeder dieser Theile gleich viel wägen müsse, und sich folglich das Gewicht eines jeden umgekehrt, wie die Anzahl der Theile verhalte, in welche man den Körper zertheilt hat. Da nun die Grösse eines jeden Theils sich, ebenfalls umgekehrt, wie diese Anzahl verhält; so ist nothwendig, daß das Gewicht in Verhältniß der Grösse, und hinwiederum die Grösse in Verhältniß des Gewichts sey. Das will nun sagen, daß in einem gleichartigen Körper die Kraft der Schwere durchaus gleich vertheilt sey. Dieses nebst der parallelen Richtung der Kraft macht demnach, daß viele von den in den vorhergehenden Abschnitten vorgetragenen Sätzen, wenn sie auf gleichartige Körper und die darauf wirkende Kraft der Schwere angewandt werden, sehr in die Kürze gezogen werden können. Besonders wird die Bestimmung ihres Mittelpuncts der Schwere dadurch sehr abgekürzt. (§. 71.)

§. 79.

Die Gleichartigkeit, von welcher hier die Rede ist, erfordert fürnemlich die durchaus gleiche Vertheilung der Materie, aus welcher der Körper besteht. Ist diese ungleich vertheilt, so ist der Körper ungleich dichte, und daher auch

auch in seinen verschiedenen Theilen ungleich schwer. Dieses hat nun eben den Erfolg, als wenn die Kraft der Schwere ungleich vertheilt wäre. Da aber diese ungleiche Vertheilung auf einerley Theile oder Puncte fällt, wie man immer den Körper umwendet; so sieht man, zufolge des §. 71, daß auch ein solcher Körper einen, ich will sagen, einen einigen Mittelpunct der Schwere habe, in welchem nemlich die Kraft der Schwere bey jeder Lage des Körpers ihre dem Gewicht desselben gleiche Wirkung vereiniget. (§. 74. 75.) Da nun eben dieses von jedem System von Körpern gilt, die mit einander verbunden sind, so sieht man aus dem §. 72 ebenfalls, daß, wenn diese Theile unter sich bewegt werden können, das System nicht in Ruhe seyn werde, bis die Kraft der Schwere den Mittelpunct der Schwere des ganzen Systems, so weit es der Mechanismus desselben zuläßt, fortgetrieben hat, und folglich, weil die Schwere unterwerts drückt, dieser Mittelpunct am tiefsten Orte ist.

VIII. Die Zusammensetzung der Kräfte.

§. 80.

Die erst gemachte Anmerkung von dem tiefsten Orte des Mittelpuncts der Schwere, läßt sich bey Bestimmung des Gleichgewichtes

eines

eines Systems sehr vortheilhaft gebrauchen. Es sey z. E. in einer horizontalen Linie A B zween unbewegliche Puncte. An A werde ein Faden A C B P befestigt, an welchem in C ein Gewicht Q herunter hange. Der Faden selbst lasse sich über den Punct P wie über einer Rolle ziehen, so, daß wenn das anhangende Gewicht P herunter gezogen, oder noch mehr beschwert wird, das Gewicht Q in die Höhe steige, oder hinwiederum sich noch mehr herabziehe, wenn das Gewicht P erleichtert wird. Läßt man nun das ganze System frey hangen, so werden sich die beyden Gewicht auf- und herunter bewegen, bis sie einander das Gleichgewicht halten, oder, welches einerley ist, bis der Mittelpunct der Schwere am tiefsten ist. Die Entfernung dieses Mittel-Puncts der Schwere von der horizontalen Linie A B, welche das Maaß seiner Vertiefung ist, findet sich nach §. 61, wenn man Q mit Q F, und P mit P B multiplicirt, und die Summe beyder Producte durch die Summe der Gewichte $P + Q$ dividirt. Es sey demnach Fig. XVI.

$AB = a \qquad AF = y$

$AC = b \qquad CQ = e$

$CB + BP = c$

so ist

$$CF = \sqrt{(bb - yy)}$$
$$CB = \sqrt{(aa + bb - 2ay)}$$

dem-

demnach

$$FQ = e + \sqrt{(bb - yy)}$$
$$BP = c - \sqrt{(aa + bb - 2ay)}$$

und folglich, wenn die Vertiefung des Mittelpuncts der Schwere $= z$ gesetzt wird,

$$z = \frac{Qe + Q\sqrt{(bb-yy)} + Pc - P\sqrt{(aa+bb-2ay)}}{Q+P}$$

Da nun z ein maximum seyn muß, so wird $dz = 0$. Und so findet man nach geschehener Differentiation

$$0 = -\frac{Q.y}{\sqrt{(bb-yy)}} + \frac{P.a}{\sqrt{(aa+bb-2ay)}}$$

oder

$$0 = -Qy:CF + Pa:CB$$

und hieraus

$$P:Q = \frac{y.CB}{a.CF} = \frac{AF.CB}{AB.CF}$$

Man ziehe BD mit AC parallel, so sind die Triangel AFC, FBD einander ähnlich, und es ist

$$AF:CF = AB:CD$$

demnach

$$CD = \frac{CF.AB}{AF}$$

Setzt man diesen Werth in der gefundenen Formel

$$\frac{P}{Q} = \frac{AF.CB}{AB.CF}$$

so

so erhält man

$$P:Q = CB:CD$$

Dieser Analogie werden wir uns nun folgendermassen bedienen können.

§. 81.

Der Punct C wird erstlich von dem Gewichte Q mit einer demselben gleichen Kraft (§.75.) herunter gezogen. Sodann, da das Gewicht P über die Rolle B hängt, so zieht dasselbe den Punct C nach der Richtung C B gegen B, wiederum mit einer Kraft = P. Nun läßt sich in A ebenfalls eine Rolle mit einem herunterhangenden Gewichte p gedenken, welches den Faden A C, so viel zieht, als es die Erhaltung des Gleichgewichtes erfordert. Zieht man demnach A E mit C B parallel, so wird man

$$p:Q = AC:CE$$

haben. Nun ist wegen der Aehnlichkeit der Triangel CAE, DBC,

$$AC:CE = DB:DC$$

demnach

$$p:Q = DB:DC$$

§. 82.

Wird nun diese Analogie mit der erstern (§.80.) verglichen, so findet sich

$$Q:DC = P:CB = p:DB$$

das will nun sagen, die Kräfte, womit der Punct C ge-

C gegen Q, B, A gezogen wird, sind in Verhältniß der Seiten DC, CB, DB des Triangels DCB, oder wenn das Parallelogramm CBDG vollends ausgezogen wird, in Verhältniß der Diagonale CD und der Seiten CB, CG, oder, welches ebenfalls einerley ist, in Verhältniß der Sinus der Winkel ACB, ACD, DCB; daher jede Kraft in Verhältniß des Sinus des Winkels, den die Directionslinien der beyden andern Kräfte mit einander machen.

§. 83.

Da hiebey jede Kraft den beyden andern das Gleichgewicht hält, und überhaupt jeder Kraft eine gleich grosse entgegen gesetzt werden kann, so ist klar, daß diese entgegengesetzte eben den Effect thut, den die beyden andern Kräfte thun. Demnach läßt sich für diese jene, und hinwiederum für jene diese, ohne Nachtheil des Gleichgewichtes, anbringen. Diese Verwechselung wird die **Zusammensetzung und Auflösung der Kräfte** genennt.

§. 84.

Man stellt aus diesen Gründen, die nach verschiedenen Richtungen auf einen Punct wirkende Kräfte durch Linien vor, welche den Kräften proportional und in deren Richtung
Fig. XVII. sind. Und da ist jede der Linien AC, BC, DC der Diagonale des Parallelogramms gleich, welches

welches sich mittelst der beyden andern Linien ziehen läßt, z. E. $AC = Ca$, $BC = Cb$, $DC = CD$. Da nun den Kräften CB, CD eine Kraft CA substituirt werden kann, und diese, wenn die Kraft AC nicht da wäre, den Punct C entweder gegen sich ziehen, oder wenn sie drückt, gegen A drücken würde, so sieht man, daß eben dieses auch würde von den ziehenden oder drückenden Kräften BC, DC geschehen, wenn die Kraft A nicht das Gleichgewicht hielte.

§. 85.

Bey diesem letzten Satze wird in den meisten bisher herausgekommenen statischen Schriften, der Anfang zum Beweise der Zusammensetzung der Kräfte gemacht. Man setzt nemlich zwo Kräfte BC, DC, die in nicht gerader noch entgegengesetzter Richtung BC, DC auf den Punct C drücken. Wäre nun jede Kraft allein; so würde sie diesen Punct in eben der Richtung fortdrücken, in welcher sie auf denselben wirkt, demnach CB gegen b, CD gegen D. Aeussern aber beyde Kräfte ihren Druck zugleich; so kann der Punct C unmöglich nach beyden Richtungen zugleich bewegt werden, weil er sonst zweyen Orten zugleich seyn müßte. Alles dieses ist ganz Sonnenklar. Was aber erfolgen werde, ist eine ganz andere Frage. In der That könnte man aus erstbemeldter Unmöglichkeit, daß der Punct C nicht zugleich an zweyen Orten seyn könne, den Schluß machen, derselbe müsse nothwendig in C bleiben. Dieser Schluß geht aber nur an, wenn die Kräfte gleich und in entgegengesetzter Richtung angebracht sind. (§. 13.) Denn Kräfte, die zugleich auf einen Punct wirken, lassen sich nicht als jede für sich wirkend gedenken, wenn man auf das Product beyder Wirkungen sehen will. Man setze z. E. um den leichtesten Fall zu betrachten, zwo gleiche Kräfte seyn in gleicher Direction und zugleich auf einen Punct angebracht, so will dieses sagen, die Summe von beyden, oder eine ihrer Summe gleiche Kraft wirke auf denselben. Wolte man hier jede für sich betrachten, so könnte man den Schluß machen, daß beyde zusammen nicht mehr ausrichten, als eine allein. Denn indem die eine den Punct fortdrückt, läßt sie der andern nichts zu drücken übrig. Oder wenn die eine den Punct C bis in b fortdrückt, so drückt denselben die andere ebenfalls bis in b fort, und so würde folgen, der Punct C komme in gleicher Zeit in b, es mögen beyde Kräfte oder nur eine drücken. Es ist offenbar, daß die Kräfte, gleichsam ehe sie noch den Druck äussern, als schon zusammengesetzt angesehen werden müssen. Denn jeder Druck, für sich betrachtet, läßt sich eben so gut als nach dem andern angebracht gedenken. Ungeachtet demnach jede der Kräfte CB, DC, jede allein genommen, den Punct C in ihrer Richtung fort-

drücken

drücken würde, so kann man aus dieser Betrachtung keinen Vortheil ziehen, um zu erörtern, was erfolgen werde, wenn diese Kräfte zugleich angebracht sind. Der einige Fall, wo es angeht, ist wenn die Kräfte gleich sind, und einander entgegen wirken. Denn man sieht leicht, daß die Richtung der Kräfte mit in Betrachtung kömmt, sobald sie zusammengesetzt, das will sagen, zugleich angebracht werden. Denn da sieht man bey entgegengesetzten gleichen Kräften A C, C a ohne Mühe, daß der Punct C, auch wenn er bewegt würde, auf der Linie A C a bleiben muß, weil keine der Kräfte herauf oder herunter drückt. Daß er aber keiner derselben nachgebe, folgt sodann, weil er einer wie der andern nachgeben müßte, und so an zwey Orten zugleich seyn würde.

§. 86.

Man hat aber, um sich demnach einigermassen auszuhelfen, angenommen, daß die Bewegung des Puncts C nach beyden Directionen begreiflich gemacht werden könne, wenn man, indem sich der Punct C gegen b bewegt, demselben und der ganzen Linie C b eine Bewegung nach der Direction C d giebt. Sind die Geschwindigkeiten den Linien C b, C d proportional, so läßt sich allerdings begreifen, daß der Punct b in eben der Zeit in A treffen werde, in welcher C in b kommen würde, wenn derselbe sich schlechthin nur nach der Direction C b bewegte, und nicht zugleich auch mit der Linie

Cb nach der Direction Cd bewegt würde. Geschieht aber beydes, so durchläuft der Punct C unstreitig die Linie AC. Diese ganze Betrachtung ist aber schlechthin nur phoronomisch und ideal (§. 2.) dafern man nicht zeigen kann, daß man aus der Zusammensetzung der Kräfte berechtigt sey, die Bewegung der Linie Cb und des darauf sich bewegenden Puncts C, nach der Richtung Cd anzunehmen. Es ist klar, daß man, um hiezu berechtigt zu seyn, nicht nur der Linie Cb, sondern selbst auch der Kraft CD eine Bewegung nach der Directon Cb geben müsse, denn widrigenfalls würde sich der Druck nicht nach der Direction Cd äussern. So z. E. wenn sich ein Schiff nach der Linie Cb bewegt, und eine Flinte wird nach der Linie Cd gerichtet. Drückt man dieselbe loß, so hat die Kugel, so lange sie in dem Laufe ist, allerdings eine gedoppelte Bewegung. Denn einmal bewegt sie sich nach der Länge des Laufes der Flinte in der Direction Cd; sodann zugleich mit der Flinte in der Direction Cb. Diese beyde Bewegungen aber sind nur relativ. Man folgert aber richtig daraus, daß wenn die relativen Geschwindigkeiten Cd, Cb sind, die absolute Geschwindigkeit und zugleich die Direction derselben CA seyn werde. Dieses würde nicht seyn, wenn die Flinte, durch deren Loßbrennen der Kugel die Bewegung nach der Direction Cd gegeben wird, sich nicht selbst nach Cb bewegte.

§. 87

§. 87.

Wollte man aber statt der wirklichen Bewegung nur die Sollicitation zu derselben nehmen, wie denn eine solche Sollicitation selbst bey dem Gleichgewichte, wo alles in Ruhe ist, allerdings vorkömmt; so ist es dennoch auch hier nicht genug, zu sagen, der Punct C werde gegen b und d zur Bewegung sollicitirt. Denn einmal ist er es, sobald die Kräfte wirklich zusammengesetzt sind, in der That nicht, weil sie sich nicht mehr so, als wenn jede allein wäre, betrachten lassen. Wenn man aber auch dieses zugiebt, wie es denn in verschiedenen Absichten und unter gehörigen Bedingungen zugegeben werden kann, so läßt sich aus dieser Sollicitation noch nichts, auf eine der vorigen ähnliche Art schliessen, dafern man nicht mit annimmt, daß selbst auch die Kraft CD nach der Direction Cb, und so auch die Kraft CB nach der Direction Cd sollicitirt werde. Dieses schiene nun noch zwo neue Kräfte zu erfordern. Sie sind aber nicht nothwendig. Denn eben darin besteht nun das, was die eigentliche **Zusammensetzung der Kräfte** ausmacht, und was zugleich der Grund ist, warum zusammengesetzte Kräfte nicht eben so, wie wenn jede allein wäre, angesehen werden können. Denn man kann sie so ansehen, als wenn jede die andere nach ihrer eigenen Richtung sollicitirte, eben so wie sie bey einerley Richtung sich ganz in eine Summe vereinigen, bey entgegengesetzter Richtung aber ganz oder zum Theil unwirksam machen. Dieses hat nun bey schiefen Richtungen, dergleichen BC, DC sind, den Erfolg, daß was jede Kraft auf die Sollicitation der andern verwendet derselben abgeht. Daß man aber die Sollicitation der einen ganz auf Rechnung der andern setzen, und daher z. E. CD ganz auf den Punct C wirkend, BC aber als auf den Punct C und die Kraft CD zugleich wirkend ansehen könne, folgt aus dem bisher gesagten noch nicht. Nimmt man es indessen an, und läßt die Bewegung erfolgen, so bewegt sich die Kraft D mit dem Punct C nach Cb, während dem sie diesen Punct nach der Direction Dc bewegt, und so würde mehr oder minder eine Bewegung des Puncts C nach einer Diagonallinie CA erfolgen.

§. 88.

Dieses sind aber noch nicht alle Schwürigkeiten, die bey dem gewöhnlichen Beweise von der Zusammensetzung der Kräfte vorkommen. Denn es ist nicht genug, daß man aus den relativen Geschwindigkeiten CB, CD, die absolute AC finde. Man muß ferner dabey annehmen, daß diese Geschwindigkeiten in Verhältniß der Kräfte sind, wenn man sodann den Schluß machen will, daß AC nicht nur die Direction und Geschwindigkeit des Puncts C, sondern zugleich auch das Maaß der zusammengesetzten Kraft sey, daß aber der angenommene Satz

von

von dem Verhälniß der Geschwindigkeit und Kraft wahr sey, hat man deswegen fürgegeben, weil es derjenige Satz ist, den wir bey Betrachtung des Hebels oben (§. 49.) vorgebracht und untersucht haben. Man setze aber, daß derselbe in gleichem Verstande (denn mehr ist noch nicht erwiesen) auch bey dem Gleichgewichte dreyer Kräfte vorkommen; so muß der einen Kraft eine Uebermucht gegeben werden, und da haben wir oben (§. 49. seqq.) gesehen, daß die daherrührende Geschwindigkeit weder in gerader Verhältniß der Uebermucht, noch der Kraft, noch der Last, das will hier sagen, der beyden andern Kräfte, sey.

§. 89.

Wir können aus allen diesem die Folge ziehen, daß wenn man je die Zusammensetzung der Kräfte aus der bey Hebung des Gleichgewichtes erfolgenden Bewegung herleiten will, diese Bewegung selbst vorerst auf ihre ächte Gründe gebracht werden müsse. Und wenn auch dieses geschieht, so wird sich bey der Theorie der aus zusammengesetzten Kräften erfolgenden Bewegung immer zeigen, daß man vorerst die Zusammensetzung der bloßen Sollicitationen, oder des bloßen Druckes der Kräfte wissen müsse, weil man sonst immer auf die Schwürigkeiten der bewegten Linie C b und der zugleich mit bewegten Kraft CD verfällt.

§. 90.

Es haben demnach diejenigen, welche von solchen erfolgenden Bewegungen ganz abstrahirt haben, immer ungleich besser und richtiger verfahren. Die Bedingung des Gleichgewichtes fordert schlechthin nur, daß der Punct C nicht bewegt werde. Und dabey will man nicht wissen, welche Bewegung bey Hebung des Gleichgewichts erfolgen würde, denn es soll schlechthin gar keine erfolgen. Man betrachtet das System als in völliger Ruhe, und sucht nur die Verhältnisse der Kräfte und ihrer Richtung, die dabey vorkommen, und ohne welche der Ruhestand oder das Gleichgewicht nicht statt findet. Und so läßt sich die Zusammensetzung der Kräfte aus der Theorie des gebogenen oder Winkelhebels, so wie aus der Theorie mehrerer anderer statischen Systemen von Körpern allerdings herleiten. Wir können dahin auch noch folgende Betrachtung rechnen.

§. 91.

Fig. XVIII. Es seyn in P, Q, R drey Kräfte, welche den Punct C sämtlich an den Linien oder Faden PC, QC, RC gegen sich zu ziehen streben, so wird es irgend eine Lage des Puncts C geben, in welcher derselbe im Gleichgewichte gehalten wird. Dabey muß nun ebenfalls ein maximum oder ein minimum statt haben, und man kann sich letzteres leicht vorstellen. Denn es ist klar, daß in dem Stande des Gleichgewichtes jede Kraft den Punct C, so viel es die beyden übrigen zuliessen, gegen sich gezogen hat. Wären demnach die Kräfte sämtlich gleich, so ist klar, daß die Summe der Distanzen $PC + QC + RC$ ein minimum seyn müßte. Da wir aber die Kräfte P, Q, R ungleich setzen, so läßt sich diese Summe der Distanzen nicht so schlechthin nehmen. Es ist aber erweisbar, daß man $P.PC + Q.QC + R.RC$ als ein minimum ansehen könne. Man könnte vielleicht diesen Satz daher leiten, daß, da jede Kraft den Punct C desto näher gegen sich zieht, je grösser dieselbe ist, in den Producten $P.PC, Q.QC, R.RC$, jede Distanz desto kleiner heraus komme, je grösser die Kraft ist, mit welcher dieselbe multiplicirt wird. Ich sehe aber dieses nicht klar ein, und so werde ich lieber den Satz aus dem tiefsten Orte des **Mittelpuncts der Schwere** herleiten, und in dieser Absicht, um die Figur nicht mit Linien und fremden Umständen zu überladen, zu der 16ten Figur zurücke kehren. Denn da sieht Fig. XVI. man leicht, daß wenn das Gewicht P herunter zieht der Punct C um eben so viel näher zu B komme, folglich der Theil des Fadens CB um eben so viel verkürzt werde, als der Theil BP verlängert wird. Da es nun bey der Bestimmung des tiefsten Orts des Mittelpuncts der Schwere eigentlich nicht um die absolute Länge des Fadens, sondern nur um die

Verlängerung des Theils P B, oder, welches hier einerley ist, um die Verkürzung des Theils C B zu thun ist; so kann man eben so gut $-$P.B C nehmen, als wir oben (§. 80.) $+$P.BP genommen haben. Demnach hat, Fig.XVIII. um nun wiederum auf die 18^{te} Figur zu kommen, der Ausdruck

$$P.PC+Q.QC+R.RC$$

positiv genommen, als ein minimum betrachtet, allerdings statt, ungeachtet hieraus noch nicht aufgeklärt wird, was derselbe, so erheblich er an sich ist, in der Figur noch anders als die blosse Summe dreyer Producte bedeute. Da derselbe indessen richtig ist, so werden wir ihn folgendermassen gebrauchen.

§. 92.

Man ziehe durch Q eine beliebige Linie QJ, und fälle aus P, R, C auf dieselbe Perpendicularen PM, CN, RJ. Sodann setze man

$$QM=a \qquad QN=x$$
$$MP=b \qquad NC=y$$
$$QJ=c$$
$$JR=e$$

so findet man

$$QC=\surd(xx+yy)$$
$$CP=\surd[(b-y)^2+(x-a)^2]$$
$$CR=\surd[(y-e)^2+(c-x)^2]$$

demnach den Ausdruck

$$Q.\surd(xx+yy)+P.\surd((b-y)^2+(x-a)^2)$$
$$+R.\surd((y-e)^2+(c-x)^2)$$

welcher

welcher ein minimum seyn muß, es mag sich x oder y allein, oder beyde zugleich, verändern. Demnach wird derselbe, sowol wenn man nach x als nach y differentiirt = o. Nimmt man demnach diese beyde Differentiationen vor, so erhält man die zwo Gleichungen

$$o = \frac{Q.x}{\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{(x-a).P}{\sqrt{((b-y)^2+(x-a)^2)}} + \frac{(x-c).R}{\sqrt{((y-e)^2+(c-x)^2)}}$$

$$o = \frac{Q.y}{\sqrt{(xx+yy)}} + \frac{(y-b).P}{\sqrt{((b-y)^2+(x-a)^2)}} + \frac{(y-e).R}{\sqrt{((y-e)^2+(c-x)^2)}}$$

Werden diese mit der Figur verglichen, so sieht man leicht, daß die Coefficienten von P, Q, R Sinus und Cosinus von Winkeln vorstellen.

§. 93.

Man ziehe nemlich durch C eine mit QJ gleichlauffende Linie kCh; so lassen sich diese zwo Gleichungen folgendermassen ausdrücken:

$$o = Q.\cos kCQ + P.\cos kCP - R.\cos hCR$$
$$o = Q.\sin kCQ - P.\sin kCP + R.\sin hCR$$

§. 94.

Macht man demnach

$$Cp = P$$
$$Cq = Q$$
$$Cr = R$$

und

und fällt aus p, q, r auf k C h die Perpendiculären p n, q m, r h, so werden die zwo letztere Gleichungen nochmals so ins Kurze gezogen:

$$o = Cm + Cn - Ch$$
$$o = qm - pn + rh.$$

§. 95.

Man ziehe endlich das Parallelogramm q C p g vollends aus; und fälle aus g auf k C h die Perpendiculär g k; so ist vermög der Natur des Parallelogrammes

$$kn = mC$$
$$gk = pn - qm$$

Setzt man diese beyden Werthe in den zwo letztern Gleichungen, so erhält man folgende:

$$o = kn + Cn - Ch = kC - Ch$$
$$o = -gk + rh$$

demnach

$$Ck = Ch$$
$$gk = hr$$

das will nun sagen, die Diagonale C g sey = C r, und beyde liegen in gerader Linie. Und auch dieses will nun sagen, man finde zu zwoen Kräften C p, C q die Lage und Grösse der dritten C r, welche denselben das Gleichgewicht hält, wenn man das Parallelogramm q C p g vollendet, und die Diagonale C g gegen r verlängert bis C r = C g wird. Und dieses ist nun wiederum der Hauptsatz von der Zusammensetzung der Kräfte.

§. 96.

§. 96.

Beweise von dieser Art lassen sich leicht noch mehrere finden. Sie zeigen aber alle mehr, daß die Sache sey, als aber wie sie sey? Man müßte die Kräfte, und die Art, wie sie wirken, genauer kennen, um daraus zu zeigen, wie sie bey der Zusammensetzung einander theils verstärken, theils hindern. Ueberdies sieht man leicht, daß in einem Beweise, der nicht etwann das ganze Product mit einem male angibt, sondern stückweise zeigt, wie es entstehe, immer zwo Sachen, und jede besonders, muß erörtert werden. Man muß nemlich nicht nur zeigen, daß jede der Kräfte in der Direction der Diagonale der beyden andern wirke, sondern auch daß diese Diagonale das Maaß derselben sey. Fig.XVII.

§. 97.

Diese beyden Sätze sind nun in einer gegenseitigen Abhängigkeit von einander. Denn erstlich, man setze, daß die Kräfte in der Richtung der Diagonalen wirken, so läßt sich daraus erweisen, die Diagonalen seyen das Maaß derselben. Denn man setze, die Kräfte seyen AC, BC, DC, und ziehe die Parallelogramme AdBC, CBaD, CDbA, nebst deren Diagonalen Cd, Cb, Ca. Wäre nun z. E. AC nicht $=$ aC, so würde dC nicht in gerader Linie mit CD seyn. Da nun nach der Voraussetzung cd die Richtungslinie der Kraft ist,

ist, welche man für die Kräfte A C, B C setzen kann, so wird diese, weil sie mit C D einen Winkel macht, derselben das Gleichgewicht nicht halten. Da nun dieses der Voraussetzung zuwider ist; so kann A C der Diagonale nicht ungleich seyn. Demnach ist A C = Ca, und so auch C B = C b, und C D = C d. Folglich, wenn die Kräfte in der Richtung der Diagonalen sind, so sind die Diagonalen das Maaß der Kräfte.

§. 98.

Der andere Satz ist, daß wenn die Diagonalen das Maaß der Kräfte sind, die Kräfte in der Richtung der Diagonalen wirken. Es sey wiederum die Kräfte A C, B C, D C; man vollende die Parallelogrammen A C B d, B C D a, D C A b, und ziehe die Diagonalen C a, C b, C d. Setzt man nun z. E. A C a sey in gerader Linie, so folgt nach geometrischen Sätzen, daß auch D C d, B C b in gerader Linie sind, und zwar schlechthin nur, weil A C = C a ist. Demnach, was von A C a gilt, gilt auch von D C d, B C b. Man läugne nun aber, daß A C a in gerader Linie sey, und setze z. E. A C neige sich herunterwerts. Da nun B d mit C A parallel und = C A ist, so neigt sich auch B d herunterwerts. Dadurch aber wird C d verkürzt, oder wenn man C d = C D lassen will, so ist entweder A C B d nicht mehr ein Parallelogrammum, oder C d nicht mehr dessen

Diago-

Diagonale. Alles dieses aber läuft der Voraussetzung zuwider. Eben so verstößt man dawider, wenn man setzt, AC sey aufwerts von der Direction a C weggekehrt. Demnach muß AC a in gerader Linie seyn, und damit ist es auch BC b und DC d. Folglich, wenn die Diagonalen das Maaß der Kräfte sind, so sind die Kräfte in der Richtung der Diagonalen.

§. 99.

Ich bin auf diese zween Sätze geleitet worden, als ich von der Zusammensetzung der Kräfte einen Beweis suchte, der sich nicht erst auf die Theorie des Hebels, oder den Mittelpunct der Schwere, sondern schlechthin auf die Natur der Sache selbst gründete, und den ich auch, so wie ich ihn gefunden, werde hersetzen. Vielleicht hätte ich keinen gesucht, wenn ich nicht erst nachher gesehen hätte, daß Herr D. Bernoulli auf eben dieser Spur gewesen wäre. Die in allen Absichten vortrefliche Abhandlung, die er sowol darüber, als auch über die übrigen Grundgesetze der Mechanic der gelehrten Welt mitgetheilt hat, findet sich in dem ersten Bande der Comment. Acad. Petropol. Ich hätte sie ebenfalls schon vorhin (§. 85 seq.) bey der Untersuchung des gewöhnlichen Beweises der Zusammensetzung der Kräfte anführen können, da der scharfsinnige Herr Verfasser ähnliche Schwürigkeiten aufdeckt; und so werde

ich

ich ebenfalls in folgenden Anlässe dazu haben, wo ich werde zeigen können, daß das Leibnitzische Kräftenmaaß, so weit es einen Verstand hat, darin bündig erwiesen worden. Ich zweifle nicht daran, daß der Herr Verfasser nicht sollte gewünscht haben, den von der Zusammensetzung der Kräfte gegebenen Beweis, in die Kürze zu ziehen. Da aber seine Absicht eigentlich nur dahin gienge, zu zeigen, daß diese Theorie eine geometrische Nothwendigkeit habe, so hat unstreitig die Länge oder Kürze des Beweises dabey nichts zu sagen. Es giebt Wahrheiten, deren Beweis man, ohne über die Länge zu klagen, mit Danke annehmen würde, wenn derselbe mit solcher Schärfe geführet würde, wie es Herr Bernoulli gethan. Uebrigens haben nachgehends Herr d'Alembert in seinen Opuscules, und Herr Foncenex in dem zwoten Bande der Mem. de l'Acad. R. de Turin Abkürzungen gesucht.

§. 100.

Ich fange bey dem einfachsten Fall an, um daraus nur überhaupt zu zeigen, daß es eine Zusammensetzung der Kräfte giebt. Man weiß aus der Meßkunst, daß wenn man einen Circul in drey gleiche Theile theilt, und aus dem Mittelpuncte Linien in die Theilungspuncten zieht, jede dieser Linien mit der andern einen Winkel von 120 Grad macht, und so auch jede

jede gegen die beyden andern gleich inclinirt ist. Solche drey Linien seyen AC, BC, DC, und Fig. XIX. zugleich die Directionslinien dreyer gleichen Kräfte, welche auf den Punct C wirken, es sey daß sie denselben ziehen, oder drücken. Hier ist offenbar, daß, da der Punct C einer dieser Kräfte, wie einer jeden der andern beyden, nachgeben müßte, er keiner nachgeben kann, und daher im Gleichgewichte bleibt. Aber eben dieses Gleichgewicht bleibt, wenn man z. E. anstatt der Kräfte DC, BC eine einige gleiche Kraft aC der Kraft AC gerade entgegensetzt. Demnach ist offenbar, daß beyde Kräfte DC, BC in der schiefen Richtung DCB weder mehr noch minder auswirken als die Kraft aC allein. Nun sind die Winkel $DCa = BCa = 60$ Gr. Da nun $DC = CB = Ca$ ist; so ist auch $Da = aB = DC = CB$, demnach $CDaB$ ein Rhombus, und Ca dessen Diagonale. Für diesem Fall ist demnach das Gesetz der Zusammensetzung der Kräfte ohne Mühe erwiesen.

§. 101.

Man kann sich auf eine ähnliche Art eine beliebige Anzahl gleicher Kräfte gedenken, die auf einen Punct in solchen Directionen angebracht sind, die einen Circul in eben so viele gleiche Theile theilen als Kräfte sind. Daß sie einander das Gleichgewicht halten, erhellet ohne Schwürigkeit, weil der Punct, auf den sie angebracht sind, einer jeden nachgeben müßte. Von solchen Kräften wirkt jede soviel als die übrigen zusammen. Eben so lassen sich, welche man will, zusammennehmen, und ihre vereinigte Wirkung wird der vereinigten Wirkung der übrigen gleich seyn. Denn in allen diesen Absichten betrachtet, bleibt das Gleichgewicht. So z. E. wenn auf den Punct C fünf gleiche und im Circul herum gleich vertheilte Kräfte A C, B C, D C, E C, F C wirken, so zieht A C den Punct eben so viel gegen sich, als die übrigen vier Kräfte B C, D C, E C, F C denselben gegen G ziehen. Die Wirkung dieser vier Kräfte ist demnach diejenige, die eine Kraft G C allein haben würde. Auf eine ähnliche Art wirken die drey Kräfte A C, B C, F C nicht mehr als die zwo Kräfte D C, E C, wei sonst der Punct C gegen A würde gezogen werden. Man sieht hieraus, wie man auch die von mehreren Kräften herrührende Wirkung zu betrachten hat. Zugleich sieht man hier, wie bey dem vorhin (§. 100.) betrachteten Fall, den an sich klaren Satz bekräftigt, daß die gemeinsame Wirkung zwoer gleichen Kräfte sich in derjenigen Richtung äussert, welche mitten zwischen sie fällt. Denn so ziehen die beyden Kräfte B C, F C den Punct C gegen A, so wie ihn die beyden Kräfte D C, E C gegen G ziehen. Letztere beyde unstreitig viel stärker als die erstern, weil sie nicht nur dem Zug der Kräfte B C, F C, sondern noch überdies dem Zug der Kraft A C das Gleichgewicht

Fig. XX.

gewicht halten. Daß aber gleiche Kräfte, z. E. D C, E C den Punct C gegen G ziehen, folgt schlechthin aus deren Gleichheit. Denn welche von beyden denselben näher gegen sich zöge, so würde es auch von der andern geschehen. Und beydes zugleich kann nicht seyn. Wären hingegen die Kräfte ungleich, so läßt sich, überhaupt betrachtet, gedenken oder vermuthen, daß die stärkere den Punct C näher gegen sich ziehen werde. Ich sage, vermuthen, denn wir werden bald sehen, daß die wahre Direction der zusammengesetzten Kräften nicht so leicht zu bestimmen ist, und daß man die Grösse derselben findet, ehe man von ihrer Direction noch nichts schliessen kann.

§. 102.

Ich fange bey dem Satze an, daß wenn drey Kräfte, so auf einen Punct wirken, im Gleichgewichte sind, das Gleichgewicht bleibe, wenn jede Kraft in einerley Verhältniß grösser oder kleiner genommen, die Direction aber nicht verändert wird. Denn eine doppelte, drey, vier &c. n fache Kraft gilt was zwo, drey, vier &c. n einfache, und so bleibt der Punct zwey, drey, vier &c. n fach unbewegt; das will sagen, er bleibt unbewegt, man mag jede Kraft doppelt, drey, vier &c. n fach nehmen. Demnach auch wenn man jede m fach nimmt. Demnach auch wenn jede $\frac{m}{n}$ fach genommen wird.

§. 103.

Es seyn nun zwo Kräfte AC, BC, welche
Fig. XXI. in senkrechter Direction auf den Punct C wirken, so giebt es irgend eine Kraft EC, welche denselben das Gleichgewicht halten kann, so, daß demnach die vereinigte Wirkung der Kräfte AC, BC sich in der entgegengesetzten Richtung CD äussert, und $= CD = CE$ ist. Die Frage ist nun, deren Grösse und Richtung zu bestimmen. Man setze CD stelle beydes vor, und ziehe δCd auf CD senkrecht, so ist wegen der beyden rechten Winkel ACB, DCd, der Winkel $\delta CB = DCA$, und so auch $dCA = DCB$. Da demnach BC gegen DC, $C\delta$ und AC gegen dC, DC eben die Lage hat, wie DC gegen BC, AC; so läßt sich die Kraft BC auf die Richtungen DC, δC, und die Kraft AC auf die Richtungen dC, DC eben so vertheilen, wie die Kraft DC auf die Richtungen BC, AC vertheilt ist. Man mache demnach (§. 102.)

$$DC : BC = BC : \varepsilon C$$
$$DC : AC = BC : \delta C$$
$$DC : BC = AC : dC$$
$$DC : AC = AC : \alpha C$$

so werden die Kräfte δC, εC anstatt BC, und die Kräfte dC, αC anstatt AC gesetzt werden können, ohne daß das Gleichgewicht mit CE gehoben werde. Nun geben diese vier Analogien folgende vier Werthe

εC

$$\epsilon C = BC^2 : DC$$
$$\delta C = AC . BC : DC$$
$$d C = AC . BC : DC$$
$$\alpha C = AC^2 : DC$$

Demnach haben wir erstlich $\delta C = d C$. Da nun diese beyde Kräfte in entgegengesetzter Richtung sind, so halten sie an sich schon einander das Gleichgewicht. (§. 13.) Und dieses ist eben so viel, als wenn sie nicht da wären, weil sie den Punct C eben so unbewegt lassen (§. 46). Da demnach die Kräfte $C\alpha$, $C\epsilon$ allein der Kraft $CE = CD$ das Gleichgewicht halten, und in eben der Richtung sind, so haben wir

$$C\alpha + C\epsilon = CD$$

demnach

$$\frac{AC^2 + BC^2}{DC} = DC$$

oder

$$AC^2 + BC^2 = DC^2$$

Da nun dieses der Pythagorische Lehrsatz, und ACB ein rechter Winkel ist, so haben wir

$$CD = AB$$

und dadurch ist die Grösse der Kraft CE gefunden, so wenig wir noch von ihrer Direction wissen.

§. 104.

Es giebt auch hiebey ein einiger Fall, wo sich diese Direction für sich finden läßt, nemlich derjenige, wo $BC = AC$ ist. Denn da theilt

DC den Winkel BCA in zween gleiche Theile, (§. 102) und so ist sie nicht nur der Diagonale des Quadrats gleich, sondern sie wirkt auch in derselben Richtung.

§. 105.

Hingegen wo die Kräfte BC, AC ungleich sind, wissen wir nur noch die Grösse der Kraft $EC = DC$, von ihrer Lage oder Richtung aber noch nichts. Wir können dabey nur so viel annehmen, daß wenn eine Kraft DC in zwo rechtwinklichte Kräfte AC, BC solle aufgelöst werden, diese so angenommen werden müssen, daß $AB = CD$ werde. Wenn wir demnach den Winkel $CBA = \varphi$ setzen, so folgt überhaupt, daß

$$BC = CD \cos\varphi.$$
$$AC = CD \sin\varphi$$

seyn müsse. Da nun aber noch der Winkel BCD eigentlich zu suchen ist, weil dieser die Richtung der Kräfte bestimmt, so wollen wir denselben $= \omega$ setzen, und so werden wir

$$BCD = \omega$$
$$ACD = 180^\circ - \omega$$

haben. Nun ist zu sehen, ob zwischen φ und ω ein Verhältniß gefunden werden kann. Und dahin dient folgender Lehrsatz:

§. 106.

Fig. XXV. Es seyen zwo gleiche Kräfte CD, Cd auf den Punct C gerichtet, und jede nach den Rich-

Richtungen BC, AC in rechtwinklichte Kräfte aufgelöst, nemlich

$$CD \text{ in } CA \text{ und } CB$$
$$Cd \text{ in } Ca \text{ und } Cb$$

Die Winkel seyen

$$DCA = \omega$$
$$dCA = \omega'$$

so lassen sich die Kräfte

$$CD = 1 \quad CA = \cos.\varphi \quad Ca = \cos.\varphi'$$
$$Cd = 1 \quad CB = \sin.\varphi \quad Cb = \sin.\varphi'$$

setzen. Endlich mache man den Winkel

$$\delta CD = dCA$$

und

$$C\delta = 1$$

so wird

$$\delta CA = \omega + \omega'$$

seyn. Und wenn die Kraft $C\delta$ in die rechtwinklichten $C\alpha$, und $C\beta$ aufgelöst wird, so sage ich, es werde

$$C\alpha = \cos.(\varphi + \varphi')$$
$$C\beta = \sin.(\varphi + \varphi')$$

seyn. Um dieses zu beweisen, so ziehe man Ce auf CD senkrecht. Ferners mache man

$$C\varepsilon = Ca = \cos.\varphi'$$
$$Ce = Cb = \sin.\varphi'$$

und setze die Kraft $C\varepsilon$ in die zwo rechtwinklichten Ck, $C\varkappa$, und die Kraft Ce in die zwo rechtwinklichten Cg, $C\gamma$ aufgelöst. Da nun der Winkel

$$eCB = DCA = \omega$$

und

$$\delta C\varepsilon = dCA = \omega'$$

so ist

$Ck = C\varepsilon . \cos\varphi = Ca . \cos\varphi = \cos\varphi . \cos\varphi'$

$C\gamma = Ce \sin\varphi = Cb \sin\varphi = \sin\varphi . \sin\varphi'$

demnach

$C\alpha = Ck - C\gamma = \cos\varphi . \cos\varphi - \sin\varphi . \sin\varphi$

$= \cos(\varphi . + \varphi')$

Eben so ist

$C\varkappa = C\varepsilon \sin\varphi = Ca \sin\varphi = \sin\varphi . \cos\varphi'$

$Cg = Ce . \cos\varphi = Cb . \cos\varphi = \cos\varphi . \sin\varphi'$.

Demnach

$C\delta = C\varkappa + Cg = f\varphi . \cos\varphi' + \cos\varphi . f\varphi'$

$= \sin(\varphi + \varphi')$

§. 107.

Hieraus folgt nun, daß wenn gleiche Kräfte unter dem Winkel

ω in zwo rechtwinklichte $\sin\varphi$, $\cos\varphi$

ω' - - - - - - - $\sin\varphi'$, $\cos\varphi'$

aufgelößt werden, eine gleiche Kraft unter dem Winkel $(\omega + \omega')$ in zwo rechtwinklichte sin. $(\varphi + \varphi')$, cos. $(\varphi + \varphi')$ aufgelößt werde.

§. 108.

Dieses zeigt demnach überhaupt an, daß in der That die Winkel φ, φ' eine Function der Winkel ω, ω' sind, und jene mit diesen grösser werden. Daß sie aber in gleicher Verhältniß grösser werden, läßt sich nun folgender massen erweisen. Man stelle die Winkel ω, Fig. XXIII. ω', $(\omega + \omega')$ durch die Abscissen AP, AQ, AR vor, so, daß

AP

$$AP = \omega$$
$$AQ = \omega'$$
$$AR = \omega + \omega'$$

sey, so ist auch

$$AQ = PR, \text{ und } AP = QR$$

Ferners sey

$$PM = \varphi$$
$$QN = \varphi'$$
$$RL = \varphi + \varphi'$$

so ist auch wenn LK mit AR parallel gezogen wird,

$$PM = TN, \text{ und } SM = QN.$$

Hieraus folgt aber, daß AMLN keine krumme Linie seyn könne, sondern gerade seyn müsse. Denn zieht man durch A, L eine gerade Linie AmnL, so ist wegen $AP = TL$, auch

$$Pm = Tn \text{ und } Sm = Qn.$$

Und so muß M in m, N in n treffen, wie man auch immer die Abscissen AR, AQ, AP dergestallt annimmt, daß

$$AP + AQ = AR$$

sey. Demnach ist auch

$$AP : PM = AQ : QN = AR : RL$$

oder

$$\omega : \varphi = \omega' : \varphi' = (\omega + \omega') : (\varphi + \varphi')$$

§. 109.

Wenn wir demnach

$$\varphi = n\omega$$

setzen, so ist auch

$$\varphi' = n\omega'$$
$$\varphi'' = n\omega''$$
&c.

und

$$\varphi + \varphi' = n(\omega + \omega')$$
$$\varphi + \varphi' + \varphi'' = n(\omega + \omega' + \omega'')$$
&c.

§. 110.

Nun lassen sich drey Winkel ω, ω', ω'' immer so annehmen, daß ihre Summe $= 90°$ wird. In diesem Fall aber wirkt die Kraft unter dem Winkel $\omega + \omega' + \omega''$ rechtwinklicht, und so wird

$$\sin.(\varphi + \varphi' + \varphi'') = 1.$$
$$\cos.(\varphi + \varphi' + \varphi'') = \omega$$

das will sagen

$$\varphi + \varphi' + \varphi'' = 90°. = \omega + \omega' + \omega''$$

demnach

$$n = 1.$$

Es sind also nicht nur die Winkel φ in Verhältniß der Winkel ω, sondern sie sind einander durchaus gleich. Demnach ist BCD
Fig. XXI. $=$ CBA, und folglich CD die Diagonale des auf BCA zu beschreibenden Rectangels.

§. 111.

Fig. XXIV. Hieraus ergiebt sich nun der Fall für die Kräfte CA, CB die unter jedem schiefen Winkel auf einen Punct C wirken. Denn man vollende das Rectangel CbBß, so wird die

Kraft CB in Cb und Cϵ aufgelößt. Ferners trage man Cϵ aus A in δ, so sind die Kräfte CB, CA in Cb, Cδ aufgelößt. Vollendet man nun das Rectangel CbDδ, so wird die Diagonale CD die Kraft seyn, welche aus Cb, Cδ demnach aus CB, CA zusammengesetzt ist. Es ist aber CD ebenfalls die Diagonal des Parallelogramms CBDA, und damit ist die Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte auf das allgemeinste erwiesen. Ich werde indeß noch folgenden Satz beyfügen.

§. 112.

Es seyen 3 Kräfte CA, CD, CB auf den Fig. Punct C gerichtet, im Gleichgewichte. Man verlängere AC in Cα = AC, und BC in CE = BC. Sodann ziehe man dCb durch C auf AC senkrecht, und setze die Kraft CD in die zwo rechtwinklichten Cd, Cδ, ingleichem die Kraft CB in die zwo rechtwinklichten Cb, Cϵ aufgelößt; so ist

$$Cb = Cd$$
$$CA = C\epsilon + C\delta$$

Nun setzt man die Winkel

$$BC\alpha = \omega$$
$$DC\alpha = \omega'$$
$$ECD = \omega''$$

so ist

$$\omega + \omega' + \omega'' = 180^\circ$$

Ferner

Ferners wird

$$C\varsigma = CB \cos.\phi \quad Cb = CB \sin.\phi$$
$$C\delta = CD \cos.\phi' \quad Cd = CD \sin.\phi'$$

und demnach

$$CB.\sin\phi = CD.\sin\phi'$$
$$CA = CB.\cos\phi + CD.\cos\phi'$$

seyn. Aus diesen beyden Gleichungen findet sich

$$\cos\phi = \frac{CA^2 + CB^2 - CD^2}{2.CA.CB}$$
$$\cos\phi' = \frac{CA^2 + CD^2 - CB^2}{2.CA.CB}$$

und auf eben die Art erhält man

$$\cos\phi'' = \frac{CB^2 + CD^2 - CA^2}{2.CB.CD}$$

Es sind demnach ϕ, ϕ', ϕ'' die Winkel eines aus den drey Kräften A C, B C, D C formirten Triangels, und folglich

$$\phi + \phi' + \phi'' = 180°.$$

Wenn man demnach auch (§. 109.)

$$\phi + \phi' + \phi'' = n(\omega + \omega' + \omega'')$$

setzen wollte, so sieht man leicht, daß

$$180° = n.\,180°$$

folglich

$$n = 1$$

und damit

$$\phi = \omega,\ \phi' = \omega',\ \phi'' = \omega''$$

herauskömmt. Damit aber sind auch ω, ω', ω'' die Winkel eines aus AC, BC, DC gebildeten deren Triangels. Und das will nun sagen, diese Kräfte sind Diagonalen und liegen in deren Direction.

Erste Gründe der Dynamic.

XI. Das Entstehen der Bewegung.

§. 113.

Die erstgegebenen Beweise von der Zusammensetzung der Kräfte sind so unmittelbar aus der Natur der Sache selbst hergeleitet, daß sie von allem, was wir in den vorhergehenden Hauptstücken von dem Hebel und den daraus folgenden Bedingungen und Umständen des Gleichgewichtes erwiesen haben, schlechterdings unabhängig sind, ungeachtet die Sache selbst, nemlich die Zusammensetzung der Kräfte, allerdings auch daraus hergeleitet werden kann. Da sich hinwiederum auch die Theorie des Hebels aus der Zusammensetzung der Kräfte erweisen läßt, so hätten wir die ganze Abhandlung bey den erstbemeldten Beweisen anfangen und sodann die Theorie des Hebels darauf gründen können. Und dieses wäre in verschiedenen Absichten ganz natürlich gewesen, weil man die bey dem Hebel, und besonders bey dem gebogenen oder Winkelhebel angebrachte Kräfte, ungeachtet sie nicht auf einen und eben

den

den Punct unmittelbar wirken, dennoch als zusammengesetzt ansehen kann. Ja, man kann sagen, die Zusammensetzung dabey sey noch weniger einfach als da, wo die Kräfte auf einen Punct angebracht sind.

§. 114.

Ich werde mich aber hiebey nicht länger aufhalten, sondern zu denjenigen Wirkungen der Kräfte fortschreiten, wo die Frage: ob, oder wieferne sie sich a priori und auf eine geometrisch nothwendige Art erweisen lassen, ungleich schwerer wird. Denn, wie wir bisher gesehen haben, geht die Static oder Lehre des Gleichgewichtes mit der Geometrie zu gleichen Schritten; und wo immer Kräfte vorkommen, können sie keine andere Bedingungen des Gleichgewichtes haben. Was aber hingegen erfolge, wo eine Ueberwucht vorkömmt, oder kein Gleichgewicht statt hat, oder wo Kräfte wirken, ohne von andern Kräften im Gleichgewichte gehalten zu werden, das scheinen Fragen von ganz anderer Art zu seyn. Wollten wir uns hier nur an das halten, was die Erfahrung lehrt, und was folglich in der gegenwärtigen Welt statt findet, so wären diese Fragen bald erörtert, und dieses würde auch zum Gebrauche der Mechanic hinreichend seyn, wo man ein Pfund Bley als ein Pfund annimmt, ohne zu untersuchen, ob es nicht hätte schwerer oder leichter seyn können?

§. 115.

Die bereits oben (§. 3. 9.) gemachte Anmerkung, daß die Kräfte nicht sichtbar, sondern nur empfindbar sind, kann uns begreiflich machen, warum wir sie, wenn wir sie aufsuchen wollen, leicht mit ihren Wirkungen confundiren, und sie bald in der Materie, bald in ihrer Bewegung suchen. Die Bewegung setzt Kräfte voraus, dadurch sie verursacht wird; und hinwiederum scheint es, als ob sich ohne Bewegung keine Kraft gedenken lasse. Und so kann man richtig den Schluß machen, daß entweder Bewegung oder Kraft von Ewigkeit her seyn müsse. Solle eines von beyden seyn, so wird es die Kraft, und zwar in einem weit allgemeinern Sinn genommen, seyn, weil noch zu mehreren andern Kräfte erfordert werden, als nur zur Bewegung.

§. 116.

Ohne uns aber in solche Untersuchungen ferner einzulassen, so können wir bey den Begrif der Kraft bleiben, der uns in dem vorhergehenden zur Bestimmung der Gesetze des Gleichgewichtes gedient hat, und wozu derselbe klar genug, und man kann sagen, eben so klar war, als in der Geometrie der Begrif des Raumes (§. 12); der Begrif der Bewegung ist es nicht minder (§. 1. 2). Und so müßte man auch den Kräften den bey dem Gleichgewichte betrachteten Druck absprechen, wenn

man

man ansehen wollte, ob bey Aufhebung des Gleichgewichtes eine Bewegung erfolgen werde? Darüber kann man nicht anstehen. Und eben so ist es für sich einleuchtend, daß die Bewegung nach eben der Direction erfolgen werde, nach welcher die Kraft, sie mag nun einfach oder zusammengesetzt seyn, ihren Druck äussert. Wie es aber um die Dauer und Geschwindigkeit stehe, das muß etwas umständlicher untersucht werden, weil Zeit, Raum, Kraft, und das, was bewegt wird, oder die Materie, heterogene Grössen sind, wobey das Absolute von dem Relativen, und das, was in der gegenwärtigen Welt wirklich vorkömmt, von dem, was ebenfalls darin hätte vorkommen können, genau zu unterscheiden ist.

§. 117.

Sollen wir hiebey a priori gehen, so haben wir nur absolute Möglichkeiten und Unmöglichkeiten zu betrachten, und einander entgegen zu setzen, und bey dem Zusammensetzen der Möglichkeiten zu sehen, welche einander ausschliessen, oder nicht beysammen seyn können? So z. E. können wir, in Ansehung der Geschwindigkeit, ohne Bedenken, feste setzen, daß sie linear ist, und daher nur eine Dimension habe; das will sagen, daß das Quadrat, der Cubus, das Biquadrat ꝛc. der Geschwindigkeit, keine Geschwindigkeit sey, sondern wenn dadurch je etwas vorgestellt werden kann, etwas ganz anders vorgestellt werde. Hiedurch lassen

lassen sich diejenigen Fälle ausschliessen, wo die Geschwindigkeit mehr als eine Dimension haben würde.

§. 118.

Wir haben ferners das, was in Bewegung gesetzt werden solle, **Materie** genennt (§. 116), theils um es durch eine Benennung von der bewegenden Kraft zu unterscheiden, und in so fern wäre jeder andere Name dazu dienlich gewesen; theils auch weil in der wirklichen Welt in der That das, so in Bewegung gesetzt wird, den Namen Materie hat. Ein Körper bewegt sich, so viel wir wissen, nur sofern er Materie ist. Denn der Raum, den er einnimmt, bewegt sich nicht mit demselben, weil eben dadurch Bewegung Bewegung ist, daß der Körper aus einem Raum oder Orte in einen andern kömmt. Ob in dem Körper noch immaterielle Substanzen sind, können wir hier dahin gestellet seyn lassen, ungeachtet man Gründe hat die Kräfte, und besonders die elastische, als solche anzusehen.

§. 119.

Man hat ferners demjenigen, so durch Kräfte in Bewegung gesetzt wird, oder der Materie, eine Art von **Trägheit**, (inertia) oder **Kraft der Trägheit**, (vis inertiae) zugeeignet, wodurch die Materie der Bewegung widersteht, so, daß sie ohne wirkliche Anwendung der Kraft nicht bewegt wird. In diesem

Begriffe liegt etwas verwirrtes, wir mögen denselben nach Anleitung der Erfahrung a posteriori, oder nach der Abzählung der Möglichkeiten a priori betrachten. A posteriori betrachtet, kann man nemlich diese Trägheit der Materie der Wirkung der Kraft nicht so entgegen setzen, daß sie für sich zureichend wäre, dem Drucke einer Kraft das Gleichgewicht zu halten. Darüber ist man, nach Anleitung der Erfahrung ganz einig, daß die kleinste Kraft die gröste Masse in Bewegung setzen kann. Die Erfahrung giebt, daß der Unterschied nur auf die Geschwindigkeit ankömmt, als welche bey grösserer Kraft grösser, bey grösserer Masse kleiner ausfällt.

§. 120.

Hiebey kann man nun, a priori betrachtet, so viel einräumen, daß bey einer grössern **Kraft** eine grössere Geschwindigkeit gewirkt werde, als bey einer kleinern, wenn nemlich einerley **Materie** fortzudrücken ist. Denn sonst würde aus ungleichen Ursachen gleiche Wirkung erfolgen, und daher in der Wirkung bald mehr, bald minder seyn, als in der Ursache. So kann auch eine gleiche **Kraft** eine und eben dieselbe **Materie** nicht mit jeder Geschwindigkeit fortdrücken, denn so müßten alle Geschwindigkeiten zugleich vorkommen, und dieses gäbe demnach eine zweyte Dimension der Geschwindigkeit, welches

welches nicht angeht (§. 117). Demnach ist die **Geschwindigkeit bestimmt**, sobald **Materie und Kraft bestimmt ist.** Drückt nun eine Kraft k eine Materie m mit der Geschwindigkeit g fort, so thut eine andere Kraft k bey einer andern Materie m, und daher eine Kraft 2 k bey einer Materie 2 m eben dieses. Hingegen wird eine Kraft k diese Materie 2 m mit geringerer Geschwindigkeit fortdrücken, als die Kraft 2 k. Daher kann man allerdings annehmen, **daß sich die Geschwindigkeit vermindert, wenn bey gleicher Kraft die Materie vermehrt wird.**

§. 121.

Dadurch wird nun noch nicht erörtert, was es mit dieser Geschwindigkeit für eine Bewandniß habe. Es lassen sich aber dabey, ohne Mühe, drey Fälle gedenken. Denn einmal könnte die Materie so sehr träge seyn, daß sie, sobald die Kraft aufhört fortzudrücken, liegen bleibe. Ich werde mich hiebey nicht auf die Erfahrung berufen, welche uns täglich Beyspiele von einem solchen Fortschleppen aufweist. Denn diese Beyspiele gehören nicht hieher, weil man längst weiß, daß theils das Anreiben, theils das Fallen der Körper der Grund davon ist, weil solche Körper sich in parabolischen Bögen bewegen, die sich kaum über die Erde erheben. Ich werde demnach, und zwar als etwas Widersinniges sagen, daß, so viel ich mir die Sache vorstellen kann, eine solche **absolute Trägheit** der Materie in dem **völlig leeren Raume** statt habe. Ich sage nicht, in dem **von aller Materie leeren**, sondern in dem **völlig**, das will sagen, von jeden, auch immateriellen Substanzen, leeren **Raume**. In dem von jeder **Materie** leeren Raume gebe ich zu, daß ein einmal bewegter Körper mit gleicher Geschwindigkeit und in gleicher Direction fortfahren könne bewegt zu werden. In dem völlig leeren Raume kann ich mir diese Möglichkeit nicht vorstellen, so wie ich mir in demselben auch nicht vorstellen kann, daß nicht eine gleiche Kraft, jede Materie mit gleicher Geschwindigkeit sollte fortdrücken können. Denn solle überhaupt die Materie eine Trägheit, und demnach mehr Materie mehr Trägheit haben (§. 119. 120), so muß jede Materie an dem Orte, wo sie ist, dergestalt **haften**, daß eine Kraft erfordert wird, um sie wegzubringen. Dieses ist für sich klar. Nun stelle ich mir wenigstens eben so klar vor, daß dieses **haften** in einem völlig leeren Raume keine Bedeutung oder keinen Verstand hat. Nemlich die Materie mag darin in Ruhe seyn, aber diese Ruhe an sich, oder schlechthin als Ruhe betrachtet, hat keine Dimension oder Grösse, so, daß ein gewisser Grad der Kraft erfordert würde, um sie wegzunehmen. Ich will damit sagen: die Trägheit der Materie, wenn sie etwas mehr als **nicht in Bewegung**

seyn,

seyn, vorstellen solle, rührt nicht von der Materie allein, sondern zugleich auch von etwas ausser derselben her. Und dieses Etwas muß machen, daß die Materie nicht anderst als mit Anwendung, und, so zu reden, mit Aufopferung der Kraft in Bewegung gesetzt wird. Und eben dieses Etwas stelle ich mir als das Vehiculum zur Fortsetzung der Bewegung vor, sollte diese auch auf keine andere Art, als durch eine fortgepflanzte Undulation möglich seyn, vermittelst welcher die bewegte Materie fortgeführt wird. Ohne ein solches Vehiculum sehe ich auch nicht, wie die Materie sich weiter fortbewegen würde, als so weit sie von der Kraft getrieben wird; und ebenfalls ohne ein solches Vehiculum sehe ich auch nicht, wie in einem gänz leeren Raume ein motus progressivus entstehen könnte, weil selbst die Kraft, um fortdrücken zu können, sich irgend muß können ansperren.

§. 122.

Indessen da diese Betrachtung mehr in die Metaphysic als in die Mechanic gehört, so werde ich mich hier begnügen, die vorhin bemeldte absolute Trägheit der Materie, als eine bloße Möglichkeit anzusehen. Und in sofern macht sie den ersten von denen drey Fällen aus, die wir hier vorzuzählen haben. Der andere Fall ist, wenn die Kraft ihren Druck auf die Materie, sobald sie angebracht, oder das Gleichgewicht gehoben ist, ohne allen Verfluß einiger Zeit, dergestalt äussert, daß die Materie sogleich mit der völligen, aus der Aeusserung des Druckes entstehenden, Geschwindigkeit wegfährt. In diesem Fall hat der Druck, der Dauer nach, keine Dimension, weil man sonst auf eine zweyte Dimension der Geschwindigkeit verfallen würde, welches nicht angeht (§. 117). Es läßt sich daher zwar gedenken, daß nach dem ersten Drucke p, welcher die Geschwindigkeit c herfürbringt, ein zweyter, dritter ꝛc. angebracht, und dadurch die Geschwindigkeit 2c, 3c, n c &c. erhalten werden. Dieses sind aber numeri discreti und nicht quantitates continuae, dergleichen das Integrale ʃcdt angeben würde, wenn in jeder unendlich kleinen Zeit dt ein neuer Grad der Geschwindigkeit c hinzukäme.

§. 123.

Dieses klärt uns nun den dritten Fall auf, wo wir setzen, daß die Geschwindigkeit nicht mit einem male, oder ohne allen Zeitverlust erwachse. Denn da muß in jeder unendlich kleinen Zeit dt ein unendlich kleiner Theil dc der ganzen Geschwindigkeit c entstehen, weil wir sonst entweder den zweyten Fall, oder eine zweyte Dimension der Geschwindigkeit haben würden.

§. 124.

Die zween letztere Fälle (§. 122. 123.) grenzen gewissermassen an einander, weil man sich

sich die Zeit t, in welcher die ganze Geschwindigkeit c erwächst, so klein gedenken kann, als man will. Bey dem zweyten Fall gedenkt man t=o. Und soll dieses absolute seyn, so verstößt man wieder das Gesetz der Continuität, daferne man nicht auch die Intensität der Kraft unendlich annimmt. Ist hingegen t von einer Dauer oder endlichen Grösse, so muß man sich allerdings vorstellen, daß die Kraft ihren Druck nicht mit einem male auf das Herfürbringen der Geschwindigkeit verwende, weil in der Zeit dt nur dc herfürgebracht wird. Dieses ist nun aus einem gedoppelten Grunde gedenkbar. Denn einmal muß die Geschwindigkeit jeden Theilchen der Materie mitgetheilt, und daher auf alle vertheilt werden. Wenn sie dennach auch bey dem ersten Theilchen = c seyn würde, so würde sie, eben wegen dieser Vertheilung, auf dc reducirt. Man sieht hieraus zugleich, daß die Menge der Theilchen, oder die Menge und Grösse der Materie, die Geschwindigkeit dc vermindert, je grösser sie ist. Und eben so ist auch begreiflich, daß dieses Vertheilen der Geschwindigkeit eine Zeit dt fordert. Sodann kann man auch annehmen, daß selbst die Kraft ihren Druck auf eine so vertheilte Art äussert, und derselbe daher auch nur nach und nach aufgewandt wird. Ueberdies lassen sich bey der Kraft zwo Dimensionen, nemlich die Grösse und die Stärke, unterscheiden, weil eine Kraft sowol mehrern

Theilchen der Materie eine gleiche Geschwindigkeit, als jedem Theilchen eine grössere Geschwindigkeit geben kann; so, daß demnach beyde Dimensionen, oder die ganze Kraft k sich nach mdc schätzen läßt, und demnach dcvk : m, oder, wenn wir die Zeit noch mitnehmen, dc=kdt : m ist.

§. 125.

Die Nothwendigkeit dieser Formel gründet sich demnach darauf, 1°. daß jedes Theilchen der Materie eine Trägheit hat, und sich gleichsam an etwas ansperrt, um nicht anders als durch die wirkliche Anwendung der bewegenden Kraft bewegt werden zu können. 2°. Daß diese Trägheit der Menge der Materie proportional ist, oder daß sich jedes Theilchen der Materie gleich ansperrt, und dadurch zur Bewegung gleich träge ist. Hiebey läßt sich anmerken, daß wir die Materie und ihre Menge nicht anders als aus dieser Trägheit kennen, und daß wir uns demnach darüber sehr irren würden, wenn das vorhin (§. 121) erwähnte Vehiculum eine an verschiedenen Orten verschiedene Intensität hätte. Auf die Formel selbst hätte aber dieses dennoch keinen Einfluß, weil wir das, was von dieser Intensität herrührt, theils auf die Materie, theils auch auf die Kraft selbst schieben. 3°. Daß der Druck der Kraft sich auf die Materie vertheilt, und in Ansehung der Kraft selbst, wegen einer ähnlichen

lichen Vertheilung, nur nach und nach aufgewandt wird.

§. 126.

Wie nun immer hiebey die Dimensionen, die sich sowol bey der Kraft als bey der Materie gedenken lassen, müssen genommen werden, so liegt allemal dabey zum Grunde, daß die Fälle an sich unmöglich sind, wo eine mehr als lineare Geschwindigkeit herauskommen würde (§. 117). Um diese Bedingung deutlich zu machen, werde ich sie durch Beyspiele aufklären, die wirklich vorkommen. So z. E. haben wir oben (§. 77. 78.) gesehen, daß die Kraft der Schwere auf jede Theilchen der Materie, und zwar auf jedes directe und besonders drücke. Sie theilt demnach ihren Druck nicht erst den äussern Theilchen, noch vermittelst dieser den innern mit, so, daß sie erst communicationsweise vertheilt würde. Drückt man hingegen eine gespannte Feder gegen einen Körper loß, so verhält sich die Sache ganz anders; weil die Feder ihren Druck nur denjenigen Theilchen des Körpers unmittelbar mittheilt, welche sie berührt, und erst von diesen geht der Druck sodann in die innern Theile des Körpers, und breitet sich in demselben ganz aus. Hiebey ist nun offenbar, daß man die Kraft der Feder ganz anders nehmen müsse, als die Kraft der Schwere. Letztere hat für jedes Theilchen ein absolutes Maaß, und der Druck der Schwere wird mit der Anzahl der Theilchen weder stärker noch schwächer, sondern nur grösser. Hingegen hat der Druck der Feder, an sich betrachtet, eine absolute Stärke, welche aber, wenn sich derselbe auf den ganzen Körper vertheilt, in umgekehrter Verhältniß der Masse, in jedem Theilchen schwächer wird. Da die Geschwindigkeit, die in beyden Fällen erwächst, bloß linear oder von einer Dimension seyn muß (§. 117), so läßt sich allerdings gedenken, daß, so verschieden auch die Dimensionen dieser beyden Arten von Kräften sind, sie sich dennoch, wenigstens mittelst behöriger Coefficienten, welche die Heterogeneität der Dimensionen aufheben müssen, können vergleichen lassen.

§. 127.

Man sieht zugleich hieraus, daß die Bedingung der bloß linearen Geschwindigkeit sehr weit reicht, wenn man a priori die Möglichkeiten bey den bewegenden Kräften und der daraus entstehenden Bewegung bestimmen, und das, was dabey willkührlich und contingent scheinen möchte, behörig einschränken will. So erhellet auch zugleich, daß, wenn eine Masse mit einer bestimmten Geschwindigkeit bewegt werden solle, jedes Theilchen derselben einen Druck von bestimmter Stärke erhalten müßte, wie auch immer die drückende Kraft dabey angebracht seyn mag. Das Zufällige oder Willkührliche führliche mag darin gesucht werden, daß da Zeit, Raum, Geschwindigkeit, Masse, Kraft rc. keine absolute Einheit haben, sondern von o bis ins Unendliche gehen können, sie dennoch, wo sie existiren, eine bestimmte Grösse haben müssen. Da ist nun allerdings die Frage, ob nicht alles in gleicher, oder wenigstens in behöriger Verhältniß hätte grösser oder kleiner seyn können, schwerer zu entscheiden.

§. 128.

Da sichs demnach gedenken läßt, daß der Druck, den eine Kraft äussert, entweder unmittelbar auf jedes Theilchen der Materie wirkt, oder sich nur bey einigen unmittelbar äussert, oder endlich sich bey jedem Theilchen ungleich äussert, so wird derselbe, wegen der Solidität und der Bebindung dieser Theilchen, auf alle gleich vertheilt, oder, welches hier einerley ist, die ganze Masse erhält einen mittlern Grad der Geschwindigkeit, welcher sich nach den auf jedes Theilchen der Materie vertheilten Drucke proportionirt. Wird hingegen dieser Druck von einem gleich grossen und gleich vertheilten Drucke in entgegengesetzter Richtung aufgehalten, so findet ein Gleichgewicht statt. Hieraus wird begreiflich, wie sich ganz verschiedene Kräfte, wie z. E. der Druck der Schwere, der stählernen Federn, der zusammengepreßten Luft rc. vermittelst des Gleichgewichtes auf ein gemeines Maaß bringen, und selbst auch in Absicht auf die erfolgende Bewegung vergleichen lassen. Ersteres geht schlechthin an, letzteres fordert, daß man die Art der Kraft, oder die Art, wie sie ihren Druck äussert und mittheilt, genauer kenne. Denn da die Theorie a priori mehrere solche Arten als möglich angiebt, so muß, in besondern Fällen, a posteriori gefunden werden, welche davon vorkömmt. Das vorhin (§. 126) gegebene Beyspiel von der Schwere und elastischen Federn, mag auch hier zur Erläuterung dienen. Es ist für sich klar, daß solche mehrere Möglichkeiten der Nothwendigkeit der dynamischen Lehrsätze eben so wenig Abbruch thun, als die Möglichkeit mehrerer Figuren der Nothwendigkeit der geometrischen Lehrsätze. In beyden ist fürnemlich die Frage zu sehen, was aus gesetzten Möglichkeiten folge, und wiefern sie beysammen seyn können. Und dieses ist auch der Leitfaden, dem wir in dem Vortrage der dynamischen Grund- und Lehrsätzen zu folgen haben.

§. 129.

So z. E. können wir nun ferners feste setzen, daß, wenn eine Kraft ihren Druck gleichförmig, parallel und unmittelbar bey jedem Theilchen der Materie äussert, dadurch weder die Figur der ganzen Masse, noch die relative Lage der Theilchen unter sich geändert werde, es sey denn, daß ungleich entgegenwirkende Kräfte, oder ungleich angebrachte Hindernisse machen, daß einige Theile mehr als die andere, oder auch einige gar nicht nachgeben. Denn so lange die Materie dem Drucke der durchaus gleich angebrachten Kraft allein überlassen ist, da erhält, wegen des gleichen und parallelen Druckes, jedes Theilchen in einerley Direction einerley Geschwindigkeit. Da sich demnach die ganze Masse, oder das ganze System nach dieser Richtung und mit dieser Geschwindigkeit bewegt, so bleibt die relative Lage jeder Theilchen unter sich unverändert, und daher auch die ganze Figur ebenfalls. Daß dieses hingegen bey den angeführten Hindernissen anders seye, ist für sich klar.

§. 130.

Ist hingegen die Kraft entweder ungleich, oder nach verschiedenen Richtungen, oder auch nur bey einigen Theilchen angebracht, so sieht man ebenfalls, daß die ganze Masse eine absolute Festigkeit haben müste, wenn an der Figur und der relativen Lage der Theilchen nichts sollte verändert werden. Die Festigkeit, und überhaupt die Verbindung der Theilchen, wodurch sie nicht bloß wie ein Haufen Staubes an- und aufeinander liegen, sondern zusammen hängen, so, daß sie, ohne Kraft anzuwenden, nicht getrennt werden können, rührt offenbar von Kräften her, die nicht die Materie selbst, sondern von derselben verschieden sind. Oder, um dieses a priori vorzutragen, so können wir erstlich sagen: der Begriff der Materie, für

sich

sich betrachtet, enthalte keine solche Verbindung, hingegen bringe es der Begrif der Kraft mit sich, daß die Theilchen der Materie dadurch in Verbindung gebracht werden können, und zugleich auch, daß dieses immer in gewissen Grad geschehe, so, daß jede von einer gegebenen Kraft herrührende Verbindung, durch eine grössere Kraft gehoben, durch eine kleinere wenigstens vermindert werden könne, und zwar auch so, daß erstere wiederum ganz wirkt, wenn letztere weggenommen, oder anders angewandt wird. In der Natur geben die elastische und nicht elastische Körper eben so viele Beyspiele. Man kann auch leicht zeigen, daß die Elasticität nirgends ganz absolut, sondern nur relativ ist. So ist es zum Sprichwort geworden, daß ein stets gespannter Bogen seine Elasticität, wo nicht verleurt, doch merklich schwächt; und eine bleyerne Kugel wird bey geringer Geschwindigkeit eine Elasticität zeigen, die sie bey grössern Geschwindigkeiten ganz verleurt.

§. 131.

Wenn eine Kraft nur auf einige Theilchen, oder auch nur auf einen Punct eines festen oder harten Körpers ihren Druck äussert, und dieser Druck sodann sich auf jede Theilchen verbreitet; so wird der Körper, ohne sich zu drehen, bewegt werden, so oft die Direction des Druckes durch den Vereinigungspunct der einzeln Kräfte, oder den sogenannten Mittelpunct

der

der Schwere geht (§. 74) Denn man setze in entgegengesetzter Richtung sey eine gleich vertheilte und gleich grosse Kraft angebracht; so wird eine Linie, welche in gleicher Richtung durch den Mittelpunct der Schwere, oder den Vereinigungspunct der Kraft geht, diejenige seyn, von welcher §. 65 die Rede war. Demnach wird ein Gleichgewicht statt haben. Und welche von beyden Kräften man wiederum wegnimmt, so wird sich der Körper nach dieser Linie bewegen. Wäre die angebrachte Kraft der Druck einer Feder, so kann die Bedingung des Satzes nur alsdann erfüllt werden, wenn dieser Druck da angebracht wird, wo die aus dem Mittelpunct der Schwere gezogene gerade Linie die Oberfläche des Körpers senkrecht durchschneidet. Denn der Druck der Feder ist immer auf die Fläche senkrecht, und folglich kann dessen Richtung nur nach den Mittelpunct der Schwere gehen, wo erstbemeldte Linie die Oberfläche des Körpers senkrecht durchschneidet.

§. 132.

Wir haben den Beweis des erstangeführten Satzes dadurch abgekürzt, daß wir denselben auf den in den vorhergehenden Abschnitten gegebenen reducirten. Der Grund dieser Reduction liegt darin, daß man ähnliche Schlusse zu machen hat, es sey, daß man für eine vertheilte Kraft den Vereinigungspunct sucht, oder aus diesem auf die vertheilte Kraft schließt.

Man

Fig. IV. Man setze z. E. eine unbiegsame Linie, und eine Kraft drücke nach der senkrechten Richtung CD auf den Punct C, so kann diese Kraft als auf jeden Punct A, B, P, M &c. vertheilt angesehen werden, weil man in jeden diesen Puncten entgegengerichtete Kräfte anbringen kann, so, daß C deren Vereinigungspunct, und die Summe dieser Kräfte der in C angebrachten gleich sey (§. 20). In einem Körper lassen sich unzählige solcher Linien gedenken, und, in Absicht auf die Vertheilung der Kraft, eben so betrachten, wie wir sie in den vorhergehenden Abschnitten, in Absicht auf die Vereinigung derselben betrachtet haben. Bey wirklich materiellen Körpern setzt jedes Theilchen dem Druck der Kraft seine Trägheiten entgegen, und da wir diese bey jedem gleich setzen (§. 125. No. 2); so wird dadurch die Kraft auf alle gleich vertheilt, sobald die Richtung der Kraft durch den Mittelpunct der Schwere, oder den Vereinigungspunct gleich vertheilter paralleler Kräfte geht. Denn die Trägheit eines jeden Theilchen läßt sich als eine solche Kraft gedenken, welche sich in paralleler Richtung der angebrachten Kraft entgegensetzt. Und dieses ist auch der Grund warum erstbemeldter Vereinigungspunct, der Mittelpunct der Trägheit, centrum inertiae, genennt werden kann.

§. 133.

Man setze nun hingegen die Richtung der auf einen Punct des Körpers angebrachten Kraft, gehe

gehe nicht durch diesen Mittelpunct der Trägheit, so ist für sich klar, daß sich der Körper drehen muß, weil der Widerstand, den der Körper der Kraft entgegen setzt, nicht auf beyden Seiten der Richtungslinie gleich ist.

§. 134.

Setzt man endlich der Körper sey nicht absolute hart, so lassen die vorhin bemeldten unbiegsamen Linien (§. 132.) in demselben nicht gedenken; und aus gleichem Grunde fällt auch die Vertheilung der Kraft ganz anders aus, weil die Theilchen, wo die Kraft unmittelbar angebracht ist, wo nicht ganz allein, wenigstens mehr nachgeben, als die entferntern. Hiebey kommt nun alles auf die Beschaffenheit der Kräfte an, womit die Theilchen des Körpers zusammenhängen (§. 130). Und in so fern läßt sich nichts allgemeines darüber sagen, weil man vorerst die verschiedenen Möglichkeiten dabey in Classen bringen, und sodann jede für sich betrachten muß. So viel sieht man leicht, daß, so lange die Theilchen ihre relative Lage ändern, keine gemeinsame Bewegung des ganzen Körpers statt hat, daß der Mittelpunct der Trägheit selbst seinen relativen und auch seinen wahren Ort ändert, und daß nur alsdann die gemeinsame Bewegung erfolgt, wenn die Figur nicht ferner mehr geändert werden kann. Denn alsdann kommen die unbiegsamen Linien wieder vor.

X. Die Bestimmung der Geschwindigkeit.

§. 135.

Da wir nun in der Dynamic a priori zu gehen, eigentlich nur Möglichkeiten zum Grunde zu legen, und die Folgen derselben zu erörtern haben (§. 128), so ist es zum Behuf ihrer Anwendung auf die in der Natur vorkommenden Kräfte, immer gut, daß diese Folgen so weit getrieben werden, bis man auf solche kömmt, die sich allgemein umkehren lassen, und wo sie vorkommen, leicht kenntlich sind. Denn auf diese Art läßt sich sodann auf die in der Welt wirklich angebrachte Möglichkeit in jedem Fall, und mit Ausschliessung der übrigen, der Schluß machen, weil solche Folgen, im eigentlichsten Verstande, zu Kennzeichen werden. So ist die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers sichtbar, so unsichtbar auch die Kraft und die Art ihrer Wirkung ist (§. 115. 128). Läßt sich demnach aus dem Gesetze, wie die Geschwindigkeit anwächst, auf die Art schliessen, wie die Kraft wirke, so hat man dabey immer ein vieles gewonnen, weil in vorkommenden Fällen die Erfahrung ersteres leichter als letztere angiebt. Diese Betrachtung wird uns demnach hier zum Leitfaden dienen. Sie ist der ächte und eigentliche Weg, das so man a priori

findet,

findet, auf das anzuwenden, was a posteriori gefunden wird.

§. 136.

Wir fangen zu dem Ende bey dem einfachsten Fall an, welcher bey dem allmähligen Entstehen der Geschwindigkeit und der Bewegung (§. 123. 124) vorkommen kann. Wir setzen nemlich erstlich, der Körper sey hart, und dieses macht, daß wir denselben eben so wie die Wirkung der Kraft, als in den Mittelpunct der Trägheit concentrirt ansehen können (§. 72. 132). Sodann setzen wir, die Richtung der Kraft auf diesen Punct bleibe, so lange die Wirkung dauert, eben dieselbe; und dieses macht, daß die entstehende Bewegung geradelinicht bleibt, und demnach auch in Absicht auf die Richtung einfach ist. Endlich setzen wir, daß ungeachtet dieser Punct sich nach und nach geschwinder bewegt, diese Geschwindigkeit auf die fernere Wirkung der Kraft keinen Einfluß habe, so, daß sie auf den bewegten Körper eben so drücke, als wenn derselbe noch in Ruhe wäre. Man kann aus dem §. 129 seqq. sehen, wo die erste dieser Voraussetzungen, nemlich die absolute Härtigkeit des Körpers nicht unumgänglich nöthig ist, und wo sie hingegen, wenn man einerley Erfolg haben will, nicht wegbleiben kann. In Ansehung der beyden andern Bedingungen begnügen wir uns hier damit, daß sie gedenkbar sind, ohne auf die verschiedenen Arten des mechanismi zu sehen, wodurch sie in der That erhalten werden können. Da auch jede dieser Bedingungen, für sich betrachtet, die beyden andern ganz unbestimmt läßt, so ist die Möglichkeit, daß sie in einem System beysammen seyn können, ebenfalls gedenkbar. Wir haben daher nur zu sehen, was in dem System daraus ferner folge.

§. 137.

Einmal da die Geschwindigkeit nur nach und nach anwächst, so seye sie zu jeder Zeit t, $= c$. Und so wird ihre Zunahme in der Zeit dt, $= dc$ seyn (§. 123). Nun ist in dem ersten Zeittheilchen dt, da der Körper noch in Ruhe ist, die Wirkung der Kraft diese, daß sie demselben die Geschwindigkeit dc durch ihren Druck mittheilt. Da nun vermög der dritten Voraussetzung die Kraft auf den bewegten Körper eben so, wie auf den noch ruhenden wirkt, so theilt sie demselben in jedem gleich grossen Zeittheilchen dt, eine gleiche Zunahme der Geschwindigkeit dc mit. Demnach verhalten sich nach jeder Zeit t die Summe aller dc, wie die Summe aller dt. Da nun die Summe aller $dt = t$, die Summe aller $dc = c$ ist, so ist c in beständiger Verhältniß von t, und daher

$$c = mt$$

Es sey nun der in der Zeit t durchlauffene Raum $= x$, so ist der in der Zeit dt mit der Geschwinschwindigkeit c durchlaufene Raum $= c\,d\,t = dx = mtdt$. Diese Formel integrit, giebt

$$x = \frac{1}{2}mt^2 = \frac{1}{2}c^2:m$$

und auf diese Art haben wir nun Zeit, Raum und Geschwindigkeit mit einander verglichen. Der Raum wächst wie das Quadrat der Zeit, und so auch wie das Quadrat der Geschwindigkeit, und Zeit und Geschwindigkeit nehmen in gleicher Verhältniß zu.

§. 138.

Die gefundenen drey Formeln

$$c = mt$$
$$x = \frac{1}{2}mtt$$
$$x = \frac{1}{2}cc:m$$

sind nun in solcher Verbindung unter sich, daß wo eine derselben statt findet, auch die übrigen statt finden. Da wir die beyden letztern aus der ersten hergeleitet haben, so ist dieser Fall bereits erwiesen. Es sey demnach

$$x = \frac{1}{2}mtt$$

so ist $dx = mtdt$

demnach $mt = dx:dt = c$

Und so folgt die erste, und damit auch die dritte Formel aus der zweyten. Wiederum sey

$$x = cc:2m$$

so ist $dx = cdc:m$

demnach $dc = mdx:c$

Es ist aber

$$dx:c = dt$$

folglich $dc = m\,dt$
welches integrirt
$$c = mt$$
die erste Formel giebt. Da nun diese die zweyte giebt, so folgen auch beyde ersten Formeln aus der dritten. Demnach, wo eine derselben statt findet, da finden die beyden andern auch statt.

§. 139.

Diese Abhänglichkeit der drey Formeln von einander macht, daß wir uns in folgender Betrachtung an die erste, als die einfachste, halten können, wo wir sie mit den drey Bedingungen vergleichen werden, aus welcher sie hergeleitet sind (§. 136). Ich sage demnach, daß, wo in einem fürgegebenen Fall die zwo ersten dieser Bedingungen statt finden, und die bemeldten Formeln finden statt; sodann auch die dritte Bedingung statt finden werde. Man setze, sie haben nicht statt, so wirkt die Kraft auf den bewegten Körper stärker oder schwächer, als auf den ruhenden (§. 136. No. 3). Demnach ist dc für jedes gleiche Zeittheilchen dt nicht mehr von einerley Grösse, sondern muß als eine Function der bereits erlangten Geschwindigkeit c angesehen werden, so, daß wenn diese Function $= g$ ist,
$$dt = g\,dc$$
und daher
$$t = \int g\,dc$$
sey.

sey. Nun aber ist, vermög der Voraussetzung $t = mc$

demnach $mc = \int gdc$

$mdc = gdc$

demnach $m = g$, das will sagen, g ist beständig. Da nun g eine Function von c ist, so müßte auch c beständig seyn, demnach die Geschwindigkeit nicht anwachsen. Da nun dieses der Bedingung zuwider ist, so hat die Aussage des Satzes nothwendig ihre Richtigkeit.

§. 140.

Da in dem hier betrachteten Fall (§. 136 seq.) die Geschwindigkeit wie die Zeit anwächst, das Anwachsen der Zeit aber gleichförmig ist, so ist auch das Anwachsen der Geschwindigkeit gleichförmig. Und dieses ist der Grund, warum man den hier betrachteten Fall, den Fall der **gleichförmig beschleunigten Bewegung** motus uniformiter acceleratus, nennet. Demnach, wo eine solche Bewegung in geradlinichter Richtung vorkömmt, und der Körper als in seinen Mittelpunct der Trägheit concentrirt angesehen werden kann, da folgt der Schluß nothwendig, daß die beschleunigende Kraft, vis acceleratrix, dem Körper in jeden gleichen Zeittheilchen dt eine gleiche Zunahme der Geschwindigkeit mittheile, und auf den bewegten Körper eben so wirke, als wenn derselbe noch in Ruhe wäre. Wir werden im folgenden sehen, daß dieser Umstand bey dem durch die Kraft der Schwere verursachten Körper vorkommt.

§. 141.

Ungeachtet wir nun bey dem erstbetrachteten Fall Zeit, Raum und Geschwindigkeit in Vergleichung gebracht haben, so bleibt doch deren Verhältniß zu der Kraft selbst noch unerörtert. Wir haben demnach zu erweisen, daß sich die Geschwindigkeit nach der Grösse der Kraft richtet, oder in gleicher Verhältniß mit derselben grösser oder kleiner ist, immer unter der Voraussetzung, daß die einmal erlangte Geschwindigkeit des Körpers in die fernere Wirkung der Kraft keinen Einfluß habe, oder daß die Kraft auf den bewegten Körper eben die Wirkung äussere, als auf den noch ruhenden. Dieser Umstand macht nun, daß wenn der Körper, anstatt von einer Kraft gedrückt zu werden, zugleich von zwo, drey &c. n gleichen Kräften gedrückt wird, jede von diesen Kräften ihre Würkung eben so äussert, als wenn sie allein wäre, weil die Bewegung des Körpers, die aus der Wirkung der übrigen erfolgt, vermöge der Voraussetzung, daran nichts ändert; und weil hier eben so wie oben (§. 102) eine Kraft n deswegen $= n$ ist, weil sie für n einfache Kräfte gesetzt werden kann. Wenn demnach die Kraft 1 in der Zeit 1 die Geschwindigkeit 1 herfürbringt, so bringen n Kräfte in eben

eben der Zeit 1 die Summe der Geschwindigkeiten, oder die Geschwindigkeit n herfür, und zwar deswegen in der Zeit 1, weil sie zugleich wirken, und jede ihre Wirkung, das will sagen, eine Geschwindigkeit $= 1$, herfürbringt. Da nun jede Geschwindigkeit von einer Kraft herrührt, und der Druck von n Kräften eben der ist, wie der Druck von einer Kraft n, so bringt eine Kraft n die Geschwindigkeit n herfür, wenn in gleicher Zeit die Kraft 1 die Geschwindigkeit 1 herfür bringt. Demnach wird die Geschwindigkeit in gleicher Verhältniß mit der Kraft grösser oder kleiner.

§. 142.

Hieraus folgt nun ferner, daß, da vermög des vorhin erwiesenen, eben die Geschwindigkeit n von der Kraft 1 in der Zeit n herfürgebracht wird, man an der Zeit gewinnt, was man an der Kraft vermehrt, und daß einerley Geschwindigkeit erhalten werde, wenn die Kraft in umgekehrter Verhältniß der Zeit ist. Demnach haben wir wenn die Zeit $= t$, die Kraft $= k$, die Geschwindigkeit $= g$ gesetzt wird, die Formel

$$g = ntk$$

wo n eine Grösse bedeutet, die bey gleicher Masse des Körpers, und da wo die Kraft unmittelbar auf jedes Theilchen wirkt, für sich beständig ist. Wirkt aber die Kraft nicht unmittelbar auf jedes Theilchen, so, daß sie erst communicationsweise vertheilt wird, so haben wir oben schon gesehen, daß dieselbe in umgekehrter Verhältniß der Masse schwächer wird (§. 132). Setzt man demnach für diese Fälle k sey die absolute Kraft, so wird n in umgekehrter Verhältniß der Masse kleiner, wenn die Masse des Körpers grösser genommen wird. Setzt man demnach für diese Fälle die Masse $= m$, so wird man

$$g = \frac{tk}{m}$$

haben.

§. 143.

Nach der bisher angestellten Untersuchung des einfachsten Falls (§. 136 seq.) werden sich nun diejenigen beurtheilen lassen, die zusammengesetzter sind. Hieher gehören nun erstlich diejenigen, wo die Kraft sich während der Wirkung verändert. Für diese Fälle müssen wir statt der Formel

$$g = \frac{tk}{m}$$

die Differentialformel

$$dg = \frac{kdt}{m}$$

nehmen, weil sich nicht g nach k, sondern in jedem Zeittheilchen dt, die Zunahme der Geschwindigkeit nach k. dt proportionirt. Denn obgleich sich während diesem Zeittheilchen k in k+dk verändert, so sieht man leicht, daß, weil

weil k nur dg herfürbringt, dk nur ddg herfürbringen könne, und demnach durch die ganze Summe von allen dk nur dg herfür gebracht werde, welche Grösse neben g, so durch $\int\frac{kdt}{m}$ herfür gebracht wird, verschwindet.

§. 144.

Es kömmt aber bey der Formel

$$dg = \frac{kdt}{m}$$

wo nunmehr auch k als veränderlich angesehen wird, darauf an, daß man wisse, nach welchem Gesetze sich k verändere. Mir ist kein Fall bekannt, wo k schlechthin nur, der Zeit nach, oder bloß deßwegen, weil die Wirkung dauert, grösser oder kleiner werde. Ich sage, *schlechthin nur der Zeit nach*. Denn da k nicht zugleich verschiedene Grösse haben kann, so ist für sich klar, daß, aus welchen Ursachen auch immer k grösser oder kleiner wird, dieses nach und nach geschehe, und sich folglich allemal auch ein Verhältniß zwischen k und t gedenken läßt. Hingegen kann k viel unmittelbarer von dem Raume abhängen, und dies geschieht, so ofte die Kraft nicht aller Orten gleich wirkt. Man setze demnach den durchlaufenen Raum $= x$, so ist $gdt = dx$, demnach $dt = dx : g$. Wird dieser Werth gesetzt, so verwandelt sich die Formel in

$$dg = \frac{kdx}{mg}$$

oder

oder $gdg = kdx : m$.

Da nun k eine Function von x ist, so darf man nur x durch k, oder k durch x bestimmt haben, und es wird

$$\tfrac{1}{2} mgg = \int kdx$$

seyn. Da man sich leicht gedenken kann, daß zwischen k und x unzählige Verhältnisse möglich sind, so muß in jedem Fall aus Betrachtung der Sache, ihrer Umstände und Folgen erörtert werden, welche davon wirklich vorkömmt.

§. 145.

Endlich kann man sich auch gedenken, daß k sich nach der Geschwindigkeit g richte, und dieses hat nothwendig statt, so oft die Kraft in einen bewegten Körper stärker oder schwächer wirkt, als in einen ruhenden. In diesen Fällen ist k eine Function von g, und demnach

$$t : m = \int dg : k$$

$$x : m = \int gdg : k$$

Man sieht leicht, daß auch hier die Verhältniß zwischen g und k aus den Umständen, Natur und Folgen der Sache bestimmt werden muß. Eigentlich betrift die Aenderung, die k von der Geschwindigkeit des Körpers leiden kan, mehr die Wirkung der Kraft, als die Kraft selbst. Da aber in diesen Formeln k wegen der Wirkung vorkömmt, so kann der Werth davon allerdings, in dieser Absicht, als veränderlich angesehen werden, weil es in sofern einerley

nerley ist, ob sich die Kraft, oder nur ihre Wirkung ändert. Der Erfolg ist einerley, und der Unterschied ist nur, daß sodann k die relative Wirkung vorstellt, weil eigentlich die Wirkung der Kraft auf einen ruhenden Körper absolut ist.

XI. Anwendung der Dynamic auf die Schwere.

§. 146.

Die Versuche, die von Galilaeo und seit demselben über den Fall der Körper theils in freyer Luft, theils in luftleeren Raume sind angestellt worden, geben überhaupt an, daß ein Körper desto tiefer fällt, je grösser das Quadrat der Zeit ist. Demnach zeigen diese Versuche, daß $x = \frac{1}{2} m t t$ ist. Und hieraus folgt, daß die (§. 138) angegebenen drey Formeln bey dem Fall der Körper statt habe, und daher derselbe eine gleichförmig beschleunigte Bewegung sey (§. 140). Nun haben wir oben (§. 77. 78) gesehen, daß die Kraft der Schwere, in verticaler Richtung, unmittelbar auf jedes Theilchen der Materie ihren Druck äussere, und folglich allemale als in dem Mittelpunct der Schwere vereinigt angesehen werden kann (§. 79). Dieser Punct kann nun um destomehr statt des ganzen Körpers genommen werden, da dessen relative Lage in dem Körper,

Körper, auch wenn er fällt, unverändert bleibe (§. 129).

§. 147.

Hieraus folgt nun aber, daß die Geschwindigkeit, die der Körper im Fallen erreicht, der fernern Wirkung der Schwere keinen Abbruch thut, oder, daß die Kraft der Schwere auf fallende Körper eben so, und weder mehr noch minder als auf ruhende wirkt. Wir haben, um dieses zu beweisen, nunmehr weiter nichts zu thun, als den vorhergehenden §. 146 mit dem §. 139 zu vergleichen, um ohne Mühe zu finden, daß die im §. 139 geforderten Bedingungen bey dem Falle der Körper statt finden. Diese Bedingungen sind

1°. Die drey Formeln des §. 138. oder, wegen ihrer eben daselbst erwiesenen Abhänglichkeit, auch nur eine.

2°. Daß der Körper als in dem Mittelpunct der Trägheit concentrirt angesehen werden könne.

3°. Daß die Richtung der Kraft auf diesen Punct eben dieselbe bleibe, so lange die Wirkung dauert.

Nun ist (§. 146) bey dem Fall der Körper

1°. Die Formel $x = \frac{1}{2} mtt$, demnach auch die beyden anderen (§. 138).

2°. Vereinigt sich die Wirkung der Schwere in dessen Mittelpunct der Schwere, oder der Trägheit (§. 79. 132).

3°. Ist

3°. Ist die Richtung sowohl der Kraft als des fallenden Körpers eine verticale Linie (§. 77. 78).

Da demnach diese drey Bedingungen erfüllt werden, so folgt auch der Schlußsatz, den wir in angeführtem §. 139 daraus gezogen, so nothwendig, daß das Gegentheil desselben mit diesem Bedingungen nicht bestehen kan (§. 139). Demnach wirkt die Schwere auf fallende Körper eben so wie auf ruhende.

§. 148.

Da wir ferner (§. 78) gesehen haben, daß die Kraft der Schwere ihren Druck unmittelbar bey jedem Theilchen äussert, so wird dieselbe nicht erst von einigen derselben auf alle vertheilt, noch durch eine solche Vertheilung bey jedem Theilchen schwächer. Und hieraus wird begreiflich, daß die Grösse des Körpers oder seine Masse, oder die Menge der Theilchen die Geschwindigkeit des Fallens nicht ändert, wie dieses geschieht, wo die Kraft erst in den Körper vertheilt wird (§. 142). Man hat auch wirklich gefunden, daß in luftleerem Raume jede Körper mit gleicher Geschwindigkeit fallen.

§. 149.

Die leichteste Art, wodurch die Richtung des Falls eines Körpers geändert wird, ist, wenn derselbe auf einer schiefliegenden Fläche

F. XXVI. sich herunter bewegt. Es sey AB eine solche Fläche, die unter dem Winkel BAD gegen den Horizont AD geneigt ist. Der Körper befinde sich in C, und die Kraft der Schwere, wodurch er würde nach H herunter gedrückt werden, wenn die Fläche AB nicht wäre, werde durch die verticale Linie CE vorgestellt. Man ziehe EF mit AB parallel, EG, CF aber auf AB senkrecht, so ist CE die Diagonale des Rectangels CFEG. Da es nun vermög des §. 107 gleichviel ist, wenn man statt der Kraft CE, die zwo senkrechten Kräfte CF, CG auf C drücken läßt, so wollen wir dieses setzen. Und da ergiebt sich von selbst, daß, da die Kraft FC den Körper senkrecht gegen die Fläche AB drückt, diese Kraft den Körper schlechthin nur in Ruhe erhalten würde, wenn sie allein wäre. Demnach kömmt alle Bewegung, die der Körper erhält, von der Kraft GC her. Und da diese Kraft in gleicher Richtung mit CA wirkt, so drückt sie den Körper schlechthin und ohne andere Hinderniß nach dieser Richtung herunter. Da nun CE, ohne Rücksicht auf die Bewegung des Körpers, immer einerley bleibt, und der Winkel CEG, CGE ebenfalls ihre Grösse behalten, so bleibt auch CG beständig, und theilt daher den Körper C in iedem Zeittheilen dt eine gleiche Zunahme der Geschwindigkeit dc mit. Da aber CG kleiner ist als CE, so ist auch dc in gleicher Verhältniß kleiner als dg, oder die Zunah-

Zunahme der Geschwindigkeit, welche die absolute Kraft der Schwere CE dem Körper in eben der Zeit mittheilen würde (§. 141). Demnach haben wir

$$CE : CG = dg : dc$$

oder

$$1 : \cos ACH = dg : dc$$

und hieraus

$$dc = dg . \cos ACH.$$

$$c = g . \cos ACH$$

oder wenn man HJ auf AB senkrecht zieht

$$c : g = CJ : CH$$

Da nun die Geschindigkeit g wie die Zeit zunimmt (§. 147), c aber derselben proportional ist, so nimmt auch die Geschwindigkeit c wie die Zeit zu. Daher sind auch die in gleicher Zeit durchlaufenen Räume den Geschwindigkeiten proportional, weil

$$\int g dt : \int c dt = CH : CJ$$

wird. Demnach wird CJ und CH in gleicher Zeit durchlaufen. Endlich folgt daraus, daß c in gleicher Verhältniß wie t zunimmt, daß der Körper auch auf der schiefliegenden Fläche mit gleichförmig beschleunigter Geschwindigkeit herunterläuft (§. 140) und der durchlaufene Raum, sowohl in Verhältniß des Quadrats der Zeit, als auch in Verhältniß des Quadrats der erlangten Geschwindigkeit sey (§. 137). Wenn man demnach die Zeit, in welcher der Körper vertical durch CH fallen würde = 1, und die in H erlangte Geschwindigkeit ebenfalls $= 1$ setzt, so ist die Zeit, in welcher CJ durchlaufen wird ebenfalls $= 1$, hingegen die in J erlangte Geschwindigkeit nur $= \cos JCH$. Man setze nun die Zeit um CA zu durchlaufen seye $= \tau$, die Geschwindigkeit in A seye $= \gamma$, so haben wir

$$CJ : CA = 1 : \tau^2 = \cos ACH^2 : \gamma^2$$

demnach

$$1 : \tau = \cos ACH : \gamma = \sqrt{CJ} : \sqrt{CA}$$

Es ist aber

$$\sqrt{CJ} : \sqrt{CA} = CH : CA = \cos ACH : 1$$

demnach

$$1 : \tau = \cos ACH : \gamma = \cos ACH : 1$$

und hieraus

$$\tau = \sec ACH$$

$$\gamma = 1.$$

Das will nun sagen, wenn der Körper aus C bis auf die Horizontallinie AD kömmt, es sey daß er durch CH gerade, oder nach jeder schiefen Fläche CA herunter falle, so erhält er in H oder in A einerley Geschwindigkeit, hingegen gebraucht er desto längere Zeit, je länger der Raum CA als CH ist. Da die Erfahrung dieses ebenfalls bekräftigt, so könnte man hieraus, wiewohl a posteriori, den Schluß ziehen, daß

$$dc : dg = CG : CE$$

seye. Da aber dieser Schluß unter eben der Bedingung, daß die Schwere auf bewegte, wie auf ruhende Körper einerley Druck äussere, gezo-

gezogen wird, aus welcher wir denselben im vorhergehenden (§. 141) a priori gezogen haben, so halten wir uns hier damit nicht länger auf.

§. 150.

Wäre AB nicht eine ebene, sondern gebogene Fläche, so würde der Winkel ACH von veränderlicher Grösse seyn, und damit hätten wir nicht

$$c = g . \cos ACH$$

sondern nur

$$c = \int dg . \cos ACH$$

oder

$$c = \int \frac{CG}{CE} . dg$$

Da nun (§. 143)

$$dg = \frac{kdt}{m}$$

ist, so ist

$$c = \int \frac{CG . k}{CE . m} . dt = \int \frac{k . dt}{m} . \cos ACH$$

Hier kann man nun $k = CE$ setzen, weil CE die absolute Kraft der Schwere vorstellt, und so wird

$$c = \int \frac{CG . dt}{m}$$

seyn. Wir werden uns aber hier nicht aufhalten, diese Formel auf einige krumme Linien oder gebogene Flächen anzuwenden, theils weil dieses schon zur Genüge geschehen ist, fürnemlich aber weil unsere Absicht mehr auf die deutlichere Entwickelung der dynamischen Grundsätze als auf die Betrachtung dessen geht, was daraus folgt, wenn sie einmal in Richtigkeit sind. Der Anstand und die Streitigkeiten, so man darüber geführt hatte, betreffen auch fürnemlich nur diesen letztern Punct.

XII. Anwendung der Dynamic auf die Federkraft.

§. 151.

Ich werde hier, ohne zu untersuchen, durch welchen Mechanismus eine gespannte Feder eine Kraft hat zu drücken, schlechthin nur annehmen, daß sie eine solche Kraft habe, und um nicht Nebenumstände einzumengen, werde ich diese Kraft vollkommen setzen; das will sagen, die Feder solle, wenn sie loßgeschnellt wird, oder auch nachdem sie ihren Druck auf einen Körper geäussert hat, vollkommen wiederum ihre vorige Figur erhalten. Denn bliebe sie mehr gebogen, als sie vor dem Spannen ware, so würde von ihrer Kraft etwas abgegangen seyn; und eben dieses ist es, warum man sie in solchem Fall unvollkommen nennt.

§. 152.

So viel nun immer die Feder gespannt ist, ist sie mit derjenigen Kraft, wodurch sie gespannt erhalten wird, im Gleichgewichte, und daher ist die Kraft der Feder der spannenden Kraft gleich. Da nun eine Feder durch Gewichte gespannt werden kann, so läßt sich da-durch ihre Kraft, bey jedem Grade der Spannung mit der Kraft der Schwere vergleichen, weil sie das angehängte Gewicht eben soviel in die Höhe drückt, als dasselbe von der Schwere herunter gedrückt wird. Da sich nun die Kraft der Feder auf jedes Theilchen der Materie des Gewichtes eben so vertheilt, als die Kraft der Schwere wirklich vertheilt ist (§. 126) so wird auch jedes Theilchen von beyden Kräften gleich viel gedrückt, und demnach erhält es, welche von beyden Kräften weggenommen wird, in dem ersten Zeittheilchen d t, einerley Geschwindigkeit d g. Denn das Gewicht ist, sowol in Absicht auf die Kraft der Schwere, als in Absicht auf die Kraft der Feder, schlechthin nur Materie, und setzt daher beyden nur die sogenannte Trägheit entgegen (§. 119 seqq.)

§. 153.

Solle nun die Vergleichung weiter können fortgesetzt werden, so kömmt es darauf an, wiefern man setzen kann, die Feder äussere auf einen bewegten Körper eben den Druck, den sie bey gleicher Spannung auf eben denselben äussert, wenn er in Ruhe ist? Solle diese Frage a priori und nach aller Schärfe erörtert werden, so müssen wir die Feder immateriel setzen, und zwar aus einem ähnlichen

Grunde, aus welchem wir oben (§. 14 seqq.) eine immaterielle unbiegsame Linie angenommen haben. Denn eine materielle Feder hat, wegen eigener Trägheit, eine Kraft nöthig, sich selbst fortzudrücken. Man könnte zwar auch die der Feder eigene Materie mit zum Gewichte nehmen, dadurch würde aber die Erörterung der Frage nur weitläuftiger. Setzen wir demnach die Feder immateriel, oder wir betrachten sie als eine elastische Linie, so ist für sich klar, daß sie ihren Druck nicht deswegen äussert, weil sie durch das Loßschnellen eine Geschwindigkeit erhält. Denn dieser Druck ist da, auch wenn sie im Gleichgewichte erhalten wird. Demnach ändert die Bewegung an diesem Drucke nichts. Da nun dieser Druck sich deswegen äussern kann, weil der Körper währendem Fortdrücken immer an der Feder anliegt, so muß auch nothwendig die Geschwindigkeit d g eben dieselbe seyn, es sey daß die Bewegung erst anfange, oder schon erfolgt seye.

§. 154.

Man kann sich dieses auch so vorstellen: Der Körper hat, in Absicht auf die Feder, keine relative Bewegung, weil beyde einander immer berühren, und folglich mit gemeinsamer Geschwindigkeit fortbewegt werden. Da nun die Feder, weil sie immateriel ist, keine Kraft braucht, sich selbst fortzudrücken, so kann sie immer ihre ganze Kraft auf den Körper wenden.

§. 155.

Es sey nun ein elastischer Ring AB in dem Punct A befestigt. Der gegenüberstehende Punct B werde gegen A gedrückt, und dadurch der Diameter AB verkürzt. Die krumme Linie BE seye von der Art, daß bey jeder Verkürzung AP, die Ordinate PM die Kraft vorstelle, welche den Ring bis in P zusammen drücken kann. Nun sey der Ring bis in D zusammengedrückt, und nachdem in D ein Körper, z. E. eine harte Kugel an denselben gelegt worden, schnelle der Ring loß, und treibe die Kugel gegen B fort; so ist die Frage, nach welchen Gesetzen dieses geschehen werde? Um dieses zu finden, setze man die Kugel sey nach einer Zeit t, aus D bis in P gekommen, und BP = x, PM = k die Masse der Kugel = m, die Geschwindigkeit = g, so haben wir vermög des §. 143 Fig. XXVII.

$$dg = kdt : m$$

und eben so vermög des §. 144, weil hier x rückwerts genommen wird,

$$-gdg = kdx : m = PMmp : m$$

demnach

$$\tfrac{1}{2}gg = -\int\frac{kdx}{m} = \frac{DEMP}{m}$$

Wird nun die gröste Geschwindigkeit in B, = G gesetzt, so sieht man leicht, daß

$$GG = \frac{2DEB}{m}$$

ist.

§. 156.

Nun stellt der Raum, wiewohl nach einer zweyten Dimension, die Summe aller einzelnen Kräfte vor, mit welchen der Ring auf die Kugel gedrückt hat. Wird demnach dieser Raum durch die Linie D C dividirt: so ist DEB : D D die mittlere Kraft, womit die Kugel ist gedrückt worden. Und diese mittlere Kraft ist von der Art, daß, wenn der Ring die Kugel durch die ganze Linie D B beständig mit dieser Kraft fortgedrückt hätte, sie in B eben die Geschwindigkeit G würde erreicht haben, welche sie durch die nach und nach verminderte Kraft R erreicht hat.

§. 157.

Setzen wir demnach diese mittlere Kraft

$$DEB : DB = P$$

so ist

$$DEB = P . DB$$

und demnach (§. 155)

$$GG = 2 . P . DB : m$$

Also ist das Quadrat der zuletzt erhaltenen Geschwindigkeit G im Verhältniß der mittleren Kraft P, wenn diese vorerst mit dem von der Kugel durchlaufenen Raum D B multiplicirt, und durch die Masse der Kugel dividirt wird. Demnach ist dieses Quadrat nicht absolute in Verhältniß der mittlern Kraft P; und noch weni-

weniger ist es in Verhältniß der grösten angewandten Kraft DE. Denn wäre dieses, so würde

$$DE \backsim \frac{DEB}{m}$$

seyn. Demnach würde sich, bey verschiedenen Kugeln und einerley Ring, DE nach der Masse der Kugel richten, welches ungereimt ist, weil DE das absolute Maaß der Kraft des Ringes vorstellt, die derselbe bey der Zusammendrückung AD hat. Und wenn auch m immer beständig von gleicher Grösse wäre, so würde

$$DE \backsim DEB$$

seyn, welches nicht angeht, dafern nicht EB eine logarithmische Linie ist. Sollte aber dieses seyn, so wäre die Ordinate in B nicht $= o$, und überhaupt nirgends $= o$, das will sagen, der Ring wäre kein Ring, weil er seinen Diameter AB immer verlängern würde. Man sieht leicht, daß diese letztere Ungereimtheit auch vorkommt, wenn man gleich

$$m.GG \backsim DE$$

oder das Product aus dem Quadrat der Geschwindigkeit in die Masse der Kugel der grösten angewandten Kraft DE proportional setzen wollte. Diese Anmerkung trägt sehr viel dazu bey, wenn man das Leibnitzische Kräftenmaaß, welches eben $= mGG$ ist, beleuchten will. Denn man sieht aus der Formel

$$mGG = P.DP$$

daß m G G theils keine Kraft vorstellt, und der Kraft P nur unter sehr veränderlichen Bedingungen proportional ist, weil DP bey jedem Ringe nach Willkühr angenommen werden kann, je nachdem man denselben, mehr oder minder, zusammendrucken will.

§. 158.

Um nun die Formeln (§. 155)

$$dg = kdt : m$$
$$gdg = kdx : m$$

auf bekannte Maasse zu bringen, so kann man erstlich sowohl k als m durch Gewichte ausdrücken, weil das Gewicht, in Absicht auf k, eine der Federkraft gleiche Kraft der Schwere, in Absicht auf die Masse m aber derselben Trägheit vorstellt, als welche sich der Schwere eben so wie der Kraft der Feder widersetzt (§. 152). Sodann wendet man diese Formeln auf den Fall der Körper an, um die Geschwindigkeit durch die Höhe auszudrücken, durch welche ein Körper fallen muß, um diese Geschwindigkeit zu erreichen. Bey dieser Anwendung stellt nun k die Kraft der Schwere vor, und wird dem Gewichte m gleich gesetzt, weil dieses Gewicht von der Schwere herrührt. Auf diese Art erhält man

$$g = t$$
$$\tfrac{1}{2}gg = x = \tfrac{1}{2}tt$$

Will man nun die Zeit in Secunden, die Höhe x in rheinländischen Fussen, und die Geschwindigkeit

digkeit durch den Raum vorstellen, den der Körper, vermittelst der Geschwindigkeit g, in einer Secunde Zeit durchlaufen kann; so giebt die Erfahrung, daß

$$x = \frac{1000}{64} \cdot tt$$

demnach

$$dx = \frac{1000}{32} \cdot tdt$$

und

$$g = dx : dt = \frac{1000}{32} t$$

$$\frac{1}{2} gg = \frac{1}{2} \left(\frac{1000}{32}\right)^2 \cdot tt = \frac{1000}{16} x$$

ist. Da demnach hier, wegen der angenommenen Einheiten, Coefficienten vorkommen, so werden wir

$$\frac{32}{1000} \cdot g = \int \frac{kdt}{m}$$

$$\frac{16}{1000} \cdot gg = \int \frac{kdx}{m} = v$$

erhalten, und da ist v diejenige Höhe, von welcher ein Körper fallen muß, um die Geschwindigkeit g zu erhalten.

XIII. Der Stoß elastischer Körper.

§. 159.

Es seyn zween elastische Ringe A C, C B in dem gemeinsamen Berührungspunct C befestigt, von ungleicher Grösse, aber von gleicher Schnellkraft. Das Maaß der Fig. XXVIII.

Schnell-

Schnellkraft werde, wie vorhin (§. 155) durch die Ordinaten PN, pn der krummen Linien AE, Be vorgestellt, so ist $PN = pn$, wenn AP und Bp in Verhältniß der Diameter AC, BC sind. Denn dieses verstehen wir durch die angenommene Gleichheit der Schnellkraft. Man setze nun der Ring AC sey in DC, und der Ring BC in dC zusammengedrückt, so, daß $AC : DC = BC : dC$ sey, und indem man in D und d Kugeln legt, deren Massen m, M sich umgekehrt wie die Diameter AC, BC verhalten, so lasse man beyde Ringe loßschnellen. Die Geschwindigkeit der Kugel m in A sey $= C$, die Geschwindigkeit der Kugel M in B sey $= c$, so ist (§. 155)

$$CC = 2\,AED : m$$

$$cc = 2\,Bed : M$$

demnach

$$CC : cc = \frac{AED}{m} : \frac{Bed}{M}$$

Nun ist aber das Verhältniß der Räume

$$AED : Bed = AD : Bd = AC : BC$$

das Verhältniß der Massen aber

$$m : M = BC : AC$$

demnach

$$\frac{AED}{m} \cdot \frac{Bed}{M} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BC}{AC} = AC^2 : BC^2$$

Und folglich

$$CC : cc = AC^2 : BC^2$$

oder

oder $C:c = AC:BC = M:m$

Das will sagen, die Geschwindigkeiten verhalten sich umgekehrt wie die Massen, oder directe wie die durchlaufenen Räume, weil

$$AC:BC = AD:BD$$

ist. Demnach werden die Räume AD, Bd, und so auch jede Räume PD, pd in gleicher Zeit durchlaufen, weil, was wir von den ganzen Räumen AED, Bed gesagt haben, von jeden zwischen gleiche Ordinaten fallenden Räumen PNED, pned gilt.

§. 160.

Um nun aus diesem Satze den daraus entspringenden Vortheil zu ziehen, so folgt erstlich daraus, daß die beyden Kugeln m, M nicht nur anfangs da sie in D und d gleich gedrückt werden, sondern da sie in gleicher Zeit in P und p kommen, wo $PN = pn$ ist, sie in jedem Augenblicke mit gleicher Kraft fortgedrückt werden. Nun wird der Punct C in jedem Augenblicke von jedem Ringe so viel als die Kugel gedrückt, die der Ring forttreibt. Da nun jede Kugel gleich gedrückt wird, so wird auch der Punct C von jedem Ringe gleich gedrückt. Da ferner die Richtungen einander entgegengesetzt sind, so sieht man leicht, daß ein Gleichgewicht da ist, und folglich der Berührungspunct beyder Ringe, auch wenn er nicht bevestigt wäre, dennoch in Ruhe bleiben würde. Da nun allemale

CP

$$CP : Cp = M : m$$

ist, so läßt sich der Punct C als der Mittelpunct der Schwere beyder Massen m, M ansehen (§. 32. 74).

§. 161.

Man lasse nun die beyden Kugeln jede mit der erlangten Geschwindigkeit gegen die Ringe laufen, m mit der Geschwindigkeit C gegen A, und M mit der Geschwindigkeit c gegen B, so, daß sie zu gleicher Zeit in A und B an die Ringe stossen; so werden sie ihre Geschwindigkeit eben so verlieren, wie sie sie vorhin erhalten haben; ferners werden sie in jeden gleichnahmigten Puncten P, p in gleicher Zeit eintreffen; und endlich werden sie die Ringe bis wiederum in D und d zusammendrücken. Denn da der Druck eines jeden Ringes sich, ohne Rücksicht, auf die Bewegung der Kugel gleich äussert (§. 153. 154), so theilt der Ring AB der Kugel m in jedem Punct P eben die Geschwindigkeit dg mit, die Kugel mag sich von P gegen A oder gegen C bewegen. Der Unterschied besteht demnach nur darin, daß, weil die Geschwindigkeit dg die Kugel in beyden Fällen von C gegen A entfernt, sie im erstern Fall die Geschindigkeit der Kugel vermehrt oder dazu addirt wird, im andern Fall aber dieselbe vermindert oder davon subtrahirt wird. Da demnach für jeden Punct P in beyden Fällen

$$-gg = \frac{2}{m} \int k dx + \text{const.}$$

ist; so haben wir für den ersten Falle, wie §. 155

$$gg = \frac{2 . DENP}{m}$$

im andern aber

$$C^2 - g^2 = \frac{2 ANP}{m}$$

Nun ist vermög der Voraussetzung

$$C^2 = \frac{2 AED}{m}$$

demnach im andern Fall

$$\frac{2 AED}{m} - gg = \frac{2 ANP}{m}$$

oder

$$gg = \frac{2 (AED - ANP)}{m} = \frac{2 DENP}{m}$$

das will nun sagen, daß die Kugel in jedem Punct P, in beyden Fällen, einerley Geschwindigkeit habe. Der Unterschied ist demnach nur, daß g im ersten Fall die erlangte, im andern aber die noch übrigbleibende Geschwindigkeit ist. Demnach ist im andern Fall die Geschwindigkeit eben so wie im ersten Fall = o, wenn die Kugel in D ist. Endlich aus eben dem, daß in jedem Punct P in beyden Fällen einerley Geschwindigkeit g ist, folgt, daß auch in beyden Fällen gleichnahmigte Räume P D, P A in einerley Zeit durchlaufen werden. Da nun alles dieses auch für die Kugel M gilt, so wird auch deren Geschwindigkeit c = o, wenn

sie

sie bis in d kömmt; und in beyden Fällen gebraucht sie nun einerley Räume p d, p B zu durchlaufen einerley Zeit, weil sie ebenfalls in jedem Punct p in beyden Fällen einerley Geschwindigkeit hat. Nun sind in dem ersten Fall für beyde Kugeln die Zeiten gleich (§. 159), demnach sind sie es für beyde Kugeln auch in dem andern Fall.

§. 162.

Man setze nun, anstatt daß die Kugeln m, M mit den Geschwindigkeiten C, c gegen die Ringe laufen, die Ringe seyen selbst an die Kugeln befestigt, und laufen mit den Kugeln gegen einander, so wird, wenn die Ringe in C aneinander stossen, der Punct C in Ruhe bleiben, und die Zusammendrückung eben so wie vorhin erfolgen. Denn sobald in vorhergehendem Fall die Kugeln in A, B anfangen die Ringe zu berühren und zusammen zu drücken, so haften sie an diesen Punct eben so, wie wenn sie daran befestigt wären, und der Punct C bleibt in Ruhe. Da nun die gemeinsame Bewegung der Kugeln und Ringe, so lange sie nicht zusammenstossen, an ihrer Figur nichts ändert; so sieht man leicht, daß es gleichviel ist, ob die Ringe durch die Bewegung in die Lage A C B kommen, oder ob sie bereits darin gewesen sind, weil der Druck erst anfängt, wenn die Ringe in C einander berühren.

§. 163.

Endlich sieht man auch, daß es gleichviel ist, ob man die Kugeln, vermittelst elastischer Ringe, an einander stossen läßt, oder ob man setzt, die Kugeln selbst seyn elastisch und stossen unmittelbar an einander. Die Folgen werden immer noch gelten, wenn der Diameter der Kugeln = AC, CB, ihre Massen = m, M, die Elasticität gleich, und die Geschwindigkeiten umgekehrt, wie die Massen sind. Die Kugeln werden nemlich in Verhältniß ihrer Diameter zusammengedrückt, der Punct C bleibt in Ruhe, und nach dem Zusammendrücken treiben sich die Kugeln wieder von einander und erlangen ihre Geschwindigkeiten eben so wieder, wie sie dieselben bey dem Zusammendrücken verlohren haben.

§. 164.

Wollte man hingegen beyde Ringe an eine Kugel befestigen, und die Kugeln mit eben den Geschwindigkeiten gegeneinander laufen lassen, so würde das Zusammendrücken eben so erfolgen. Denn da die Bewegung an der Kraft der Ringe nichts ändert, so ist der Erfolg immer dieser, daß in jedem Zeittheilchen jeder Kugel ein Theilchen der Geschwindigkeit benommen wird, welches in gerader Verhältniß der Kraft, und in umgekehrter Verhältniß der Masse ist. Nun ist die Kraft der Ringe gegen sich selbst und gegen jede Kugel immer gleich.

Demnach verleurt jede Kugel von ihrer Geschwindigkeit ein Theilchen, welches umgekehrt wie ihre Masse ist. Da nun die anfängliche Geschwindigkeiten ebenfalls umgekehrt wie die Massen sind, so geht die Geschwindigkeit von jeder Kugel auf eine proportionale Art verlohren. Demnach kommen die Kugeln in gleicher Zeit aus A in P, und aus B in p. Da nun alsdann die Zusammendrückungen CP, Cp sind, so bleibt der Punct C währendem Zusammendrücken in Ruhe.

§. 165.

Man sieht nun überhaupt, daß so viel auch immer zween elastische Körper sich währendem Stoße zusammendrücken, und nach dem Stoße wieder voneinander treiben, die relative Geschwindigkeit eben so wieder hergestellet wird, wie sie währendem Stoße verlohren gienge. Ferner, daß weil die elastische Kraft von der Bewegung nicht geändert wird, und sich gegen den einen Körper wie gegen den andern äussert, die relative Geschwindigkeit auf beyde Körper in umgekehrter Verhältniß ihrer Masse vertheilt wird, und sich demnach immer ein Punct C gedenken läßt, von welchem sie sich in eben dieser Verhältniß der Geschwindigkeit entfernen. Sind nun die absoluten Geschwindigkeiten diesen relativen vor dem Stoße gleich, so sind sie es auch nach dem Stoße, und der Punct C bleibt in Ruhe.

§. 166.

§. 166.

Aus diesem Fall läßt sich nun leicht herleiten, welche Aenderung in der absoluten Geschwindigkeit eines jeden Körpers vorgeht, wenn dieselbe nicht in umgekehrter Verhältniß der Masse ist. Denn da die beyden Körpern gemeinsame Geschwindigkeit in dem Erfolge des Stosses nichts ändert; so sey die Geschwindigkeit des Körpers $M = V$, die Geschwindigkeit des Körpers m, $= v$, und zwar beyde in gleicher Richtung, so, daß weil $V > v$ ist, der Körper M den Körper m erreicht, indem er sich demselben mit dem Ueberschusse oder der relativen Geschindigkeit $V - v$ nähert, und mit eben derselben sich nach dem Stosse wieder entfernt. Vertheilt man nun die relative Geschwindigkeit in umgekehrter Verhältniß der Massen, so nähert und entfernt sich M mit der Geschwindigkeit $m.(V-v) : (M+m)$, hingegen m mit der Geschwindigkeit $M.(V-v) : (M+m)$. Da nun vor und nach dem Stosse die gemeinsame Geschwindigkeit $= v + \frac{M.(V-v)}{M+m}$ ist, weil der Punct, dem sie sich nähern und von dem sie sich entfernen, als ruhend betrachtet wird; so ist nach dem Stosse die Geschwindigkeit des Körpers M

$$C = v + \frac{M.(V-v)}{M+m} - \frac{m.(V-v)}{M+m} = \frac{2mv + V(M-m)}{M+m}$$

und die Geschwindigkeit des Körpers m

$$c = v + \frac{M.(V-v)}{M+m} + \frac{M.(V-v)}{M+m} = \frac{2VM - v(M-m)}{M+m}$$

§. 167.

Wenn man nun hiebey nachrechnet, so findet sichs, daß

$$M.V^2 + m.v^2 = M.C^2 + mc^2$$

demnach die Summe der Producte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeit, vor und nach dem Stosse, eben dieselbe ist. Es kann dieses auch nicht fehlen, weil die eine Summe wie die andere den Raum $2\int k\,dx$ gleich ist (§. 155).

§. 168.

Sind nun die Körper nicht vollkommen elastisch, so ist die relative Geschwindigkeit $V - v$ nach dem Stosse geringer. Man setze sie demnach $= n\,(V - v)$. Da nun dieselbe ebenfalls in umgekehrter Verhältniß der Massen vertheilt wird, und die gemeinsame Geschwindigkeit eben dieselbe bleibt; so finden sich die absoluten Geschwindigkeiten nach dem Stosse

$$C = v + \frac{M.(V-v)}{M+m} - \frac{n.m(V-v)}{M+m} = \frac{MV + mv - n.m\,(V-v)}{M+m}$$

$$c = v + \frac{M(V-v)}{M+m} + \frac{n.M(V-v)}{M+m} = \frac{MV + mv - n.M(V-v)}{M+m}$$

§. 169.

§. 169.

In diesen Formeln wird nun $n = 1$, wenn die Elasticität beyder Körper vollkommen ist, und hingegen $n = 0$, wenn sie gar keine Elasticität haben. Für solche Körper ist demnach

$$C = \frac{MV + mv}{M + m}$$

$$c = \frac{MV + mv}{M + m}$$

demnach $C = c$

§. 170.

Für jede andere Fälle, wo die Elasticität weder vollkommen noch $= 0$ ist, wird n durch einen Bruch ausgedrückt, der < 1 und > 0 ist. Der Werth dieses Bruches hängt nicht nur von der Elasticität der Körper, sondern mit dieser zugleich auch von der relativen Geschwindigkeit $V - v$ ab (§. 130).

§. 171.

Ueber den schiefen Stoß elastischer Körper, werde ich nur so viel anführen, als nöthig seyn wird, um zu zeigen, daß eine deutlich auseinandergesetzte Theorie desselben ungleich schwerer und weitläuftiger ist, als man sie gewöhnlich vorträgt. Der einfachste Fall ist, wenn eine elastische Kugel schief gegen eine unbewegliche und ebenfalls elastische Fläche läuft. Der Erfolg wird folgendermassen gezeigt. Gegen

F.XXIX. die Fläche GH laufe die Kugel C nach der schiefen Richtung AC. Es stelle AC die Kraft vor, womit die Kugel mit eben der Geschwindigkeit senkrecht auf die Fläche drücken würde; so läßt sich diese Kraft, vermittelst des Rectangels ADCF, in die zwo senkrechte Kräfte DC, FC auflösen. Dieses ist vermög des §. 107. ganz richtig. Nun ist DC mit der Fläche GH parallel, demnach drückt die Kraft DC nicht gegen die Fläche, sondern nur die Kraft FC, welche gegen dieselbe senkrecht gerichtet ist. Diese Kraft wird nun ganz aufgewandt, um die Kugel bis auf einen gewissen Grad zusammen zu drücken. Wenn dies aber geschehen ist, so wird die Kugel, wegen ihrer Schnellkraft, wieder gegen F von der Fläche weggedrückt, und die Kraft, so die Kugel dadurch erhält, ist eben so wie die Geschwindigkeit eben dieselbe, die sie vor dem Anstossen hatte. Da nun die Kraft DC die Kugel schlechthin nur gegen E drückt, so macht man CE = CD, und setzt die Kräfte CF, CE vermittelst des Rectangels CFBE zusammen. Demnach ist die Diagonale CB nach dem Stosse die Richtung und Grösse der Kraft der Kugel. Da nun CB = CA ist, so ist auch die Geschwindigkeit der Kugel nach dem Stoß eben dieselbe, wie vor dem Stosse, und der Reflexionswinkel BCE dem Einfallswinkel DCA gleich.

§. 172.

§. 172.

In diesem Vortrage habe ich davon abstrahirt, daß AC, DC, CF, CE, CB, nicht nur Kräfte, sondern zugleich auch die Geschwindigkeiten vorstellen sollen. Letzteres ist bloß phoronomisch (§. 2), weil es nicht die Zusammensetzung der Kräfte, sondern schlechthin nur der Bewegung betrift. Man gedenkt sich nemlich, die Kugel bewege sich auf der Linie AF mit der Geschwindigkeit AF, während dem sich diese Linie selbst mit der Geschwindigkeit AD der Fläche GH nähert. Denn so wird, wenn die Kugel in den Punct der Linie F kömmt, dieser Punct zugleich mit der Kugel in C seyn, und sich folglich in der That durch AC bewegen. Sie hat demnach wirklich weder die Bewegung AD noch die Bewegung AF; und man kann sie sich auch nicht als zwo Kugeln vorstellen. Sodann wird in dem Vortrage auch nicht angegeben, was man durch die Kräfte AC, DC, FC, EC, BC eigentlich versteht. Denn was man hiebey Kraft nennen kann, fängt erst an sich zu äussern, wenn die Kugel an der Fläche C anstößt. Denn alsdann ist der Berührungspunct entweder in gar keiner, oder wenigstens in langsamerer Bewegung als der Mittelpunct der Kugel; und eben dieses macht, daß die Kugel zusammengedrückt wird. Durch dieses Zusammendrücken fängt ihre elastische Kraft, welches hier die einige gedenkbare Kraft ist, an, sich zu äussern, und zwar immer stärker, bis die Zusammendrückung am größten ist. Will man demnach diese Schnellkraft durch eine Linie AC vorstellen, so wird AC von veränderlicher Grösse, oder wenn man die Grösse beybehalten will, von veränderlicher Bedeutung, weil sie eine immer grösser werdende Kraft vorstellt. Löst man diese Kraft in DC, CF auf, so ist die Bedeutung von DC, CF eben so veränderlich wie die von AC. Daß aber die Verhältniß zwischen denselben, oder der Winkel DCA bleibe, muß erst erwiesen werden. Der Berührungspunct fängt unstreitig an, nach der Richtung FC die elastische Fläche GH einwärts zu drücken, alldieweil die Bewegung des Mittelpuncts noch sehr merklich nach der Richtung AC geht. Da er sich indessen, wegen des Zusammendrückens der Kugel, dieser Fläche nähert, so bleibt er nicht auf der Linie DE, sondern durchläuft inner derselben eine kleine krumme Linie, wobey AC, CB die äussersten Tangenten sind. Sodann kann man nur sagen, daß die Kugel auf das Zusammendrücken ihre Geschwindigkeit, nicht aber ihre Kraft verwende. Denn die Kraft derselben, welche eigentlich die Schnellkraft ist, äussert sich bis zur größten Zusammendrückung immer stärker, und nachgehends immer schwächer. Daß die Kugel nach der Richtung CB und mit der anfänglichen Geschwindigkeit wieder wegfahre, läßt sich, überhaupt betrachtet,

begrei-

begreifen. Man sieht aber aus erstgesagtem, daß der deutliche und richtig auseinandergesetzte Beweiß davon ganz anders vorgetragen werden muß, und weder leicht noch einfach ist. So viel sieht man wohl, daß wenn A C die Geschwindigkeit vorstellt, und $= g$ gesetzt wird, in jedem Zeittheilchen dt sodann

$$gdg = kdx : m$$
$$dg = kdt : m$$

und folglich

$$dt.\,dg = kdt^2 : m = ddx$$

seyn werde (§. 155). Da nun hier die Masse der Kugel m beständig bleibt, und dt ebenfalls beständig angenommen wird, so ist dg und so auch ddx in Verhältniß von der Schnellkraft k. Alles dieses aber dient nur, wenn die Kugel mit der Geschwindigkeit g senkrecht gegen die Fläche G H läuft. Will man demnach setzen, die Geschwindigkeit A C könne in zwo andere D C, F C aufgelöst werden, und man nennt die Geschwindigkeit $CF = \gamma$, so wird man ebenfalls

$$\gamma d\gamma = \varkappa d\xi : m$$

haben. Demnach wird

$$gg : \gamma\gamma = \int kdx : \int \varkappa d\xi$$

seyn. Sollen nun hiebey A C, F C zugleich auch die Kräfte k, $\varkappa$ vorstellen, so wird dieses nicht durchaus angehen, daferne man nicht

$$k : \varkappa = x : \xi$$

demnach in der 27. Figur B E eine gerade Linie ist (§. 155). Ich habe vermittelst eines stählernen Ringes die Krümmung dieser Linie untersucht, und gefunden, daß sie von B bis in M, und noch weiter, von einer geraden Linie sehr unmerklich verschieden ist. Dieses hiesse aber die Sache a posteriori erörtern, wozu es mehrere Mittel giebt. Ich werde mich demnach dabey nicht aufhalten, sondern noch folgende Betrachtungen hersetzen.

§. 173.

Durch das Anstossen der Kugel an die Fläche wird sie in eine ovale Figur zusammengedrückt, deren kürzere Axe immer gegen die Fläche senkrecht ist. Denn wenn man den Druck auch schief setzen wolte, so würde sichs durch die Auflösung desselben in DC, CF zeigen, daß nur der senkrechte CF wirksam ist. Nun kömmt durch das Zusammendrücken der Mittelpunct C der Fläche näher, und wenn man den Abstand $= x$ setzt, so ist die elastische, oder eigentlich drückende Kraft k desto grösser, je kleiner x ist, so, daß man k als eine Function von x ansehen kann, die schlechthin nur von x abhängt, weil die Bewegung der Kugel an derselben nichts ändert, und die Masse der Kugel einerley bleibt. Die Richtung dieser Kraft k ist nun immer auf der Fläche senkrecht, und der Erfolg davon ist, daß sie in jedem Zeittheilchen dt der Kugel eine Geschwindigkeit dg mittheilt, wodurch die Kugel von der Fläche weg getrieben wird. Es ist daher eben soviel, als

wenn

wenn die Fläche eine zurücktreibende Kraft k hätte, welche als eine Function von der Distanz x ist. Da nun diese Kraft in beyden Fällen ihre Wirkung in dem Mittel-Punct der Kugel vereinigt, so läßt sich die ganze Masse der Kugel, als in ihren Mittelpunct concentrirt ansehen. Dadurch wird nun die Aufgabe von der Bewegung dieses Mittelpuncts auf folgende reducirt.

§. 174.

Es sey A B eine ebene, KL eine mit derselben parallellaufende Fläche, die Fläche AB habe eine zurücktreibende Kraft k deren Wirkung innert der Fläche K L sich äussere, und aller Orten eine Function der Distanz QN = x sey. Nun bewege sich ein materieller Punct D nach der Richtung D E, so wird derselbe, sobald er in E kömmt, durch die Kraft k von der geradlinichten Richtung D E abgelenkt, und daher eine krumme Linie E F G durchlaufen, bis derselbe in G von der Wirkung der Kraft k weiter nicht mehr abgelenkt, sondern in gerader Linie G H fortbewegt wird. Dieses ist nun, überhaupt betrachtet, der Erfolg. Um denselben näher zu bestimmen, setze man der Punct sey in N gekommen, und würde, ohne die fernere Einwirkung der Kraft k nach der tangentialen Richtung N v fortbewegt werden. Da nun die Kraft k denselben immer ablenkt, Fig. XXX.

so

so durchläuft er nicht N v, sondern das Element des Bogens N r. Demnach ist die Wirkung der Kraft diese, daß der Punct anstatt in v zu seyn in r ist. Die Zeit, in welcher diese Wirkung vorgeht, und in welches ebenfalls N r durchlaufen wird, sey $= dt$. Da nun die Bewegung des Puncts an der Wirkung der Kraft nichts ändert, so sieht man leicht, daß v r eben die Grösse haben würde, wenn der Punct sich nicht durch N v, sondern durch n v, ohne die Einwirkung der Kraft k, in eben der Zeit d t bewegt hätte. Denn n v stellt vor, wie viel sich der Punct der Fläche genähert hätte; und eben so stellt v r vor, um wie viel weniger sich derselbe genähert hat. Es sey demnach

$$EN = w \quad Nr = dw$$

$$QN = x \quad nr = -dx \quad vr = ddx$$

die Masse des Puncts $= m$, seine Geschwindigkeit nach der Richtung N v sey $= \gamma$, die nach der Richtung n v, oder die Geschwindigkeit der Näherung $= g$, so haben wir (§. 172)

$$ddx = kdt^2 : m$$

Ich fange bey dieser Formel an, weil sie von der Geschwindigkeit nicht abhängt, sondern die absolute Wirkung der Kraft vorstellt. Da aber diese Kraft schlechthin nur die Geschwindigkeit des Annäherens vermindert, so haben wir allerdings auch

$$dg = kdt : m$$

weil

weil $ddx : dt = dg$ ist. Und demnach auch

$$gdg = kgdt : m = kdx : m$$

folglich

$$gg = \frac{2}{m} \int kdx + const.$$

Hieraus läßt sich nun eben so wie §. 161 herleiten, daß der Punct sich von der Fläche in gleichen Zeiten und gleichen Geschwindigkeiten wieder entfernt, wie er sich derselben genähert hat. Nun sieht man leicht, daß, indem sich der Punct, ohne die Wirkung der Kraft, durch Nv, oder mit dieser Wirkung durch Nr bewegt, er in beyden Fällen von der Linie QN auf die Linie qn, und demnach der Linie CJ, in beyden Fällen, um gleich viel näher kommt. Demnach läßt sich Nn als das Maaß der Zeit dt ansehen. Man setze, F sey der Punct der größten Näherung, so stellt demnach NR die Zeit vor, in welcher der materielle Punct aus N in F kömmt, und sich folglich der Fläche um RF nähert. Nun entfernt er sich in einer gleichen Zeit RM wiederum eben so viel, demnach muß er, nach Verfluß dieser Zeit, irgend auf der Linie RM seyn. Es ist aber die Näherung desselben gegen die Linie CJ, und eben so auch seine Entfernung den Zeiten proportional. Da nun die Zeit MR = RN ist, so muß der materielle Punct sich durch M bewegen. Das will nun sagen, FJ ist eine Axe der krummen Linie EFL, und diese Linie wird dadurch in zween ganz ähnliche Theile getheilt. Demnach ist auch

JG =

JG=EJ, und der Winkel HGL=DEH. Da endlich den Punct in E sich den zwo Linien AC, CJ eben so geschwinde nähert, als er sich in G von denselben entfernt, so fährt er auch in G fort sich mit gleicher Geschwindigkeit durch GH zu entfernen, als er sich durch DE dem Punct E näherte.

§. 175.

Dieses sehe ich nun als die eigentliche und einige Art an, die Bewegung des Mittelpuncts einer elastischen Kugel zu bestimmen, wenn sie in schiefer Richtung gegen eine umbiegsame Fläche bewegt wird. Wäre die Fläche in Form einer gespannten Saite elastisch, so wird diese Betrachtung, so viel ich einsehe, nur alsdenn angehen, wenn die Kugel mitten an die Fläche anfährt. Denn in jedem andern Punct würde sich die Fläche nicht auf beyden Seiten gleich biegen. Und dieser Umstand scheint mir zureichend zu seyn, um in der Richtung und Geschwindigkeit des Zurückprallens eine Aenderung zu verursachen.

§. 176.

Bey dem Fall, wo zwo Kugeln, in verschiedenen Richtungen, zugleich auf eine dritte stossen, und daher die Bewegung aus der Zusammensetzung der Kräfte entsteht, glaube ich zwar auch, daß die Regeln, die man dafür angiebt, grösstentheils ihre Richtigkeit haben.

Der eigentliche und deutlich auseinandergesetzte Beweis aber ist noch ungleich verwickelter. Die Richtung des Druckes ändert sich mit der Lage der Mittelpuncte in einem fort. Der Weg, den jeder Mittelpunct während dem Stosse macht, hängt von den beyden andern ab, und die Kugel, so von den beyden andern gestossen wird, wird auf eine doppelte Art zusammengedrückt, und das gesetzte davon, wenn man die größte Allgemeinheit beybehalten will, wird so verwickelt, daß ich hier ganz davon abstrahire. Die Aufgabe hat mit dem sogenannten Probleme des trois corps viel Aehnliches. Wenn man sich aber so harte Körper gedenkt, daß sie bey dem Zusammenstossen ihre Figur ganz unmerklich ändern, so wird die Auflösung leichter. Und dieses ist auch eigentlich die Bedingung, die bey den in mehrern mechanischen und physischen Schriften gegebenen Auflösungen vorausgesetzt wird.

Zusatz
von dem
Principe de la moindre Action.

Leibnitz hatte lange nach seinem Tode noch das Schicksal, in einem Streit verwickelt zu werden, der zwar nicht so lange dauerte, und auch nicht so allgemein war als der ersterwähnte von den lebenden Kräften. Es wurde aber beydes durch eine desto grössere Heftigkeit ersetzt,

ersetzt, und die Actions waren dabey nichts wenigers als ein minimum, sondern man trieb sie bis zu gerichtlichen Untersuchungen und Schmähschriften. Da die Hauptpartheyen sich bereits seit mehrern Jahren im Reiche der Todten darüber besprechen und einig werden können, und unter den Lebenden weiter niemand mehr Antheil an der Sache nimmt, so läßt sie sich nun mit ganz ruhigem Gemüthe untersuchen, und sehen, was dabey gedenkbar ist. Der mechanische Grundsatz ist, mit den Worten der Urschrift vorgetragen, folgender:

Principe general.

Lorsqu'il arrive quelque changement dans la nature, la quantité d'action necessaire pour ce changement, est la plus petite, qu'il soit possible.

La *Quantité d'action* est le produit de la masse des corps, par leur vitesse et par l'espace qu'ils parcourent.

Dieses ist demnach das berühmt gemachte Gesetz der Sparsamkeit der Natur, die immer den kürzesten Weg geht, den die Umstände und Bedingungen zulassen, die immer, so viel es sich thun läßt, mit dem Wenigsten das meiste Mögliche zu erhalten und zu bewirken bemüht ist. So wahr diese Absichten der Natur sind, so mußte doch bewiesen werden, ob erstangeführter Grundsatz dabey statt habe. Zu diesem Ende wurde gezeigt, daß sich die

die Regeln vom Stosse der Körper und vom Gleichgewichte des Hebels daraus herleiten lassen. Aus dieser Herleitung wird sich auch müssen herleiten lassen, was im erstangeführten Worten unbestimmt oder dunkel seyn möchte.

Diese Worte scheinen eine Wirkung von gegebener Grösse voraus zu setzen, und diese soll durch die geringste mögliche Action erhalten werden. Dieses setzt ferners voraus, daß die geringste mögliche Action nicht die einige mögliche sey: denn es ist klar, daß sonst keine Auswahl bliebe. Ich behalte das Wort Action bey, um es mit deutschen Wörtern, die etwa einen andern Umfang der Bedeutung haben möchten, nicht zu verwechseln. Man sieht überhaupt, daß es alles vorstellt, was eine wirkende Ursache anwenden muß, um die Wirkung ganz zu erhalten. Man würde demnach sagen, es stelle die Summe aller einzeln Einwirkungen, die Grösse und Stärke der darauf verwendeten Kräfte und Mittel, die darauf verwendete Zeit &c. vor. In dem angeführten Grundsatze wird aber dieses Wort anders bestimmt. Die darin erwähnte *Action* wächst nach der **Masse**, der **Geschwindigkeit** und dem **Raume**. Das Product aus diesen drey Stücken soll ein minimum seyn. Ob nun daraus folge, daß die Wirkung auch in dem kleinsten Raume vorgehen soll, habe ich nicht finden können; wohl aber läßt sich der Raum als ein Product der Geschwindigkeit in die Zeit ansehen, und dieses Product kann immer dafür gesetzt werden. Thut man dieses, so ist die *Action* ein Product aus der Masse, der Zeit und dem Quadrate der Geschwindigkeit. Leibnitz würde gesagt haben, aus der Zeit und der lebenden Kraft, und so müßte die Wirkung in der kürzesten möglichen Zeit und mit der geringsten lebenden Kraft erhalten werden. Es liesse sich ziemlich hören, wenn nicht der Begrif der lebenden Kraft seine besondere Schwierigkeiten hätte. Indessen wird immer noch dabey vorausgesetzt, daß das minimum nicht das einzige Mögliche seyn müsse. Denn könnte die Natur an sich nicht anders wirken, als sie wirkt, so wäre die Frage, ob sie am kürzesten und kräftigsten wirke von eben der Art, als wenn man fragte, ob die Zeit in ihrem Verweilen ein minimum beobachte?

Jedoch, wir wollen noch alles so hingehen lassen, und ferners anmerken, daß die Action eigentlich von Seiten der wirkenden Ursache betrachtet wird: denn diese soll eigentlich die geringste Mühe, Kraft, Zeit ꝛc. anwenden. Dieses kömmt nun darauf an, daß sie nicht auf jede mögliche Arten, sondern gerade auf die Art wirke, wie die Wirkung am leichtesten, geschwindesten ꝛc. erhalten werden kann. Dazu wird eine besondere Zusammenrichtung der Umstände, eine besondere Structur ꝛc. erfordert.

Auch

Auch giebt es viele Fälle, wo etwas ähnliches bereits in der Natur bemerkt worden. So z. E. jeder Druck, auch wenn er schief ist, wirkt dennoch senkrecht, und in sofern am kräftigsten. Eben so giebt bey zusammengesetzten Kräften die Diagonale das oben (§. 91) erwiesene minimum. Und beym Gleichgewichte, wo die gegebene Kräfte ihre Wirkung ganz äussern, treiben sie den Mittelpunct der Schwere, so weit er immer gehen kann, nemlich am tiefsten Ort, den die Zusammenrichtung des Systems zuläßt 2c.

Es scheint demnach die Action müsse an und für sich berechnet, und sodann in der Natur als ein minimum erfunden werden. Die Reaction kömmt dabey nur in sofern in Betrachtung, als man nachzusehen hat, wie die Action, sie mag nun groß oder klein seyn, dabey aufgewandt wird, ohne daß weder etwas mangele, noch zu viel sey. Kann dieses auf mehrerley Arten geschehen, so ist allerdings zu vermuthen, daß in der Natur die kürzeste und leichteste, man kann noch beyfügen die sicherste, gewählt sey.

Allein, alles dieses ist nur die Umschreibung des Grundsatzes, so, wie ich mir ihn vorstelle. Es soll demnach keine Erklärung der vorhin angeführten Worte seyn. In diesen hat noch der Ausdruck action *necessaire* pour ce changement einige Dunkelheit. Die Worte scheinen zwar an sich ganz klar zu seyn, aber in der Anwendung, die davon gemacht worden, fangen sie an, einer Erläuterung zu bedürfen. Ich werde demnach die Anwendung hersetzen; und dieses mag nun auf Deutsch geschehen.

Zween Körper, deren Masse A, B sey, bewegen sich in gerader Linie, B mit der Geschwindigkeit b und A, mit der grössern Geschwindigkeit a, so, daß A den Körper B verfolgt, einholt, auf denselben stößt. Nach dem Stosse fahren beyde fort, B mit der Geschwindigkeit β, A mit der geringern Geschwindigkeit α. Dabey soll nun eine actio minima seyn. Um sie zu bestimmen, wird die Rechnung von dem Urheber des Grundsatzes folgendermassen gemacht. Die durchlaufenen Räume werden für einerley Zeit berechnet, und Kürze halber für die Zeit $= 1$. Demnach sind sie a, b, α, β. Nun ist für den Körper A die durch den Stoß erlittene **Veränderung** (changement arrivé dans l'univers) der Geschwindigkeit $= a - \alpha$, des Raumes ebenfalls $= a - \alpha$; demnach die quantité d'action necessaire pour ce changement $= A(a-\alpha)^2$. Auf eben die Art für den Körper B ist sie $= B(\beta - b)^2$. Die Summe von diesen Actions soll nun ein minimum seyn. Demnach

$$A(a-\alpha)^2 + B(\beta - b)^2 = \text{minimum}.$$

Hier fängt es an dunkel zu werden. A ist der eigentlich wirkende Körper. Ich hätte demnach erwartet, daß nicht die Differenz seiner eigenen Geschwindigkeiten $a - \alpha$, sondern entweder seine Geschwindigkeit vor dem Stosse a, oder wenigstens seine relative Geschwindigkeit $a - b$, mit welcher er auf den Körper B anfährt, zur Berechnung der Action müßte gebraucht werden; allein so wird nur die Veränderung $a - \alpha$ gebraucht, die er dabey erlitten. Und eben so wird für den Körper B auch nur die Veränderung $\beta - b$ gebraucht. Es stellen demnach $(a - \alpha)^2$, $(\beta - b)^2$ das Product aus den Veränderungen vor, so bey jedem Körper der Geschwindigkeit und dem Raume nach vorgegangen. Dieses hätte nun aber müssen in dem Grundsatze ausgedrückt werden. Dabey wäre aber freylich nachgehends zu beweisen gewesen, warum anstatt $(a - \alpha)^2$, $(\beta - b)^2$ nicht viel ehender $a^2 - \alpha^2$, $\beta^2 - b^2$ hat genommen werden müssen. Denn so wäre $A\,a^2$ die quantité d'action vor dem Stosse, $A\alpha^2$ die quantité d'action nach dem Stosse; und eben so wären $B\beta^2$, Bb^2 die quantités d'action, oder de reaction für den Körper B, und

$$A(a^2 - \alpha^2) + B(\beta^2 - b^2)$$

würde die quantité d'action *necessaire* pour ce changement vorstellen, die ein minimum seyn müßte. Denn diese quantité d'action wäre eigentlich verwendet worden. Allein wenn

 man

man auch dieselbe = minimum setzt, so lassen sich die Gesetze des Stosses und des Hebels nicht daraus herleiten. Dazu dient die Formel

$$A(a-\alpha)^2 + B(\beta-b)^2 = \text{minimum}$$

ungleich besser; und so wurde sie auch vorgezogen, wenn sie gleich von dem Grundsatze ein wenig abzuweichen, oder einen andern Verstand zu haben schien.

Indessen verdient sie immer genauer betrachtet zu werden. Ich bemerke demnach, daß, wenn es nur darum zu thun ist, diese Formel auf den Stoß der Körper und den Hebel anzuwenden, man die Zeit immer = 1 setzen, und statt des **Productes** aus dem **Raum** und der **Geschwindigkeit**, das **Quadrat** der **Geschwindigkeit** nehmen kann. Und allem Ansehen nach, wird auch dieses müssen genommen werden.

Sodann bemerke ich, daß die Differenz $a-\alpha$, $\beta-b$, bey dem Stosse der Körper eine ganz besondere Eigenschaft haben. Denn man setze, die Geschwindigkeiten vor dem Stosse seyn $a-c$, $b-c$, so sind die nach dem Stosse ebenfalls $\alpha-c$, $\beta-c$. Nun ist

$$(a-c)-(\alpha-c) = a-\alpha$$
$$(\beta-c)-(b-c) = \beta-b$$

folglich sind diese Differenzen einerley, was auch immer c für eine Grösse habe. Man bestimme nun c dergestallt, daß

$(a-c)$

$$(a-c):(c-b) = B:A$$

werde, welches

$$c = \frac{Aa+Bb}{A+B}$$

giebt. Dieses macht die Geschwindigkeit b — c des Körpers B vor dem Stosse negativ, und beyde Körper nähern sich ihrem Mittelpunct der Schwere mit Geschwindigkeiten, die in umgekehrter Verhältniß ihrer Massen sind. Nach dem Stosse sind ihre Geschwindigkeiten $\alpha - c$, $\epsilon - c$. Und diese sind nun

1°. entweder $= 0$, wenn die Körper keine Schnellkraft haben.

2°. Oder sie sind, wiewohl mit verwechselten Richtungen, den Geschwindigkeiten $a - c$, $c - b$ vor dem Stosse gleich, wenn die Körper elastisch sind.

Demnach ist für den Körper A die Differenz seiner Geschwindigkeiten, wenn er nicht elastisch ist, schlechthin nur $a - c$, wenn er elastisch ist $2a - 2c$. Und eben so hat man für den Körper B im ersten Fall $b - c$, im andern $2b - 2c$. Dieses giebt nun für nicht elastische Körper

$$A(a-c)^2 + B(b-c)^2 = \text{minimum}$$

für elastische

$$4A(a-c)^2 + 4B(b-c)^2 = \text{minimum.}$$

Man sieht leicht, daß **Leibnitz** wiederum sagen würde, in beyden Fällen sey die Summe der lebenden Kräfte ein minimum. Dieses hat auch s'Gravesande in seinen Institutionibus philosophiae Newtonianae §. 268 und 281 wirklich gesagt, und auch die Erinnerung beygefügt, daß die Differenzen der Geschwindigkeiten $a - \alpha$, $\beta - b$ von den absoluten Größen der Geschwindigkeiten selbst unabhängig sind, und daher

$$A(a-\alpha)^2 + B(\beta - b)^2$$

in allen Fällen die Summe der aufgewandten Kräfte vorstelle, und ein minimum sey. Denn die beyden Körpern gemeinsame Geschwindigkeit ändert an der Wirkung des Stosses nichts. Dieser geschiehet immer in dem Mittelpunct der Schwere beyder Körper, es mag nun derselbe in Ruhe seyn, oder sich bewegen. Man siehet demnach, woher es komme, daß in allen Fällen

$$A(a-\alpha)^2 + B(\beta - b)^2 = \text{minimum}$$

ist. Und wer die sogenannten lebende Kräften wirklich als Kräfte ansieht, wird allerdings diese Formel als ein Gesetz der Sparsamkeit ansehen können, ohne daß er die beyden Quadrate $(a-\alpha)^2$, $(\beta - b)^2$ als Producte aus der Geschwindigkeit in dem Raum anzusehen habe.

Es sind demnach $a - \alpha$, $\beta - b$

1°. bey nicht elastischen Körpern die Geschwindigkeiten, mit welchen sich jeder dem gemeinsamen Mittelpunct der Schwere, als dem Puncte, nähert, in welchem der

Stoß

Stoß geschieht. Der Stoß ist einerley, dieser Punct mag sich bewegen oder in Ruhe seyn, die Körper wirken immer mit den Geschwindigkeiten $a-\alpha$, $\beta-b$, dergestalt, daß beyde $=0$ werden, oder darauf gehen.

2°. Bey elastischen Körpern sind $a-\alpha$, $\beta-b$ eben die Geschwindigkeiten aber doppelt genommen; nemlich mit $\frac{1}{2}(a-\alpha)$, und $\frac{1}{2}(\beta-b)$ nähern sie sich einander vor dem Stosse, und diese Geschwindigkeiten werden rein aufgewandt. Da aber die Körper elastisch sind, so werden diese Geschwindigkeiten, aber mit entgegengesetzten Richtungen, rein wieder hergestellt. Man mag nun aber in diesem Fall $a-\alpha$, $\beta-b$ ganz oder halb nehmen, so ist

$$A(a-\alpha)^2+B(\beta-b)^2=\text{minimum}.$$

Ganz oder halb genommen. Das thut zur Sache nichts.

Ob aber wirklich diese Summe ein minimum sey oder nicht, das ist eine andere Frage. s'Gravesande nimmt sie dafür an, weil er sie als eine Summe von **lebenden Kräften**, und zwar als eine Summa virium destructarum ansieht. Der Erfinder anfangs erwähnten Grundsatzes nimmt sie an, weil er sie als die quantité d'action necessaire pour ce changement ansieht. Mir ist keines von beyden an sich einleuchtend. Ich sehe dabey nur so viel, daß, wenn man diese Formel als ein minimum oder auch als ein maximum behandelt, indem man α, β als veränderlich ansieht, und das Differential $= 0$ setzt, man

$$-A(a-\alpha)\,d\alpha + B(\beta - b)\,d\beta = 0$$

erhält, und daß man, um hieraus die Verhältniß zwischen A, B, a, α, b, β zu finden, noch eine Gleichung haben müsse; demnach obbemeldte Formel allein die Sache nicht ausmache. Nun ist für elastische Körper

$$a - b = \beta - \alpha$$
$$d\beta = d\alpha$$

dieses giebt

$$-A(a-\alpha) + B(a+\alpha-2b) = 0$$

und demnach

$$\alpha = \frac{Aa - Ba + 2Bb}{A+B}$$

$$\beta = \frac{2Aa - Ab + Bb}{A+B}$$

welches dann wirklich die Gesetze für elastische Körper sind. Für nicht elastische Körper ist $\alpha = \beta$, $d\alpha = d\beta$; und dieses giebt

$$-A(a-\alpha) + B(\alpha - b) = 0$$

demnach

$$\alpha = \beta = \frac{Aa + Bb}{A+B}$$

welches ebenfalls das Gesetz für nicht elastische Körper ist. Endlich findet sichs auch, daß

$$A(\dot{a}-\alpha)^2 + B(\beta-b)^2 = \text{minimum}$$

in der That ein minimum, und nicht etwan ein maximum ist. Und so weit gehet es mit dieser Formel ganz richtig. Allein ob sie deswegen ein minimum ist, weil sie nicht bloß in der Rechnung, sondern in der **Natur** selbst allenfalls auch einen **grössern** Werth hätten haben können, das ist wiederum eine andere Frage. Man lasse zween Körper mit Geschwindigkeiten, die umgekehrt wie ihre Massen sind, gegeneinander laufen, so werden diese Geschwindigkeiten immer ganz aufgewandt. Mehr kann an sich nicht aufgewandt werden, weil nicht mehr da ist. Weniger kann auch nicht aufgewandt werden, weil sonst das fernere Andrücken fortfahren würde. Sollte aber ein Körper den andern mit sich fortreissen, so würden die Geschwindigkeiten nicht umgekehrt wie die Massen seyn, weil in diesem Fall allein die Geschwindigkeiten ganz aufgewandt werden. Dieses erhellet aus dem XIIIten Abschnitte auf eine nothwendige Art. Demnach ist das minimum, wovon hier die Rede ist, ein bloß **symbolisches** minimum, weil es in der **Natur** selbst an sich nicht anders seyn kann. Und so läßt sich dabey nicht von Sparsamkeit reden, weil diese eine Auswahl voraus setzt.

XIV. Das Cartesische und Leibnitzische Kräftenmaaß.

§. 177.

Leibnitz hat vor allen andern Philosophen aus das besonders, daß er ungefehr ein dutzend Grundsätze in der menschlichen Erkenntniß auf die Bahn gebracht hat, welche sämtlich zu fast hundertjährigen Streitigkeiten Anlaß gegeben, und worüber, alles zusammengerechnet, viele Zeit verlohren worden. Anstatt daß Newton solche Dinge vornahm, die er selbst zur Richtigkeit brachte, und wovon, was er zurück liesse, andere zur Richtigkeit bringen konten, anstatt dessen, sage ich, suchte Leibnitz sich in solchen Dingen herfürzuthun, wo man, so zu reden, etwas wagen muste, und was weder von ihm noch von andern sogleich berichtiget werden konnte. Dahin wird ausser seinen metaphysischen Grundsätzen auch sein Kräftenmaaß gerechnet, und die hierüber geführten Streitigkeiten sind bekannt. Die grösten Mathematikverständigen nahmen daran in so weit Antheil, daß jeder sich für die eine oder andere Meynung erklärte, oder wenigstens seine eigene Meynung dazu sagte. Dermalen ist darüber alles ziemlich stille, da theils einige, so Antheil daran genommen, gestorben, andere vielleicht deswegen nachgelassen, weil sie alles, was sie sagen konnten, gesagt hatten. Noch andere

des

des Streitens überdrüßig geworden; und endlich noch andere die Sache als beygelegt, oder als einen blossen und theils wenig erheblichen Wortstreit ansahen. So viel kann man immer sagen, daß in der ganzen Sache etwas verwirrtes war, welches sich auf keine Art recht wollte entwickeln, noch zu einer wahren geometrischen Evidenz bringen lassen. Und eben diese Verwirrung macht einen ordentlichen und netten Vortrag der Sache ziemlich schwer. Indessen werde ich wenigstens einen Versuch davon machen.

§. 178.

Es ist dem gemeinen Gebrauche zu reden gemäß, wenn man einem bewegten Körper, bloß deswegen weil er in Bewegung ist, eine **Kraft** zueignet. Denn er dringt in weichen Thon, drückt einen elastischen Ring zusammen, setzt andere Körper in Bewegung ꝛc. und alles dieses geschieht nicht bloß weil er ein Körper, sondern weil er in Bewegung ist. Es war daher anfangs **Mersenne**, nach ihm **Cartesius** und endlich **Leibnitz** darauf verfallen, das Maaß dieser Kraft zu bestimmen. Man kam darin überein, daß man eigentlich die Kraft verstunde, welche ein bewegter Körper anwendet, die Wirkung ganz hervorzubringen. Denn was die Wirkung für jedes Theilchen der Zeit oder des Raums betrift, so hatte es wegen der beyden Formeln (§. 155)

dg=

$$dg = kdt : m$$
$$gdg = kdx : m$$

oder auch, wenn man integrirt

$$mg = \int kdt$$
$$mgg = 2\int kdx$$

keine Schwürigkeit. Diese kam dabey vor, daß **Mersenne** und so auch Cartesius das Product m g, **Leibnitz** aber das Product m g g eine Kraft nennete, und jeder sein Product als das **Maaß** der Kraft ansahe, und dem bewegten Körper wirklich eine solche Kraft zueignete. Ferners schlosse Cartesius, vermuthlich daraus, daß die Welt im Beharrungsstande seyn sollte, es müsse von der ganzen Summe der Bewegung weder etwas verlohren gehen, noch Neu entstehen. Eben dieses schloß auch **Leibnitz** in Absicht auf das, was er Kraft nennte; und so machte Cartesius die Summe aller in der Welt vorkommenden m g, **Leibnitz** die Summe aller m g g beständig. Jede Parthey ließ sich nun angelegen seyn, ihr Vorgeben durch Versuche und Erfahrungen zu bewähren, zugleich auch das Vorgeben der andern Parthey zu entkräften, und besonders da, wo sie etwan zurücke bliebe, zu zeigen, daß die Gegenparthey auch zurück bleibe.

§. 179.

Endlich kömmt, im Grunde betrachtet, noch ein Umstand dazu, welcher, je nachdem er ent-

entschieden wird, den ganzen Streit entweder wichtig, oder zu einem ganz leeren Wortstreit macht. Dieser Umstand ist die Frage, ob man, wenn die Dynamic im strengsten Verstande a priori zu beweisen ist, den Stoß von Kräften, oder die Kräfte vom Stosse herleiten solle? Denn leitet man den Stoß und die Bewegung von Kräften her, wie ich es in dem vorhergehenden gethan habe, so gehen die Formeln

$$mg = \int kdt$$

$$mgg = 2 \int kdx$$

voran, und die Regeln des Stosses sind schlechthin nur Folgen davon. Da über diese Formeln nie gestritten worden, so ist auch diese Ordnung des Vortrags die vernünftigste und zugleich die zuverläßigste und brauchbarste, weil sie sich auf jede mögliche Fälle unmittelbar erstreckt.

§. 180.

Will man hingegen die Kräfte von dem Stosse und der Bewegung herleiten, so muß man, ehe man die Formeln

$$mg = \int kd\tau$$

$$mgg = \int kdx$$

vortragen kann, vorerst die Regeln des Stosses aufs allgemeinste feste setzen, und sodann aus diesen jene herleiten; dabey aber verfällt man auf die Cartesische und Leibnitzische Streitigkeiten. So sieht demnach die Sache, überhaupt

haupt betrachtet, aus. Ich merke vorläufig dabey an, daß allerdings die Kräfte der Bewegung vorexistirend müssen gedacht werden. So gedenkt man sich in der Statik die Kräfte, ohne Rücksicht, auf die Bewegung. Und selbst in Absicht auf den ganzen Weltbau gedenkt man sich einen primus motor, eine erste Ursach aller Bewegung; und diese erste Ursache stellt man sich allerdings als eine Kraft vor, die die Bewegung erst herfürbringt. Endlich ist auch so viel klar, daß, da eben angeführte zwo Formeln ausser Streit sind, jede andere Theorie von Kräften denselben nicht zuwider seyn müßte. In diesen beyden Formeln kömmt die Kraft k vor, über deren Bedeutung ebenfalls nie gestritten worden; und dieses ist, wegen der Vieldeutigkeiten des Worts Kraft, allerdings zu merken. Denn sagt man, z. E. ein elastischer Ring wende seine Kraft auf, einen Körper fortzudrücken, diese Kraft gehe in den Körper über, bewege sich mit demselben fort, verlasse ihn nicht, bis er irgend anstößt &c. So hat das Wort Kraft in diesen Redensarten eine ganz andere Bedeutung, als wenn man sagt, daß der Ring, wenn er vollkommen elastisch ist, seine Kraft ganz behalte, so, daß er den Körper, so vielmal man will, wieder aufs neue fortdrücken könne; sey aber der Ring nicht vollkommen elastisch, so gehe jedesmal etwas von seiner Kraft verloh-

verlohren ꝛc. Es ist offenbar, daß in diesen letztern Aussagen, das Wort Kraft, das Vermögen zu drücken, in den erstern aber den würklichen Druck vorstelle. Zu diesen zwoen Bedeutungen kömmt noch, daß man, besonders in metaphysischen Schriften, selbst die Substanz, welcher das Vermögen zu bewegen wesentlich ist, eine Kraft nennt. Und endlich, wenn man sagt, daß Körper von gleicher Masse, gleiche Kräfte haben, so versteht man darunter nur gleiche Trägheit.

§. 181.

Es ist aber von allen diesen Bedeutungen keine diejenige, welche Cartesius und Leibnitz im Sinn hatten, es sey denn, daß man diejenige darunter verstehe, die ich einen blossen Druck genennt habe, der nemlich bey dem Fortdrücken eines Körpers in denselben übergeht, und wenn der Körper irgend anstößt, sich wiederum äussert. Indessen ist soviel richtig, daß der Streit großentheils würde unterblieben seyn, wenn Mersenne oder Cartesius gesagt hätte, er verstehe sein Product mg durch die Zeit $= 1$ dividirt, und wenn Leibnitz gesagt hätte, er verstehe sein Product mgg durch den Raum $= 1$ dividirt. Denn da für den ersten Fall

$$mg = \int kd\tau$$

ist, so ist klar, daß, wenn man diese Gleichung durch die Zeit $= 1$ dividirt, der Quotient mit k

homogen wird, und folglich eben so wie k eine Kraft genennt werden könne. Für den andern Fall ist nicht minder klar, daß wenn man die Gleichung

$$mgg = fkdx$$

durch den Raum = 1 dividirt, der Quotient ebenfalls mit k homogen wird, und daher, in eben dem Verstande, eine Kraft vorstellt. Denn daß k in der Statik und in der Dynamic eine an sich verständliche Kraft vorstelle, darüber ist nie gestritten worden.

§. 182.

Es scheint aber nicht, daß weder Cartesius noch Leibnitz Kräfte verstanden haben, die mit k homogen sind, ungeachtet k in diesen Formeln nicht als eine beym Gleichgewicht bloß drückende, sondern als eine wegen des nicht vorhandenen Gleichgewichtes wirklich fortdrückende Kraft vorkömmt. Nun aber findet sich in diesen beyden Formeln keine andere Kraft angedeutet: denn m stellt die Masse, g die Geschwindigkeit, t die Zeit, x den Raum, k die elastische oder fortdrückende Kraft vor. Sollen demnach die Producte m g, m g g Kräfte vorstellen, so muß man dabey verstehen, daß m g durch die Masse = 1, und die Geschwindigkeit = 1 dividirt sey; und daß eben so m g g durch die Masse = 1, und das Quadrat der Geschwindigkeit = 1 dividirt sey. Da aber die Quotienten auf diese Art nur

Zah-

Zahlen, oder blosse Verhältnisse wären, so müssen sie, um eine Kraft vorzustellen, mit der Kraft = 1 multiplicirt werden. Alles dieses ist aus den Gesetzen der Homogeneität für sich klar. Es wird aber dadurch die Natur und die Art dieser Kraft, dafern sie nicht mit k homogen seyn solle, noch nicht aufgeklärt.

§. 183.

Nun scheinen zwar die Ausdrücke $\int kdt$, $\int kdx$ nicht nur Kräfte, sondern gleichsam ganze Summen von Kräften vorzustellen. Und so wäre $\int kdt$ eine Kraft, welche sich der Zeit nach, $\int kdx$ eine Kraft, welche sich, dem Raume nach, aufhäuft. Und da hiebey

$$\int kdt = mg$$
$$\int kdx = mgg$$

so könnte man dadurch sowohl die Cartesische als die Leibnitzische Kraft verstehen. Allein es müßte vorerst bewiesen werden, daß in der That $\int kdt$ und so auch $\int kdx$ aufgehäufte Kräfte, oder allenfalls auch Kräfte von einer zweyten Dimension sind. Dieser Beweiß ist aber nicht so leicht: denn daraus, daß in diesen Ausdrücken die Kraft k vorkömmt, folgt noch nichts. Man könnte sonst eben so schliessen, daß der Ausdruk $\int gdt = x$ eine der Zeit nach aufgehäufte Geschwindigkeit, oder eine Geschwindigkeit von der 2ten Dimension vorstelle. Man weiß aber, daß dadurch schlechthin nur der durchlaufene Raum vorgestellt wird. Denn $\int gdt$ muß durch die Zeit $= 1$, und durch die Geschwindigkeit $= 1$ dividirt, und sodann durch den Raum $= 1$ multiplicirt verstanden werden. Wir bleiben demnach auch hier noch zurücke.

§. 184.

Inzwischen werde ich noch anmerken, daß sowohl **Cartesius** als **Leibnitz** ihr Kräftenmaaß unter andern auch deswegen suchten feste zu setzen, damit man mit einemmale von der ganzen Kraft des bewegten Körpers auf die ganze Wirkung einen Schluß machen könnte, und nicht immer aufs neue wiederum zu den Differentialformeln

$$mdg = kdt$$

$$mgdg = kdx$$

zurücke kehren müßte. Dieses wäre nun allerdinges sehr bequem, weil man nicht selten solche Fälle findet, wo man mit dem Integriren nicht fortkommen kann. Auch hätte man von daher eine allgemeine Quadratur aller krummen Linien $\int kdx$, $\int kdt$ zu hoffen. Es ist aber diese Hofnung viel zu schön und viel zu allgemein, als daß sie so schlechthin statt finden könnte. Indessen werde ich noch anzeigen, was man dabey gethan hat.

§. 185.

Einmal kann in der Formel $\int kdx$ die Kraft k eine Function des Raums x seyn, dergestalt, daß

daß wenn die Wirkung nach den Raum geschätzt wird, $\int kdx$ bey gleichem Raume x gleich bleibt. Für solche Fälle ist demnach

$$mgg = 2\int kdx = \text{const.}$$

das will sagen, es wird einerley Wirkung erhalten, so oft die Masse umgekehrt wie das Quadrat der Geschwindigkeit ist. Dieses macht, daß Leibnitz sagte, es gebrauche einerley Kraft. Die Kraft k konnte er nicht verstehen, weil diese bey einerley Wirkung sehr verschieden seyn kann. Was er aber für eine Kraft verstunde, das hat er, so viel ich weiß, weder zureichend angezeigt, noch kenntlich gemacht, so wie es Cartesius auch nicht gethan. Da beyde Partheyen darüber nicht einig gewesen, so müssen sie auch wohl einander, vielleicht auch jeder sich selbst, nicht genug verstanden haben.

§. 186.

Ferners kann es Fälle geben, wo bey

$$\int kdx, \int Kdx$$

für jeden Raum x, immer K in gleicher Verhältniß grösser ist, als k. In diesen Fällen sey demnach

$$mgg = \int kdx$$
$$MGG = \int Kdx$$

Da nun

$$K = nk$$

so ist

$$MGG = n\int kdx$$

demnach

$$nmgg = MGG,$$

Wenn man in beyden Fällen den ganzen Raum, in welchem die Wirkung geschehen, gleich setzt. In diesem Falle sagt Herr D. Bernoulli in den Comment. Petropol. in der oben (§. 99) gerühmten Abhandlung: er schätze die Leibnitzische, oder sogenannte lebende Kraft, nach der Anzahl einander ähnlicher, gleich elastischer und in gleicher Lage, bis auf eben den Grad zugleich zusammengedruckter Ringe oder gespannter Federn. In der That ist auch in diesem Fall

$$mgg : MGG = 1 : m = k : K.$$

und daher die sogenannte lebende Kraft der elastischen Kraft proportional. Sodann werden hier die Ringe wiederum gleichviel zusammengedrückt, und auf eine durchaus ähnliche Art. Dadurch aber wird das Leibnitzische Kräftenmaaß nicht so allgemein beybehalten, als es Leibnitz haben wollte. Man setze nun aber, die Ringe seyn unähnlich, ungleich elastisch, ungleich zusammengedrückt, so kann die lebende Kraft und so auch die Würkung nicht mehr so schlechthin nach ihrer Anzahl geschätzt werden.

§. 187.

Man setze, um die hier vorkommende Schwürigkeit zu erläutern, zween Körper oder Kugeln von

von gleicher Masse aber ungleicher Geschwindigkeit. Jede laufe gegen den Ring BA, welcher in A befestigt und elastisch ist. Die erste Kugel drücke denselben bis in P, die andere aber bis in D zusammen. Die Masse jeder Kugel sey $= m$, die Geschwindigkeit der erstern $= g$, der andern $= G$: so sind die Kräfte nach Cartesens Rechnung $= mg$, mG; nach Leibnitzens $= mgg$, MGG, und daher ganz leicht berechnet. Die Wirkungen sind die Zusammendrückung des Ringes in P und D. Die Hauptfrage aber ist nun, was sich in diesen Wirkungen finde, welches ausgemessen den Kräften mgg, mGG, oder den Kräften mg, MG, gleich sey? Diese Frage ist schlechterdings nicht zu beantworten. Indessen sollte sie beantwortet werden. Denn einmal ist es nicht genug, das Maaß von Kräften anzugeben, dafern man nicht auch in ihrer Wirkung dasjenige anzeigt, was den Kräften gleich zu schätzen ist, und welches eben dadurch, daß die Kräfte bestimmt und ausgerechnet sind, zugleich mit ausgerechnet, und in der Wirkung sogleich auch kenntlich seyn solle. So z. E. wenn es die Eindrücke oder die Verkürzungen des Diameters BP, BD wären, so könnten diese leicht ausgemessen, und mit den voraus berechneten Kräften verglichen werden. Fig. XXVII.

§. 188.

Es kann aber, wenn auch m, g, G einerley bleibt, die Verhältniß zwischen BP, BD auf unendlich vielerley Arten verändert werden, weil dazu weiter nichts als eine Veränderung der Elasticität des Ringes in seinen verschiedenen Theilen erfordert wird; und dieses erhält man, wenn man denselben ungleich dicke macht, oder seine Figur ändert ꝛc. auf unzählige Arten; so, daß in den Formeln

$$mg = \int kdt$$

$$mgg = 2 \int kdx$$

die Ausdrücke $\int kdt$, $\int kdx$ alle mögliche Quadraturen von krummen Linien vorstellen können. Diese würden demnach sämtlich gefunden seyn, wenn die Cartesischen oder die Leibnitzischen Kräfte in ihrer Wirkung kenntlich und unmittelbar ausgemessen werden könnten. Da aber beydes ein süsser Traum ist, so folgt auch, daß die beyden *Kräftenmaasse gerade in denen Fällen ohne allen Gebrauch bleiben, wo sie am aller vortheilhaftesten zu gebrauchen wären.* Auch ist man währender Streitigkeiten gerade hierin zurücke geblieben. Es ist aber ganz natürlich, daß man für solche Fälle, *wo man nicht wußte, was man in der Wirkung zu suchen hatte, das den Kräften gleich wäre,* keine Versuche vorbrachte, um das Kräftenmaaß bewährt zu finden. Hingegen brachte man für solche Fälle, wo die Wirkung gleich oder proportional war, häufig Versuche vor. Es ist aber offenbar, daß man damit nicht ausreichen konnte, da immer noch der Fall zurücke bliebe,

der

der die Sache durchaus und in ihrer absoluten Allgemeinheit hätte entscheiden können.

§. 189.

Wenn demnach die Cartesische oder Leibnitzische Kräfte, wirklich Kräfte wären, die sich durch $m g$, oder $m g g$ bestimmen liessen, so würde ihre Berechnung in den häufigsten und wichtigsten Fällen ohne Gebrauch seyn, weil die Wirkung, so denselben gleich ist, nicht kenntlich ist, noch unmittelbar ausgemessen werden kann. Wir wollen aber wiederum den Ring vornehmen, und dabey bemerken, **daß die Bewegung des Körpers in die Wirkung der Kraft des Ringes keinen Einfluß hat.** Denn die Kraft des Ringes theilt dem Körper eben die Geschwindigkeit $d g$ in dem Zeittheilchen $d t$ mit, der Körper mag sich gegen den Ring oder von demselben weg bewegen. Dieses würde nicht seyn können, wenn der Körper eine von seiner Bewegung herrührende Kraft hätte, und sie gegen den Ring äusserte, indem er sich gegen denselben bewegt: denn anders läßt sich, ohne mit Worten zu spielen, keine Kraft gedenken. Diese Kraft des bewegten Körpers müßte demnach mit k homogen seyn, weil sie den Ring zusammendrückt, eben so wie der Ring den Körper rückwerts treibt. Auf diese Art aber müßte nach dem Descartes

$$m d g = (k - g m) d t$$

nach Leibnitzen aber

$$mgdg = (k - ggm)\,dx$$

seyn; beydes aber ist den obigen Formeln zuwider. Man setze ebenfalls, der Ring werde bis in D zusammengedruckt, so ist der Körper in D ohne Bewegung, und hält dennoch den grösten Druck des Ringes DE eine kleine Zeit dt auf. Er setzt demnach der Kraft des Ringes nur seine **Trägheit** m entgegen. Und diese kömmt eben daher auch in obigen beyden Formeln vor. Will man dessen unerachtet diese Trägheit, die an sich schon eine Kraft genennt wird, mit der Geschwindigkeit oder deren Quadrate multiplicirt, eine **Kraft** nennen, so vermehrt man dadurch ein an sich schon vieldeutiges Wort, mit noch einer Bedeutung, und zwar mit einer solchen, die nichts vorstellt, das sich anders als ein blosses Product m g, oder m g g gedenken lasse. Das cui bono davon haben wir bereits beleuchtet.

§. 190.

Es waren aber Cartesius und Leibnitz nicht nur auf die **Benennung** und **Schätzung** ihrer Kräfte, sondern zugleich auch auf die **Erhaltung** derselben bedacht. Und hievon läßt sich allenfalls, ohne Rücksicht auf die **Benennung** und den dabey vorkommenden **Wortstreit**, reden. In der Welt gehen Bewegungen, und durch die Bewegungen Veränderungen vor. Wäre nun dabey kein

Behar-

Beharrungsstand, oder kein beständig gleiche Summe, oder wenigstens keine solche Summe, die immer in bestimmten Schranken bleibt, so würde allerdings die ganze Körperwelt, nach und nach, entweder aller Bewegung beraubt und eine todte unthätige Masse, oder sie würde durch immer anwachsende Bewegung endlich in Trümmern zerstreut. Keines von beyden scheint statt zu haben; und so muß allerdings die ganze Summe aller Bewegungen entweder beständig, oder wenigstens zwischen gewissen Schranken veränderlich seyn. Nun war es die Frage, ob die Summe aller m g, oder die Summe aller m g g beständig bleibe? Diese Frage wurde eigentlich physisch betrachtet, das will sagen, ohne Rücksicht auf solche Substanzen, die eben daher, daß sie zur Geisterwelt gehören, eine innere Quelle von Thätigkeiten haben. Denn in der Physic hat man sich längst schon angewöhnt, von solchen Substanzen zu abstrahiren, und die Körperwelt für sich zu betrachten. In dieser fand man elastische und theils auch minder oder auch gar nicht elastische Körper. In Ansehung der erstern fand sichs leicht, daß bey jedem Stoße

$$MV^2 + mv^2 = M.C^2 + mc^2$$

ist (§. 167). **Und so sprach Leibnitz von der Erhaltung lebender Kräfte.**

§. 191.

Wir können aber von dieser Benennung abstrahiren. Genug, daß die Summe aller mgg beständig bleibt. Die Welt wird weder zerstäuben, noch zur todten Masse werden. Aber auch für den Descartes findet sich

$$MV + mv = MC + mc$$

und in sofern hat Leibnitz, wenn auch seine Kraft eine Kraft wäre, noch nichts voraus. Das einige bey dieser letzten Formel ist, daß anstatt der Summen zuweilen Differenzen heraus kommen, wenn nemlich die Geschwindigkeiten negativ werden. Das mislichste aber bey beyden Formeln ist, daß wenn auch V, v, C, c, die absoluten Geschwindigkeiten sind, demnach auch

$$M(V+\gamma)^2 + m(v+\gamma)^2 = M(C+\gamma)^2 + m(c+\gamma)^2$$

und

$$M(V+\gamma) + m(v+\gamma) = M(C+\gamma) + m(c+\gamma)$$

statt findet, und demnach Kräfte erhalten werden, die gar nicht da sind, weil beyde Formeln auch bey bloß relativen Geschwindigkeiten statt finden. Indessen ist es besser, daß die Formeln zu viel, als zu wenig wahr sind. Wenn demnach wenigstens jede kleinsten Theilchen der nicht elastischen Körper elastisch wären, so würde allerdings der Satz von der beständigen Summe bey den Bewegungen in der

Körperwelt erwiesen seyn; und daran wird, aus verschiedenen Erfahrungen und aus allgemeinen Betrachtungen zu schliessen, eben nicht viel fehlen. Ich werde im Folgenden Anlaß haben, solche Betrachtungen vorzutragen, und in Absicht auf die Erfahrungen mich auf das beziehen, was ich in den **Anmerkungen über die Gewalt des Schießpulvers** angeführt habe.

§. 192.

Indessen haben **Leibnitzens** Vertheidiger nicht ermangelt zu zeigen, daß die **Cartesischen** Kräfte nicht in allen Fällen beständig gleich bleiben, so wie es die **Leibnitzischen** blieben, weil diese wegen der quadrirten Geschwindigkeiten immer positiv sind. Und dieser Umstand trug allerdings mit dazu bey, den Satz von der **Erhaltung lebender Kräfte**, als einen für die Physic wesentlichern Grundsatz anzusehen. Indessen blieb er immer noch in derjenigen Allgemeinheit unerwiesen, in welcher ihn anfangs **Joh.** und **Dan. Bernoulli**, und sodann auch andere, mit gutem Erfolge, gebraucht haben. Es hat nemlich der Umstand, daß Körper, die auf schiefen Flächen herunter laufen, in gleicher Tiefe einerley Geschwindigkeit haben (§. 149) Anlaß gegeben, den Satz ungleich weiter auszudehnen, indem man ein und eben dasselbe System, unter verschiedenen Umständen mit sich selbst zu vergleichen angefangen. Dazu kam noch, daß, wo die auf ein System wirkende Kräfte ihre Wirkung in einem Punct desselben vereinigen, die Masse desselben als in diesem Punct concentrirt angesehen werden kann. Und dieses gab ebenfalls Anlaß, bey einem System die Bewegung jeder Theile zusammen genommen, mit der Bewegung der in diesem Punct concentrirten ganzen Masse zu vergleichen. Endlich fande sichs auch, daß, da die Bewegung so die Theile des Systems unter sich einander verursachen, in die Bewegung des ganzen Systems, oder des vorbemeldten Puncts, keinen Einfluß hat, auch dieser Umstand eine neue Quelle angabe ein System, unter verschiedenen Bedingungen, mit sich selbst zu vergleichen. Indessen mußte, in verschiedenen Fällen, vorerst ausgemacht werden, worin man eigentlich das Beständige bey der Erhaltung der Kräfte zu suchen habe, wie z. E. bey schiefliegenden Flächen, daß es bey der gleichen Tiefe vorkomme 2c. Dieses macht aber, daß man nicht so eigentlich weiß, wie weit sich das Principium erstreckt. Inzwischen aber kann es als ein Leitfaden gebraucht werden, weil man nicht selten dadurch sehr leichte findet, was man sonst aus sehr vielen Differentialformeln hätte durch das Integriren heraus bringen müssen. Sind aber die Integralien vermittelst des Principii der Erhaltung der Kräfte gefunden, so können sie durch die Vergleichung mit den Differentialien geprüft werden.

Erste Grundlehren der Hydrostatik.

XV. Beschaffenheit flüßiger Materien.

§. 193.

Will man bey der Betrachtung der bey flüßigen Materien vorkommenden Kräfte a priori gehen, so kann man dabey nicht wohl mehr als einige Möglichkeiten vornehmen, und die dabey vorkommenden Symptomata bestimmen. Das Wort flüßig bringt es an sich mit, daß hier von unbiegsamen und absolute harten Linien, Flächen und Körpern die Rede nicht vorkömmt; und damit fällt auch der Vortheil weg, der sich, in Absicht auf die Gründe der Statik, daraus ziehen liesse. Es können höchstens nur die Theilchen der flüßigen Materien als hart angesehen werden, und in sofern läßt sich jedes als in seinem Mittelpunct der Trägheit concentrirt gedenken. Thut man dieses, so kömmt sogleich die Bedingung hinzu, daß diese Mittelpuncte einander nicht näher kommen können, als bis wo die Theilchen sich berühren. Sie können hingegen weiter von einander wegbleiben, wenn man setzt, daß die Theilchen durch Kräfte in gewisser Entfernung von einander gehalten werden: denn zu allem an sich gedenkbaren, sind auch die dazu erfor-

erforderliche Kräfte gedenkbar. Ausser dem haben wir an der Luft ein Beyspiel, als welche sich ausdehnt, je nachdem sie minder zusammengedrückt ist. Und so kann man sich vorstellen, daß ihre Theilchen durch die elastische Kraft, in gewissen Entfernungen von einander gehalten werden.

§. 194.

Ich werde, um bey dem einfachsten Fall anzufangen, die Theilchen von gleicher Masse und Grösse und von sphärischer Figur setzen, und da giebt die Geometrie folgende Lehrsätze an, welche auch, ohne Rücksicht auf flüßige Materien, brauchbar sind.

§. 195.

Es können um eine Kugel nicht eine gewisse Anzahl gleich grosser Kugeln gelegt werden, so, daß sie sich sämtlich auf eine durchaus ähnliche Art berühren. Um dieses zu beweisen, werden wir anfangs nur drey Kugeln P, Q, R um die Kugel A legen, so, daß sie sich je zwo und zwo berühren. Da die Kugeln gleich groß sind, so liegen ihre Mittelpuncte in den vier Spitzen eines regulären Tetraedri, und aus dem Mittelpunct der Kugel A läßt sich durch die Mittelpuncte der Kugeln P, Q, R eine Sphäre beschreiben, auf deren Fläche diese drey Mittelpuncte einen gleichseitigen sphärischen Triangel bilden, dessen jede Seite von 60 Grad ist. Da dieses für jede drey

drey einander berührende Kugeln gilt, so entstehen eben so viele solcher Triangel. Sollte demnach der Satz angehen, so muß die ganze Fläche der Sphäre in eine bestimmte ganze Zahl solcher Triangel vertheilt werden können, so, daß die Triangel durchaus an einander passen. Da nun bey jedem Triangel jede Seite 60 Grad ist, so findet sich nach den trigonometrischen Regeln für jeden Winkel ω

$$\cos 60^\circ = (\cos 60)^2 + (\sin 60)^2 . \cos \omega$$

nun ist $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ und $\sin 60^\circ = \sqrt{(3:4)}$ demnach

$$\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} \cos \omega$$

welches

$$\cos \omega = \tfrac{1}{3}$$

und

$$\omega = 71^\circ . 33' . 54'' \ldots .$$

giebt. Wollte man nun fünf solcher Triangel um einen Punct der Sphäre herum legen, so würden die fünf zusammenstossende Winkel nur fünfmal $71^\circ . 33' . 54'' \ldots$ machen, anstatt daß sie fünfmal $72^\circ = 360$ machen sollten. Demnach würde sie nicht schliessen. Wollte man aber sechs solcher Triangel um einen Punct herum legen, so würde 6 mal $71^\circ . 33' . 54'' \ldots$ weit über 6 mal $60 = 360$ reichen, und daher der sechste Triangel den ersten fast ganz bedecken. Da demnach 5 Triangel nicht ausreichen, 6 Triangel aber zu weit gehen, und zwischen 5 und 6 keine ganze Zahl mehr fällt, so geht es nicht an, daß man eine bestimmte

Zahl von Kugeln um eine gleich grosse sollte herumlegen können, so, daß sie einander sämtlich und auf eine ähnliche Art berühren.

§. 196.

Man kann demnach kein Gefäß mit gleich grossen Kugeln dergestallt ausfüllen, daß sie einander sämtlich und auf eine ähnliche Art berühren. Die Folge, die wir hieraus ziehen können, ist, daß wenn jede Kugel eine gleiche anziehende Kraft hat, unter denselben kein absolutes und durchaus ähnliches Gleichgewicht statt finden kann. Denn dieses würde nur alsdenn statt finden, wenn jede Kugel, gegen die sie berührende, eine durchaus ähnliche Lage haben könnte. Da dieses aber an sich unmöglich ist, so geht auch ersteres nicht an.

§. 197.

Betrachtet man aber nicht einen ganzen Raum voll Kugeln, so lassen sich einzelne Fälle eines solchen Gleichgewichtes gedenken.

I°. Lassen sich 2, 3, 4, 5, 6 Kugeln nach einerley Richtung um eine Kugel herum legen, und in dem größten Circul vertheilen. Und da wird jede von den übrigen gleich angezogen.

II°. Lassen sich 4, 6, 8, 12 Kugeln in Form eines Tetraedron, Octaedron, Cubus und Dodecaedron oder Icosaedron um eine gleich

gleich grosse Kugel herum legen, und jede wird von den andern gleich und nach ähnlichen Richtungen gezogen.

III°. Bey 20 Kugeln geht es nur an, wenn man sie kleiner nimmt, weil schon 12 gleich grosse einander beynahe berühren.

§. 198.

Da man demnach einen Raum nicht dergestalt mit gleich grossen Kugeln anfüllen kann, daß jede gegen die übrigen eine durchaus ähnliche Lage habe, so bleibt zu sehen, wie sie gelegt werden können, damit die Lage wenigstens, so viel möglich, ähnlich sey. Dabey giebt es nun zween Fälle, und diese findet man in allen Zeughäusern bey den in Pyramiden aufgethürmten Kanonkugeln von gleicher Caliber. Denn

I°. Liegt eine Kugel auf einer Ebene, so lassen sich auf gleicher Ebene noch 6 gleiche Kugeln um dieselbe herum legen. Die mittlere Kugel kann sodann noch von drey oberhalb, und von drey unterhalb berührt werden, so, daß jede von diesen zugleich noch zwo von den erstern sechs, die in der Ebene liegen, berührt. Dies giebt in allem 12 Kugeln, so um die mittlere herum gelegt werden.

II°. Läßt man aber die mittlere weg, so lassen sich vier Kugeln in einer Ebene dergestalt legen, daß sie unter rechten Winkeln einander berühren. Der Zwischenraum, den sie lassen, kann oben und unten mit einer Kugel beschlossen werden. Fährt man so fort, so wird jede Kugel von 12 anliegenden dergestalt berührt, daß vier davon in gleicher Ebene, vier in der nächst aufliegenden Schichte, und vier in der nächst untenliegenden Schichte sind.

Da sich nur mit Quadraten, gleichseitigen Triangeln und denen daraus entstehenden regulären Sechsecken eine Ebene bedecken läßt, so sind die hier betrachteten zween Fälle die einige, wo man gleich grosse Kugeln, auf eine reguläre Art, auf einander legen kann. Wir werden nun noch zeigen, daß, **auf welche von beyden Arten man die Kugeln legt, bey gleicher Anzahl derselben gleich viel Raum erfordert werde, oder, daß die leere Zwischenräume, sowohl zu dem ganzen als zu dem mit den Kugeln ausgefüllten Raume, einerley Verhältniß haben, oder, daß der Raum, in beyden Fällen, gleich dichte angefüllt sey.**

§. 199.

Um dieses zu zeigen, setze man für den ersten Fall drey Kugeln in einer Ebene aneinander, und lege auf den Zwischenraum, so sie in der Mitte lassen, die vierte; so ist klar, daß die Mittelpuncte dieser vier Kugeln, in den vier

Ecken

Ecken eines regulären Tetraedron liegen, dessen Basis mit der Ebene parallel ist, und dessen perpendiculäre Höhe bestimmt, wieviel die vierte Kugel tiefer liegt, als wenn sie vertical auf einer der drey ersten wäre gelegt worden. Denn diese letztere Höhe ist der Distanz der Mittelpuncte, folglich der Distanz zweyer Ecken des Tetraedron, oder, welches einerley ist, dem Diameter der Kugeln gleich. Man gedenke sich nun eine dreyeckigte Pyramide von solchen Kugeln, so ist diese ebenfalls ein Tetraedron. Werden die Kugeln nach den horizontalen Schichten gezählt, so machen sie die Reyhe von Trigonalzahlen

$$1+3+6+10+15+\ldots\ldots\ldots+\frac{n.\overline{n+1}}{2}$$

$$=\frac{n^3+3n^2+2n}{6}$$

Diese Pyramide werde durch vier ebene Flächen, welche die äussersten Kugeln berühren, und demnach ebenfalls in Form eines Tetraedron eingeschlossen, und der Diameter jeder Kugel $= 1$ gesetzt; so findet sich, wenn man nachrechnet, die Länge jeder Seite dieses Tetraedron $= n - 1 + 1 : \sqrt{8}$, demnach der Innhalt

$$z = \left(n - 1 + \frac{1}{\sqrt{8}}\right)^3 \cdot \tfrac{1}{6}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Ferner ist der Innhalt jeder Kugel, wenn $\pi = 3,1415926\ldots.$ gesetzt wird, $= \frac{1}{6}\pi$, demnach der Innhalt der gesamten Kugeln

$$k = \tfrac{1}{6}\pi . (n^3 + 3n^2 + 2n) : 6$$

folglich

$$z : k = \left(n - 1 + \frac{1}{\sqrt{8}}\right)^3 . \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \tfrac{1}{6}\pi$$
$$(n^8 + 3n^2 + 2n)$$

Man setze nun, um die Irregularität der Zwischenräume am Rande zu vermeiden, die Anzahl der Kugeln unendlich groß, so findet sich die absolute Verhältniß

$$z ; k = \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \tfrac{1}{6}\pi = \sqrt{18} : \pi.$$

§. 200.

Für den zweyten Fall haben wir eine viereckigte Pyramide; werden in dieser die Kugeln nach den horizontalen Schichten gerechnet, so machen sie die Reyhe von Quadratzahlen

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \ldots + n^2$$
$$= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Man schliesse diese Pyramiden ebenfalls durch vier ebene Flächen ein, welche die äussersten Kugeln berühren, so ist bey der dadurch entstehenden Pyramide die Länge jeder Seite $= n - 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}}$, demnach der Inhalt

$$z = (n - 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}})^3 . \tfrac{1}{3}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

Nun ist der Inhalt der gesamten Kugeln

$$k = \tfrac{1}{6}\pi . (2n^3 + 3n^2 + n) : 6$$

folglich

$$z : k = (n - 1 + \sqrt{\tfrac{1}{2}})^3 . \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \tfrac{1}{12}\pi$$
$$(2n^3 + 3n^2 + n)$$

Wird

Wird hier ebenfalls, wie vorhin, n unendlich gesetzt, so findet sich die absolute Verhältniß

$$z : k = \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \tfrac{1}{6}\pi = \sqrt{18} : \pi$$

und folglich eben die, so für den ersten Fall heraus kam. Demnach verhält sich, in beyden Fällen, der ganze Raum zu dem Raum den die Kugeln ausfüllen, wie $\sqrt{18}$ zu π, folglich bey nahe wie 4 zu 3, genauer wie 23 zu 17, noch genauer wie 27 zu 20, oder noch genauer wie 131 zu 97 rc. oder wie 100000 zu 74048.

§. 201.

Wenn wir unter diesen Verhältnissen die von 27 zu 20, als welche unter den kleinern noch merklich genau ist, annehmen, so können wir sagen, daß in beyden Fällen der ganze Raum sich zu dem von den Kugeln wirklich ausgefüllten wie 27 zu 20, zu den leeren Zwischenräumen wie 27 zu 7, und demnach der Raum der Kugeln zu den Zwischenräumen wie 20 zu 7 verhalte; so, daß wenn der ganze Raum = 27 ist, die Kugeln davon einen Raum = 20 ausfüllen, die leeren Zwischenräume aber 7 betragen. Es ist demnach die specifische Schwere des mit den Kugeln angefüllten Raumes nur $\frac{20}{27}$ derjenigen, die eben der Raum dichte vollgegossen haben würde.

§. 202.

Bey dieser Gleichheit der Dichtigkeit, die in beyden Fällen statt hat, fällt es schwer, zu entscheiden, nach welchem sich solche Kugeln, die vollkommen glatt sind, richten würden, wenn sie sich entweder durch ihre Schwere, oder durch anziehende Kräfte ins Gleichgewicht setzen müsten, indem sie in einen eingeschlossenen Raum gegossen werden; so, daß sie weder unter- noch seitwerts ausweichen oder ausfliessen können. Denn da sie, auf beyderley Arten, den Raum gleich ausfüllen, so kömmt auch, wenn sie durch ihr Gewicht zusammen gedrückt werden, der Mittelpunct der Schwere gleich tief, und die Kugeln liegen auf beyde Arten in einer Regularität, die zwar nicht absolut ist, weil sie es schlechthin nicht seyn kann, die aber dennoch unter den Möglichen die Gröste ist. Und eben deswegen ist auch der Raum, den sie auf beyde Arten einnehmen, der kleinste mögliche. Man sieht aber überhaupt leicht, daß alles darauf ankömmt, wie die Kugeln liegen, die am Boden des Gefässes sind: denn liegen diese entweder ins Gevierte oder im Triangel, so ist, in Absicht auf die darüberliegende, keine Wahl mehr. Es ist aber an sich leichter, daß die untersten im Triangel zu liegen kommen, weil dazu weiter nichts erfordert wird, als daß sie sich an einander legen. Hingegen müssen sie ins gevierte geleget werden, wenn sie genau so liegen sollen. Dessen ungeachtet, haben die ins gevierte gelegte Kugeln nicht nur eine reguläre Lage, sondern sie können auch nur auf eine Art schichtenweis auf einander gelegt

werden;

werden; dahingegen, wenn man sie nach Triangeln legt, zweyerley Lagen möglich sind, weil man entweder die dritte Schichte wie die erste, oder auf eine von den beyden ersten Schichten verschiedene Art legen kann. Letzteres geschieht, wenn man sie in eine trianguläre Pyramide aufthürmen will, ersteres aber wenn man ein trianguläres Prisma dergestalt mit ausfüllen will, daß man am Rande am wenigsten leeren Raum lasse. Und in diesem Fall wird man solche Zwischenräume finden, die in gerader Linie durch das ganze Prisma zwischen den Kugeln herunter gehen: denn legt man die erste Schichte, so sind um jede Kugel sechs Zwischenräume. Von dieser lassen sich, vermittelst der zweyten Schichte, nur drey bedecken, und bey der dritten Schichte hat man die Wahl, ob man die drey andern bedecken, oder sie unbedeckt lassen will, indem man jede Kugel vertical über die von der ersten Schichte legt. Hingegen bey der gevierten Lage der Kugeln bedeckt jede Schichte die Zwischenräume der vorhergehenden; und so wird jeder Zwischenraum durch sechs Kugeln eingeschlossen, die in drey sich senkrecht durchschneidenden Ebenen liegen. Eine Regularität die bey der triangulären Lage der Kugeln nicht vorkömmt, und welche zureichend ist, zu machen, daß, wo die Kugeln sich untereinander mit gleichen Kräften anziehen, sie sich von selbst ins gevierte legen, weil ohne die gröste mögliche Regularität und Aehnlichkeit der Lage, kein Gleichgewicht statt findet; und, allem Ansehen nach, findet bey vollkommen glatten Kugeln gar keines statt.

§. 203.

Verschiedene über die auf der Erdfläche befindlichen flüßige Materien angestellten Versuche, lassen uns kaum zweifeln, daß ihre Theilchen sich nicht entweder anziehen, oder eben so gegeneinander andrücken sollten, als wenn sie eine anziehende Kraft hätten. Man zweifelt eben so auch nicht, daß diese Theilchen nicht sollten sphärisch, und in einer vollkommen homogenen Materie von gleicher Grösse und anziehenden Kraft seyn. Man sollte daher schliessen können, daß sie sich vermittelst dieser anziehenden Kraft, auf die erst beschriebene Art, von selbst ins gevierte legen. Jch werde aber daraus weiter keine Folge ziehen, weil man genug versichert seyn kann, daß so absolute homogene Materien in der Welt nicht vorkommen. Und eben dieses macht auch, daß man bey der Betrachtung ihres Gleichgewichtes und ihrer Bewegung, nicht auf jede einzelne Theile, sondern auf die ganze Summen sehen muß.

XVI.

XVI. Das Gleichgewicht flüßiger Materien.

§. 204.

Bey der Betrachtung des Gleichgewichts flüßiger Materien, kömmt alles theils auf die Kräfte an, die in sie wirken, theils auch auf die Gefäße, in welchen sie eingeschlossen sind und eine Figur annehmen müssen. Die Kräfte sind theils in der Materie selbst, wie z. E. wenn die Theilchen sich anziehen, oder voneinander treiben, theils sind es äussere Kräfte, die entweder auf jedes Theilchen oder nur auf die Oberfläche wirken. Alle diese können, nach unzählig vielerley Modificationen, theils einzeln, theils beysammen vorkommen, die Materie selbst auch auf unzählige Arten heterogen und ungleich dichte seyn.

§. 205.

Man fängt aber gemeiniglich bey den einfachern an, und sucht sodann die dabey gefundenen Lehrsätze allgemeiner zu machen. Dieses Verfahren deucht mich auch desto vernünftiger, weil die gröste Allgemeinheit unendlich verwickelt, und gewissermassen, unerschöpflich ist. Da ich mir in gegenwärtiger Abhandlung nur vorgesetzt habe, diejenigen Gründe, die die ersten genennt werden, zu untersuchen, so werde ich auch bey der Betrachtung der einfachern

fachern Fälle stehen bleiben. In dieser Absicht setze ich anfangs die flüßige Materie homogen, und ohne eigene anziehende oder elastische Kräfte, und setze, jede Theilchen derselben werden von einer äussern Kraft, nach paralleler Richtung, gleich gedrückt. Wir haben oben gesehen, daß die Schwere eine solche Kraft ist. (§. 75 seqq.) Sollte nun die ganze Masse der flüßigen Materie nicht schlechthin nur bewegt werden oder fallen (§. 129), so muß sie entweder durch entgegenwirkende Kräfte aufgehalten, oder durch eine unbiegsame und unbewegliche Fläche eingeschlossen werden, daß sie weder unterwerts noch seitwerts ausweichen kann, wie man z. E. Wasser in einem Gefässe aufhält. Ich werde, mehrerer Kürze und Klarheit halber, die drey Namen Schwere, Wasser, Gefäß beybehalten, so, daß man durch die Schwere jede auf jedes Theilchen gleich und parallel drückende Kraft, durch Wasser jede flüßige Materie, wobey nicht innere Kräfte vorkommen, durch das Gefäß aber eine unbiegsame und unbewegliche Fläche von gleicher Figur verstehen kann.

§. 206.

Diese Voraussetzungen sind nun an sich die einfachsten. Ich sehe aber nicht, daß man damit ausreiche, dafern man nicht die Theilchen elastisch annimmt, so hart man sie auch setzen will. Verschiedene Gründe machen

dieses

dieses nothwendig. Denn da kein Theilchen der Materie so absolute hart gedacht werden kann, daß es nicht wenigstens durch eine unendliche Kraft sollte getrennet werden können, so sehe ich die Materie als unendlich theilbar an, und da eben dadurch die Härtigkeit durch Kräfte erhalten werden muß, so sehe ich nicht, daß ein Theilchen der Materie hart seyn könnte, ohne zugleich elastisch zu seyn. In sofern aber läßt sich, auch wenn man die Sache a priori als eine blosse Möglichkeit betrachtet, ohne in der Betrachtung eine Lücke zu lassen, davon nicht abstrahiren. Wenn es aber auch angienge, so ist es immer das natürlichste, wenn man unter jeden Möglichkeiten solche auswählt, derer Theorie sodann in der Welt anwendbar ist. Nun fordert die Erfahrung zu der Auswahl solcher Möglichkeiten folgendes: Einmal beweist das bekannte Florentinische Experiment, wodurch man die absolute Härtigkeit des Wassers hat erweisen wollen, theils an sich nichts, theils besonders, auch nichts wider die Elasticität der Wassertheilchen. Denn ausser dem, daß das Wasser sich durch die Erkältung condensirt, und daher allerdings einen kleinern Raum einnehmen kann, so ist kein Zweifel, daß das Florentinische Experiment eben so würde ausgefallen seyn, wenn man anstatt eine Kugel voll Wassers zusammen zu pressen, eine Kugel voll stählernen Schrot hätte zusammen pressen wollen. Sodann kann man zwar aus der Zusammensetzung und Auflösung der Kräfte leicht beweisen, daß in einem Gefässe voller Kügelchen, die oberen in schiefer Richtung auf die untern drücken, und daß ein Theil dieses Druckes endlich wieder aufwärts gekehrt wird. Man kann es aber auch nur von einem Theil des Druckes beweisen, dafern man nicht die Kügelchen elastisch annimmt. Denn nur dadurch erhält man, daß jedes Kügelchen wiederum eben so viel rückwerts drückt, als es selbst gedrückt wird, und daß es diesen Druck wirklich äussert, sobald entweder die aufliegende Last vermindert, oder der Gegendruck weggenommen wird. Nun geben die über den Druck der flüßigen Materien angestellte Versuche diesen letztern Umstand an, demnach muß auch nothwendig die Bedingung, ohne welche derselbe nicht statt hat, nemlich die Elasticität der Theilchen, dabey vorkommen. Demnach muß auch diese mit in die Rechnung gezogen werden, wenn man a priori solche Möglichkeiten betrachten will, deren Erfolg nachgehends in der wirklichen Welt anwendbar ist.

§. 207.

Um diese Aussagen, deren allgemeinster Beweis ungemein weitläuftig seyn würde, durch die Betrachtung des einfachsten Falls so aufzuklären, daß ihre Nothwendigkeit zugleich mit erhelle, so gedenke man eine Anzahl gleich grosser und gleich elastischer Kugeln in einer cylin-

cylindrischen aufrecht stehenden Röhre übereinander liegend. Die Röhre sey unten geschlossen, und stehe unbeweglich. Da ist nun für sich klar, daß jede Kugel auf die untern drückt, und die unterste, so auf dem Boden der Röhre liegt, von dem ganzen Gewichte der übrigen nicht nur gedrückt, sondern bis auf einen gewissen Grad zusammengedrückt wird. Wären nun die Kugeln nicht elastisch, so würde die untere schlechthin nur gedrückt werden, und wenn man die obern wiederum wegnimmt, eben so liegen bleiben, als wenn diese nie da gewesen wären. Der Erfolg ist ganz anders, wenn die Kugeln elastisch sind. Um diesen Erfolg augenscheinlicher zu machen, so setze man, die auf der untersten liegende Kugeln werden mit einem male vernichtet, so wird die unterste nicht etwann liegen bleiben, sondern sich mit einem gewissen Grade von Geschwindigkeit in die Höhe bewegen, und zwar mit demjenigen Grade der Geschwindigkeit mit welchem sie hätte müssen auf den Boden des Gefässes fallen, um eben so viel zusammengedrückt zu werden, als sie es durch die Last der aufliegenden Kugeln war. Man sieht zugleich, daß diese Höhe sowohl von der Anzahl und Masse der aufliegenden Kugeln, als auch von der Elasticität der untersten Kugel abhänget.

§. 208.

Daß bey dem Drucke des Wassers eben dieses erfolge, läßt sich, weil wir das aufliegende

gende Wasser weder in einem Augenblick wegnehmen noch vernichten können, nicht unmittelbar aus der Erfahrung beweisen. Es wird sich aber dennoch beweisen lassen, wenn wir nur einen Schritt noch weiter gehen. Man

Fig. XXXI.

setze demnach die cylindrische Röhre unten dergestalt gebogen, daß neben der untersten Kugel A noch eine andere M von gleicher Elasticität und Grösse Raum habe. Der Cylinder sey in e geschlossen, und durchaus unbiegsam und unbeweglich. Die Linie g c werden wir anfangs nur horizontal annehmen, um dadurch begreiflich zu machen, daß, wenn die Kugeln nicht elastisch, sondern schlechthin nur hart wären, die Kugel A den Druck der übrigen allein aushalten, und M gar nicht würde gedrückt werden. Wenn man demnach auch den Cylinder in e öfnete, so würde gar keine Bewegung erfolgen, weil A mit dem Gewichte der aufliegenden Kugeln B, C &c. beladen, nur vertical auf den Punct c und M nur auf den Punct g drückt. Sind hingegen die Kugeln elastisch, so ist alles dieses ganz anders, weil die Kugeln nun nicht mehr bloß gedrückt, sondern zusammengedrückt werden. Bey der Kugel A wird der verticale Diameter a c kürzer, der horizontale b d länger. Dieser aber kann nicht länger, und daher auch jener nicht kürzer werden, es sey denn daß bey der Kugel M der horizontale Diameter d e kürzer, und dadurch der verticale f g länger werde. Alle diese Veränderungen

änderungen richten sich dergestalt ins Gleichgewichte, daß M eben so viel zusammengepreßt wird als A, und daß der Druck, den der Cylinder in den Puncten b, c, g, e, f aushält, durchaus gleich ist. Denn da der Cylinder genau so weit im Lichten ist als eine nicht zusammengepreßte Kugel, so wird der Diameter f g nicht verändert, sondern die Kugel dehnt sich gegen die Ecke aus; und so ist der Druck in e, f, g, d, c, b, a genau dem Gewichte der Kugeln gleich.

§. 209.

Wir werden nun leicht sehen können, was erfolgt, wenn der Cylinder in einem dieser Puncte so geöfnet wird, daß die Oefnung der Grösse der Kugel gleich wird. I°. Er werde in c geöfnet, so bleibt der Druck den die Kugel A in den Puncten b, d aushält, ohne Wirkung, weil jeder dem andern gleich und die Richtung entgegen gesetzt ist. Hingegen da der Druck, den die Kugel in c äusserte, nunmehr wegfällt, so wirkt der Druck in a ganz allein, und die Kugel wird davon mit einem gewissen Grade der Geschwindigkeit herunter getrieben, und zwar mit eben dem Grade, den sie haben müßte, um durch das blosse Anstossen eben so viel zusammengedrückt zu werden. Man sieht ohne Mühe, daß diese Geschwindigkeit = o seyn würde, wenn die Kugel weder elastisch noch zusammengedrückt gewesen wäre.

Denn so würden alle Kugeln A, B, C &c. zugleich aus der blossen Ruhe und mit einer anfänglichen Geschwindigkeit = o herunter gesunken seyn (§. 129. 148). Dieses letztere widerspricht nun bey flüßigen Materien der Erfahrung, als welche im Ausfliessen aus einem Gefässe eine desto grössere anfängliche Geschwindigkeit haben, je grösser ihre Höhe in dem Gefässe ist; und man findet auch, daß die Weite des Gefässes nur in sofern etwas dabey zu sagen hat, als theils diese Höhe länger gleich erhalten wird, theils auch die Cohaesionskräfte einen Einfluß bey engen Röhrgen äussern. II°. Oefnet man hingegen die Röhre in e, so sieht man ebenfalls, daß sich der Druck in d ganz äussert, und daß folglich weil dieser Druck dem Drucke a gleich ist, die Kugel M nach der Richtung d e eben so geschwinde heraus fahren werde, als vorhin die Kugel A durch c herunter fuhr; ingleichem daß der Cylinder selbst, wenn er beweglich ist, rückwerts getrieben werde. III°. Aus gleichem Grunde wird sie, wenn die Röhre in f geöfnet wird, mit eben der Geschwindigkeit nach der Richtung g f aufwerts fahren, weil der Druck in g so groß ist als der in d und a war. IV. Endlich sieht man ohne Mühe, daß alles dieses auch statt findet, wenn gleich die Röhre nicht horizontal gebogen ist. Der Unterschied ist nur, daß wenn die Röhre sich abwerts neigt, sodann die Kugel A mit einem Theil ihres Gewichtes

auf

auf M drückt, und folglich die Geschwindigkeit um eben so viel vermehrt; und daß hingegen, wenn die Röhre aufwerts gebogen wird, die Kugel M mit einem Theil ihres Gewichtes auf A drückt, und dadurch dem Druck der Kugeln B, C &c. entgegen wirkt, folglich die Wirkung desselben um eben so viel vermindert.

§. 210.

Nun läßt sich leichtlich der Schluß so machen: Erstlich, aller dieser Erfolg wäre anders, wenn die Kugeln nicht elastisch wären: denn so würde die Kugel M weder in e, noch in d, noch in f, sondern schlechthin nur nach ihrem eigenen Gewichte in g drücken. Es zeigt aber die Erfahrung bey flüßigen Materien nicht den Erfolg der nicht elastischen, sondern durchaus den Erfolg der elastischen Kugeln, weil, wenn die Röhre damit angefüllt ist, sie mit gleicher Geschwindigkeit, durch welche der Oefnungen b, c, g, e, f man will, heraus fahren und jedesmal auch auf den Cylinder zurücke wirken. Demnach ist offenbar, daß man ihre Theilchen nothwendig elastisch setzen muß. Nun ist dieses zwar, sofern sich ohne Elasticität keine Härtigkeit der Materie gedenken läßt, an sich nothwendig (§. 205. 130); und so läßt sich aus beyden Gründen von der Elasticität der Theilchen nicht abstrahiren, wenn man die Wirkungen und den Erfolg a priori betrachten, und die mögliche Fälle dergestalt auslesen und in eine Theorie bringen will, daß diese sodann in der Welt anwendbar sey.

§. 211.

Will man den Cylinder in e verlängern, um noch mehrere Kugeln von gleicher Grösse und Elasticität hineinlegen, so wird man auf eben die Art heraus bringen, daß sie sämtlich eben solchen Druck gegen den Cylinder und untereinander in den Berührungspuncten äussern, als im erst betrachtetem Fall die Kugeln M, A, weil es gleichviel ist, ob die Kugel M ihren Druck in e unmittelbar gegen den Cylinder, oder vermittelst anderer Kugeln gegen denselben äussert. Nun kann letzteres nicht geschehen, bevor diese andere Kugeln nicht eben so zusammengedrückt sind, als es M ist. Da nun die Schwere, von welcher dieser Druck herrührt, in einem fort wirkt, so bleibt das System nur alsdann im Ruhestande, wenn das Zusammendrücken ganz erfolgt ist. Demnach, wo man immer an dem in e verlängerten Cylinder eine Oefnung macht, daß eine der Kugeln heraus kann, so wird diese eben so, wie vorhin die Kugel M und mit eben der anfänglichen Geschwindigkeit heraus fahren, so lange nemlich die Röhre g c horizontal ist. Neigt sie sich aber herunterwerts, so, daß jede Kugel tiefer liegt, als die so näher gegen A sind, so wird auch ein Theil des Gewichts von diesen auf die Zusammendrückung der entferntern verwendet,

wendet, und die Geschwindigkeit, mit welcher jede bey gemachter Oefnung heraus fährt, wird dadurch grösser. Das Gegentheil erfolgt, wenn die Röhre g c aufwerts gebogen wird, weil sodann die darin liegenden Kugeln, mit einem Theil ihres Gewichtes herunterwerts drücken, und in sofern einem Theil des Druckes der Kugeln A, B, C &c. das Gleichgewicht halten.

§. 212.

Die Röhre in f wird von der Kugel M eben so viel aufwerts gedrückt, als die Kugel B von der Kugel A in a, demnach so viel als das Gewicht der sämtlichen Kugeln B, C &c. die auf A liegen. Man könnte demnach anstatt die Röhre in f geschlossen zu halten, noch einen verticalen Cylinder ansetzen, und eben so viele Kugeln als in B C sind darein legen, und so würde in f eben die Zusammendrückung erfolgen und daher ein Gleichgewicht statt haben. Ich muß noch erinnern, daß wenn die auf A liegende Anzahl der Kugeln nicht sehr groß ist, sich sodann zwischen dem Druck in f, a, und zwischen dem Druck in g, c ein bemerkbarer Unterschied äussert, weil die Kugeln A, M selbst auch mit ihrem eigenen Gewichte auf c, g drücken. Dieser Unterschied verschwindet aber bey der Betrachtung flüßiger Materien, weil deren Theilchen fast als unendlich klein anzusehen sind.

§. 213.

Man sieht aus dem bisshergesagten, daß eine einige verticale Columne von Kugeln B, C &c. zureichend ist, denen Kugeln A, M und so viel noch in der horizontalen Röhre g c liegen, eben den Druck mitzutheilen, den eben so viele andere Columnen mittheilen würden, und daß es folglich auf die Anzahl dieser Columnen nicht ankommt, um auf eine ganze horizontale Schichte von Kugeln einerley Druck auszubreiten.

§. 214.

Setzt man nun, die Röhre g c bleibe horizontal, hingegen liege die Röhre b h schief, so kann man sich leicht gedenken, daß jede der Kugeln B, C &c. nicht mehr mit ihrem ganzen Gewichte auf die untere drücke, sondern mit einem Theil desselben gleichsam auf der Röhre ruht, wo sie anliegt. Die Verhältniß läßt sich nach Anleitung des §. 149 leicht finden, und es ergiebt sich, daß der schiefe Druck in Verhältniß des Sinus des Winkels abnimmt, denn die Röhre b h mit der Horizontallinie g c macht, und folglich der Druck aller darin befindlichen Kugeln auf A einerley ist, oder A gleich viel zusammen gedrückt wird, wenn die Kugeln in b h bis auf einerley senkrechte Höhe aufgehäuft werden. Setzt man demnach in f eine schiefe Röhre und füllt sie bis auf gleiche Höhe mit b h mit Kugeln an, so wird ein Gleichgewicht statt haben, widrigenfalls nicht.

§. 215.

§. 215.

Ich werde nun diesen Vortrag, dessen vollständige Ausführung sehr weitläuftig werden würde, nicht weiter verfolgen. Man sieht leicht, daß sich nach Anleitung desselben eine in einem Gefässe eingeschlossene flüßige Materie in horizontale Schichten vertheilen läßt, daß jede Schichte einen durchaus gleichen Druck, oder vielmehr Zusammendrückung von dem Gewichte der aufliegenden Schichten erhält, daß diese Zusammendrückung von der horizontalen Länge und Breite der aufliegenden Schichten nicht abhängt, sondern schlechthin nur von ihrer Höhe herrührt. Man kann eben so daraus schliessen, daß die Oberfläche oder oberste Schichte, wenn sie eine Länge und Breite hat, horizontal seyn müsse, weil die verticalen Columnen sonst nicht gleich seyn würden, wie es zu Erhaltung des Gleichgewichtes in der Zusammendrückung jeder Theilchen einer der untern Schichten erfordert wird. Endlich sieht man, daß, wenn auch das Gefäß oben enger ist als unten, das Gefäß aller Orten so gedrückt wird, als es eine verticale Columne von gleicher Höhe und Basis thun würde. Alles dieses folgt aus dem Unterschiede, den man zwischen den blossen Druck und dem Zusammendrücken der elastischen Theilchen der flüßigen Materie nothwendig machen muß, und wovon man schlechthin nicht abstrahiren kann. (§. 210. 211). Der Druck läßt sich, so ungleich die Grösse und Lage der Theilchen auch seyn mögen, aus der blossen Theorie der Zusammensetzung und Auflösung der Kräfte herleiten, weil jedes Kügelchen oder Theilchen auf drey oder vier andern wie auf einem Fußgestelle ruht, und hinwiederum drey oder vier andere Theilchen der nächst höhern Schichte tragen hilft (§. 59. 108). Daraus findet sich, daß jede Schichte das Gewicht aller auf liegenden trägt, und ohne die Elasticität der Theilchen würde dieses auch alles seyn. Man kann daraus auch zeigen, daß bey einem Gefässe von irregulärer Figur, der Druck der aufliegenden Schichte nicht auf jedes Theilchen einer Schichte gleich vertheilt sey, sondern jedes Theilchen nur so viel tragen, und die nächst unten anliegende Schichte nur so viel drücken würde, als es die Höhe der Columne, zu welcher es gehört, mit sich bringt. Dieses hat zwar in Absicht auf das blosse Gewicht auch statt, wenn die Theilchen elastisch sind. Es kömmt aber alsdann noch das Zusammendrücken derselben hinzu, und dieses hängt nun, weil die Kügelchen sich unter sich und an dem Gefässe ansperren, nicht bloß von der Höhe jeder Columne, sondern von der absoluten Höhe der Schichten ab, weil eine einige Columne zureichend ist, die in jeder horizontalen Schichte befindliche Theilchen, durchaus gleich zusammen zu drücken, es mögen in dieser Schichte viele oder wenige Theilchen seyn (§. 211).

§. 216.

§. 216.

Da sich das ganze System ins Gleichgewichte setzt, so kömmt der Mittelpunct der Schwere an den tiefsten Ort, und so läßt sich auch daraus der waagrechte Stand der Oberfläche herleiten. Es sey DEABHC ein Gefäß mit Wasser angefüllt, dessen Fläche in den beyden Theilen AB, CD sey; GF sey horizontal, und M der Mittelpunct der Schwere. Man drücke das Wasser in a b herunter, so steigt auf der andern Seite eben so viel in c d herauf, und die Räumgen ABba, CDdc sind einander gleich. Ihre Mittelpuncte der Schwere seyn f, g, und aus diesen fälle man auf GF senkrechte Linien. Die in DCcd herauf getriebene Menge Wassers sey $= m$, und zwar unendlich klein. Die Oberfläche AB werde $= \alpha$, die in DC $= 6$ gesetzt. DG sey $= z$, fF $= y$, und die Vertiefung des Wassers in A sey $= dx$, so ist desselben Erhöhung in D $= \alpha dx : 6$. Demnach die Aenderung dv, so in der Höhe des Mittelpuncts der Schwere vorgegangen, wenn die ganze Masse $= M$ gesetzt wird, Fig. XXXII.

$$Mdv = -(y - \tfrac{1}{2}dx)m + \left(z + \frac{\alpha dx}{26}\right)m$$

diese aber muß $= 0$ seyn, weil die Höhe des Mittelpuncts M ein minimum ist. Daher ist

$$0 = -(y - \tfrac{1}{2}dx)m + \left(z + \frac{\alpha dx}{26}\right)m$$

und hieraus

$$y - z = \frac{\alpha + 6}{2\,6} \cdot dx$$

das will sagen

$$y - z = o$$
$$y = z$$

Demnach müssen die Höhen der Oberflächen AB, DC gleich seyn, wenn das System im Gleichgewichte seyn solle. Es wird auf eben diese Art auch erwiesen, daß diese Flächen horizontal und eben seyn müssen.

§. 217.

Man sieht übrigens aus diesem Beweise, daß die Differentialtheilchen dx, $\frac{\alpha dx}{6}$ zuletzt wegfallen, und nur y mit z verglichen wird. Ich merke dieses deswegen an, weil man gewöhnlich den Stand des Gleichgewichtes darauf gründet, daß, wenn der Schenkel DC z. E. viermal enger ist als der Schenkel AB, das Wasser im erstern viermal geschwinder und höher steigen muß als im letztern. Und dieses leitet man aus den Differentialhöhen dx und ($\alpha dx : 6$) her. Da aber diese Verhältniß ganz unbestimmt läßt, ob die Höhen y, z gleich oder ungleich sind; so nimmt man ferners an, der Druck des Wassers in dem Schenkel EA sey wegen der grössern Menge Wassers, in umge-

umgekehrter Verhältniß der Geschwindigkeit, grösser als der Druck des Wassers in dem Schenkel E D, wenn die Höhen y, z gleich sind. Ob dieses allgemein und für jede Figur des Gefässes könne erwiesen werden, sehe ich nicht ein. Wenn es aber auch erwiesen werden könnte, so kommen hier alle die Anmerkungen zu machen vor, die wir oben (§. 47 seq.) bey Anlaß eines ähnlichen Beweises für den Hebel gemacht haben. Denn hier sieht man ebenfalls das Wasser in beyden Schenkeln als Kraft und Last an, und setzt, sie seyn im Gleichgewicht, wenn sich im Fall der Veränderung oder Aufhebung desselben der Weg, den die Kraft macht, zu dem Weg der Last, umgekehrt, wie die Last zu der Kraft verhält; und hinwiederum habe ersteres statt, wenn letzteres statt habe. Man sieht aber leicht, daß wenn die beyden Schenkel nicht cylindrisch oder Parallepipeda sind, dieses hier nicht so unbedingt angewandt werden kann. Wenn es aber auch angienge, so kommen noch alle die erstbemeldten Anmerkungen vor, die wir, weil sie oben (§. 47) schon ausführlich vorgetragen worden, hier nicht wiederholen.

§. 218.

Noch bleibt nun der Satz, daß ein schwerer Körper unter dem Wasser eben so viel von seinem Gewichte verleurt, als das Wasser wiegt, dessen Stelle er einnimmt. Von diesem

Satze

Satze läßt sich folgender Beweis geben, welcher den eigentlichen Grund davon deutlich auseinander setzt, weil er auf der Resolution der drückenden Kräfte beruht. Ich bemerke demnach aus dem vorhergehenden, daß, weil ein jedes Wassertheilchen, so den Körper berührt, in seiner Zusammendrückung sich an denselben ansperrt, es den Druck senkrecht auf die Oberfläche des Körpers äussert, und daß dieser Druck allemal der verticalen Tiefe desselben unter der Oberfläche des Wassers dergestalt proportional ist, daß wenn man diese Tiefe mit dem Theilchen der Fläche des Körpers, worauf es drückt, multiplicirt, man dadurch den soliden Raum einer Columne Wassers erhält, deren Gewicht dem Drucke gleich ist. Da demnach dieser Druck sich nach der Tiefe verändert, und sich, in Absicht auf die Direction, nach der Fläche des Körpers richtet; so werden wir den Körper in unendlich kleine Prismata vertheilen, die alle parallel, und entweder vertical oder horizontal liegen. Unter den horizontalen sey A B H F eines, wo die Fläche A B C D dem Drucke des Wassers ausgesetzt, und welche gegen die Verticallinie L M unter dem Winkel K L M, und gegen die Länge des Prisma D F unter dem Winkel M K N geneigt ist, und daher, in beyden Absichten, eine schiefe Lage habe. Nun ist der Druck des Wassers auf die Fläche A B C D senkrecht, und daher geht derselbe nach einer doppelt schiefen Rich-

Fig. XXXIII.

tung

tung herunterwerts. Er läßt sich aber leicht in zween andere auflösen, welche auf die Grundfläche A Q P D und die verticale Fläche B Q P C senkrecht sind. Und da giebt die Theorie von der Zusammensetzung und Auflösung der Kräfte, daß, wenn der Druck auf die Fläche A B C D, durch diese Fläche vorgestellt wird, sodann der verticale Druck durch die Fläche A Q P D, und der horizontale durch die Fläche B C P Q vorgestellt werde. Demnach könnte man das trianguläre Prisma, so diese drey Flächen bilden, wegnehmen, und so würde das Wasser, mit eben der linearen Kraft, seinen Druck senkrecht auf die horizontale Fläche A Q P D herunterwerts, und senkrecht auf die verticale Fläche B C P Q nach der horizontalen Richtung KM mit eben dem Erfolge äussern, mit dem es vorhin auf die Fläche A B C D drückte. Da aber die Richtung des horizontalen Druckes KM mit der Länge des Prisma D F nicht parallel ist, so muß der Druck auf die verticale Fläche B C P Q in zween andere aufgelöst werden, welche auf die gleichfalls verticalen Flächen B Q T S und S C P T senkrecht seyn, und folglich letzterer nach der Länge des Prisma DF, ersterer aber nach der Breite des Prisma DR oder PT gehe. Nun folgt eben so, wie vorhin, aus der Theorie der Zusammsetzung der Kräfte, daß jede dieser Flächen das Maaß des Druckes ist, der auf sie wirkt. Demnach liesse sich auch das Prisma, so diese drey Flächen einschlies-

einschliessen, wegnehmen, und das Wasser würde auf die Fläche B Q T S, S C P T, D A Q P mit eben dem Erfolge seinen Druck äussern, den es auf die Fläche ABCD äussert. Nun stellt die Fläche PCST die Dicke des Prisma vor, hingegen zeigt AQPD an, wie viel es unten länger ist als oben; und eben so zeigt BQTS = ABSR, wie viel es hinten länger ist als vornen. Demnach richtet sich der Druck der Länge, Höhe und Breite nach genommen, schlechthin nach diesen drey Umständen.

§. 219.

Es ist nun leicht zu begreifen, daß dem Druck auf die Fläche S C P T ein anderer gleich grosser auf die Fläche HGEF entgegen wirkt, und demnach das Prisma, in dieser Absicht betrachtet, im Gleichgewichte bleibt. Denn ist der Schnitt des Prisma HGFE wirklich auf dessen Länge senkrecht, so ist es für sich klar, daß das Wasser, weil das Prisma horizontal liegt, auf H G F E eben den Druck äussert, den es auf die Fläche PCST äussert. Wäre aber der Schnitt des Prisma schief, so läßt sich der Druck Wassers eben so in drey auf einander rechtwinklichte auflösen, wie es in Absicht auf den schiefen Schnitt A B C D geschehen; und so wird der Druck, nach der Länge F D gerechnet, der auf dieselbe senkrechten Fläche FEHG = PCST gleich seyn.

seyn. Da nun dieses von allen Prisma gilt, in die sich der Körper eintheilen läßt, so folgt, daß jedem horizontalen Druck des Wassers, ein gleich grosser entgegen wirkt, und demnach der Körper in dieser Absicht im Gleichgewichte erhalten wird.

§. 220.

Mit dem verticalen Druck hätte es eine gleiche Bewandtniß, wenn der Druck des Wassers in jeder Höhe gleich wäre. So aber ist zwar der verticale Druck, der auf die Fläche AQPD herunterwerts geht, demjenigen, der auf die Fläche aqpd heraufwerts geht, entgegengerichtet. Da aber jeder einem Product aus dieser Fläche AQPD = aqpd in die Tiefe derselben unter der Oberfläche des Wassers dergestalt proportional ist, daß er dem Gewichte eines Parallelepipedi Wassers von eben der Grösse gleich ist, so ist der Ueberschuß des untern Druckes über den obern dem Gewichte des Wassers gleich, welches in dem Raume AQPpdA seyn könnte. Da nun dieser Ueberschuß des untern Druckes aufwerts geht; so benimmt er dem Prisma Ap eben so viel von seinem Gewichte, als das Wasser wiegt, dessen Raum es einnimmt. Nun gilt eben dieses von jedem unendlich kleinen verticalen Prisma, so sich durch den Körper gezogen, gedenken läßt, demnach von dem ganzen Körper. Demnach verleurt der Körper von seinem Gewich-

Gewichte so viel, als das Wasser wiegt, dessen Raum er einnimmt.

§. 221.

Man sieht aus diesem Beweise zugleich, daß der Satz nur alsdann statt findet, wenn das Wasser den Körper um und um berührt. Ich merke dieses deswegen an, weil, wenn der Körper dergestalt auf dem Boden des Gefässes liegt, daß kein Wasser dazwischen kommen kann, der Körper sodann minder von seinem Gewichte verleurt. Und so ist es möglich zu machen, daß selbst ein Körper, der leichter als das Wasser ist, unter dem Wasser auf dem Boden des Gefässes liegen bleibt.

XVII. Die Bewegung flüßiger Materien.

§. 222.

Bey der Bewegung flüßiger Materien kann man sich unendlich viele und zugleich auch unendlich verwickelte Fälle gedenken, wo man genöthigt ist, die Bewegung eines jeden Theilchen besonders zu betrachten, und vermittelst mehrerer Integrationen aus den Differentialgrössen auf das Ganze zu schliessen. Es sind daher überhaupt diejenige Fälle die einfachsten, wobey sich solche Integrationen auf eine einige bringen lassen. Und die Frage ist demnach,

nur

nur zu sehen, welche Bedingungen dazu erfordert werden.

§. 223.

Der einfachste Fall ist, wo eine flüßige Masse in luftleerem Raume schlechthin nur herunter fällt, so, daß alle Theilchen zugleich anfangen zu fallen. Denn da behält die Masse ihre Figur, und die Theilchen ihre Lage, und so erfolgt alles, wie wenn ein fester oder harter Körper fiele. Setzt man hiebey, die Masse sey cylindrisch und falle nach der Richtung der Axe des Cylinders vertical herunter, so durchläuft dieselbe einen cylindrischen Raum von gleichem Diameter. Diesen Raum kann man sich in Form einer Röhre eingeschlossen gedenken; und abstrahirt man von allem Anreiben und von allen Cohaesionskräften, so läßt sichs gedenken, daß das Wasser in einem verticalen Cylinder, wenn es zugleich anfängt in demselben zu fallen, eben so herunter fällt, als wenn es in leerem Raume fiele. Unter gleicher Bedingung wird es in einem schiefliegenden Cylinder mit verminderter Geschwindigkeit eben herunterfliessen, wie eine Kugel auf einer gleich schiefliegenden Fläche herunter läuft (§. 149), das Wasser muß aber zugleich anfangen zu fallen, der Cylinder gleich weit, und nicht gebogen seyn.

§. 224.

Nach diesem an sich einfachsten Fall betrachtet man denjenigen, wo das Wasser, ebenfalls nur durch die Kraft der Schwere getrieben, aus einem Gefässe ausfleußt. Hiebey zeigen sich, gleich bey dem Anfange des Ausfliessens, einige besonders zu betrachtende Umstände. Der erste hängt von der Elasticität der Theilchen und ihrer Zusammendrückung
Fig. XXXI. ab. Denn da haben wir bereits (§. 208 seq.) gesehen, daß wenn in c die Röhre b h geöfnet wird, die elastische und zusammengedrückte Kugel A, mit einer Geschwindigkeit heraus fährt, die nicht bloß von dem Drucke der Schwere, sondern zugleich auch von ihrer Elasticität herrührt. Eben dieses wiederfährt den folgenden Kugeln B, C &c. jedoch immer weniger, weil diese minder zusammengedrückt sind. Jede erhält nach den Maaß ihrer Höhe über c einen Grad von Geschwindigkeit, sich herunterwerts zu bewegen, welche grösser ist und sich viel schneller äussert als diejenige, die sie durch den blossen Druck der Schwere erhalten würden, wenn sie entweder nicht elastisch oder wenigstens nicht zusammengedrückt wären. Die Wirkung hievon dauert aber bey flüßigen Materien nicht lange, weil die Theilchen derselben sehr hart sind, und einander berühren. Denn dadurch setzt sich das System bald in einen Beharrungsstand, und es werden nur die ersten Tropfen mit einer grössern Geschwindigkeit

digkeit heraus geworfen. Man sieht dieses auch bey den Springbrunnen, wenn die Röhre mit einem male schnell geöfnet wird. Der Beharrungsstand selbst aber ist dieser, daß, wenn die Oefnung kleiner ist als die innere Weite des Gefässes, die Theilchen einen gewissen Grad von Zusammendrückung behalten, und eben dadurch verursachen, daß das Wasser durch eine kleinere Oefnung geschwinder heraus getrieben wird, als wenn diese grösser ist. Denn man sieht leicht, daß nur diejenige Theilchen sich wieder ausdehnen können, die zunächst bey der Oefnung sind, und daß die entferntern sich nur in sofern ausdehnen können, als sie einen Theil ihres Druckes verwenden, um die Theilchen bey der Oefnung desto geschwinder heraus zu treiben, um sich dadurch gleichsam Raum zu machen.

§. 225.

Der andere Umstand kömmt vor, wenn, ehe die Röhre geöfnet wird, zwischen der Oefnung und der Röhre etwas Luft ist, so, daß bey gemachter Oefnung, das Wasser anfängt zu fallen, ehe es dieselbe berührt, und daher mit einer gewissen Geschwindigkeit anfährt. Ist nun die Oefnung sehr klein, so werden die übrigen Theilchen sehr zusammengepreßt, und eben dadurch erfolgt, daß sie diejenigen, so vor der Oefnung sind, mit einer merklichen Geschwindigkeit heraus treiben. Es sind aber auch wiederum nur einige Tropfen, die mit so grosser Geschwindigkeit heraus fahren, und das System setzt sich eben so, wie vorhin, in Beharrungsstand, welchen wir nun betrachten werden.

§. 226.

Da die Theilchen elastisch sind, so hat, überhaupt betrachtet, die Lehre vom Stoß elastischer Körper dabey statt, und man kann sie allein dabey anwenden, wenn man von der Cohaesion, der Zähigkeit und dem Anreiben abstrahirt. Von der Zähigkeit läßt sich abstrahiren, wenn man eigentlich oder vollkommen flüßige Körper nimmt. Die Cohaesionskräfte heben sich inner der flüßigen Materie unter einander auf, und äussern sich daher eben so wie das Anreiben, nur an den Seiten des Gefässes oder der Röhre, in welcher sich die flüßige Materie bewegt. Ist demnach das Gefäß oder die Röhre sehr weit, so wird die daherrührende Hinderniß, überhaupt betrachtet, unmerklicher.

§. 227.

Sofern sich demnach die Gesetze des Stosses elastischer Körper bey der Bewegung flüßiger Materien anbringen lassen, wird allerdings auch der Satz gelten, daß die Summe aus den Producten der Masse jedes Theilchens in das Quadrat seiner Geschwindigkeit beständig bleibe, so lange nicht eine äussere Kraft, wie

wie z. E. die Kraft der Schwere, die Bewegung der Theilchen vermehrt oder vermindert: denn im letztern Fall muß dieser Aenderung Rechnung getragen werden. Da aber die Rechnung ins unendlich weitläuftige fällt, wenn man die Bewegung eines jeden Theilchens für sich betrachten will; so sucht man auch hier diejenigen Fälle aus, wo sich diese Weitläuftigkeit abkürzen läßt. Und hiezu thut die Betrachtung, daß die Theilchen einander immer berühren, nicht geringe Dienste: denn dadurch geht der Druck, den ein jedes Theilchen äussert, sogleich in die anliegenden über; und in sofern würde jedes liegen bleiben, wenn nicht zum Ausfliessen, oder auch zum Fortfliessen eine Oefnung wäre. Dieses macht, daß jeder Druck, der gegen die Oefnung gerichtet ist, nicht wieder zurücke kehrt, sondern die bey der Oefnung liegenden Theilchen zum Ausfliessen nöthigt.

§. 228.

Man setze z. E. aus dem Gefässe D H A fliesse, durch eine in E gemachte Oefnung, Wasser heraus, so läßt sich die Oberfläche desselben D A, nach und nach, herunter. Sie mag in f ein wenig tiefer seyn als in B und A, sofern das Wasser in der Mitte sich leichter senkt, als an dem Rande des Gefässes. Man nimmt aber aus dieser verschiedenen Geschwindigkeit ein Mittel, und indem man setzt, die Fläche senke

Fig. XXXII.

sich mit dieser mittlern Geschwindigkeit gleichförmig, so ist es, überhaupt betrachtet, eben so viel als wenn sie eben bliebe. Da nun eben dieses von jeder horizontalen Schichte gilt; so erhält man dadurch die Abkürzung der Rechnung, daß man anstatt das Senken eines jeden Theilchens zu betrachten, das Senken einer ganzen Schichte von Theilchen betrachten kann. Dieses Umstandes nun hat sich längst schon Herr D. Bernoulli theils in dem 2ten Bande der Comment. acad. Petrop. fürnemlich aber in seiner Hydrodynamic, mit gutem Erfolge bedient. Es ist die einige mögliche Art, die Bewegung flüßiger Materien im Ganzen zu betrachten, ohne sich weder in viele Integrationen, noch in eine Menge einzelner und zum Theil unerweislicher Hypothesen über die Bewegung, Cohaesion und Zähigkeit jeder Theilchen der flüßigen Materien einzulassen.

§. 229.

Es wird indessen nicht überflüßig seyn, hier noch einige besondere Anmerkungen über die Bewegung flüßiger Materien beyzufügen. Die erste betrift die Höhe des springenden Wassers; diese wird gewöhnlich der Höhe des Falles gleich gesetzt. Da sie aber immer kleiner ist, so sucht man auch verschiedene Gründe dafür, und diese werden bloß als kleine Ausnahmen von der Regel angegeben. Indessen muß ich sagen, daß mir die Beweise, der dem Fall gleiche

gleiche Höhe des springenden Wassers, niemals sehr einleuchtend geschienen; und die hydraulischen Sätze waren meistentheils bisher mehr aus Erfahrungen als aus Gründen richtig. Was man bey Springbrunnen die Höhe des Falls nennt, muß ebender die Höhe des Druckes genennt werden: denn die Röhre, worinn das Wasser herunter fällt, wird, aus guten Gründen, im Lichten viel weiter gemacht als die Oefnung, durch welche es heraus springt. Da sich aber eben daher das Wasser sehr langsam senkt; so kann es nicht sowohl als fallend, sondern vielmehr als bloß drückend angesehen werden. Man hat demnach auch hier die Bewegung mit dem Drucke zu vergleichen; und dieses hat, in Absicht auf die einzelnen Theilchen, einen besondern Erfolg. Denn da diese als elastisch betrachtet werden müssen, so muß man sich auch gedenken, daß sie, so wenig es auch seyn mag, zusammengedrückt werden, bis ihre Schnellkraft dem Drucke der aufliegenden Last gleich wird. Dieses geschieht nun vollkommen, so lange die Oefnung, wo das Wasser herausspringen sollte, geschlossen ist. Man setze nun, diese werde geöfnet; so muß man sich gedenken, daß jedes Theilchen, dafern man von den Cohaesionskräften und andern Umständen abstrahirt, wegen seiner eigenen Elasticität in die Höhe springt. Ob es aber genau die Höhe des Druckes erreiche, das ist eine ganz andere Frage, weil deren Beantwortung sowohl von der Masse als der besondern Elasticität des Theilchens abhängt. Denn man sieht leicht, daß hiebey die letzte Formel des §. 158

$$v = \int \frac{k\,dx}{m}$$

vorkömmt, wo v die Höhe ist, welche das Kügelchen erreicht. Diese Höhe hängt aber von der Verkürzung des Diameters x, von dem Gewicht der aufliegenden Last k, und dem Gewicht des Kügelchen m ab. Und da ist noch nicht bewiesen, daß bey allen elastischen Kügelchen (Fig. XXVII.) die krumme Linie BME von einerley Art seyn müsse. Und noch weniger ist erwiesen, daß, wenn die Last k einem Cylinder voll flüßiger Materie gleich ist, dessen Grundfläche so groß als das Kügelchen, und die Höhe $= h$ ist, sodann immer

$$k = n\,h$$

und

$$h = v$$

seyn müsse. Man sieht leicht, daß dieses eine besondere Art von Elasticität voraus setzt, weil dabey obige Formel in folgende

$$\frac{k}{n} = \int \frac{k\,dx}{m}$$

verwandelt wird, welche differentirt

$$\frac{m\,dk}{nk} = dx$$

und daher

$$\frac{m}{n} \log. k = x + \text{const.}$$

giebt.

giebt. Man kann aber nicht so schlechthin sagen, daß diese in allen Fällen die Gleichung für die krumme Linie B M E sey. Indessen wäre so viel wohl richtig, daß, wenn ein Waßerkügelchen, in leerem Raume, von der Höhe $v = h$ herunter fiele, es wiederum eben so viel aufspringen könnte. So aber lassen sich die Fälle von springendem Wasser nicht betrachten. Und in sofern bleibt es, der Theorie nach, unausgemacht, ob das Wasser höher oder minder hoch springe als die Höhe des Druckes ist.

§. 230.

Ein anderer Umstand bey solchen Springbrunnen, wo das Wasser durch den Druck einer Columne oder Röhre voll Wassers zum Springen gebracht wird, betrift die äussere Luft. Eine solche Röhre läßt sich, gewisser massen, als ein Barometer ansehen, wo die Luft auf die untere Oefnung stärker druckt als auf die obere. Dieses macht zwar, wo die Höhe der Röhre nicht von 100 und mehr Fussen ist, keine grosse Veränderung. Indessen kann der Luft so viel zugeschrieben werden, daß sie das Wasser in der Röhre zusammen hält. Bey Quecksilber hat dieses noch mehr zu sagen. Ich habe z. E. Thermometer von Quecksilber gemacht, so, daß die Luft aus der Röhre ganz ausgetrieben war. Wenn ich es sodann umwendete, daß die Röhre herabhienge, so sonderte sich eine Columne von Quecksilber ab, weil ihr Gewicht stärker als Cohaesionskräfte war, und in dem luftleeren Theil der Röhre sich nichts widersetzte. Ein gleiches liesse sich auch durch Erschütterung erhalten, wodurch die Quecksilbertheilchen ihre Elasticität stärker äusserten.

§. 231.

Ein dritter Umstand findet sich bey der abnehmenden Geschwindigkeit des aufspringenden Wassers. Die Höhe, die es in gleichen Zeittheilchen zu erreichen hat, nimmt ab, wie die ungerade Zahlen, z. E. wie 7, 5, 3, 1. Dieses macht nun, daß sich in den abgetheilten Columnen, deren Höhen wie 7, 5, 3, 1 sind, gleich viel Wasser befinden muß. Daraus aber folgt offenbar, daß der auffspringende Wasserstrahl in gleicher Verhältniß dicker werden muß. Da nun dieses nicht geschehen kann, es sey denn daß die Wassertheilchen gezwungen werden, sich seitwerts zu bewegen; so sieht man auch, daß es ohne Aufwand einiger Kraft nicht angeht, und daß besonders bey sehr engen Oefnungen, das aufspringende Wasser deswegen nicht die völlige Höhe erreicht, weil es, ehe es dahin kommt, in Tropfen zersprützt. Und auch daraus erhellet, daß die Theilchen elastisch sind.

§. 232.

Da übrigens die hier betrachteten Abweichungen von allgemeinen Regeln theils öfters

geringe

geringe sind, und theils nur den Anfang des aufspringenden Wassers betreffen, so hält man sich gewöhnlich nicht dabey auf, und zwar aus gleichen Gründen, wie auch bey Untersuchung der Maschinen des Antreibens selten viel Rechnung getragen wird. Die vollständige Berechnung ist ohnehin unendlich weitläuftig, und auch da, wo z. E. Herr D. Bernoulli nur das Allgemeine betrachtet, wird schon eine ziemliche Bekanntschaft mit den mechanischen Gründen voraus gesetzt, so, daß einige leicht verleitet worden, über Dunkelheit zu klagen. Ob die Sache verständlicher wird, wenn man den Vortrag ändert, das werden die Leser entscheiden müssen. Ich möchte dabey, wie Herr Bernoulli gethan, gern von der Benennung der lebenden Kräfte abstrahiren, und dennoch lassen sich auch die Wörter ascensus potentialis und descensus actualis, ohne eine ziemliche weitläuftige Umschreibung, nicht gebrauchen, so sehr sie auch, wenn man sie einmal versteht, die Sache abkürzen. Ich werde demnach sehen, wie sich das Ausfliessen des Wassers aus einem aufrechtstehenden cylindrischen Gefässe, mit den bisher vorgetragenen Sätzen, zusammenhängen läßt. Es wird wohl einige Aufmerksamkeit gebrauchen; indessen werde ich bemüht seyn, Schritt für Schritt zu gehen.

§. 233.

§. 233.

Fig. XXXIV. Ein solches Gefäß sey CABD die Oefnung im Boden E, die Höhe des Wassers, nachdem bereits ein Theil ausgeflossen sey AP. Nun ist bekannt, daß sich beym Ausfliessen die Oberfläche des Wassers PQ, nach und nach, herunter senkt, so, daß wenn sie zu einer Zeit τ in PQ war, sie zu der Zeit $\tau + d\tau$ in pq kömmt. Die Höhe AP, welche wir $= x$ setzen wollen, wird demnach immer vermindert, so, daß sie $Ap = x - dx$ wird. Da das Gefäß cylindrisch ist, so vermindert sich auch die ganze Masse des Wassers in gleicher Verhältniß mit der Höhe. Man setze, die Grundfläche des Cylinders sey $= b$, so ist die Masse $APQB = bx$, die Masse $ApqB = b(x - dx)$ und die Masse $PQqp = bdx$. Diese fleußt nun in der kleinen Zeit $d\tau$ durch die Oefnung E aus. Es ist für sich klar, daß sie mit viel grösserer Geschwindigkeit ausfliessen muß als sie sich in Pp herunter senkt, und daß die Geschwindigkeit des Ausfliessens sich zu der Geschwindigkeit des Heruntersenkens verhält, wie die Grundfläche des Cylinders zu der Grundfläche der Oefnung, das ist, wenn wir diese $= a$ setzen, wie b zu a, daß das Ausfliessen durch die Höhe des Druckes verursacht werde, versteht sich von selbst. Es sey nun die Geschwindigkeit des heruntersenkens $= g$, des Ausfliessens $= c$, so ist $g : c = a : b$.

§. 234.

§. 234.

Ich habe bereits vorhin (§. 228) erwähnt, daß man durch g eine mittlere Geschwindigkeit verstehe, weil die ganze Masse des Wassers sich nicht durchaus gleichförmig senkt. Indessen wird dieses angenommen, wo man die Sache nur im Ganzen betrachtet, und so stellt g die mittlere Geschwindigkeit der ganzen Masse vor.

§. 235.

Nun werde ich, mehrerer Deutlichkeit halben, von der Wirkung der Schwere abstrahiren, und setzen, die ganze Masse bewege sich mit der Geschwindigkeit g gegen den Boden AB. So bald sie mit dieser Geschwindigkeit an Boden anfährt, so geht eine doppelte Veränderung vor. Denn erstlich wird ein Theil Wassers durch die Oefnung E heraus getrieben, und dadurch die übrige Masse vermindert. Andern Theils vermindert sich auch die Geschwindigkeit der übrigen Masse, weil von der Kraft, so sie zum Austreiben verwendet, ein Theil abgeht; oder auch, weil der Boden und besonders die ausfliessenden Wassertheilchen rückwerts wirken (§. 207 seqq.). Da nun die Wassertheilchen elastisch sind (§. 210), so hat dabey das Gesetz statt, daß die Summe der Producte aus den Massen in die Quadrate der Geschwindigkeit, vor und nach der Veränderung, beständig ist (§. 167). Nun ist vor

der

der Veränderung die Masse $= bx$, die Geschwindigkeit g, demnach das bemeldte Product $= ggbx$. Hingegen nach der Veränderung sind zweyerley Massen: einmal die zurückgebliebene $b(x-dx)$, ihre Geschwindigkeit $g-dg$; sodann die heraus getriebene bdx ihre Geschwindigkeit c. Dies giebt die Producte $b(x-dx)(g-dg)^2$ und $bdx.cc$. Da nun die Summen sollen gleich seyn, so ist $ggbx = (g-dg)^2(x-dx)b + ccbdx$. Demnach

$$o = -bggdx - 2bgdg.x + bccdx.$$

§. 236.

Wirket nun aber die Schwere mit auf das Wasser, so ist dieser Ausdruck nicht $= o$, weil die Schwere dem Wasser immer neuen Druck mittheilt, und so wird die Geschwindigkeit ganz anders verändert. Da wir nun oben (§. 158) den Druck elastischer Körper mit dem Druck der Schwere verglichen, und die Formel

$$\tfrac{16}{1000}gg = \int\frac{kdx}{m} = v$$

gefunden haben, so werden wir uns dieser Formel bedienen müssen. In derselben ist k der Druck der elastischen Kraft, welcher hier dem Gewicht des Wassers gleich gesetzt wird, so wie auch m das Gewicht des Wassers, als Masse betrachtet, vorstellt. Wir haben demnach, um die Homogeneität zu erhalten, den Coefficienten $\tfrac{16}{1000}$ in der Rechnung des vorhergehenhergehenden §. anzubringen, und bemerken, daß, wenn die Formel differentiirt wird, sie sich in

$$\frac{16.m}{1000}.2gdg = kdx = mdv$$

verwandelt, und anstatt der ganz einfachen Veränderung der Geschwindigkeit

$$\frac{16.m}{1000}.2gdg \text{ oder } mdv$$

der Ausdruck

$\frac{16}{1000}(-bggdx - 2xbgdg + bccdx)$

genommen werden muß, um ihn mit kdx zu vergleichen. Denn in gegenwärtigem Fall kommen zwo Massen $b(x-dx)$ und bdx mit verschiedenen Geschwindigkeiten g, c in Betrachtung, und die damit vorgehende Veränderung

$\frac{16}{1000}(-bggdx - 2xbgdg + bccdx)$

muß mit kdx verglichen werden, wie in dem einfachern Fall $\frac{16}{1000}m.2gdg$ damit verglichen wird. Wir haben demnach

$\frac{16}{1000}(-bggdx - 2xbgdg + bccdx) = kdx.$

Nun ist

$$k = bx$$

$$c = \frac{gb}{a}$$

und (§. 158)

$$\frac{16}{1000}gg = v$$

demnach

$$-bvdx - bxdv + \frac{b^3}{a^2}vdx = bxdx$$

oder

oder

$$\left(1-\frac{bb}{aa}\right)vdx+xdv=-xdx$$

Hieraus wird

$$v.x^{1-bb:aa}=+\frac{aa}{bb-2aa}x^{2-bb:aa}+\text{const.}$$

Da nun, wenn die anfängliche Höhe des Wassers $CA=f$ ist, die Geschwindigkeit und dennach $v=0$ genommen wird, so erhalten wir

$$vx^{1-bb:aa}=\frac{aa}{bb-2aa}\left(x^{2-bb:aa}-f^{2-bb:aa}\right)$$

oder

$$v=\frac{16}{1000}gg=\frac{aaf}{bb-2aa}\left(\frac{x}{f}-\left(\frac{f}{x}\right)^{1-bb:aa}\right)$$

oder

$$v=\frac{16}{1000}gg=\frac{aaf}{bb-2aa}\left(\frac{x}{f}-\left(\frac{x}{f}\right)^{bb:aa-1}\right)$$

Nun ist (§. 158) v die Höhe, aus welcher ein Körper fallen müßte, um die Geschwindigkeit g zu erhalten, mit welcher sich die Oberfläche PQ herunter senkt. Will man aber die Geschwindigkeit des heraus fliessenden Wassers c haben, so ist (§. 233)

$$c=\frac{gb}{a}$$

demnach

$$\frac{bb}{aa}.v=\frac{16}{1000}cc=\frac{bbf}{bb-2aa}\left(\frac{x}{f}-\left(\frac{x}{f}\right)^{bb:aa-1}\right)$$

§. 237.

§. 237.

Dieses ist nun eben die Formel, die Herr D. Bernoulli heraus bringt, nur mit dem Unterschiede, daß er statt der Differentialformel $\frac{16}{1000}(-bggdx-2xbgdg+bccdx)=kdx$. gleich anfangs die andere

$$-bvdx-xbdv+\frac{b^3}{a^2}vdx=bxdx$$

gebraucht, und folglich alles durch Höhen ausdrückt. Das zweyte Glied dieser Gleichung nennt er den descensus actualis, weil während dem sich die Fläche des Wassers aus P in p senkt, der Mittelpunct der Schwere um dx herunter sinkt. Dieses Sinken mit der Masse bx multiplicirt, giebt bxdx seinen sogenannten Descensus. Das erste Glied der Gleichung erwächst, wie wir gesehen haben, aus den Geschwindigkeiten; und da es hier durch Höhen dv, dx ausgedruckt wird, so zeigt es, wie viel die Masse sich mit solchen Geschwindigkeiten aufwerts bewegen könnte. Und so nennt Herr B. das erste Glied den ascensus potentialis, und setzt ihn in Form eines **Grundsatzes** dem descensus actualis gleich.

§. 238.

Die Bernoullische Formel (§. 236) kömmt in dem Fall, wo $a=b$ ist, mit der Erfahrung nothwendig überein: denn sie verwandelt sich in

$$\frac{16}{1000}cc=f-x=CP$$

das will sagen, die Höhe des Falls wächst wie das Quadrat der Geschwindigkeit. Wir haben auch bereits (§. 223) angemerkt, daß wenn der Cylinder in AB ganz offen ist, auch die ganze Masse des Wassers gleichsam frey herunter falle, wie ein Körper im freyem Raume fällt. In der That ist auch nur das Anreiben an den Wänden des Cylinders das einige Hinderniß, und dieses ist sehr geringe.

§. 239.

Wird hingegen die Oefnung E in Vergleichung mit der Weite des Gefässes sehr geringe angenommen, so wird das Glied

$$(x:f)^{bb:aa-1}$$

bald ein so kleiner Bruch, den man weglassen kann, und so richtet sich das Ausfliessen gar bald nach

$$\frac{16}{100}cc = \frac{bbx}{bb-2aa}.$$

Und diese Formel, nebst dem, was daraus folgt, hat man in den meisten hydraulischen Schriften zum Grunde gelegt, in sofern die Oefnungen geringe sind. Man hat statt derselben auch nur $\frac{16}{100}cc = x$ gesetzt, wobey a als unendlich klein angenommen wird. Und dieses ist nun eben die Regel, daß das gerade aufspringende Wasser die Höhe des Falls erreiche, wovon aber immer mehr oder minder abgeht. Behält man aber die Bernoullische Formel ganz bey, so findet sichs, daß die Geschwindigkeit anfangs von o an zunimmt,

nimmt, bis sie ihr maximum erreicht. Denn man setze darin $x = f - z$, so, daß z sehr klein sey, so verwandelt sich die Formel in

$$\frac{16}{1000}cc = \frac{bbf}{bb - 2aa}\left(1 - \frac{z}{f} - \left(1 - \frac{z}{f}\right)^{bb:aa-1}\right)$$

welches nach der Newtonschen Binnomialformel, mit Weglassung von z^2, z^3 &c.

$$\frac{16}{1000}cc = \frac{bbf}{bb - 2aa}\left(\frac{bb}{aa} - 2\right)\frac{z}{f} = \frac{bbz}{aa}$$

giebt, welches mit dem Fall der Körper, wenn die Schwere in der Verhältniß von 1 zu $bb:aa$ grösser genommen wird, als sie auf der Erdfläche ist, übereinkömmt. Da aber bey gleicher Oefnung $E = a$, die Weite des Cylinders $AB = b$ so groß genommen werden kann als man will, so kann immer $\frac{bbz}{aa}$ und damit auch cc eine jede beliebige Grösse vorstellen. Es ist aber für sich klar, daß dabey die Wassertheilchen eine unendliche Flüßigkeit haben müßten, welche sie aber allerdings nur in einem endlichen Grade haben. Abstrahirt man indessen von solchen anfänglichen Abweichungen, so wie auch von andern bereits vorhin angemerkten, so thut die Bernoullische Formel der Sache noch immer am meisten Genügen. Und da sie für den Fall, wo $a = b$ ist, ganz richtig ist, für den Fall aber, wo $b:a = \infty$ ist, von der Erfahrung nicht immer viel abweicht, so hat sie den Vortheil, daß sie bey grössern Oefnungen E der Wahrheit immer näher komme;

 und

und für eben diese Fälle hatte man noch wenig zuverläßiges anders, als aus Erfahrung gefunden.

§. 240.

In der Art, wie die Bernoullische Formel gefunden worden, ist noch verschiedenes anzumerken: Einmal wird dabey des bereits heraus geflossenen Wassers, dessen Masse = b (f—x) ist, keine Rechnung getragen, weil f erst nach der Integration, wo es um die beständige Grösse zu bestimmen zu thun ist, in die Rechnung kömmt. Das heraus geflossene Wasser wird demnach als gar nicht mehr zurückwirkend betrachtet, sondern man sieht nur auf den Tropfen, der durch E gedrängt wird. Dieser wird nemlich allein noch seitwerts von den Wänden der Oefnung, und herunterwerts von dem Drucke des aufliegenden Wassers gedrückt, und daher mit in die Rechnung gezogen. Sobald er aber aus der Oefnung heraus ist, hört seine Zusammenpressung seitwerts auf, und er fleußt mit seiner daher erlangten Geschwindigkeit, welche sodann noch von der Schwere vermehrt wird, gleichsam frey herunter. Auch kann es besonders bey einem hohen Drucke und kleinen Oefnung geschehen, daß sich, wegen der sich äussernden Schnellkraft, die Tropfen, gleich bey dem Ausfliessen, versprützen.

XII.

XII. Zergliederung und Anwendung der Mayerischen Mondstafeln.

I. Vorläufige Betrachtungen.

§. 1.

Ungeachtet man sich immer mehr bemüht, die Genauigkeit in der Astronomie bis auf einzelne Secunden zu treiben; so bleibt man doch noch in mehrern Stücken bey ganzen Minuten zurücke, und in einigen läßt sichs in der That nicht wohl weiter gehen. Was man bey den Berechnungen zum Grunde legen muß, das sind theils allgemeine Gesetze, theils wirkliche Beobachtungen: denn blosse Hypothesen sind schon so ziemlich aus der Astronomie verwiesen. Die Genauigkeit, die sich von den Beobachtungen erwarten läßt, ist sehr ungleich. Sie hängen von der Schärfe des Auges, von der Güte der Instrumente, von der Geschwindigkeit und Sorgfalt des Beobachters, von dem Zustande der Luft, und noch von mehrern zufälligen Umständen ab. Unter den Gesetzen ist besonders das Newtonsche Gesetz der Schwere, welches, überhaupt betrachtet, eine Tab. VIII. IX. X. XI.

geometrische Genauigkeit zu haben scheint. Allein eben dieses Gesetz macht, daß durch die Einwirkung der himmlischen Körper in einander, unzählige kleine Anomalien in ihrer Bewegung entstehen, die die Berechnung nicht wenig weitläuftig machen, deren Grösse nicht immer leicht durch Beobachtungen kann bestimmt werden, und wovon auch noch dermalen nicht alle bekannt sind. Zu mehrern wird eine lange Reihe von Beobachtungen, und eine Zeit von vielen Jahrhunderten erfordert, ehe ihre Wirkung zu einer bemerkbaren Grösse anwächst.

§. 2.

Was man in der Astronomie beobachten kann, das sind überhaupt nur zwey Stücke, nemlich Zeit und **Winkel**, oder **Bögen**. Ueber diese zwey Stücke stellt man unzählige Vergleichungen an, und der Erfolg ist ungemein verschieden. Die Genauigkeit der Zeit ist, vermittelst der Penduluhren, auf Secunden bestimmt, und es lassen sich allenfalls noch halbe oder Viertel Secunden beobachten. Auf diese Art sind Beobachtungen, die noch kleinere Zeittheilchen erfordern würden, vergebliche Arbeit, dafern sich nicht, wie es bey der Bestimmung der sogenannten mittlern Bewegungen geschieht, vom Grössern aufs Kleinere schliessen läßt. Wenn wir indessen bey einer Secunde bleiben, so ist der Erfolg, den die Ungewißheit einer Secunde Zeit nach sich ziehen kann,

kann, sehr verschieden. So z. E. bey dem täglichen Umlaufe der Sonne giebt eine Secunde Zeit 15 Secunden eines Grades, und dieses ist auf guten Quadranten ein Raum, der von dem Faden bedeckt wird. Man kann demnach, wenn die Uhren zu richten sind, auch aus diesem Grunde nicht wohl weiter, als bis auf eine Secunde genau seyn. Hingegen nach dem jährlichen Laufe der Sonne kommen auf 1 Secunde Zeit nur $2\frac{1}{2}$ Tertien eines Grades; und so läßt sich aus der Zeit sehr genau auf die Bewegung schliessen. Allein diese müßte voraus eben so genau feste gesetzt seyn. Davon aber fehlt viel, wenn es andem ist, daß sich der Ort der Sonne kaum bis 5 oder 10 Secunden eines Grades beobachten läßt. Auch zeigt es sich in den meisten Beobachtungen der Zeit der Nachtgleichen und Sonnenwenden, daß der Beobachter für halbe Stunden Zeit nicht gut stehen kann, und daher aus sehr vielen Beobachtungen das Mittel nehmen muß. Bey dem Monde geht es ungefehr 13 mal genauer, weil derselbe in einer Minute Zeit ungefehr 33 Secunden eines Grades durchläuft, welche allenfalls noch wohl zu beobachten sind. Allein die unzähligen Anomalien in dem Mondlaufe verursachen, daß man solche Beobachtungen erst mit vieler Mühe auf die Berechnungen anwenden kann. Bey den obern Planeten, und besonders bey Saturn, welcher bey 30 mal langsamer läuft als die Erde, wird die

Unzuverläßigkeit noch viel grösser, wenn man von dem beobachteten Orte desselben auf die Zeit schliessen will. Und doch müssen solche Beobachtungen, bey Verfertigung der Tabellen, zum Grunde gelegt werden.

§. 3.

Man wird aus diesen Betrachtungen leicht schliessen können, warum man sehr viel erreicht zu haben geglaubt hat, als die Mayerschen Mondstafeln den Ort des Mondes bis auf 1, oder höchstens zwey Minuten genau angaben. Denn ausser der Schwürigkeit, alle Anomalien zu bestimmen, musten Beobachtungen zum Grunde geleget werden, welche selbst nicht viel zuverläßiger waren. Man kann auch überhaupt schliessen, daß in den astronomischen Tabellen, die Secunden mitgenommen werden, damit man von den Minuten um destomehr versichert sey, weil, wenn man die Secunden wegliesse, beym Zusammenrechnen eine oder mehrere Minuten fehlen könnten. Indessen hat La Caille die Sache noch weiter treiben, und den Lauf der Sonne bis auf Decimaltheile von Secunden bestimmen wollen. Durch diese scheinbare Sorgfalt hat er seinen Tafeln ein Ansehn gegeben, als wenn sie allen andern unendlich weit vorzuziehen wären. Allein die Decimaltheile von Secunden hätte er ganz füglich weglassen können, weil seine Tafeln noch lange nicht in ganzen Secunden richtig sind.

sind. Er setzt z. E. die größte Gleichung $1^{\circ}.55'.31''\frac{6}{10}$. aber wie, wenn sie $1^{\circ}.55'.44''$ seyn müßte? Dieses wäre nun nicht in Decimaltheilen von Secunden, sondern beynahe $\frac{1}{4}$ Minute gefehlt. Herr **Mayer** hatte sie zwar anfangs in seinen Tafeln nur $1^{\circ}.55'.30''$ angesetzt; allein in dem dritten Bande S. 444 und 446 sagt er, daß er durch neuere Beobachtungen gefunden, daß sie $1^{\circ}.55'.44''$ seyn müßte; und so genommen, gebrauchte er sie daselbst sowohl zur Bestimmung der Bahn des Mercurs, als auch fürnemlich zur Bestimmung der Polhöhe der Göttingischen Sternwarte. Ich dächte immer, **Mayers** letztere Aussage sey der erstern vorzuziehen, und seine Autorität in astronomischen Sachen übertreffe des **La Caille** seine sehr merklich. Jedoch dürfte ich für partheyisch angesehen werden, wenn ich die Leser auf die in dem ersten Theile der Beyträge zur Mathematik vorkommende **Theorie der Zuverläßigkeit der Beobachtungen und Versuche** verweise. Daselbst kömmt die Bestimmung der Zeit der Nachtgleichen und Sonnenwenden in Form eines Beyspiels vor, und im §. 43 sagte ich, daß daraus die größte Gleichung $1^{\circ}.55'.43''$ gefunden werde. Ja, beym nochmaligen Nachrechnen, wo ich alle Kleinigkeiten mitnahm, brachte ich die $1^{\circ}.55'.44''$ ganz nett heraus. Der Grad der Zuverläßigkeit dieser Bestimmung, läßt sich aus der daselbst untersuchten

Zuverläßigkeit der Nachtgleichen und Sonnenwenden des Jahrs 1712 beurtheilen. Diese sind in die 50 mal zuverläßiger und genauer bestimmt, als wenn jede unmittelbar durch die Beobachtung wäre heraus gebracht worden. Ich werde demnach, ohne Bedenken, im folgenden die gröste Gleichung 1°.55'.44" setzen, und von den Decimaltheilchen von Secunden abstrahiren, weil eine allzusehr gesuchte Genauigkeit doch nur blendet, im Grunde aber eine blosse Einbildung ist.

§. 4.

Die Mayerschen Mondstafeln sind, so viel ich vernommen, nicht ohne Anfechtung geblieben. Man hat in Frankreich andere berechnet, und zwar seitdem die Mayerschen durch den Druck bekannt gemacht sind. Denn vorher wußte man nicht, was man eigentlich zu suchen hatte. Da man es aber nachher wußte, so hieß es auch, Mayer habe verschiedenes bloß empirisch gefunden, wofür er nach der Theorie nicht gut stehen konnte. Man fügte noch bey, daß seine Tafeln bereits anfiengen von dem Himmel abzuweichen, und mit der Zeit einer Verbesserung bedürfen, auch in England sey man nicht mehr ganz damit zufrieden rc. Ich will nicht untersuchen, ob gewisse Affecten, die bey Ausländern gegen Deutsche noch sehr gewöhnlich sind, diese Beschuldigung veranlaßt haben. Allein Mayer hätte mehr Anspruch

spruch auf Erkänntlichkeit verdient, und allem Ansehen nach, wird erst die Nachwelt billiger seyn müssen. Allerdings sagte er selbst, daß er eine oder die andere Bestimmung nicht aus der Theorie, sondern aus den Beobachtungen gefunden. Allein Kepler fand seine Gesetze nicht anders, und man ist ihm immer dafür verpflichtet, weil er auf diese Art dem Newton vorgezeigt, wohin dieser seine Theorie lenken solle. Könnte es nicht mit Mayern eben so gehen? Ja, da heißt es, seine Tafeln fangen schon an von den Beobachtungen abzugehen; allein genauer betrachtet, gehen vermuthlich diese von jenen ab: denn es braucht viel dazu, wenn man in den Beobachtungen des Mondes keine Minute Zeit fehlen will. Man darf nur Beobachtungen von Finsternissen, die z. E. zu Paris von verschiedenen Astronomen zugleich beobachtet worden, gegen einander halten, so finden sich öfters noch beträchtlichere Unterschiede.

§. 5.

Es ist aber endlich so schwer nicht, die Zuverläßigkeit der Mayerschen Tafeln zu prüfen. Die Sache betrift theils die mittlere Bewegung, theils die Gleichungen, wodurch der mittlere Ort des Mondes in den wahren verwandelt wird. Diese zweyerley Stücke sind von einander unabhängig. Die mittlere Bewegung hat Mayer aus den Beobachtungen jeder Jahrhunderte dergestalt bestimmt, daß sie, dafern nicht der Lauf des Mondes verrückt wird, für die nächsten Jahrhunderte ganz gewiß gut seyn wird. Die Gleichungen sind sämtlich periodisch, und treffen größtentheils nach 18 Jahren wiederum zusammen, da sie in dem Verlauf dieses Zeitraumes alle mögliche Abwechslungen unter sich haben. Wären sie demnach sehr merklich irrig, so müßte auch der Fehler sich in jeden 18 Jahren auf mehrere Arten zeigen; allein **Mayer** hat uns darüber in Sicherheit gesetzt. Er lieferte eine Tafel aller beobachteten Finsternissen von 1610 bis 1753, und seine Mondstafeln treffen mit allen gleich gut überein. Die Fehler sind ohne Unterschied bald positiv, bald negativ, und lassen sich, ohne Bedenken, und größtentheils auf die Beobachtungen selbst schieben, weil diese eben auch nicht allemal bis auf eine Minute richtig sind. Nun ist von 1610 bis 1753 ein Zeitraum von 143 Jahren, welches beynahe sechs mal 18 Jahre sind. In diesem Zeitraume haben sich alle Combinationen der einzeln Anomalien dergestalt eingefunden, daß wenn in den Gleichungen, so **Mayer** angegeben, merkliche Fehler wären, sie sich sehr ofte müßten eingefunden haben. Man kann daher sicher schliessen, daß, wenn der Mond nicht verrückt wird, die Mayerschen Tafeln noch in den nächsten 143 Jahren so gut seyn werden, als sie es in den nächst verflossenen 143 Jahren waren. Sie kamen 1753 heraus,

heraus, und die neuesten Beobachtungen von Finsternissen treffen, so viel ich sie damit verglichen habe, noch so gut ein, daß man für die Fortdauer ihrer Güte nicht besorgt seyn darf.

§. 6.

Mayer, welcher, in Absicht auf den Mond, eine ungleich schwerere Arbeit, als Kepler, sein Landsmann, in Absicht auf die Planeten, übernommen, war entschlossen, die ganze Methode, wie er seine Tafeln berechnet, bekannt zu machen, als sie von Göttingen aus nach England geschickt worden, weil sie verdienten, des Anspruchs auf den Preiß wegen der Länge zur See, würdig erfunden zu werden. Die 3000 Pfund Sterling wurden denselben zuerkannt, aber die Methode, welche doch viele wichtige Kunstgriffe enthalten muß, ist, so viel ich weiß, noch dermalen nicht bekannt gemacht. Eben so bleibt auch noch eine Gleichung ungedruckt, welche Mayer nachschickte, und wodurch seine Tafeln noch genauer gemacht werden. Da ich dieses zuverläßig weiß, so muß es ein Mißverstand seyn, wenn vorgegeben wird, als hätte Bradley eine solche Gleichung gefunden, und dadurch die Mayerschen Tafeln noch vollkommener gemacht. Ich dächte doch, Mayer sollte, besonders nach seinem Tode, von allem verkleinerlichen

um

um so mehr unangefochten bleiben, da er sich selbst nicht mehr rechtfertigen kann.

§. 7.

Da wir also die Mayerschen Tafeln schlechthin nur so haben, wie sie in dem zweyten Bande der Göttingischen Commentarien heraus gekommen, so sind sie auch gleichsam das einige Datum, und sie müssen so, wie sie sind, zergliedert werden, wenn man ihre innere Einrichtung kennen, und noch andere Vortheile daraus ziehen will, die vielleicht Mayer selbst auch würde daraus gezogen haben, wenn er länger bey Leben geblieben wäre. Ich werde nun das, was ich darüber gefunden und zu gewissen Absichten angewandt habe, hier vortragen. Man wird daraus sehen, daß es ein leichtes gewesen wäre, die Zergliederung, die ich vorgenommen, zu unterdrücken, den Mayerischen Tafeln eine neue Gestalt zu geben, etwas Theorie mit einzumengen, und sodann der Welt aufzubürden, als wenn ich die Sache a priori gefunden, und noch viel besser in Ordnung gebracht hätte. Vielleicht haben einige so verfahren. Ich habe aber nie geglaubt, daß fremde Federn gut zieren, und so werde ich das Verfahren ganz hersetzen.

II. Die

II. Die mittlere Bewegung.

§. 8.

Die mittlern Bewegungen müssen sehr genau bestimmt werden, weil man fürnehmlich durch dieselbe im Stand gesetzt werden muß, auf die späteste Zeiten hinaus zu rechnen. Allein eben diese Genauigkeit ist nicht wenig schwer, weil die mittlern Bewegungen erst aus der beobachteten wahren herleiten, und wenn man es noch genauer treffen will, die wahren vorerst in mittlere verwandeln muß. Um aber diese Verwandlung vorzunehmen, müste man die Anomalien kennen; diese können aber erst dann genauer bestimmt werden, wenn man die mittlere Bewegung gefunden hat. * Es sind demnach beyde in einer solchen gegenseitigen Abhänglichkeit, daß man beyde zugleich finden muß, wenn man sie genau haben will. Dieses kann nun nur durch eine Art von Approximation geschehen, wodurch die Sache anfangs überhaupt, und dann immer näher bestimmt wird. Es lassen sich zwar kürzere Methoden gedenken, allein sie setzen solche ausgewählte Beobachtungen voraus, die man bisher weder hat, noch auch künftig alle wird haben können. Man fängt gemeiniglich an, die ältesten Beobachtungen mit den neuern zu vergleichen, weil auf diese Art die

beyd-

beyderseitigen Fehler auf einen desto längern Zeitraum vertheilt, und damit auch erst in sehr späten Jahren wiederum merklich werden. Allein, da die ältesten Beobachtungen nicht sehr genau sind, so werden die daraus gezogenen Schlüsse desto unzuverläßiger. Eine Finsterniß kann auch an und für sich schon 18 Stunden früher oder später eintreffen, als es der mittlern Bewegung nach geschehen würde, und so könnte es leicht geschehen, daß, wenn man zwo Finsternisse mit einander vergleicht, der Zwischenraum der Zeit bis auf 36 Stunden zu groß oder zu klein heraus kömmt. Ein solcher Fehler, wenn er auch auf einen Zeitraum von 30000 Neumonden vertheilt wird, bringt dennoch für jeden Neumond einen Fehler von 3 Secunden herfür. Ueberdies wird dabey vorausgesetzt, daß die mittlere Bewegung beständig gleich sey. Daran aber hat man bereits angefangen zu zweifeln, wiewohl man so viel weiß, daß, wenn auch eine Ungleichheit da ist, sie so gering ist, daß sie noch zur Zeit kaum bemerkt werden kann. Herr Mayer setzt sie für 300 Jahre auf $1\frac{1}{9}$ Minute, oder da sie wie das Quadrat der Zeit zunehmen soll, für 2400 Jahr auf $1^{\circ}.4'.19''$. Allein eben dieses macht sie sehr zweifelhaft. Denn vor 300 Jahren, wo Purbach, Regiomontanus rc. beobachteten, konnte man für eine Minute nicht gut

stehen,

stehen, weil es noch dermalen bey ungleich bessern Instrumenten nicht angeht. Und vor 2400 Jahren beobachteten die Chaldäer, und zwar so, daß sie für ganze Grade nicht gut stehen konnten.

§. 9.

Da indessen, aller Schwürigkeiten ungeachtet, Herr Mayer seine Tafeln bis auf einzelne Minuten zur Richtigkeit gebracht hat, so wäre sehr zu wünschen, daß man sich in England gefallen liesse, die Methode, nach welcher er die Sache angegriffen, durch den Druck bekannt zu machen, weil sie, wie ich bereits erwähnt habe, solche Kunstgriffe enthalten muß, die er, wie er selbst sagt, nach vielen vergeblichen Versuchen gefunden, und, die allem Vermuthen nach, auch in andern Fällen, mit Vortheil würden gebraucht werden können. In Ermanglung dessen, und da ich nicht gesonnen bin, bereits angestellte Versuche nochmals zu widerholen, oder mit andern Methoden die Probe zu machen, werde ich die von Mayern herausgebrachten mittlern Bewegungen, mit denen vergleichen, so von andern Astronomen gefunden worden. Es durchläuft demnach in 1000 Julianischen Jahren

	Die Sonne.	ihr Apogaeum	das Aequinoct.
Nach	z s ° ′ ″	z s ° ′ ″	z s ° ′ ″
Kepler	1000 0 7 33 24	0 0 17 7 7	0 0 14 10 0
Halley	1000 0 7 35 20	0 0 16 51 7	0 0 13 53 20
La Caille	1000 0 7 39 16	0 0 18 11 40	
Mayer	1000 0 7 37 47	0 0 17 30 0	0 0 14 3 20
Nach	Der Mond.	sein Apogaeum.	sein Nodus.
Kepler	12367 6 18 8 30	113 0 12 22 41	53 8 21 51 7
Halley	12367 6 18 24 10	113 0 11 52 30	53 8 21 52 30
Mayer	12367 6 18 43 20	113 0 11 52 30	53 8 21 52 30

Diese Bestimmungen sind für einen Zeitraum von 1000 Jahren nicht sehr verschieden, und besonders scheint es, daß **Mayer** es bey der Halleyschen Bestimmung der Bewegung des Apogaeum und des Knoten des Monden habe bewenden lassen. Hingegen setzt **Mayer** den Lauf des Mondes selbst um etwas geschwinder, so wie **Halley** ihn geschwinder setzt als **Kepler**. **Mayer** und **Halley** schienen überhaupt geneigt, anzunehmen, daß die Bewegung des Mondes ehemals langsamer gewesen. **Kepler** hingegen scheint bey seinen Tafeln besonders auf das Jahr 3993 vor Christi Geburt, und zwar auf den 24. Julii dieses Jahres gesehen zu haben, auf welchen er den Anfang der Welt setzt, und alle seine Zahlen, wenigstens so viel es sich thun liesse, auf diesen Tag einrichtet, wie er denn auch, in Absicht auf den Lauf der Sonne und des Monds, eine centrale Sonnenfinsterniß heraus bringt, und bey jeden Planeten besondere

sondere Merkwürdigkeiten findet. Dabey mengt sich aber viel astrologisches mit ein, dem zu lieb Kepler wohl könnte die Umstände ein wenig anders eingerichtet haben, als sie in der That waren. Indessen sehe ich doch, daß er Anstand nahm, den Ort einiger Planeten um mehrere Grade zu verrücken, um sie in den Anfang eines himmlischen Zeichens zu bringen; wo es aber nur ein oder zwey Grade betraf, da scheint er es ohne Bedenken gethan zu haben. Man kann aber auch zugeben, daß es für einen Zeitraum von 5000 bis 6000 Jahren eine Kleinigkeit ist.

§. 10.

In den Rechnungen, die ich über die Mayerschen Mondstafeln angestellt, habe ich, was die mittlere Bewegung betrift, des La Caille Sonnentafeln gebraucht, die größte Gleichung der Sonne aber 1°. 55′. 44″ angenommen. Es war fürnehmlich die Frage, Sonne und Mond, in Absicht auf die Finsternisse, mit einander zu vergleichen. Ich berechnete demnach zween mittlere Vollmonde, welche um 10000 Monde von einander entfernt waren. Diese waren alten Calenders

	St.	′	″		St.	′	″
A°. 2436. Jul. 12.	12	32	2	1628 Jan. 10.	15	8	2

Und da findet sich der Ort

	s	°	′	″		s	°	′	″
der Sonne =	4	7	20	32	- - -	9	29	54	20
des Apog. ☉	3	21	7	33	- - -	3	6	24	56
Anom. med. ☉	0	16	13	0	- - -	6	23	29	24
des Mondes	10	7	20	32	- - -	3	29	54	20
des Apog. ☽	0	28	24	50	- - -	8	8	53	30
Anom. med. ☽	9	8	55	42	- - -	7	21	0	49
des ☊ = =	10	20	56	10	- - -	3	28	54	33
Arg. latit. =	11	16	24	22	- - -	0	0	59	47

§. 11.

Auf diese Art gebraucht es für einen Zeitraum von

Monden	Jahre	Tage	St.	′	″
10000	808	138	21	24	0
1000	80	310	14	8	24
100	8	31	1	24	50
10	0	295	7	20	29
1	0	29	12	44	3

jede Jahre zu 365 Tagen, 6 St. gerechnet.

§. 12.

Sodann durchläuft während den 10000 Neumonden

		z	s	°	′	″
Die Sonne	808	6	7	26	14	
Anom. ☉	808	5	22	43	37	
Der Mond	10808	6	7	26	14	
Anom. ☽	10717	1	17	54	54	
Arg. latit.	10851	11	15	24	37	
Apog. ☉	0	0	14	42	37	
Apog. ☽	91	4	19	31	20	
☊ = = =	43	5	7	58	23 rückwerts.	

§. 13.

§. 13.

Dieses giebt, wenn man die ganzen Circul wegläßt, für

Neum.	Arg. lat.	☉	Anom. ☉	Anom. ☽
10000	11 15 24 37	6 7 26 14	5 22 43 37	1 17 54 54
1000	2 10 32 28	10 6 44 37	10 5 16 22	8 16 47 29
100	6 7 3 15	1 0 40 28	1 0 31 38	2 1 40 45
10	10 6 42 20	9 21 4 2	9 21 3 9	8 18 10 4
1	1 0 40 14	0 29 6 24	0 29 6 19	0 25 49 0

oder für jeden Neumond noch genauer

	ſ	°	′	″
Arg. latit.	1	0	40	13, 9477
☉ . .	0	29	6	24, 2774
Anom. ☉	0	29	6	18, 9817
Anom. ☽	0	25	49	0, 4494.

§. 14.

Da nun ferners nach 223, 358 und 3445 Neumonden die Finsternisse wiederkehren, so findet sichs für

Neum.	Arg. latit.	Anom. ☽
223	—0 0 28 9, 6629	11 27 8 40, 2162
358	+6 0 3 13, 2766	8 2 24 40, 8852
3445	+6 0 0 49, 8265	0 18 50 48, 1830

ingleichen

	☉	Anom. ☉
223	0 10 48 13, 8602	0 10 28 32, 9191
358	11 10 12 51, 3092	11 9 41 15, 4486
8445	6 12 43 55, 6430	6 7 39 51, 9565

§. 15.

Die Zeit aber für diese Neumonde ist

Neumonde	Jahr	Tage	St.	′	″
223	18	10	19	42	47
358	29	344	22	49	20
3445	278	193	9	6	$44\frac{1}{2}$

Und dabey ist

$$3445 = 223 + 9 \cdot 358$$

so, daß zu 9 Perioden von 358 Neumonden noch eine von 223 Neumonden hinzukommen muß, um die grössere Periode von 3445 Neumonden auszumachen, welche in Absicht auf das Argumentum latitudinis nur um 50 Secunden von 6890 halben Circuln verschieden ist, und wie ich in der Beschreibung der ecclipticschen Tafel bereits angemerkt habe, zwischen den Keplerischen und Mayerischen Tafeln das Mittel hält.

§. 16.

Um nun diese Perioden bequem gebrauchen zu können, so habe ich einige Neumonde aufgesucht, bey welchen das Argumentum latitudinis so klein war als es sich finden liesse, damit sie als Epochen zum Grunde gelegt werden konnten. Von diesem war der eine, nach den alten Calender,

1759.

	St.	′	″
1759. Dec. 7	18	52	59

und der Ort

	s	°	′	″
der Sonne	8	27	33	28
des Apog. ⊙	3	8	48	56
Anom. med. ⊙	5	18	44	32
des Monds	8	27	33	28
Apog. ☽ . .	7	6	26	55
Anom. med. ☽	1	21	6	33
des ☊ . . .	2	27	34	26
Arg. latit. .	5	29	59	1

Der Mond war demnach nach seiner mittlern Bewegung nur 59″ vor dem ☋. Der andere Neumond fand sich

	St.	′	″
2038. Jun. 18	15	59	43

und der Ort

	s	°	′	″
der Sonne .	3	10	17	24
des Apog. ⊙	3	13	53	0
Anom med. ⊙	11	26	24	24
des Monds	3	10	17	24
Apog. ☽ . .	1	0	20	2
Anom. med. ☽	2	9	57	22
des ☊ . . .	3	10	17	31
Arg. latit. . .	11	29	59	53

hier war demnach der Mond nur 7″ vor dem ☊.

§. 17.

Diese zween Neumonde können nun, in Absicht auf die vorbemeldte Perioden von 223, 358, 3445 Monden, zum Grunde geleget werden, wie sie dann in der That auch um einen Zeitraum von 3445 Monden von einander verschieden sind. Man wird dadurch lauter Neumonde finden, die von dem ☊ oder ☋ kaum um etliche Minuten entfernt sind. Ich habe sie in der ersten Tabelle vorgestellt. Sie geht von Anno 747 vor Christi Geburt bis auf 2566 nach Christi Geburt, und enthält in der

1 Columne die laufende Jahre.
2 - - - das Arg. latit. oder die Entfernung des mittleren Neumondes vom ☊ oder ☋.
3 - - - die Zeit des Neumondes vom Anfange des Jahres an gerechnet.
4 - - - eben diese Zeit vom Ende des Jahres an gerechnet.
5 - - - der mittlere Ort der ☉ und des ☽.
6 - - - die Anomal. med. ☉.
7 - - - die Anomal. med. ☽.

§. 18.

In Absicht auf die dritte und vierte Columne ist anzumerken, daß sie die Zeit nach dem Julianischen oder alten Calender vorstellen, weil dieser Calender in einem fortgeht. Sodann habe ich dabey das Jahr durchaus zu 365 Tage 6 Stunden gerechnet, um die Verwirrung wegen der Schalttage zu vermeiden.

Diese

Diese Einrichtung, die für astronomische Rechnungen viele Bequemlichkeiten hat, habe ich bereits in der eccliptischen Tafel beschrieben, und werde demnach hier nur so viel anmerken: Man sieht leicht, daß es auf die Einschaltung von 6, 12, 18 Stunden ankömmt, die zwischen den Schaltjahren vorgenommen werden muß. Es fängt demnach das erste Jahr auf dem Mittag eines jeden Schaltjahrs nach dem Parisischen Meridiano und Julianischen Calender an, und endigt sich 18 Stunden vor dem Ende des Schaltjahrs, oder den 31sten Christmonats Abends um 6 Uhr, wo das folgende anfängt; dieses endigt sich den 31sten Dec. des folgenden Jahrs um Mitternacht. Das dritte fängt demnach zugleich mit dem bürgerlichen Jahre, so das zweyte nach dem Schaltjahr ist, an; und endigt sich im dritten Jahr nach den Schaltjahr den 1ten Jenner Morgens um 6 Uhr, wo das vierte anfängt, und sich im Mittage des folgenden Schaltjahrs endigt. Diese Anfänge sind demnach z. E.

1760 den 1. Jan. Mittags.
1760 den 31. Dec. Abends um 6 Uhr.
1761 den 31. Dec. Abends um Mitternacht.
1763 den 1. Jan. Morgens um 6 Uhr.
1764 den 1. Jan. um Mittag.
2c.

§. 19.

Um nun von diesen Anfängen an die Tage fortzuzählen, habe ich durchaus den Hornung zu 29 Tagen gerechnet, und damit diesen Jahren die Form von Schalt-Jahren gegeben. Man könnte sie abgeglichene Jahre, anni aequati, nennen, ich werde aber, da ich mich einmal daran gewöhnt habe, bey der Schaltjahrform, forma bissextili, bleiben. Um nun die Reduction leicht vorzunehmen, habe ich in der dritten Tafel die 366 Tage eines Schaltjahrs nach den Monaten vertheilt, wo für jeden Tag eines jeden Monats sogleich kann gefunden werden, der wievielte Tag derselbe vom Anfang des Jahrs her ist; und hinwiederum, wenn ein Tag vom Anfang des Jahrs an gerechnet gegeben ist, welcher Tag und für welchen Monat er sey.

§. 20.

Ist nun das Jahr ein Schaltjahr, so geht dieses ohne fernere Reduction an. In den übrigen Jahren aber muß eine Reduction vorgenommen werden, die von dem 24sten Hornung, als dem Schalttage herrührt. Die Jahre nach dem Schaltjahr seyn 1, 2, 3. Ist nun

1°. ein gemeines Jahr auf die Bisextilform zu bringen, so werden

in dem	vor dem 24. Febr.	nach dem 24. Febr.
1. Jahr	18 St. addirt,	6 St. subtrahirt,
2. Jahr	12 St. addirt,	12 St. subtrahirt,
3. Jahr	6 St. addirt,	18 St. subtrahirt.

2°. Ist

2°. Ist aber die Bissextilform auf gemeine Jahre zu reduciren, so werden nach dem Schaltjahr

in dem	vor dem 24. Febr.	nach dem 24. Febr.
1. Jahr	18 St. subtr.	6 St. addirt,
2. Jahr	12 St. subtr.	12 St. addirt,
3. Jahr	6 St. subtr.	18 St. addirt.

§. 21.

So z. E. haben wir vorhin die zween Neumonde (§. 16)

			St.	′	″
1759.	Dec.	7	18	52	59
2038.	Jun.	18	15	59	43

gefunden, und diese sollen auf die Bissextilform reducirt werden; so muß man nach den erstgegebenen Regeln von dem ersten 18 Stunden, von dem andern 12 Stunde subtrahiren: denn beyde fallen nach dem 24sten Hornung; und 1759 ist das dritte, 2038 aber das zweyte Jahr nach einem Schaltjahre. Dieses giebt

1759.	Dec.	7	0	52	59
2038.	Jun.	18	3	59	43.

Und demnach, wenn man diese Tage in der dritten Tafel nachschlägt, die Tage vom Anfang des abgeglichenen Jahrs

	T.	St.	′	″
1759.	342	0	52	59
2038.	170	3	59	43

und so kommen sie auch in der ersten Tafel vor.

§. 22.

§. 22.

Diese Reductionsart hat den Vortheil, daß man dadurch die Jahre und Tage addiren und subtrahiren kann, ohne sich um das Nachrechnen der Schalttage Mühe zu geben. Um z. E. zu finden, wie viele Zeit zwischen diesen Neumonden verflossen, darf man sie nur von einander abziehen, so wird man

279 Jahr weniger 171 T. 20 St. 53′ 16″
oder das Jahr zu $365\frac{1}{4}$ Tagen gerechnet
278 Jahr, 193 T. 9 St. 6′ 44″

Eben so haben wir oben (§. 10) die zween Vollmonde

			St.	′	″
2436.	Jul.	12	12	32	2
1628.	Jan.	10	15	8	2

Da nun dieses Schaltjahre sind, so giebt die dritte Tabelle unmittelbar

Jahre	Tage	St.	′	″
2436	194	12	32	2
1628	10	15	8	2
808	183	21	24	0

den Zeitraum der 10000 Neumonde (§. 11)

§. 23.

Die in der ersten Tafel angezeichneten Jahre haben nun sämtlich die erstbeschriebene Zifferform, damit man, ohne auf die Schalttage zu sehen, zu jedem darin vorkommenden Neumonde so viel folgende hinzurechnen könne, als

als man verlangt. Die Verwandlung in gemeine Jahre wird sodann nach den erstgegebenen Regeln (§. 20) vorgenommen. So z. E. findet man in der Tafel den Neumond

1788. 321 T. 17 St. 14' 19"

Da dieses ein Schaltjahr ist, so giebt die dritte Tafel unmittelbar

1788. Nov. 16 17 St. 14' 19"

Der nächstfolgende Neumond in der Tafel ist

1817. 301 T. 10 St. 31' 38"

Hier müssen 6 Stunden subtrahirt werden, weil 1817 das erste Jahr nach dem Schaltjahr und der 301ste Tag nach dem 24sten Hornung ist. Demnach

1817. 301 - 4 - 31 - 38

welches in der dritten Tafel giebt

1817. Oct. 27. 4 - 31 - 38

Eben so findet sich der Neumond

1702. 17. 9 - 14 - 20

hier müssen 12 Stunden addirt werden; und dies giebt

1702. Jan. 17. 21 - 14 - 20.

§. 24.

Auf diese Art lassen sich alle mittlere Neumonde, so in der ersten Tafel vorkommen, auf die gemeine Art, die Jahre und Tage zu zählen, reduciren. Es ist mittlere Zeit alten Calenders nach dem Pariser Meridian. Es sind laufende Jahre, Monate und Tage, und die

die Tage werden vom Mittage an gerechnet, so, daß z. E. der letzte Neumond im vorhergehenden Absatze 21 St. 14 Min. 20 Sec. nach dem Mittage des 17ten Jenners 1702, demnach auf den 18ten Jenner Vormittags um 9 Uhr 14 Min. 20 Sec. fällt.

§. 25.

Um aber jede andere Neumonde zu finden, so habe ich die zweyte Tafel berechnet, welche der Ordnung nach 358 Neumonden enthält, die vom Mittage des ersten Jenners des ersten Jahrganges an gerechnet werden. In dieser Tafel findet sich in der

1. Columne die Anzahl der Neumonde.
2. • • • das Arg. lat. für die Neumonde, die ecliptisch seyn können.
3. • • • die Anzahl der Tage, Stunden rc. so bis auf jeden Neumond verfliessen.
4. • • • die mittlere Bewegung der ☉ Neumond zu Neumond.
5. • • • die Anomalie der Sonne, wie sie von Neumond zu Neumond anwächst.
6. • • • die Anomalie des Mondes, wie sie von Neumond zu Neumond anwächst.

§. 26.

Vermittelst dieser Einrichtung, die ich bereits in der ecclipti schen Tafel nach den Keplerschen

schen Tafeln angegeben habe, lassen sich auf die daselbst umständlich beschriebene Art jede mittlere Neumonde berechnen. Man nehme ein beliebiges Jahr z. E. 1772, so sucht man in der ersten Tafel unter den in der ersten Columne stehenden Jahren das nächstvorhergehende auf, welches in diesem Fall 1759 ist. Dabey findet sich der Neumond, welcher 1759

342 T. 0 St. 52′ 59″ nach dem Anfang, oder

23 „ 5 „ 7 „ 1 „ vor dem Ende des Jahrs eintrift, und von welchem an fortgezählt werden kann. Man kann dabey nach Belieben die eine oder die andere dieser Bestimmungen gebrauchen. Um aber das Fortzählen zu erspahren, so zieht man das Jahr 1759 von 1772 ab, und es bleiben 13.

§. 27.

Gebraucht man nun die Tage **vom Ende des Jahrs**; so wird der dreyzehnte Jahrgang in der zweyten Tafel aufgesucht, und die erstgefundene Tage vom Ende des Jahrs

23 T. 5 St. 7′ 1″

werden von den in bemeldtem dreyzehnten Jahrgang stehenden Neumonden

No. 150	46 T.	14 St.	7′	16″
151	76 „	2 „	51 „	19
152	105 „	15 „	35 „	21
ꝛc.				

abgezogen, damit bleibt

23 T.	9 St.	0′	15″
52 -	21 -	44 -	18
82 -	10 -	28 -	20

u.

welches, da das Jahr 1772 ein Schaltjahr ist, nach der dritten Tafel sogleich

1772. Jan.	23 T.	9 St.	0′	15″
Febr.	21 -	21 -	44 -	18
Mart.	22 -	10 -	28 -	20

u.

giebt. Und auf diese Zeitpuncten fallen die mittlere Neumonde im Jahr 1772. Man findet aber, wenn man aus der ersten Tafel die Tage vom Ende des Jahrs gebraucht, eigentlich die Neumonde, welche dem in der ersten Tafel angezeichneten vorhergehen; oder, besser zu sagen, die so auf die ersten Monate des Jahrs fallen. Und damit reicht man nicht immer bis auf die letzten Monate. So z. E. ist in dem dreyzehnten Jahrgange der letzte Neumond

341 T. 21 St. 27′ 45″

hievon 23 - 5 - 7 - 1

abgezogen, bleibt

318 - 16 - 20 - 44

oder nach der dritten Tafel

Nov. 13 - 16 - 20 - 44

Da nun hiebey noch der Neumond des Christmonats zurücke bleibt, so geht man in den folgenden vierzehnten Jahrgang, und addirt zu dem

dem ersten Neumond desselben

6 T. 4 St. 11′ 48″

die in der ersten Tafel bey 1759 stehenden Tage vom Anfang des Jahrs

342 = 0 = 52 = 59

und so erhält man

348 = 5 = 4 = 47

oder nach der dritten Tafel

Dec. 13 = 5 = 4 = 47

welches der letzte Neumond 1772 ist.

§. 28.

Sucht man aber für ein fürgegebenes Jahr nur die Neumonde, welche entweder ecliptisch sind, oder wenigstens seyn können; so nimmt man aus den Jahrgängen der zweyten Tafel auch nur diejenigen Neumonde, bey welchen das Argumentum latitudinis angezeichnet steht.

§. 29.

Da man aber, besonders für die ecliptischen Neumonde, um sie sodann genauer zu berechnen, auch die übrigen Columnen der beyden ersten Tafeln gebrauchen muß, so werden die in diesen Columnen befindlichen Zahlen immer additiv genommen, und bey den Summen die ganzen Circul weggeworfen. Insbesondere aber steht bey den Argumentis latitudinis das Zeichen + oder —, welches an sich schon anzeigt, wie die Zahl genommen werden solle. Es sey z. E. die grosse Sonnenfinsterniß Anno

1706 aufzusuchen, so steht die ganze Rechnung für den mittlern Neumond folgender massen:

	arg. latit.	Tage v. Anf. des Jahrs.	☉	anom. ☉	anom. ☽
1706					
1702	′ ″				
4	☋ − 7 25	17 9 14 20	10 7 7 45	6 29 22 1	9 16 17 11
$+\frac{1}{5}$	☋ + 5 32 19	104 2 52 34	3 12 34 27	3 12 39 46	9 18 17 24
	☊ + 5 24 54	121 12 6 54	1 19 47 12	10 11 56 47	7 10 34 35

+ 12 wegen der Bissextilform

122 0 6 54

May 1 0 6 54

Da man hier aus der ersten Tafel bey 1702 die Tage vom Anfang des Jahrs gebraucht, so wird nicht der vierte, sondern der fünfte Jahrgang genommen.

§. 30.

Für die Sonnenfinsterniß 1769 ist

	arg. lat.	Tage v. Ende des Jahrs	☉	anom. ☉	anom. ☽
1769					
1759	′ ″				
	☋ − 0 59	23 5 7 1	8 27 33 27	5 18 44 32	1 21 6 33
10	☊ − 11 32 48	167 19 53 40	5 15 29 20	5 15 19 1	4 20 33 52
	☊ − 11 33 47	144 14 46 39	2 13 2 47	11 4 3 33	6 11 40 25

+ 6 wegen der Bissextilform

142 20 46 39.

May 24 20 46 39

Bey diesen Rechnungen ist anzumerken, daß der niedersteigende Knote ☋ allemal für sechs Zeichen oder $\frac{1}{2}$ Circul anzusehen ist, und daher ☊ + ☋ = ☋ und ☋ + ☋ = ☊ macht.

§. 31.

§. 31.

Sind hingegen Vollmonde aufzusuchen, so sucht man den nächstvorhergehenden, oder den nächstfolgenden Neumond, und addirt oder subtrahirt für die

Zeit	14 T.	18 St.	22′	1″
Arg. latit. ☋	+ 15°	20′	7″	
☉	14	33	12	
Anom. ☉	14	33	9	
Anom. ☽ 6	12	54	30	

§. 32.

Die ecliptische Vollmonde finden sich zwar in der zweyten Tafel nicht angezeichnet, indessen können sie aus den darin angezeichneten ecliptischen Neumonden erkannt werden. Denn wenn in der zweyten Tafel der vor- und nach ☊ oder ☋ stehende Neumond ecliptisch ist (§. 25), so ist der zwischen beyde fallende Vollmond nicht nur ecliptisch, sondern die Mondsfinsterniß ist total. Steht hingegen bey ☊ oder ☋ nur ein ecliptischer Neumond angezeichnet, so ist gewöhnlich der näher gegen ☊ oder ☋ fallende Vollmond verfinstert. Dieses ist aber nicht immer nothwendig, sondern der Neumond muß schon ziemlich weit vom ☊ oder ☋ weg seyn, wenn vor oder nach der Vollmond eine Finsterniß haben soll. Denn wenn der Vollmond 15 Grad vor oder nach ☊, ☋ fällt, so geschieht es selten oder nie, daß er verfinstert wird. Die Schranken der nähern Möglichkeit fallen zwischen 8 und 14 Grade, und das Mittel auf 11 Grad.

III. Ungleichheiten des Mondlaufes.

§. 33.

Der wahre Ort des Mondes trift selten mit dem mittlern zusammen, und muß erst durch mehrere Reductionen daraus hergeleitet werden. Diese Reductionen haben von jeden Zeiten her den Astronomen viel zu thun gegeben. **Kepler**, der in Absicht auf die Bahn der Planeten so glücklich im Vermuthen gewesen, fand auch für den Mond eine Hypothese, welche sehr einfach war, und die meisten Ungleichheiten des Mondlaufes auf eine, wenigstens für seine Zeiten, erträgliche Art angab. Es war aber dem **Newton** vorbehalten, von diesen Ungleichheiten die wahren physischen Ursachen zu finden; dem **Euler** gelang es, die geschmeidigste Form von analytischen Ausdrücken dafür anzugeben. Allein zu beyden mußte noch ein practischer Astronome kommen, der Geschicklichkeit hatte den Mondlauf, den theoretischen Absichten gemäß, zu beobachten, und Witz und Scharfsinnigkeit, Theorie und Beobachtung in Vergleichung zu bringen. Und dieses war **Mayer**. Er fand endlich

endlich, daß man wenigstens 13 Reductionen vornehmen müsse, wenn man den wahren Ort des Mondes bis auf eine Minute bestimmen wolle, und daß so lange die Beobachtungen selbst nicht bis auf Secunden getrieben werden, man an der Berichtigung der Mondstafeln bis auf einzelne Secunden gar nicht gedenken könne.

§. 34.

Ich habe bereits angemerkt, daß die Mayersche Methode in England noch ungedruckt liegt, und daß wir weiter nichts als seine Tafeln vor uns haben. Diese scheinen schon dem ersten Anblicke nach sehr sinnreich und künstlich eingerichtet. Allein die analytischen Formeln, nach denen sie berechnet sind, hat Mayer nicht bekannt gemacht. Ich habe daher die Mittel aufgesucht, diese Formeln aus den Tafeln selbst heraus zu bringen. Und dazu diente der Eulersche Satz, daß überhaupt die Ungleichheiten bey den himmlischen Bewegungen sich in Absicht auf die Grade der Länge nach

$$y = a\,\text{sin.}\,\omega + b\,\text{sin.}\,2\,\omega + c\,\text{sin.}\,3\,\omega + \text{etc.}$$

in Absicht auf die Distanzen, Halbmesser, Parallaxen nach

$$z = A\,\text{cos.}\,\omega + B\,\text{cos.}\,2\,\omega + C\,\text{cos.}\,3\,\omega + \text{etc.}$$

richten. Da diese Reihen meistens sehr convergiren, so sind auch gewöhnlich die ersten Glieder zureichend.

§. 35.

So z. E. ist bey der aequatio centri

$$\begin{array}{llllll}
\omega = 30^\circ & y = 2^\circ & 58' & 33'' & = & 10713'' \\
60 & 5 & 16 & 28 & & 18988 \\
90 & 6 & 17 & 50 & & 22670 \\
120 & 5 & 39 & 0 & & 20340 \\
150 & 3 & 21 & 4 & & 12064
\end{array}$$

Nun nehme ich

$$y = a\,\text{f.}\,\omega + b\,\text{f.}\,2\,\omega + c\,\text{f.}\,3\,\omega + d\,\text{f.}\,4\,\omega$$

und finde, wenn die Werthe substituirt werden, die Gleichungen

$$\begin{array}{l}
10713 = \tfrac{1}{2}\,a + b\sqrt{\tfrac{3}{4}} + c + d\sqrt{\tfrac{3}{4}} \\
18988 = a\sqrt{\tfrac{3}{4}} + b\sqrt{\tfrac{3}{4}} \quad * - d\sqrt{\tfrac{3}{4}} \\
22670 = a \quad * \quad - c \quad * \\
20340 = a\sqrt{\tfrac{3}{4}} - b\sqrt{\tfrac{3}{4}} \quad * + d\sqrt{\tfrac{3}{4}} \\
12064 = \tfrac{1}{2}\,a - b\sqrt{\tfrac{3}{4}} + c - d\sqrt{\tfrac{3}{4}}
\end{array}$$

Damit ist nun leicht zu prüfen, ob genug Glieder a, b, c &c. angenommen worden. Denn addirt man die erste und letzte dieser Gleichungen, so ist die Summe

$$a + 2c = 22777''$$

die dritte giebt

$$a - c = 22670$$

hieraus folgt

$$c = 36$$
$$a = 22706$$

Addirt man ferners die zweyte und vierte Gleichung, so ist die Summe

$$a\sqrt{3} = 39328$$

welches ebenfalls

a =

$$a = 22706$$

giebt. Demnach sind a, c in sofern richtig bestimmt. Ferners subtrahirt man die erste und letzte, imgleichem die zweyte und vierte Gleichung von einander, und die Ueberreste sind

$$-1351 = b\sqrt{3} + d\sqrt{3}$$
$$-1352 = b\sqrt{3} - d\sqrt{3}$$

Diese Gleichungen addirt, geben

$$-2703 = 2\,b\sqrt{3}$$

demnach

$$b = -780''$$

zieht man sie aber von einander ab, so bleibt

$$1 = 2\,d\sqrt{3}$$

das will sagen $d = 0$. Und so ist für die aequatio centri

$$y = 22706''\,\text{sin.}\,\omega - 780\,\text{sin}\,2\omega + 36\,\text{sin}\,3\omega.$$

Mayer sagt, daß er die aequationem centri elliptisch berechnet. Ich habe es nach dieser Formel untersucht, und gefunden, daß er dabey die Eccentricität $= 0,05506$ angenommen.

§. 36.

Auf die erstbeschriebene Art habe ich nun für die Mayerschen Tafeln die Formeln aufgesucht, nach welchen Mayer sie berechnet. Um diese Formeln der Ordnung nach herzusetzen, werde ich folgende Benennungen gebrauchen. Es sey für eine beliebige Zeit

der wahre Ort der ☉ $=$ ☉
die Anom. med. ☉ $=$ a
der mittlere Ort des ☽ $=$ ☽
die Anom. med. ☽ $=$ M
der mittlere Ort des ☊ $=$ ☊

so fängt Mayer damit an, daß er den Ort des ☊ auf den wahren reducirt, und da diese Reduction von der Anom. med. ☉ abhängt, so giebt er die Gleichung

$$☊' = ☊ + 618'' \text{ sin. a} - 10'' \text{ sin. 2 a}$$

wobey nun ☊′ den acquirten Ort des ☊ vorstellt. Durch eben diese Gleichung, aber doppelt genommen, verbessert er die mittlere Anomalie des Mondes. Da er aber dabey noch mehrere Verbesserungen anbringt, so werden wir sie in folgenden zusammen nehmen.

§. 37.

Mayer gebraucht nemlich anfänglich zehn Gleichungen, um sowohl den Ort des Monds als die mittlere Anomalie in sofern zu verbessern, daß sie sich nachgehends auf eine desto geschmeidigere Art noch ferners verbessern lassen. Diese zehn Gleichungen sind folgende:

1° $+ 680''$ sin. a $- 10''$ sin. 2 a
2° $- 54$ sin. [a $+ 2$ (☽ $-$ ☉)]
3° $+ 62$ sin. [a $- 2$ (☽ $-$ ☉)]
4° $+ 108$ sin. [a $-$ M $+ 2$ (☽ $-$ ☉)]
5° $- 72$ sin. [a $+$ M $- 2$ (☽ $-$ ☉)]
6° $+ 90$ sin. [M $+ 2$ (☽ $-$ ☉)]

7° +

$7^{\circ} + 58\ \sin.\ [2(\text{☽} - \text{☊}) - M]$
$8^{\circ} + 40\ \sin.\ (M - a)$
$9^{\circ} + 47\ \sin.\ 2(\text{☊} - \odot)$
$10^{\circ} + 29\ \sin.\ (\text{☽} - \odot - M) + 204\ \sin.\ 2\ (\text{☽} - \odot - M).$

§. 38.

Diese zehn Gleichungen werden nun zu dem mittlern Orte des Mondes ☽ hinzugethan, um den einmal verbesserten Ort des Mondes zu haben, den wir $= L'$ setzen wollen. Es ist demnach, wenn wir Kürze halber $\text{☽} - \odot = P$ setzen:

$$\begin{aligned} L' = \text{☽} &+ 680\ \mathrm{f.}\ a - 10\ \mathrm{f.}\ 2a - 54\ \mathrm{f.}\ (a + 2P) + 62\ \mathrm{f.}\ (a - 2P) \\ &+ 108\ \mathrm{f.}\ (a - M + 2P) - 72\ \mathrm{f.}\ (a + M - 2P) \\ &+ 90\ \mathrm{f.}\ (2P + M) + 58\ \mathrm{f.}\ (2\text{☽} - 2\text{☊} - M) \\ &+ 40\ \mathrm{f.}\ (M - a) + 47\ \mathrm{f.}\ 2(\text{☊} - \odot) + 29\ \mathrm{f.}\ (P - M) \\ &+ 204\ \sin.\ 2\ (PM) \end{aligned}$$

§. 39.

Ferners addirt Mayer eben diese 10 Gleichungen, und überdies noch die vorhin (§. 26) erwähnte, zu der mittlern Anomalie des Mondes M, und bringt dadurch die anomalia aequata A′ heraus, welche demnach

$$\begin{aligned} A' = M &+ 1916''\ \mathrm{f.}\ a - 30\ \mathrm{f.}\ 2a - 54\ \mathrm{f.}\ (a + 2P) \\ &+ 62\ \mathrm{f.}\ (a - 2P) + 108\ \mathrm{f.}\ (a - M + 2P) \\ &- 72\ \mathrm{f.}\ (a + M - 2P) + 90\ \mathrm{f.}\ (2P + M) \\ &+ 58\ \mathrm{f.}\ (2\text{☽} - 2\text{☊} - M) + 40\ \mathrm{f.}\ (M - a) \\ &+ 47\ \mathrm{f.}\ 2(\text{☊} - \odot) + 29\ \mathrm{f.}\ (P - M) \\ &+ 204\ \sin.\ (2P - 2M) \end{aligned}$$

ist.

§. 40.

Damit nun der einmal verbesserte Ort des Mondes L′ noch ferner verbessert werden, so gebraucht Mayer dazu noch zwo Gleichungen. Es sey der zum zweyten male verbesserte Ort des Mondes = L″, so ist

$$L'' = L' - 22706 \,\text{sin.}\, A' + 780 \,\text{s.}\, 2\, A' - 36 \,\text{s.}\, 3\, A' - 4842 \,\text{sin.}\, [2(L' - \odot) - A'] + 36 \,\text{sin.}\, [4(L' - \odot) - 2\, A']$$

§. 41.

Endlich wird noch die letzte Verbesserung vorgenommen. Es sey nemlich der zum dritten mal verbesserte Ort des Mondes = L‴, so ist

$$L''' = L'' - 115 \,\text{s.}\, (L'' - \odot) + 2421 \,\text{s.}\, 2 (L'' - \odot) + 2 \,\text{sin.}\, 3 (L'' - \odot) + 18 \,\text{sin.}\, 4 (L'' - \odot).$$

§. 42.

Damit wäre nun das, was man den Ort des Mondes in seiner Bahn heißt, gefunden. Um ihn aber auf die Eccliptic zu bringen, werden noch zwo Gleichungen erfordert, wovon die erste

$$- 417'' \,\text{sin.}\, 2 (L''' - ☊')$$

die andere aber das Vorrücken der Nachtgleichen

$$- 18 \,\text{sin.}\, 2\, ☊'$$

ist.

§. 43.

§. 43.

Da ferner die Mondbahn sich gegen die Ecliptic neigt, so kömmt auch die Berechnung der Breite vor. Dazu gebraucht **Mayer** zwo Gleichungen

$$+\,18542''\,\mathrm{sin.}\,(L'''-\text{☊}')-6\,\mathrm{sin.}\,3\,(L'''-\text{☊}')$$
$$+\quad 530\ \mathrm{sin.}\,(L'''+\text{☊}'-2\odot).$$

§. 44.

Endlich kömmt noch die Parallaxe vor, welche durch drey Gleichungen bestimmt wird, so, daß

$$p=57'\,8''-188\,\mathrm{cos.}\,A'+10\,\mathrm{cos.}\,2A'$$
$$-38\,\mathrm{cos.}\,[2(L'-\odot)-A']$$
$$-\tfrac{3}{2}\,\mathrm{cos.}\,(L'''-\odot)+26\tfrac{1}{2}\,\mathrm{cos.}\,2\,(L'''-\odot)$$

§. 45.

Aus der Parallaxe wird sodann der Halbmesser des Mondes gefunden, weil dieser immer, nach **Mayern**, $\tfrac{3}{11}$ von jener ist. Dieser Halbmesser ist immer so genommen, als wenn der Mond unter dem Aequator am Horizonte, oder aus dem Mittelpuncte der Erde gesehen würde, und so ist auch die parallaxis aequatoria zu verstehen, in sofern sie wegen der abgeplatteten Figur der Erde einer Reduction bedarf, die vom Aequator bis zum Pol bis auf $\tfrac{1}{4}$ Minute anwachsen kann.

IV. Bestimmung der Ungleichheiten des Mondlaufes durch die mittlere Bewegungen.

§. 46.

Dieses sind demnach die sämtliche Formeln, nach welchen die Mayerschen Tafeln berechnet sind. Sie sind, wie man sieht, nicht wenig weitläuftig, und müssen dem Erfinder ungemein viele Mühe gekostet haben, bis er sie in diese geschmeidigere Form gebracht hat. Auch muß noch angemerkt werden, daß sich, nebst den angeführten Gleichungen, eine Menge von kleinern Gleichungen müssen dargebothen haben. **Mayer** sagt aber, er habe sie sämtlich weggelassen, und nur diejenigen beybehalten, die sich über $\frac{1}{4}$ Minute erstreckten. Nun müßte man sie sämtlich mitnehmen, wenn man den Mondlauf bis auf einzelne Secunden bestimmen wollte oder könnte: denn die Unvollkommenheiten der Beobachtungen lassen keine so genaue Data zu. Solche kleinere Gleichungen kommen aber dennoch wieder zum Vorschein, wenn man die Mayerschen Formeln in andere verwandeln will, und da können sie sodann ebenfals weggelassen werden, weil sie fast immer einander ganz aufheben.

§. 47.

Was bey den Mayerschen Tafeln sogleich in die Augen fällt, ist, daß er die Verbesserungen

gen nicht mit einem male, sondern nach und nach vornimmt, und überdies sogleich den wahren Ort der Sonne gebraucht. Ich habe mir demnach etliche Tage Zeit nicht reuen lassen, um seine Formeln in solche zu verwandeln, welche den wahren Ort des Mondes unmittelbar durch die mittlern Bewegungen geben sollten. Eine Rechnung, die etliche Tage Zeit gebrauchte, werde ich wohl nicht hersetzen, sondern mich begnügen, die zuletzt herausgebrachte Gleichung anzugeben, und zwar mit Weglassung sehr vieler Kleinigkeiten, die nicht über 20 Secunden gehen. Es sey demnach der mittlere Ort der Sonne $= S$, daß übrige wie vorhin (§. 36), so ist $L''' = \text{☽}$

$$
\begin{aligned}
&- 22652\,\mathrm{f}\,M - 122\,\mathrm{f}(\text{☽} - S) - 150\,\mathrm{f}(2\text{☽} - 2S - a)\\
&+ 773\,\mathrm{f}\,2M + 2391\,\mathrm{f}\,2(\text{☽} - S) - 46\,\mathrm{f}(2\text{☽} - 2S + a - M)\\
&- 36\,\mathrm{f}\,3M + 23\,\mathrm{f}\,4(\text{☽} - S) + 235\,\mathrm{f}(2\text{☽} - 2S - a - M)\\
&+ 680\,\mathrm{f}\,a - 4586\,\mathrm{f}(2\text{☽} - 2S - M) + 47\,\mathrm{f}(2\text{☊} - 2S)\\
&- 10\,\mathrm{f}\,2a + 31\,\mathrm{f}(4\text{☽} - 4S - 2M) + 58\,\mathrm{f}(2\text{☽} - 2\text{☊} - M)\\
&- 105\,\mathrm{f}(M + a) - 175\,\mathrm{f}(2\text{☽} - 2S + M)\\
&+ 145\,\mathrm{f}(M - a) + 210\,\mathrm{f}(2\text{☽} - 2S - 2M)\\
&\qquad + 24\,\mathrm{f}(\text{☽} - S - M)\\
&\qquad - 52\,\mathrm{f}(4\text{☽} - 4S - M).
\end{aligned}
$$

§. 48

Unter den weggelassenen Gliedern sind folgende:

$$
\begin{aligned}
&+ 19\,\mathrm{f}(2\text{☽} - 2S + 2M)\\
&- 13\,\mathrm{f}(2\text{☽} - 2S - 3M)\\
&- 11\,\mathrm{f}(2\text{☽} - 1S - a - 2M)
\end{aligned}
$$

$+ 10 f(2☽ - 2S + 2a - M)$
$+ 7 f(2M + a)$
$- 7 f(2M - a)$

die beträchtlichsten, die übrigen sind sämtlich geringer.

§. 49.

Da aber auch Mayer solche kleinern Glieder weggelassen, so kann ich nicht sagen, ob sie die erst angeführten würden vergrössert oder vermindert haben. Der Natur der Sache nach aber sollte das letztere seyn, weil die Coefficienten der doppelt, dreyfach ꝛc. genommenen Winkel sehr stark convergiren. Der Erfolg indessen ist, daß die (§. 47) herausgebrachte Formel fast immer um etwas von den Mayerschen Formeln abweicht, dabey aber selten eine Minute Unterschied giebt. Ich habe sie in Tabellen verwandelt, wovon unten die Rede seyn wird. Man sieht aus der Formel, daß von solchen Tabellen eigentlich nur vier sind, die eine beträchtliche Grösse haben. Und diese sind, wenn man Kürze halber ☽ − S = E setzt

I°. $- 22652 f M$	II°. $- 122$ fin. E
$+ 773 f 2M$	$+ 2391 f 2E$
$- 36 f 3M$	$+ 23 f 4E$
III°. $- 4586 f(2E - M)$	IV°. $+ 680 f a$
$+ 31 f(4E - 2M)$	$- 10 f 2a$.

Dazu

Dazu kommen sodann noch

$\overset{\circ}{\text{V.}} - 105\, f(a + M)$	$\overset{\circ}{\text{XI.}} - 150\, f(2E - a)$
$\overset{\circ}{\text{VI.}} - 145\, f(a - M)$	$\overset{\circ}{\text{XII.}} - 46\, f(a - M + 2E)$
$\overset{\circ}{\text{VII.}} - 175\, f(M + 2E)$	$\overset{\circ}{\text{XIII.}} - 235\, f(a + M - 2E)$
$\overset{\circ}{\text{VIII.}} - 24\, f(M - E)$	XIV. $- 58\, f(M + 2$☊$- 2$☽$)$
$\overset{\circ}{\text{IX.}} - 210\, f(2M - 2E)$	XV. $- 47\, f(2S - 2$☊$)$
$\overset{\circ}{\text{X.}} - 52\, f(4E - M)$	

Es sind demnach in allen 15 Gleichungen oder Tafeln, wenn man diese einfach lassen will. Will man aber Tafeln zu doppelten Eingängen machen, so lassen sich No. VII — X in eine zusammen ziehen, weil diese nur von M und E abhängen. Ferners können No. V, VI in eine zusammen gezogen werden, weil diese nur von a und M abhängen. Und damit würde die Sache auf 11 Tafeln gebracht. Allenfalls liessen sie sich auf 7 herunter setzen, wenn man

No. I, II, III, VII, VIII, IX, X

und

No. IV, V, VI

zusammen nehmen, und daraus Tafeln zu doppelten Eingängen machen wollte. Allein da würde es, wegen des Interpolirens, Schwürigkeiten geben, oder die Tafeln müsten weitläuftiger gemacht werden, als es sich, wenigstens bis man noch genauere hat, der Mühe lohnt. Da indessen die 11 letzten Tafeln sich fast immer compensiren, so kan man sich allemal,

wo

man den Ort des Mondes nur bis auf einige Minuten genau wissen will, mit den vier ersten Tafeln begnügen, und dazu sind sie vortheilhafter eingerichtet, als die Mayerschen.

§. 50.

Die gefundene Formel (§. 47), wird für die Zeit des mittlern Neumondes geschmeidiger, weil alsdann $E = 0$ ist. Und damit hat man für diese Zeit $L''' = \text{☽}$

$$
\begin{aligned}
&- 18168\,\mathrm{f}\,M - 345\,\mathrm{f}(M+a) + 47\,\mathrm{f}(2\,\Omega - 2S) \\
&+ 553\,\mathrm{f}\,2M + 199\,\mathrm{f}(M-a) + 58\,\mathrm{f}(2\,\text{☽} - 2\,\Omega - M) \\
&- 23\,\mathrm{f}\,3M + 18\,\mathrm{f}(2M+a) \\
&+ 844\,\mathrm{f}\,a - 12\,\mathrm{f}(M-2a) \\
&- 20\,\mathrm{f}\,2a - 8\,\mathrm{f}(2M-a)
\end{aligned}
$$

Und eben so für die Zeit des mittlern Vollmondes, wo $E = 180°$ ist, $L''' = \text{☾}$

$$
\begin{aligned}
&- 18206\,\mathrm{f}\,M - 345\,\mathrm{f}(M+a) + 47\,\mathrm{f}(2\,\Omega - 2S) \\
&+ 549\,\mathrm{f}\,2M + 199\,\mathrm{f}(M-a) + 58\,\mathrm{f}(2\,\text{☽} - 2\,\Omega - M) \\
&- 23\,\mathrm{f}\,3M + 18\,\mathrm{f}(2M+a) \\
&+ 844\,\mathrm{f}\,a - 12\,\mathrm{f}(M-2a) \\
&- 12\,\mathrm{f}\,2a - 8\,\mathrm{f}(2M-a)
\end{aligned}
$$

V. Betrachtung des Falls, wenn der Mond keine andere Ungleichheiten hätte, als die er zur Zeit der wahren Syzigien hat.

§. 51.

Man hat von jeden Zeiten her angemerkt, daß die meisten Ungleichheiten des Mondslaufes, zur Zeit der wahren Neu- und Vollmonde, entweder ganz wegfallen, oder wenigstens

stens sehr geringe werden; daher ließ man es für diese zween Fälle bey der Gleichung bewenden, die von der Eccentricität der Mondbahn hergenommen wurde. Hingegen fanden sich für jede andere Fälle, wo der Mond nicht in den Syzigien war, solche Ungleichheiten, die nicht von der Eccentricität hergeleitet werden konnten, und daher eine zweyte Verbesserung erforderten. Diese war bereits dem Ptolemaeo bekannt. Sie gab aber nur den wahren Ort des Monds in den Quadraturen auf eine erträgliche Art, und fieng gegen die Octanten zu, an, sehr merklich abzuweichen. Tycho, der auf diesen Umstand Acht hatte, erfand daher eine dritte Gleichung, welche er die Variation nennte. Und dies war die dritte Verbesserung. Dessen unerachtet, fieng Kepler an zu bemerken, daß selbst in den Syzigien noch Ungleichheiten zurücke blieben, die von der Jahrszeit abhiengen. Er fand, daß die Finsternisse im Frühling bey 20 Minuten späther, im Herbste aber um eben so viel früher eintrafen, als es die Berechnung mit sich brachte. Die Ursache hievon ließ er der Nachwelt aufzusuchen übrig, weil zu seinen Zeiten diese vierte Gleichung noch nicht anders als bey den Finsternissen waren bemerkt worden. Da er die Sache inzwischen auf die Anomalie der Sonne reducirte, und die 20 Minuten, die er angab, nicht viel fehlen, so ist er auch hiemit so ziemlich auf die Spur gekommen.

§. 52.

Die Nachwelt hat indessen auch hierin Keplers Verlangen erfüllt. Newton hat die Ursachen, und Mayer die eigentliche Maasse angegeben. Aus Newtons Theorie folgt ebenfalls, daß die Ungleichheiten des Mondslaufes in den Syzigien meistens wegfallen. Wir haben demnach noch aus Mayers Formeln zu sehen, welche dann eigentlich dabey zurücke bleiben, und wie groß sie sind. Laßt uns demnach zu diesen Formeln zurücke kehren.

§. 53.

Einmal fällt die letzte Gleichung (§. 41), welche die Variation vorstellt, weg, weil in dem Zeitpunct des wahren Neu- oder Vollmondes $L''' = L''$ wird: denn L''' ist $= \odot$ für den Neumond, oder $= \odot + 180°$ für den Vollmond. Setzt man demnach in der Gleichung des §. 41 $\odot$ statt L''', so verwandelt sie sich in

$$L'' - \odot = 115 \, f(L'' - \odot) - 2421 \, f2(L'' - \odot) - 2 \, f3(L'' - \odot) - 18 \, f4(L - \odot)$$

Dieses geht aber nicht an, dafern nicht $L'' - \odot = 0$, und demnach $L'' = L'''$ ist. Wiederum setze man für den Vollmond $L''' = \odot + 180°$, oder $\odot = L''' - 180°$, so verwandelt sich die Gleichung des §. 41 in

$$L'' - L''' = -115 \, f(L'' - L''') - 2421 \, f(2L'' - 2L''') + 2 \, f3(L'' - L''') - 18 \, f4(L'' - L''')$$

welches

welches wiederum nicht angeht, dafern man nicht $L'' = L'''$ setzt.

§. 54.

Da demnach für die Syzigien $L'' = L'''$ ist, so ist in der Gleichung des §. 40

$$2(L' - \odot) = 2(L' - L'')$$

weil sowohl im Vollmond als im Neumond $2\odot = 2L''$ ist. Demnach verwandelt sich diese Gleichung in

$$L' - L'' = 22706 \sin. A' - 780 \text{ſ} \, 2A' + 36 \text{ſ} \, 3A' + 4842 \sin. [2(L' - L'') - A'] - 36 \text{ſ} [4(L' - L'') - 2A']$$

§. 55.

Diese Gleichung aufgelöst, giebt

$$L''' = L'' = L' - 17917 \text{ſ} A' + 328 \text{ſ} \, 2A' - 4 \text{ſ} \, 3A'.$$

Und auf diese Art werden für die Syzigien die drey letzten Mayerschen Tafeln, welche die aequationes centri, evectionis und variationis enthalten, auf eine einige herunter gebracht, welche schlechthin nur von der einmal abgeglichenen Anomalie A' (§. 39) abhängt. Da aber auch L' der bereits einmal verbesserte Ort des Mondes ist (§. 38), so dürfen nur die (§. cit.) bestimmten Werthe von A' und L' in der Gleichung

$$L''' = L' - 17917'' \text{ſ} A + 328 \text{ſ} \, 2A - 4 \text{ſ} \, 3A$$

dergestalt gesetzt werden, daß man ihre Coefficienten, die Secunden eines Grades vorstellen,

in Theile des Halbmessers verwandelt, um L''
durch ☽ und M bestimmen zu können.

§. 56.

Diese Rechnung, die ebenfalls langwierig ist, habe ich, dessen ungeachtet, vorgenommen, und damit die Gleichung

$$\begin{aligned}\text{☽}-L''' = 17865''\ \sin.M &+ 166\,\text{ſ}(a+M)\\ &- 132\,\text{ſ}\,2M - 58\,\text{ſ}(2\text{☽}-2\text{☊}-M)\\ &- 23\,\text{ſ}\,3M - 47\,\text{ſ}\,2(\text{☊}-\odot)\\ &- 691\,\text{ſ}\,a\\ &+ 10\,\text{ſ}\,2a\end{aligned}$$

gefunden, welche für den Neumond ist. Verschiedene kleine Theile habe ich dabey weggelassen, worunter

$$\begin{aligned}&+ 6\,\text{ſ}(a-M)\\ &- 12\,\text{ſ}(a+2M)\\ &+ 9\,\text{ſ}(a-2M)\\ &+ 3\,\text{ſ}(2\text{☽}-2\text{☊})\\ &- 3\,\text{ſ}(2M-2\text{☽}+2\text{☊})\end{aligned}$$

die beträchtlichsten sind.

§. 57.

Für den Vollmond hingegen kömmt die Gleichung

$$\begin{aligned}\text{☽}-L''' = 17807''\,\text{ſ}M &+ 166''\,\text{ſ}(a+M)\\ &- 130\,\text{ſ}\,2M - 58\,\text{ſ}(2\text{☽}-2\text{☊}-M)\\ &- 23\,\text{ſ}\,3M - 47\,\text{ſ}\,2(\text{☊}-\odot)\\ &- 691\,\text{ſ}\,a\\ &+ 10\,\text{ſ}\,2a\end{aligned}$$

heraus,

heraus, worin eben die kleinern Theile, wie bey der Gleichung für den Neumond (§. 56), weggelassen sind. Hier ist demnach nur das erste Glied um 58 sin. M kleiner; das zweyte differirt nur um 2″ sin. 2 M, welches nichts sagen will.

§. 58.

Diese Gleichungen sind nun viel einfacher als die, so wir oben (§. 47) für jede Umstände des Mondlaufes herausgebracht haben. Sie läßt sich auf fünf Tafeln bringen, wozu noch eine, wegen des Unterschiedes der Neu- und Vollmonde, kommen müßte. Die erste dieser Tafeln würde für

17865 f M — 132 f 2 M — 23 f 3 M

berechnet. Diese Gleichung sollte nun, nach Keplern, elliptisch seyn. Sie ist es aber nicht. Denn mit Beybehaltung des ersten Gliedes würde man

17865 f M — 484 f 2 M + 18 f 3 M

und damit die Eccentricität 0, 04333 erhalten. Der Unterschied aber ist

= 352 f 2 M — 41 f 3 M

und daher 5 bis 6 Minuten. Für die Eccentricität hat Kepler 0, 04362 angenommen, und damit würde die Gleichung

17990 f M — 493 f 2 M + 16 f 3 M

seyn, welches ebenfalls um

125 f M — 361 f 2 M + 39 f 3 M

von dem, was die Mayerschen Tafeln geben, verschieden ist.

§. 59.

Die andere Tafel würde für

$$-691 \text{ sin. } a + 10 \text{ sin. } 2a.$$

berechnet. Dieses ist nun die Verbesserung, die Kepler vermuthet hatte, aber, aus Mangel genugsamer Beobachtungen, der Nachwelt zu bestimmen überließ. Sie hat allerdings einen Einfluß auf die Zeit der Finsternisse, und macht, daß sie im Frühling um ungefähr 22 Minuten später, im Herbste um so viel früher eintreffen. Kepler gab 20 Minuten an, und dies kann sich, wenn der Mond bey seiner Erdnähe ist, auch wirklich einfinden. Es erhellet demnach, daß er hier die Sache sehr gut getroffen.

§. 60.

Die drey übrigen Tafeln würden nach

$$+166 \text{ sin. } (a + M)$$
$$-58 \text{ sin. } (2☽ - 2☊ - M)$$
$$-47 \text{ sin. } (2☊ - 2☉)$$

und die für den Vollmond, nach

$$-58 \text{ sin. } M$$

berechnet. Man sieht leicht, daß Kepler von diesen Verbesserungen, weil sie nur einzelne Minuten betreffen, gar keinen Anlaß sie zu vermuthen haben konnte. Denn zu seiner Zeit

war

war an Berichtigung des Mondlaufs bis auf einzelne Minuten gar nicht zu gedenken.

§. 61.

Die für den Neumond und Vollmond besonders heraus gebrachten Formeln (§. 56. 57) lassen sich in eine zusammenziehen, welche so vorgestellt werden kann:

$$
\begin{aligned}
☽ - L''' = 17865 \sin M &+ 166 \mathrm{f}(a + M) \\
&- 132 \mathrm{f}\,2M - 58 \mathrm{f}(2☽ - 2☊ - M) \\
&- 23 \mathrm{f}\,3M - 47 \mathrm{f}\,2(☊ - ☉) \\
&- 691 \mathrm{f}\,a - 58 \mathrm{f}(M + ☽ - ☉) \\
&+ 10 \mathrm{f}\,2a
\end{aligned}
$$

Wenn es demnach nur darauf ankömmt, den Ort des Mondes zur Zeit des wahren Neumondes oder Vollmondes zu bestimmen; so kann man setzen, der Mond laufe in einer Bahn, welche durch diese Gleichung bestimmt wird. Es ist dieses ein erdichteter Mondlauf, motus lunae fictus, so wie Kepler nach seiner Theorie zur Bestimmung der Syzigien einen ähnlichen gebraucht hat. Dieser gedichtete Lauf trift mit dem wahren jedesmal in den Syzigien zusammen.

§. 62.

Es sind aber auch die übrigen Umstände in den Syzigien einfacher. Denn da alsdann $2☉ = 2L'''$ ist (§. 54), so wird in der Formel für die Neigung der Mondbahn gegen die

Ecliptic (§. 43)

$$L''' + \Omega' - 2\odot = -(L''' - \Omega')$$

und demnach die Formel selbst auf

$$18012'' \int(L''' - \Omega') - 6 \int 3(L''' - \Omega')$$

abgekürzt.

§. 63.

Eben so ist für die Parallaxe (§. 44)

$L''' - \odot = 0$ für den Neumond,

$L''' - \odot = 180°$ für den Vollmond,

demnach

$$2(L''' - \odot) = 0$$

Ferner (§. 38. 39)

$L' = ☽ + 680''$ sin. a + &c.

$A' = M + 1916''$ sin. a + &c.

demnach

$$2L' - 2\odot - A' = 2(☽ - \odot) - M - 556'' \text{ sin. a} - \&c.$$

und

$$2(☽ - L''') = 2(☽ - \odot) = (17865'' \int M - 691 \int a + \&c.). 2$$

Werden damit die behörigen Substitutionen und Reductionen vorgenommen, so findet sich die Parallaxe für die Neumonde

$$57'.30'' - 3'.46'' \cos M + 13'' \cos 2M$$

für die Vollmonde 3″ mehr, demnach

$$57'.33'' - 3'.46'' \cos M + 13'' \cos. 2M.$$

VI. Die stündliche Bewegung des Mondes.

§. 64.

In den astronomischen Tafeln wird gemeiniglich auch die wahre tägliche oder stündliche Bewegung der Planeten angegeben. Mayer ließ sie aber für den Mond aus seinen Tabellen weg. Und es ist, überhaupt betrachtet, zu vermuthen, daß es deswegen geschehen, weil er in seinen Tafeln schlechthin nur das unumgänglich Nothwendige mitnahm. Es konnte aber besonders hiebey noch ein anderer Grund seyn, und dieser findet sich, wenn man über die wahre stündliche Bewegung des Mondes die Rechnung vornimmt. Die Formeln werden so weitläuftig, daß man aus seinen Tafeln fast eben so geschwinde noch einen zweyten Ort des Mondes berechnet, und daraus auf seine stündliche Bewegung den Schluß macht. Dies ist nun für die übrigen Planeten und die Sonne viel kürzer, weil ihre tägliche und stündliche Bewegung nur von der Anomalie abhängt, und daher in einer Tafel vorgestellt werden kann.

§. 65.

So z. E. wenn die mittlere Anomalie der Sonne = a ist, so bewegt sie sich in 24 Stunden von einem fürgegebenen Tag auf den folgenden um

$$59' 8'' 9''' + 1'' 2''' \sin a - 0'' 1''' \sin 2a$$
$$- 119.26 \cos a + 2.31 \cos 2a - 0'' 3''' \cos 3a$$

und hinwiederum in 24 Stunden von dem vorhergehenden auf dem fürgegebenen um

$$59' 8'' 9''' - 1'' 2''' \sin a + 0'' 1''' \sin 2a$$
$$+ 119.26 \cos a + 2.31 \cos 2a - 0'' 3''' \cos. 3a$$

und für jede Stunde um

$$2' 27'' 50''' - 4'' 59''' \cos a + 0'' 6''' \cos 2a$$

wofür man

$$2' 28'' - 5'' \cos a$$

setzen, und die Sache in einer sehr einfachen Tabelle vorstellen kann, wie man dann solche in jeden astronomischen Tafeln findet.

§. 66.

Mit dem Monde aber sieht es ganz anders aus, wenn man seine stündliche Bewegung nur bis auf einzelne Secunden bestimmen will. Sie hängt von allen Ungleichheiten ab, denen der Mondlauf selbst unterworfen ist. Ich habe, um sie durch die mittlere Bewegung zu bestimmen, die oben (§. 47) gefundene Gleichung gebraucht, welche den wahren Ort des Monds L''' durch den mittlern ☽ und die hinzukommenden Verbesserungen angiebt. Nun ist die stündliche mittlere Bewegung

	′	″	‴	IV	
des ☽	32	56	27	34	
Apog. ☽	0	16	41	4	
☊ = =	0	7	56	35	rückwärts
☉ = =	2	27	50	58	
Apog. ☉	0	0	0	27	

Dem-

demnach

	′	″	‴	IV
☽ — ☉ ⸗	30	28	36	36
☽ — apog. ☽	32	39	46	30
☽ — ☊ ⸗	33	4	24	9
☉ — apog. ☉	2	27	50	31
☉ — ☊ ⸗	2	35	47	33

§. 67.

Diese Bewegungen müßten in Theilen des Halbmessers, der = 1 gesetzt wird, ausgedrückt werden. Ich werde ferner in der Rechnung den Buchstaben E, M, a, ☊, S &c. eben die Bedeutung lassen, und durch x einen jeden beliebigen Theil einer Stunde andeuten. Werden nun E, M, a, ☊, S &c. für einen fürgegebenen Zeitpunct angenommen, so verwandelt sich nach Verfluß der Zeit x,

E in E + 0,0088653. x
M in M + 0,0095012. x
a in a + 0,0007167. x
☉ — ☊ in ☉ — ☊ + 0,0007538. x
☽ — ☊ in ☽ — ☊ + 0,0095453. x

§. 68.

Werden nun diese so verwandelten Werthe in der Gleichung des §. 47 gesetzt, und jede Reductionen vorgenommen, so erhält man für die Bewegung des Mondes in der Zeit x, in Secunden und deren Decimaltheilen folgenden sehr weitläuftigen Ausdruck:

1976″,

$$
\begin{aligned}
1976'' &+ 1''\sin M - 1''\cos E \\
&- 215\cos M + 42\cos 2E \\
&+ 15\cos 2M + 1\cos 4E \\
&- 1\cos 3M - 38\cos(2E - M) \\
&- 1\cos(M + a) + 1\cos(4E - 2M) \\
&+ 1\cos(M - a) - 5\cos(2E + M) \\
&\qquad - 1\cos(4E - M) \\
&\qquad - 3\cos(2E - a) \\
&\qquad + 1\cos(2E - a - M) \\
&\qquad + 1\cos(2☽ - 2☊ - M)
\end{aligned}
$$

§. 71.

Da man aber, fürnemlich bey den Finsternissen, die stündliche Bewegung des Mondes zu wissen nöthig hat, wo sie, gleich wie jede andere Umstände, merklich einfacher ist; so habe ich für die Zeit des wahren Neumondes die stündliche Bewegung des Mondes

$$
\begin{aligned}
2014'' &- 258\cos M - 3\cos a \\
&+ 19\cos 2M + 3\cos(M - a) \\
&- 1\cos 3M - 1\cos(M + a)
\end{aligned}
$$

gefunden, welche Formel nun ungleich geschmeidiger ist. Hingegen müssen für die Zeit des wahren Vollmondes noch 2'' addirt werden, und so ist für den Vollmond die stündliche Bewegung

$$
\begin{aligned}
2016'' &- 258\cos M - 3\cos a \\
&+ 19\cos 2M + 3\cos(M - a) \\
&- 1\cos 3M - 1\cos(M + a) \\
&+ 1\sin M
\end{aligned}
$$

§. 72.

§. 72.

Auf eine ähnliche Art suchte ich auch die stündliche Bewegung des Monds nach der Breite, und fand sie überhaupt

$$
\begin{aligned}
&+178''\cos(L''' - \Omega') && -\tfrac{7}{4}\cos(L''' - \Omega' + 2E - M)\\
&+\ \ 5\cos(L''' + \Omega' - 2\odot) && -\tfrac{7}{4}\cos(L''' - \Omega' - 2E + M)\\
&-\ 10\cos(L''' - \Omega' + M) && +2\cos(L''' - \Omega' + 2E)\\
&-\ 10\cos(L''' - \Omega' - M) && +2\cos(L''' - \Omega' - 2E)\\
&+\tfrac{2}{3}\cos(L''' - \Omega' + 2M) &&\\
&+\tfrac{2}{3}\cos(L''' - \Omega' - 2M) &&
\end{aligned}
$$

§. 73.

Auch diese Formel läßt sich für die Zeit der Syzigien abkürzen, und auf die viel einfachere

$$
\begin{aligned}
&+187''\cos(L''' - \Omega') && +\tfrac{2}{3}\cos(L''' - \Omega' + 2M)\\
&-\ 12\cos(L''' - \Omega' + M) && +\tfrac{2}{3}\cos(L''' - \Omega - 2M)\\
&-\ 12\cos(L''' - \Omega' - M) &&
\end{aligned}
$$

herunter bringen. Es sind aber diese beyde Formeln so zu verstehen, daß wenn sie einen positiven Werth geben, sie allemahl gegen den Nordpol der Ecliptic müssen gerechnet werden. Sie vermehren demnach die nördliche Breite und vermindern die südliche. Das Gegentheil geschieht bey den negativen Werthen.

§. 74.

Die Parallaxe ändert sich in einer Stunde nicht merklich, weil die Aenderung nur

$$1'',8 . \sin M - 0'',2 \sin 2M + 0'',3 \sin(2E - M) - 0'',5 \sin 2E$$

beträgt, wofür zumal für die Syzigien $2''\,\text{s}\,M$ genommen werden kann.

VII. Die Keplerische Bestimmung des Mondlaufes.

§. 75.

Kepler, der in Absicht auf die Planeten so glücklich gewesen, auf die wahre Spur zu kommen, gab sich ebenfalls Mühe, das Gesetz der den Zeiten proportionalen Flächenräume auf den Mond anzuwenden, und zwar selbst, sofern dessen Ungleichheiten von dem Laufe der Sonne abhängen. Er erfand dabey eine sehr sinnreiche Hypothese, wodurch er die sogenannte Evection des Mondes ziemlich gut bestimmte, und selbst auch, in Absicht auf die Tychonische Variation etwas dabey fand, so zwar derselben nicht an Grösse gleich, aber doch proportional war. Endlich würde ihm auch die vierte beträchtliche Ungleichheit, die von der Anomalie der Sonne abhieng, gelungen seyn, wenn er genugsam vorräthige Beobachtungen vor sich gefunden hätte (§. 51. 59), und so würde er wenigstens die beträchtlichste Umstände ins Reine gebracht, und seine Tafeln bis auf einige Minuten berichtiget haben. Ein erster Versuch, der bey so vielen Schwürigkeiten, dennoch so weit gelungen, verdient doch immer, daß man ihn näher betrachte.

§. 76.

Fig. I. Es sey ABPD die Mondbahn, T der Mittelpunct der Erde, A das Apogaeum, P das Peri-

Perigäum, L der wahre Ort des Mondes, TC die Eccentricität, so ist nach der bloß elliptischen Theorie der Flächenraum TALT der Zeit proportional. Um nun wenigstens die grössere Ungleichheit des Mondlaufes, die von der Sonne herrühret, mitzunehmen, so zieht Kepler die Linie TS gegen die Sonne, und verlängert sie in V. Sodann fällt er aus C auf STV die senkrechte Linie Ca, und zieht aL zusammen; dadurch erhält er den geradlinichten Triangel TLa, dessen Flächenraum nebst dem elliptischen Flächenraum der Zeit proportional gesetzt wird. Wenn diese beyden Räume auf einander fallen, wie es in der Figur geschieht, so wird ihre Summe, widrigenfalls aber, wenn sie nemlich ausser einander fallen, ihre Differenz genommen und der Zeit proportional gesetzt. Durch diese Voraussetzung wird die zweyte Ungleichheit oder die Evection noch ziemlich bestimmt. Die dritte oder die Variation richtet sich fürnemlich nach dem Sinus des doppelten Winkels STL oder TLV. Da nun sin 2 LTV $=$ 2. sin LTV. cos LTV ist, so liesse sich ohne Mühe noch ein rechtwinklichter Triangel construiren, dessen Flächenraum, mit den zween vorhin erwähnten, der Zeit proportional seyn würde. Man dürfte nur auf TL eine beständige Linie aus T gegen L nehmen, und sodann eine senkrechte Linie auf TV fällen, so würde man einen solchen Triangel erhalten. Kepler merkte dieses ganz wohl, allein da er dabey die Geschmeidigkeit nicht fand, die bey dem Triangel TLa war, so begnügte er sich, es anzuzeigen, indem er für die beständige Linie die Eccentricität CT nahm, welche aber den Raum in die 18 mal zu klein angab. Die vierte Ungleichheit (§. 51) war ihm nur noch überhaupt bekannt; wenn er aber mehrere Beobachtungen vorräthig gehabt hätte, so ist kein Zweifel, daß er sie nicht würde auf die ganze Mondbahn bezogen haben. Auch läßt sie sich noch ziemlich durch den Flächenraum eines Triangels vorstellen. Sie wächst wie der Sinus der Anomalie der Sonne. Wenn man demnach eine Linie TB gegen das Apogäum der Sonne zieht, und darauf die Distanz TE von behöriger Grösse annimmt, so darf man nur ES ziehen, und SETS wird der Triangel seyn, nach dessen Flächenraum die vierte Ungleichheit des Mondlaufes sich so ziemlich genau richtet. Auf diese Art lassen sich wenigstens die vier Hauptungleichheiten des Mondlaufes so vorstellen, wie es Kepler würde gethan haben, wenn ihn nicht der Mangel an Beobachtungen aufgehalten hätte.

§. 77.

Doch, wir wollen nun auch die Formeln berechnen. Es sey demnach

AC =

$AC = CP = 1$	der wahre Ort der Sonne $= \sigma$ in S
$CT = e$	der wahre Ort des Mondes $= \lambda$ in L
$ATV = s$	die wahre Anomalie der Sonne $= \alpha = BTS$
$CD = b$	die wahre Anomalie des Mondes $= \mu = ATL$

so ist $\quad s = \sigma - \lambda - 180^\circ + \mu$

$\mu - s = \lambda - \sigma + 180^\circ$

ferner $Ta = e.\cos s$

$$TL = \frac{1 - ee}{1 = e \cos \mu}$$

demnach der Flächenraum des

$$\triangle TLa = \frac{e(1 - ee)\cos s.\sin(\mu - s)}{2(1 - e\cos\mu)}$$

Dieser Raum muß doppelt genommen werden, wenn derselbe einen Circulbogen vorstellen soll.

§. 78.

Ferner ist die elliptische Prostaphaeresis

$$= \frac{2e(1+b)}{(1+b)}\sin\mu + \frac{2.(1+2b)}{2(1+b)^2}\sin 2\mu$$
$$+ \frac{2(1+3b)}{3(1+b)^3}\sin 3\mu + \text{\&c.}$$

Diese zu dem Triangel TLa doppelt g'enommen, addirt, giebt die ganze Prostaphaeresis, welche die zwo ersten Ungleichheiten des Mondlaufes bestimmt.

§. 79.

Sie ist demnach

$$= \frac{e(1-ee)\cos s.\sin(\mu-s)}{2(1-e\cos\mu)} + \frac{2e(1+b)}{(1+b)}\sin\mu$$
$$+ \frac{2(1+2b)}{2(1+b)^2}\sin 2\mu + \frac{2(1+3b)}{3(1+b)^3}\,\mathrm{f}\,3\mu$$
$$+ \frac{2(1+4b)}{4(1+b)^4}\sin 4\mu + \&c.$$

§. 80.

Nun setzte Kepler die Eccentricität

$$e = 0{,}04362$$

Nimmt man damit die Rechnung und alle Reductionen vor, so erhält man die Gleichung in Secunden

$$\begin{array}{llll} + 22489'' \sin\mu & + 4494'' \sin(\mu - 2s) \\ + 395 \sin 2\mu & + 99 \sin(2\mu - 2s) \\ + 8 \sin 3\mu & + 2 \sin(3\mu - 2s) \\ - 99 \sin 2s & - 2 \sin(\mu + 2s) \end{array}$$

§. 81.

Dazu kömmt aber noch die Variation, welche Kepler, nach dem Tycho

$$= - 2430'' \sin(\lambda - \sigma)$$

setzt, und die von der Anomalie der Sonne herrührende Ungleichheit

$$= - 610'' \sin\alpha$$

Setzt man demnach für s dessen Werth $\sigma - \lambda - 180° + \mu$, und den mittlern Ort des Mondes $=$ ☽, so ist $\lambda =$ ☽

$$
\begin{aligned}
&-22489'' \sin\mu &&- 4494'' \sin(2\lambda - 2\sigma - \mu) \\
&-\quad 395 \sin 2\mu &&-\quad 99 \sin(2\lambda - 2\sigma - 2\mu) \\
&-\quad\;\; 8 \sin 3\mu &&-\qquad 2 \sin(2\lambda - 2\sigma + \mu) \\
&+\; 2331 \sin 2(\lambda - \sigma) &&-\qquad 2 \sin(2\lambda - 2\sigma - 3\mu) \\
&+\quad 610 \sin\alpha.
\end{aligned}
$$

Dieses ist also die Gleichung, die man, den Keplerschen Angaben zufolge, heraus bringt. Sie drückt die Prostaphaeresin durch die wahren Bewegungen aus, und in sofern läßt sie sich nicht unmittelbar mit der oben (§. 47) gegebenen Formel vergleichen. Man sieht aber überhaupt, daß **Kepler** die grössern Ungleichheiten des Mondlaufes bis auf einige Minuten Unterschied angegeben, und wenn man mitnimmt, daß die kleinern Ungleichheiten sich fast immer gegen einander aufheben, so läßt sich daraus begreifen, warum die Rudolphinischen Tafeln bis zu der Zeit, da die Mayerschen zum Vorschein kamen, auch in Absicht auf den Mondlauf, durch einen Zeitraum von fast anderthalbhundert Jahren bey ihrem Credit erhielten, und denen an die Seite gesetzt werden konnten, die **Caßini**, **La Hire**, **Streete**, und andere Neuere herausgegeben hatten, ungeachtet diese zu deren Verfertigung ungleich mehrere Hülfsmittel hatten, als **Kepler** zu seiner Zeit haben konnte.

VIII. Bestimmung der Zeit zwischen den wahren und mittlern Syzigien.

§. 82.

Die Art, wie man vermittelst der Mayerschen Tafeln die Zeit der wahren Neu- und Vollmonde bestimmt, hat etwas sehr indirectes und weitläuftiges, weil sie nur durch wiederholte Versuche gefunden werden kann. Ich habe demnach auf Mittel gedacht, diese Zeit, ohne solche Umwege, geradehin zu bestimmen, und dazu konnten die oben (§. 56. 57) für die wahren Neu- und Vollmonde gefundene Formeln sehr bequem gebraucht werden. Diese Formeln gaben den Unterschied zwischen dem wahren und mittlern Ort des Mondes, zur Zeit der wahren Syzigien, an. Es ist demnach nur zu sehen, wie die Zeit zwischen den wahren und mittlern Syzigien daraus gefunden werden könne. Dieses geht nun auf folgende Art an:

V M S ☽

§. 83.

Zur Zeit des wahren Neumondes sey die Sonne und der Mond in V, der mittlere Ort der Sonne in S, des Mondes in ☽, demnach beyde schon weiter vorgerückt. Ferner sey zur Zeit des mitlern Neumondes der mittlere Ort der Sonne und des Mondes in M: so ist klar, daß in der Zeit vom mittlern bis zum wahren Neumond die Sonne nach ihrer mittlern Bewegung von M in S, der Mond aber von M in ☽ fortgerückt ist, und demnach der Mond sich in eben der Zeit von der Sonne um den Raum S ☽ entfernt hat. Demnach wird die Zeit zwischen den wahren und mittlern Neumond gefunden, wenn man S ☽ durch den Unterschied der mittlern stündlichen Bewegung der Sonne und des Mondes (§. 66)

$$30' \; 28'' \; 36''' \; 36^{iv}$$

dividirt. Es ist aber VS die Prostaphaeresis der Sonne, V ☽ des Mondes zur Zeit des wahren Neumondes, demach S ☽ der Unterschied zwischen beyden.

§. 84.

Setzt man demnach die mittlere Anomalie der Sonne zur Zeit des wahren Neumondes $= \mathfrak{A}$, des Mondes $= \mathfrak{M}$, die mittlere Entfernung der Sonne vom ☊ $= \varkappa$, des Mondes $= \lambda$, so ist

$$VS = 6943'' \sin \mathfrak{A} - 73'' \sin 2\mathfrak{A} + 1 \sin 3\mathfrak{A}$$

die Prostaphaeresis der Sonne, und (§. 56) die für den Mond

$$
\begin{aligned}
V☽ = {} & 17865'' \sin \mathfrak{M} - 58'' \sin(2\lambda - \mathfrak{M}) \\
& - 132 \sin 2\mathfrak{M} - 47 \sin 2\varkappa \\
& - 23 \sin 3\mathfrak{M} + 3 \sin 2\lambda \\
& - 691 \sin \mathfrak{A} - 3 \sin 2(\mathfrak{M} - \lambda) \\
& + 10 \sin 2\mathfrak{A} \\
& + 166 \sin(\mathfrak{A} + \mathfrak{M}) \\
& + 6 \sin(\mathfrak{A} - \mathfrak{M}) \\
& + 9 \sin(\mathfrak{A} - 2\mathfrak{M}) \\
& - 12 \sin(\mathfrak{A} + 2\mathfrak{M})
\end{aligned}
$$

Setzt man demnach die Zeit zwischen dem wahren und mittlern Neumond, $= \tau$ Stunden, so wird man

$$\tau = \frac{V☽ - VS}{30' \; 28'' \; 36''' \; 36^{\mathrm{IV}}}$$

erhalten.

§. 85.

Für den Vollmond stellt S nicht die Sonne, sondern den derselben entgegenstehenden Punct der Ecliptic vor. Dieses ändert aber an der Rechnung nichts; nur muß alsdann (§. 57)

$$
\begin{aligned}
V☽ = {} & 17807'' \sin \mathfrak{M} \quad \text{2c.} \\
& - 130 \sin 2\mathfrak{M}
\end{aligned}
$$

genommen werden.

§. 86.

Da man aber die Zeit τ durch die zur Zeit des mittlern Neumondes, oder Vollmondes, vorkommenden Umstände eigentlich sucht, so sey für diese Zeit der mittlere Ort

der Sonne $= ☉$

des Mondes $= ☽$

des Knoten $= ☊$

Fer-

Ferner die mittlere Anomalie
der Sonne $= a$
des Mondes $= M$
Hieraus findet sich (§. 66)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= a + (2' \; 27'' \; 50''' \; 31^{IV})\tau \\
\mathfrak{M} &= M + (32 \; 39 \; 46 \; 30)\tau \\
\lambda &= \text{☽} - \text{☊} + (33 \; 4 \; 24 \; 9)\tau \\
\varkappa &= \text{☉} - \text{☊} + (2 \; 35 \; 47 \; 33)\tau
\end{aligned}$$

§. 87.

Diese Werthe müssen nun in den Formeln (§. 84. 85) gesetzt werden, um die Gleichungen zu erhalten, welche τ durch ☉, ☽, ☊, a, M bestimmen. Nimmt man diese Substitution vor, und löst die Gleichungen auf, so erhält man durch eine nicht wenig weitläuftige und langwierige Rechnung, in Secunden Zeit ausgedrückt

$$\begin{array}{llll}
\tau = & 35141 \sin M & - & 114 \sin(2\text{☽} - 2\text{☊} - M) \\
+ & 1378 \sin 2M & + & 11\,\text{ſ}(2\text{☽} - 2\text{☊} - 2M) \\
+ & 34 \sin 3M & - & 92\,\text{ſ}\,2(\text{☊} - \text{☉}) \\
- & 15007 \sin a & + & 4\,\text{ſ}(2\text{☊} - 2\text{☉} + M) \\
+ & 187 \sin 2a & + & 2\,\text{ſ}(2\text{☊} - 2\text{☉} - M) \\
- & 420\,\text{ſ}(M + a) & + & 2\,\text{ſ}(2\text{☽} - 2\text{☊} + a) \\
+ & 632\,\text{ſ}(M - a) & - & 2\,\text{ſ}(2\text{☽} - 2\text{☊} - a) \\
- & 53\,\text{ſ}(2M + a) & & \\
+ & 32\,\text{ſ}(2M - a) & & \\
- & 4\,\text{ſ}(3M + a) & & \\
+ & 7\,\text{ſ}(M + 2a) & & \\
+ & 1\,\text{ſ}(M - 2a) & & \\
- & 2\,\text{ſ}\,2(M + a) & &
\end{array}$$

 oder,

oder, wenn man die Kleinigkeiten wegläßt

$$
\begin{aligned}
\tau = & \; 35141 \sin M - 114 \sin (2☽ - 2☊ - M) \\
& + 1378 \sin 2M + 92 \sin (2\odot - 2☊) \\
& + 34 \sin 3M \\
& - 15007 \sin a \\
& + 187 \sin 2a \\
& - 420 \sin (M + a) \\
& + 632 \sin (M - a) \\
& - 53 \sin (2M + a) \\
& + 32 \sin (2M - a)
\end{aligned}
$$

§. 88.

Diese Formel ist für den Neumond. Für den Vollmond muß 114 sin M und 7 sin 2M subtrahirt werden, und so ist

$$
\begin{aligned}
\tau = & \; 35027'' \sin M - 114 \sin (2☽ - 2☊ - M) \\
& + 1371 \sin 2M + 92 \sin (2\odot - 2☊) \\
& + 34 \sin 3M \\
& - 15007 \sin a + 187 \sin 2a \\
& - 420 \sin (M + a) \\
& + 632 \sin (M - a) \\
& - 53 \sin (2M + a) \\
& + 32 \sin (2M - a)
\end{aligned}
$$

§. 89.

Die durch diese Formeln bestimmte Zeit τ, muß nun zu der Zeit der mittlern Syzigien addirt oder subtrahirt werden, je nachdem sie positiv oder negativ gefunden wird, und so erhält man die Zeit der wahren ☌ oder ☍ in orbita: denn diese ist nun eigentlich berechnet wor-

worden. Sie kann von der Zeit der wahren ☌ oder ☍ in eccliptica um $\frac{1}{2}$ Stunde verschieden seyn. Ich habe aber diese letztere nicht berechnen wollen, um die Formeln nicht ohne Nothwendigkeit allzuweitläuftig zu machen, weil sie nachgehends leichter besonders gesucht wird.

§. 90.

Ich habe nun die erstgefundenen Formeln in Tabellen verwandelt, und dieses sind folgende:

Tab V. ist für

$35141 \sin M + 1378 \sin 2M + 34 \sin 3M$

und stellt denjenigen Theil der Zeit τ vor, welcher schlechthin nur von der mittlern Anomalie des Monds abhängt, und sich bis auf 9 St. 46′ 54″ belaufen kann.

Tab. VI. ist für

$-15007'' \sin a + 187'' \sin 2a$

und giebt den Theil der Zeit τ, welcher schlechthin nur von der mittlern Anomalie der Sonne abhängt, und sich bis auf 4 St. 10′ 11″ belaufen kann.

Tab. VII. ist für

$-420'' \sin (M + a)$

und

Tab. VIII. für

$+632'' \sin (M - a)$

Diese beyden Theile der Zeit τ hängen von beyden Anomalien M, a zugleich ab, und können sich auf 17′ 32″ belaufen.

Tab.

Tab. IX. ist für

$$-53 \sin(2M + a)$$
$$+32 \sin(2M - a)$$
$$-114 \sin(2☽ - 2☊ - M)$$
$$+92 \sin(2☉ - 2☊)$$

und stellt diese vier Theile der Zeit in τ in eben so vielen Columnen vor. Eigentlich sind sie so vorgestellt

$$-53 \sin(2M + a)$$
$$-32 \sin(a - 2M)$$
$$-114 \sin(2☽ - 2☊ - M)$$
$$-92 \sin(2☊ - 2☉)$$

welches deswegen geschehen, damit die Zeichen $-+$ für alle vier Columnen der Tafel zugleich dienten. Endlich ist in eben dieser Tafel die fünfte Columne für

$$-114 \sin M$$

berechnet, und dabey bemerkt, daß sie für den Vollmond ist, weil dieser, wie wir vorhin (§. 88) gesehen, darin von dem Neumonde abgeht.

§. 91.

Vermittelst dieser Tafel, findet sich nun die Zeit zwischen den wahren und mittlern Syzigien auf eine ganz directe und kurze Art. So z. E. haben wir oben (§. 30) für den ecclipti- schen Neumond 1706, May 1. 0. 6. 54 gefunden

Arg.

Arg. latit. ☊ +	5°	24′	54″	= ☽ − ☊
long. ☉.☽	1	19	47	12	= ☉ = ☽
anom. ☉	10	11	56	47	= a
anom. ☽	7	10	34	35	= M

demnach ist

long. ☋	1	14	22	18	= ☊

Hieraus ergiebt sich nun

		St. ′ ″	St. ′ ″
M = 7.10.34 35	Tab. 5 - - - -		− 5 58 45
a = 11. 4. 3.33	Tab. 6	+ 1.46.56	
a + M = 6.14.38	Tab. 7 -	0. 1.46	
a − M = 3.23.29	Tab. 8 - - - -		− 0 9 40
a + 2M = 1.25.13	T. 9. Col. 1 - - -		− 43
a − 2M = 8.12.54	- - 2 +	30	
2(☽ − ☊) − M = 5. 0.15	- - - 3 - - -		− 57
2(☋ − ☉) = 11.19.10	- - - 4 +	17	
		+ 1.49 29	− 6 10 5
		− 6.10. 5	
		− 4. 20. 36	
	1760. May 1.	0. 6. 54	Zeit des mittlern Neumonds.
	1760. May 0.	19. 35. 18	Zeit des wahren Neumonds.

demnach

demnach war die Syzigia in orbita 1706 den 30ten April, alten Calenders, 19 St. 35′ 18″ nach Mittag, oder den 12ten May, neuen Calenders, um 7 Uhr 35′ 18″ vor Mittag, und zwar nach der Pariser Uhr, mittlerer Zeit.

IX. Tafeln zur Berechnung der Syzigien und Finsternisse.

§. 92.

Den bereits oben (§. 17. 25. 19. 90) beschriebenen Tafeln, habe ich noch die übrigen beygefügt, die zur vollständigen Bestimmung jeder Umstände der Syzigien und Finsternisse dienen können. Und zwar habe ich die Regeln (§. 31) wegen des Vollmondes, und (§. 20) wegen der Bissextilform, der zweyten Tafel angehenkt, und gleich nach der dritten Tafel die Lage einiger Oerter folgen lassen, deren geographische Länge und Breite genau bestimmt sind.

§. 93.

Da man ferners in den zwo ersten Tafeln nur die Data für die Zeit der mittlern Syzigien findet, und eben diese Data sodann auch für die Zeit der wahren Syzigien gefunden werden müssen, so habe ich in der zehnten Tafel die mittlere Bewegungen für Tage, Stunden und Minuten beygefügt, damit man sie für

die

die nach Tab. V, VI, VII, VIII, IX bestimmte Zeit zwischen den mittlern und wahren Syzigien leicht berechnen könne. Auf der ersten Seite dieser Tafeln ist statt an. ⊙ nur die Bewegung des apog. ⊙ gesetzt, woraus aber jene leicht gefunden wird.

§. 94.

Hat man hiedurch den mittlern Ort der Sonne und ihre mittlere Anomalie für die Zeit der wahren Syzigien gefunden, so findet sich gleich darauf in Tab. XI. die Gleichung des Mittel-Puncts der Sonne, um daraus den wahren Ort der Sonne und zugleich auch des Monds zu bestimmen, weil der Mond, zur Zeit der wahren Syzigien, entweder bey der Sonne oder 6 Zeichen davon entfernt ist.

§. 95.

Hierauf liesse sich in der Tab. XII. die Gleichung der Zeit vorstellen, damit die gefundene mittlere Zeit der wahren Syzigien auf die wahre Zeit reducirt werden könne. Es sind, wie man sieht, eigentlich zwo Tafeln, die sich für jedes Jahrhundert in eine zusammen ziehen lassen, und so findet man sie auch in den meisten astronomischen Tabellen. Ich habe sie aber lieber unzusammengeschmolzen gelassen, weil sie auf diese Art von allgemeinem Gebrauche sind, und nicht mehr Mühe veursachen.

§. 96.

§. 96.

Die Tab. XIII. dient sodann um aus dem für die Zeit der wahren ☌ ☍ gefundenen Ort des ☊, dessen wahren Ort zu finden. Es ist dieses die oben (§. 36) erwähnte Mayersche Gleichung des ☊.

§. 97.

Eben so ist auch Tab. XIV. von Mayer, und beruht auf der ersten Formel des §. 42. Sie dient, zu finden, wie groß zur Zeit der wahren ☌ ☍ in orbita der Unterschied der Länge des Monds von der Länge der Sonne ist.

§. 98.

Die Tab. XV. ist nach der Formel des §. 62 berechnet, und dient daher auch nur für die Zeit der wahren Syzigien. Das Argument ☽ ver. — ☊ ver. wird nach §. 94. 96. genommen, und so findet sich damit die Breite des Monds in ☌ ☍.

§. 99.

Die Tab. XVI. hat 3 Columnen, welche nach §. 73 ebenfalls für die Zeit der wahren Syzigien berechnet sind. In diesen beyden Tafeln habe ich die Zeichen + — so genommen, daß + gegen Norden, — gegen Süden bedeutet.

§. 100.

§. 100.

Die Tab. XVII. ist nach der ersten Formel des §. 71 berechnet, und statt der zweiten ist angemerkt, daß für die Vollmonde noch zwo Secunden addirt werden müssen, damit man dessen stündliche Bewegung in orbita richtig erhalte.

§. 101.

Die Parallaxe, Tab. XVIII. habe ich ebenfalls für den Neumond nach §. 63. gerechnet, und unten an der Tafel die 3 Secunden angemerkt, die für den Vollmond noch müssen addirt werden.

§. 102.

Die Tab. XIX. ist aus Mayer, und gründet sich, wie oben (§. 45) erwähnt worden, darauf, daß der Halbmesser des Mondes $\frac{3}{11}$ von der parallaxi aequatoria ist.

§. 103.

Die Tab. XX. habe ich aus dem La Caille genommen. Und da man die Parallaxen und Halbmesser zur Bestimmung der Grösse der Finsternisse gebraucht, so habe ich auch, da es der Raum zuliesse, die Regeln dafür unten an Tab. XIX. und XX. angezeichnet.

§. 104.

Die Tab. XXI, XXII, XXIII, sind aus La Caille, und setzen die Schiefe des Thierkreises auf $23° 28' 20''$. Sie werden fürnemlich bey Berechnung und Entwerfung der Sonnenfinsternissen gebraucht.

§. 105.

Diese Tafeln finden sich nun überhaupt so angeordnet, daß man bey Berechnung der Syzygien und Finsternissen denselben, der Ordnung nach, folgen kann. Die Rechnung läßt sich sehr füglich auf eine Quartseite bringen, wie man es aus den vier beygefügten Beyspielen sehen kann. Ich habe sie sämtlich für Berlin berechnet; und werde nun, was zu fernerer Erläuterung dienen kann, noch beyfügen.

X. Berechnung und Entwerfung der Mondsfinsternisse.

§. 106.

Es sey die erste Mondsfinsterniß 1771 zu berechnen und zu entwerfen. Man sehe das erste Beyspiel. Hier werden aus der ersten Tafel die Epochen des nächst vorhergehenden 1759sten Jahrs ausgeschrieben. Sodann zieht man 1759 von 1771 ab, und der Ueberrest 12 zeigt, daß in der zweyten Tafel der zwölfte Jahrgang aufzuschlagen ist, wenn man, wie es hier geschieht, in der ersten Tafel die Tage **vom Ende des Jahrs** gebraucht (§. 27). Diese Tage sind subtractiv, und so müssen im

zwölf-

zwölften Jahrgange die nächst grössern genommen werden. Schlägt man demnach den zwölften Jahrgang auf, so findet sichs, daß der Neumond No. 141 ecclíptisch ist, und da er auf ☊ folgt, so ist der demselben vorhergehende Vollmond aufzufinden. Zu diesem Ende werden die Data bey No. 141 ausgeschrieben, und zu denen von 1759 aus der ersten Tafel addirt. Und so finden sich die Data für den ecclíptischen Neumond, welchem der gesuchte Vollmond vorgeht. Man schlägt demnach die zu Ende der zweyten Tafel befindlichen Data für die Vollmonde auf, und subtrahirt sie, so bleiben die Data für den mittlern Vollmond. Daß hiebey ☊ = 0 und ☋ = 6 Zeichen bedeute, ist bereits oben (§. 30) angemerkt worden.

§. 107.

Es sind demnach diese Data

	°	°	′	″	
I	☊ —	10	48	19,	das will sagen, der Mond ist 10° 48′ 19″ vor dem ☊,
	°	T.	St.	′ ″	
II.	108	2	1	47	vom Anfang des Jahrs 1771 Bissextilform, mittlere Zeit und Pariser Uhr.
	°	ſ			
III	1	7	3	18	Länge der Sonne nach ihrer mittlern Bewegung.
	°				
IV	9	28	1	59	mittlere Anomalie der Sonne = a.
	°				
V	8	18	22	6	mittlere Anomalie des Monds = M.

Hieraus findet sich, weil es Vollmond ist

7^s	7°	$3'$	$18''$	Länge des Monds nach seiner mittlern Bewegung.
7	17	51	37	Länge des ☊ nach seiner mittlern Bewegung.

Ferners müssen nach der Regel zu Ende der zweyten Tafel 18 Stunden addirt werden, um die Bissextilform in die gemeine Jahrform zu verwandeln. Und da der Vollmond für Berlin berechnet werden soll, welcher Ort nach der vierten Tafel 44′ 25″ mehr zählt als Paris, so werden in allem 18 St. 44′ 25″ addirt, dies giebt sodann in der dritten Tafel

April 17 T. 20 St. 46′ 12″

Das will sagen: der mittlere Vollmond ist zu Berlin, mittlerer Zeit, 1771 den 18. April Morgens um 8 Uhr, 46′ 12″. Man sehe nun, wie alles dieses in dem Formular des Beyspiels angezeichnet ist.

§. 108.

Bisher sind die vier ersten Tafeln gebraucht worden; nun folgen die 5 . . 9te, welche dienen, um die Zeit zwischen dem mittlern und wahren Vollmonde zu finden. Dieses habe ich unten auf der vordern Hälfte des Formulars gethan, und zwar nach der Ordnung, wie die Tafeln auf einander folgen. Der Erfolg ist, daß der wahre Vollmond oder ☍ in orbita 5 St. 52′ 28″ vor dem mittlern, und demnach

April

April 17 T. 14 St. 53′ 44″

das will sagen:

1771 den 18. Apr. Morgens früh um 2 Uhr 53′ 44″ nach der Berliner Uhr, alten Calenders und mittlerer Zeit ist.

§. 109.

Für diese Zeit müssen nun die übrigen Umstände berechnet werden. Dazu dient nun erstlich die nächstfolgende zehnte Tafel. Es werden nemlich für die 5 St. 52′ 28″ die mittlern Bewegungen ausgeschrieben und zusammen gerechnet. Da der wahre Vollmond vor dem mittlern ist, so sind die Summen subtractiv, die für den ☊ ausgenommen, weil der ☊ sich rückwerts bewegt. Man findet demnach, wie es aus dem Formular zu ersehen, für die Zeit der ☍ in orbita

f	°	′	″	
7	17	52	24	= ☊′ reducirte mittlere Länge des ☊
1	6	48	50	mittlere Länge der ⊙,
9	27	47	31	anom. med. ⊙ = a′
8	15	10	14	anom. med. ☽ = M′
7	3	49	48	mittlere Länge des ☽ = ☽′.

§. 110.

Hierauf folgt die eilfte Tafel, welche

+ 1 41 22

für die Gleichung des Mittelpuncts der Sonne, und demnach

1 8 30 12 = ⊙ v.

für ihren wahren Ort, und demnach auch
7 8 30 12 = ☽ v.
für den wahren Ort des Vollmonds in orbita giebt.

§. 111.

Nach diesen Datis giebt nun die nächstfolgende Tab. 12. die Gleichung der Zeit
— 6′ 46″ so von a′
+ 9 32 so von ☉ v
abhängt, und demnach die Summe
+ 2 46
und dadurch
1771. April 17. 14 St. 56′ 30″
für die ☍ in orbita, Berliner Uhr wahrer Zeit, alten Calenders.

§. 112.

Die dreyzehnte Tafel, so hierauf folgt, giebt die Gleichung für ☊
— 8′ 59″
demnach
7 17 43 25 = ☊ v. den wahren Ort des ☊ welches von
7 8 30 12 = ☽ v
abgezogen, das wahre arg. latit.
11 20 46 47 = ☽ v — ☊ v
giebt.

§. 113.

Mit diesem wahren arg. latit. findet sich in der 14. und 15. Tafel
+ 2′

$+ \;\; 2' \; 12$ Red. ad Eccl.
$- 48 \;\; 3$ latit. ☽.

Dieses zeigt an (§. 99), daß die Breite des Mondes südlich ist. Sodann erhellet daraus, daß die Länge des Mondes in der Ecliptic bereits grösser als die Länge der Sonne ist, und demnach die ☊ in ecliptica, der ☊ in orbita vorgeht.

§. 114.

Die folgenden Tafeln beziehen sich auf die (§. 109) gefundenen Data, und geben, wie unten auf der hintern Hälfte des Formulars zu sehen:

Tab. 16	$+ \; 3' \; 12''$	für die stündliche Zunahme der Breite,
da nun	$- 48 \;\; 3$	die Breite zur Zeit der ☊ ist, so ist
	$- 44 \;\; 51$	die Breite eine Stunde nachher.
17	$+ 34 \;\; 47$	die stündl. Bewegung des ☽ in orbita,
18	58 19	die Parallaxis aequatoria.
19	15 53	der Halbmesser des ☽,
20	15 55	der Halbmesser der ⊙,
	2 25	die stündliche Bewegung der ⊙,
19	42 31	den Halbmesser des Erdschattens, wobey die Parallaxe der ⊙ = 10″ gesetzt worden.

§. 115.

Die letzten 3 Tafeln (Tab. 21, 22, 23) gebraucht man bey den Mondsfinsternissen nicht anders, als wenn man z. E. vermittelst der Declination die Stunde des Auf- und Unterganges der Sonne finden will, um zu sehen, ob die Mondsfinsterniß ganz, oder zum theil, oder gar nicht unter Tagen eintrift. Eben so dienen die Tab. 22. 23 nur, um die scheinbare Gestallt der Finsterniß über dem Horizont, die Himmelsgegend rc. zu finden, wo sie gesehen wird.

§. 116.

Aus den gefundenen Datis läßt sich nun die Mondsfinsterniß ohne Mühe entwerfen. Ich werde nur noch vorerst erklären, was es mit der Reduct. ad Ecclipt. für eine Bewandtniß hat. Man setze, eine Mondsfinsterniß sey nach dem aufsteigenden Knoten, wo folglich die Breite nördlich, die Reduct. ad Ecclipt. aber negativ ist. In der zwoten Figur stelle
Fig. 2. D E die Eccliptic vor; C sey der Mittelpunct der Sonne, oder des demselben gegenüberstehenden Puncts. C D die Reduct. ad Eccliptícam, so wird die Breite aus D aufwerts in D L getragen, und L ist der Ort des Mondes in orbita; L F ist sodann die stündliche Zunahme der Breite. Durch F wird F G mit D E parallel, oder auf D F senkrecht gezogen, und mit der stündlichen Bewegung des ☽ beschreibt man aus L durch F G einen Circulbogen G, so ist L G die Projection der Mondbahn und ihre Lage gegen die Eccliptic, und der Mond bewegt sich von L in G, die Sonne von C gegen E.

§. 117.

§. 117.

Da man aber in solchen Projectionen nur auf die relative Bewegung sieht, so zieht man die Bewegung der Sonne von der Bewegung des Mondes ab, welches auf folgende Art geschieht: Man trägt die stündliche Bewegung der Sonne rückwerts aus G in H, und zieht L H. Diese Linie ist demnach die scheinbare Mondbahn, in Beziehung auf die Sonne, und L H die stündliche Bewegung des Monds, in Beziehung der in C bleibenden Sonne.

§. 118.

Zieht man nun C K auf H L senkrecht, so ist C K die kleinste Entfernung der Mittelpuncte, zur Zeit der grösten Verfinsterung.

§. 119.

Solle nun dieses berechnet werden, so sey

$CD = -r$ die reduct. ad ecclipt.

$DL = +\lambda$ latit. ☽.

$LF = +n$ incr. horar. latit.

$LG = +H$ horar. ☽ in orbita,

$GH = +h$ horar. ☉.

Hieraus findet sich

$FG = \sqrt{(H^2 - n^2)}$

$FH = \sqrt{(H^2 - n^2)} - h$

demnach

$$\frac{CD}{FH} = -\frac{r}{\sqrt{(H^2 - n^2)} - h}$$

die Zeit zwischen ☌ ☍ in orbita und in eccliptica. Ferners

$$LH = \sqrt{[FH^2 + FL^2]}$$
$$= \sqrt{[H^2 + h^2 - 2h\sqrt{(H^2 - \eta^2)}]}$$
$$HM = \sqrt{(H^2 - \eta^2)} + r$$
$$MN = [\sqrt{(H^2 - \eta^2)} + r]\eta : [\sqrt{(H^2 - \eta^2)} - h]$$
$$CN = \lambda + \eta - [\sqrt{(H^2 - \eta^2)} + r]\eta : [\sqrt{(H^2 - \eta^2)} - h]$$
$$CK = \frac{HF \cdot CN}{LH} = \frac{CM.FH - FL.MH}{LH}$$
$$= \frac{\lambda\sqrt{(H^2 - \eta^2)} - \lambda h - \eta h - \eta r}{\sqrt{[H^2 + h^2 - 2h\sqrt{(H^2 - \eta^2)}]}}$$
$$KN = (\lambda\eta.\sqrt{(H^2 - \eta^2)} - \eta\lambda h - \eta^2 h - \eta^2 r) : (\sqrt{[H^2 + h^2 - 2h\sqrt{(H^2 - \eta^2)}]}.[\sqrt{(H^2 - \eta^2)} - h])$$
$$LN = \frac{r\sqrt{[H^2 + h^2 - 2h\sqrt{(H^2 - \eta^2)}]}}{\sqrt{(H^2 - \eta^2)} - h}$$
$$KL = (\eta\lambda\sqrt{(H^2 - \eta^2)} - \eta\lambda h - \eta^2 h - \eta^2 r + rH^2 + rh^2 - 2rh\sqrt{(H^2 - \eta^2)}) : (\sqrt{[H^2 + h^2 - 2h\sqrt{(H^2 - \eta^2)}]}.[\sqrt{(H^2 - \eta^2)} - h])$$

§. 120.

Diese Formeln lassen sich durch die Betrachtung, daß h, η, r mit H verglichen, sehr klein sind, merklich abkürzen, wenn man die Wurzelgrössen in unendliche Reihen auflößt, und von diesen die ersten Glieder allein behält. Auf diese Art wird man

$\sqrt{(H^2}$

$$\sqrt{(H^2 - \eta^2)} = H - \frac{\eta\eta}{2H} + \&c.$$

$$\sqrt{[H^2 + h^2 - 2h\sqrt{(H^2 - \eta^2)}]} = H - h + \frac{h\eta\eta}{2HH} - \&c. = LH$$

$$CK = \lambda - \eta + \frac{r\eta}{H}$$

$$KL = r + \frac{\eta\lambda}{H} - \frac{\eta\eta}{H}$$

$$LN = r + \frac{r\eta\eta}{2HH}$$

erhalten.

§. 121.

Da hiebey $\frac{h\eta\eta}{2HH}$ höchstens $\frac{1}{2}$ Secunde ist, so kann man schlechthin die stündliche Bewegung

$$LH = H - h$$

setzen, und indem man

$$\frac{LF}{LH} = \frac{\eta}{H-h} = \sin\omega$$

setzt, so wird man

$$MN = FL - FM.\sec\omega$$
$$CN = DL + FM.\sec\omega$$
$$CK = CN\cos\omega = DL\cos\omega + FM$$
$$KN = CN.\sin\omega = DL\sin\omega + FM.\tang\omega$$
$$LN = FM.\sec\omega$$
$$KL = DL\sin\omega - FM(\sec\omega - \tang\omega)$$

finden.

§. 122.

§. 122.

Es sey nun, um die erstberechnete Finsterniß zu construiren, in der dritten Figur A B die Ecclictic, C der Mittelpunct des Erdschattens. Nach einer angenommenen Scala mache man C D = + 2′ 12″ = der Reduction des Monds auf die Ecclictic. Und da die Breite — 48′ 3″ ist, so wird sie aus C in L herunterwerts getragen. Ferner da das increm. latit. horar. = + 3′ 12″, so trägt man sie aus L aufwärts in F, und zieht F H mit C B parallel oder auf D F senkrecht. Sodann trägt man den Unterschied der stündlichen Bewegung 34′ 27″ — 2′ 25″ = 32′ 2″ aus L in H, und zieht L H, welches die relative Mondsbahn, und zugleich die stündliche Bewegung des Monds in dieser Bahn ist. Theilt man demnach L H in 60 Minuten, so lassen sich leicht die Stunden so auftragen, daß der Punct L auf 14 St. 56′ 30″ falle. Ferners zieht man C a auf L H senkrecht, und so ist a der Punct der grösten Verfinsterung. Endlich trägt man die Summe der Halbmesser des Erdschattens und des Mondes 42′ 31″ + 15′ 53″ = 58′ 24″ aus C in b und c, und diese Puncte fallen auf den Anfang und das Ende der Verfinsterung. Doch ist zu merken, daß der Erdschatten, wegen der Athmosphäre der Erde, um etwas grösser ist, als er ohne dieselbe seyn würde. **Mayer** giebt die Regel an, daß man die Parallaxe des Mondes um $\frac{1}{60}$

$\frac{1}{80}$ Theil vermehren müſte; und ſo würde der Halbmeſſer des Erdſchattens $= 43' \, 32'' = CA = CB$, und $Cb = Cc = 43' \, 32'' + 15.53 = 59' \, 25''$ ſeyn. Endlich kann man mit den Halbmeſſer des Mondes aus a, b, c Circul beſchreiben, und damit die Gröſſe der Verfinſterung beſtimmen.

§. 123.

Die Berechnung iſt nun folgende. Es iſt

$$CD = 2' \, 12'' = 132''$$
$$DL = 48 \quad 3 = 2883$$
$$LF = 3 \quad 12 = 192$$
$$LH = 32 \quad 2 = 1922$$
$$AC = 43 \quad 32 = 2612$$
$$cd = 15 \quad 53 = 953$$
$$Cc = 59 \quad 25 = 3565$$

demnach wenn $LHF = \omega$ geſetzt wird

$$\sin \omega = \tfrac{192}{1922} = 0{,}09091.$$
$$\omega = 5^\circ \, 13'$$
$$CN = LD + CD \, . \tan \omega = 2895''$$
$$LN = CD \sec \omega = 132''$$
$$Na = CN \sin \omega = 263''$$
$$Ca = CN \cos \omega = 2883''$$

Hieraus findet ſich nun der verfinſterte Theil

$mn = an + Cm - Ca = Cc - Ca = 682''$

demnach

$an : mn = 953'' : 682'' = 6$ Zoll : 4 Zoll. 17′

Ferner um N L und N a in Zeit zu verwandeln, ſchlieſt man

LH:

$LH:NL = 1922:132 = 3600'':247''$
$LH:Na = 1922:263 = 3600 :493$

Demnach durchläuft der Mond
NL in 4′ 7″
Er ist aber in L um 14 St. 56 30

demnach in N um 14 · 52 23 die Zeit der ☍ in ecclíptica. Ferner durchläuft er
N a in 8′ 13″

demnach ist er in a um 15 St. 0 36 die Zeit der grösten Verfinsterung. Endlich findet sich
$ab = ac = \sqrt{(Cc^2 - CN^2)} = 2093''$
dieses giebt
$LH:ac = 1922:2093 = 3600'':3920''$
Und so durchläuft der Mond $ac = ab$ in $3920''$ oder 1 St. 5′ 20″. Er ist demnach
in b um 13 St. 55′ 16″
c um 16 · 5 56
daher die Dauer der Finsterniß
2 · 10 40
Dieses ist nach der ersterwähnten Mayerschen Bestimmung des Erdschattens. Nach der gemeinen Bestimmung würde für die Zeit
in b um 13 St. 58′ 57″.
c um 16 · 2 15
heraus gekommen seyn.

§. 124.

Nach dieser umständlichern Erläuterung des ersten Beyspiels werde ich mich bey dem zweyten

ten kürzer aufhalten. Es betrift den letzten ecliptischen Vollmond 1773, den 19. Sept. Abends um 7 Uhr, 3 Minuten, 38 Secunden, alten Calenders, wahrer Zeit und Berlinischer Uhr. Die ganze Berechnung ist auf eben die Art angeordnet, wie bey dem ersten Beyspiele, und die Construction findet sich in der vierten Figur. A B ist wiederum die Ecliptic, C der Mittelpunct des Erdschattens, C D die Reduction auf die Ecliptic, wird, weil sie negativ ist, vorwärts getragen. D L die Breite wird ebenfalls, weil sie negativ ist, herunterwerts, und L F das increm. latit. horar. da es gleichfalls negativ ist, aus L in F herunterwerts getragen. F H ist auf D F senkrecht oder mit C B parallel, und L H wird dem Unterschiede der stündlichen Bewegung gleich gemacht, und in 60 Minuten getheilt; damit lassen sich die Stunden so auftragen, daß L auf 7 Uhr 3′ 38″ falle. C B ist der Halbmesser des Erdschattens, c d der Halbmesser des Mondes. Dabey findet sich nun, wenn man die Rechnung anstellt, die Zeit Fig. 4.

des Anfangs um 5 St. 32′ 33″
des Mittels um 6 • 59 34
des Endes um 8 • 26 35

und die Grösse 8 Zoll 27′, jedoch alles mit Voraussetzung der gemeinen Berechnung des Erdschattens.

XI.

XI. Berechnung und Entwerfung der Sonnen- und Erdfinsternisse.

§. 125.

Die Berechnung der Sonnen- und Erdfinsternisse ist, in Absicht auf die dazu erforderlichen Data von der erstbeschriebenen Art, weiter nichts verschieden, als daß die für den Vollmond besonders hinzukommenden Bestimmungen (§. 100, 101, 106, 122) wegbleiben. Man kann die ganze Anlage der Rechnung in dem dritten und vierten Beyspiele sehen, und sie wird, nach dem bisher gesagten, keine Schwürigkeit haben. Hingegen werde ich mich bey der Entwerfung dieser beyden Finsternisse etwas länger aufhalten, und zwo Methoden gebrauchen, davon ich die erstere bereits in der eccliptischen Tafel beschrieben, und von der andern eben daselbst nur kurz Erwähnung gethan.

§. 126.

Es sey demnach die Sonnenfinsterniß, welche im dritten Beyspiel beschrieben worden, so zu entwerfen, wie sie zu Berlin wird gesehen werden können. Dazu dient nun die fünfte Figur.
Fig. 5. Man zieht darin die Ecliptic A C B, und setzt in C den Mittelpunct der Sonne. Da nun die reduct. ad eccl. $= -0' 52''$ und demnach negativ ist, so wird sie von der Scala α aus C in

C in D getragen. Die Breite + 18′ 58″ ist positiv, und so trägt man sie aus D in L aufwärts; und da auch das incr. lat. horar. = + 3′ 29″ positiv ist, so kömmt es ebenfalls aufwerts aus L in F. F H wird auf D F senkrecht oder mit D B parallel gezogen, und den Unterschied der stündlichen Bewegung 37′ 43″ — 2′ 23″ = 35′ 20″ trägt man aus L in H, so ist L H die scheinbare Mondbahn, in Beziehung auf die in C bleibende Sonne. L H wird auf der Scala 6 in 60 Minuten Zeit eingetheilt, und damit lassen sich die Stunden dergestalt auftragen, daß L auf 4 Uhr 30′ 53″ falle. A C = C B wird dem semid. ♁ = 61′ 0″ gemacht, und damit der Circul A E B R beschrieben, welcher die vom Monde beschattete Erde vorstellt. Auf der beyderseits verlängerten Linie L H oder der scheinbaren Mondbahn liessen sich nun sowohl mit dem semid. umbrae 0′ 54″ als mit dem semid. penumbrae = 32′ 28″ Circul beschreiben, welche die von dem Monde für jede Zeit ganz, oder zum theile beschattete Theile der Erdfläche vorstellen würden. Eben so liessen sich auf L H die Puncte finden, wo der Mond anfängt oder aufhört die Erde zu beschatten, ingleichen wo das Mittel hintrift ꝛc. bis dahin ist demnach die Entwerfung der Erdfinsterniße, der Entwerfung der Mondfinsterniße ganz ähnlich. Der Unterschied ist nur, daß hier andere Halbmesser genommen werden, und der Schatten beweglich ist.

aus C in N, diese aus C in Q. Auf N Q, als einen Durchmesser, beschreibt man den Circul N M Q S, welcher der Parallelkreis von Berlin und jeder anderer Oerter von eben der Polhöhe seyn wird. Dieser Circul muß nun noch in Stunden getheilt werden, so, daß Q der Mittag, S die sechste Stunde Abends, N Mitternacht, und M die sechste Stunde Morgens sey.

§. 132.

Um dieses zu verrichten, so zieht man M S zusammen, und aus dem Mittelpunct T mit dem Radius T S = T M beschreibt man einen Circul, wovon in der Figur nur der Bogen a S gezeichnet ist, weil die Finsterniß Abends eintrift. Dieser Circul a S wird nun in 24 gleiche Theile, als so viele Stunden, getheilt, wovon aber in der Figur nur die 4, 5, 6, 7 Nachmittagsstunden gezeichnet sind. Durch jede dieser Stunden, wie z. E. durch die vierte, zieht man gerade Linien a P in den Pol P, und diese werden den Parallelcircul Q S N stereographisch in Stunden theilen.

§. 133.

Ist dieses geschehen, so zieht man z. E. für die vierte Stunde die blinde Linie C b, und mit dieser die Linie c d parallel. Man trägt C b auf die Scale δ, und so viel Grade sie daselbst anzeigt, so viele nimmt man auf der Scala γ, und trägt sie aus c in d. Eben so verfährt man

man mit den übrigen Stunden, und dadurch wird man die Linie d q, in Stunden eingetheilt, erhalten.

§. 134.

Diese Linie stellt nun die scheinbare Mondbahn vor, wie sie zu Berlin gesehen wird. Man kann darauf den Punct f finden, welcher dem Mittelpunct der Sonne am nächsten ist. Nimmt man ferner auf der Scala α den Halbmesser der Sonne 15′ 47″, und beschreibt aus C, als dem Mittelpunct, den Circul r w, so stellt dieser die Sonne vor. Aus f beschreibt man sodann mit dem Halbmesser des Monds 16′ 41″ den Circul t w, welcher den Mond zur Zeit der grösten Verfinsterung vorstellt. Eben so kann der Mond aus g und h beschrieben werden, wo der Anfang und das Ende der grösten Verfinsterung ist.

§. 135.

Will man aber hiebey genauer verfahren, so ist zu bemerken, daß der Halbmesser des Monds, so wie derselbe durch die Berechnung gefunden worden, nur alsdann dient, wo der Mond am Horizonte erscheint, und folglich für die Oerter die in jedem Augenblicke der Finsterniß am Rande der beleuchteten Halbkugel AEBR herum liegen. Für die übrigen Oerter wird der Halbmesser des Monds grösser genommen, je nachdem derselbe höher über dem Horizonte ist. Es sey

ω = der Höhe des Mondes über dem Horizonte,
P = der Parallaxe des Mondes,
S = dem horizontalen Halbmesser des ☽.
x = dessen Halbmesser in der Höhe ω,
so wird
$$x = S(1 + \sin P . \sin \omega)$$
genommen.

§. 136.

So z. E. um diese Vergrösserung für 4 Uhr zu Berlin zu berechnen, trägt man C b auf die Scala δ, wo sie auf 53 Grad fällt. Dieses kann man für die Distanz des ☽ vom Zenith ansehen, und so ist
$$\omega = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$$
Ferner ist
$$P = 1^\circ \; 1' \; 10''$$
$$S = 0 \; 16 \; 41 = 1001''$$
Dieses giebt
$$\sin \omega = 0,\ 602$$
$$\sin P = 0,\ 0178$$
demnach
$$x = 1012'' = 16' \; 52''$$
Der Unterschied x — S würde noch grösser seyn, wenn die Finsterniß um die Mittagsstunde wäre. In allem kann derselbe bis auf 18″ anwachsen, und dieses ist, wenn man leicht die Finsterniß auf einem Regalbogen entwirft, allerdings merklich. Wir werden aber in folgenden sehen, daß diese Berechnung ganz wegbleiben kann.

§. 137.

§. 137.

Die scheinbare Mondbahn d q ist keine gerade Linie, ungeachtet sie sich sehr wenig krümt. Sodann sind auch die Stunden darauf nicht von gleicher Grösse. Sie muß demnach wenigstens von 10 zu 10 Minuten nach der vorhin beschriebenen Art eingetheilt werden, wenn man dadurch die Zeit von jedem Grade der Finsterniß genau bestimmen will. Sie dient übrigens nur für den Ort, für welchen sie construirt ist, und muß für jeden andern Ort besonders construirt werden. Will man es für viele Oerter thun, so ist das beste, wenn man statt des einigen Parallelcirculs Q S alle Mittags- und Parallelkreise von 5 zu 5, oder wenigstens von 10 zu 10 Graden entwirft. Da ich dieses bereits in der eccliptischen Tafel beschrieben, so werde ich mich hier nicht damit aufhalten.

XII. Allgemeine Entwerfung der Erdfinsterniße.

§. 138.

Wenn die Erde, während dem sie vom Monde beschattet wird, sich nicht um ihre Axe drehete, so dürfte man sie nur so entwerfen, wie sie zur Zeit der Finsterniß von der Sonne beleuchtet, und von dem Monde beschattet wird, und man würde den ganzen

Verlauf der Finsterniß eben so leicht entwerfen können, wie es bey den Mondsfinsternissen geschieht, und wie es auch bey den Erdfinsternissen geschieht, wenn man dabey die Erde nur als eine Kugel betrachtet, ohne auf die sich während der Finsterniß verändernde Lage der Länder zu sehen. Da man aber auf diese Veränderung allerdings zu sehen hat, wenn man sehen will, wie tief jeder Ort im Schatten liegt, und wie groß folglich an jedem Orte die Verfinsterung ist; so habe ich auf Mittel gedacht, die bey solchen Entwerfungen vorkommende Hindernisse wegzuräumen; und diese werde ich nun durch die Betrachtung des vierten Beyspiels angeben.

§. 139.

Die Berechnung dieses Beyspiels ist, wie die vom vorhergehenden. Es betrift die Sonnenfinsterniß 1769, May 23. 21 St. 20′ 59″ alten Calenders, oder den 4. Junii Morgens um 9 Uhr 20′ 59″ neuen Calenders, Berliner Uhr und wahre Zeit. Die übrigen Data sind in dem Formular des Beyspiels zu sehen. Diese Finsterniß habe ich in der 7ten Figur sowohl ortographisch als stereograpisch entworfen, und dazu noch in der 8ten Figur das nördliche Planisphärium gezeichnet, so wie es aus dem Südpol gesehen, auf der Fläche des Aequators entworfen wird. Die stereographische Entwerfung der Finsterniß ist ebenfalls so entworfen,

worfen, wie die Beschattung der Erde aus dem Südpol gesehen, auf der Fläche des Aequators erscheinen würde; und so entworfen ist m Q n der Weg des Mondschattens, g q k der Weg des äussersten Randes des Schattens, und die dazwischen gezogenen 3 beynahe concentrische Circul der Weg der 3, 6, 9 zölligen Verfinsterung. Bey dieser Entwerfung ist die Erde schlechthin nur als eine Kugel betrachtet. Der Erfolg aber ist, daß wenn die 7te oder 8te Figur auf ölgetränktem Papier gezeichnet und damit durchsichtig gemacht wird, sie auf die andere gelegt, und darauf so herumgedreht werden kann, wie sich die Erde, während der Beschattung, um ihre Axe herumdreht, jedoch ex fumo lucem! Wir müssen sehen, wie die beyden Figuren entworfen werden.

§. 140.

Um bey der 7ten Figur und zwar bey der ortographischen Projection anzufangen, so stellt die gerade Linie A C B die Ecliptic vor, und es wird A C = C B = 61′ 13″ = dem semid. ♁ gemacht. Diese 61′ 13″ habe ich auf der Scala ε genommen, und diese Scale dergestallt getheilt, damit der Circul A E B R eben so groß würde als der gleichnahmigte Circul der fünften Figur. Dieses ist nur deswegen geschehen, damit ich die Scala δ auch hier brauchen konnte. Der Circul A E B R stellt nun auch hier, in sofern es die ortographische Projection betrift, den Rand der von der Sonne Fig. 7.

beleuchteten Halbkugel der Erde vor. C ist der Mittelpunct der Erde und zugleich auch die Projection der Oerter, durch deren Zenith, während Finsterniß, die Sonne geht.

§. 141.

Nun ist hier die Reduction auf die Ecliptic $+ 2' \; 32''$ positiv, und so wird sie von der Scala ε genommen aus C in D getragen. Sodann zieht man CE und DL auf ACB senkrecht, und trägt die Breite $+ 55' \; 31''$ auf der Scala ε genommen, weil sie positiv ist, aus D in L aufwerts. Das incr. latit. horar. $- 3' \; 27''$ ist negativ, und so wird es, auf eben der Scala ε genommen, aus L in F herunterwerts getragen. FH wird auf DL senkrecht gezogen, und $DH = 37' \; 59'' - 2' 23'' = 35' \; 36''$ = dem Unterschiede der stündlichen Bewegung gemacht, und LH gezogen, und auf beyden Seiten verlängert. LH wird sodann auf der Scala ζ in 60 Minuten getheilt, und damit lassen sich die Stunden auf LH so auftragen, daß L auf 21 St. $20' \; 59''$ falle, weil zur Zeit der ☌ in orbita, der Mond in L, die Sonne in C ist. Ferner nimmt man auf der Scala ε den Halbmesser des Schattens $56''$, und des Halbschattens $32' \; 34''$, und trägt beyde aus L auf der Linie LD herunterwerts, und erstern auch heraufwerts. Man sollte auch letztern heraufwerts tragen, es ist aber hier unnöthig, weil der Punct weit außerhalb

serhalb der Erde fällt. Es ist demnach λ I der Raum des Halbschattens, und wird in 12 Zolle getheilt, welches aber in der Figur nur von 3 zu 3 Zoll geschehen ist, um sie nicht mit Linien zu überhäufen. Durch die Theilungspuncten werden gerade Linien mit L H parallel gezogen, und diese stellen in der ortographischen Projection den Weg der 0, 3, 6, 9 zölligen Verfinsterung zur Zeit der an jedem Orte scheinbaren Coniunction in ecclipticа vor, weil die Eintheilung auf L D als einer auf der Ecclіptic A C B senkrechten Linie geschehen. Endlich werden durch die auf L H gezeichneten Stunden, und so auch von 10 zu 10 Minuten Parallellinien in L D gezogen, welches in der Figur bey den Stunden ganz, bey den Minuten aber nur bis an den Rand A E B geschehen ist, weil sie in folgenden nicht weiter gebraucht werden. Auch muß alles, was die ortographische Projection betrift, nur blind gezeichnet werden, damit man es, wenn die stereographische Projection zu Ende ist, wieder auslöschen könne. Dieses ist besonders bey Finsternissen nöhig, die näher bey dem Mittelpunct C sind, weil sodann die eine Projection, wenigstens zum Theil, auf die andere fällt.

§. 142.

Um nun aus dieser ortographischen Projection die stereographische herzuleiten, wo C der Nordpol, A E B R der Aequator werden solle; so so nehme man den ang. eccl. cum merid. 83° 7′ 12″, und nach Anleitung der sechsten Figur mache man JCB = 83° 7′ 12″ und ziehe JR gerade durch C, so ist J C R der meridianus universalis, und dieser ist beyden Projectionen gemein. Ferner aus der reduct. ecclipt. ad aequatorem — 1° 22′ 11″ und dem Ort der Sonne 2ˢ 13° 51′ 57″ leite man die Rectascension 2° 12 29′ 46″ her, und diesem Bogen mache man den Bogen RC ♈ gleich, und so läßt sich der colurus aequinoctiorum ♈C♎, und damit auch der colurus solstitiorum r ♋ C ♑ ziehen. Nun wird auf der Scala δ (Fig. 5) die Schiefe der Ecliptic 23°28′ 20″ auf ♑ C ♋ aus C in e, das doppelte 46°56′ 40″ aus C in h, das Complement 66°31′40″ aus C in ♋ getragen; und so läßt sich aus dem Mittelpunct h die Ecliptic ♈ ♋ ♎ beschreiben, e wird ihr Pol, und S der Ort der Sonne seyn.

§. 143.

Der Aequator A R B E wird nun in 24 gleiche Theile als so viele Stunden getheilt, und jede Stunde kann sodann, wo es wird nöthig seyn, noch von 10 zu 10 Minuten eingetheilt werden. Die Stunden werden beygeschrieben, wie in der Figur zu sehen. Durch die 18te und 6te Stunde in den Punct e wird sodann ein Circul gezogen, dessen Mittelpunct auf der verlängerten Linie C S unterhalb R,

und

und zwar da seyn wird, wo das Complement der Declination $90^\circ - 22^\circ\, 29'\, 45'' = 67^\circ\, 30'\, 15''$ doppelt genommen $135^\circ\, 0'\, 30''$ und von der Scala δ (Fig. 5) aus C herunterwerts getragen, auf der verlängerten Linie CSR hintrift. Der Circul a, 18, e, b, 6 stellt den Rand der von der Sonne beleuchteten Hälfte der Erdfläche vor, und S ist dessen Pol.

§. 144.

Auf diesen Circul muß nun alles gebracht werden, was bey der ortographischen Projection auf dem Circul A E B war. Und dieses ist nun gar nicht schwer, weil der Punct S dazu gebraucht werden kann. Denn man darf für jeden Punct P der ortographischen Projection nur eine gerade Linie P S ziehen, und p wird die stereographische Projection des Puncts P seyn.

§. 145.

Man bemerke nun ferner, daß in der ortographischen Projection jede gerade Linien MN, GK wirkliche Circul vorstellen, und zwar wenn sie parallel laufen, so stellen sie auch Circul vor, die einerley Pol haben; und wie auch immer die geraden Linien gezogen sind, so liegt der dazu gehörende Pol allemal am Rande AEBR, und zwar mitten zwischen den Durchschnittspuncten. Daher wird auch der Rand AERB alle die Circul, so durch die gerade Linien vorgestellt

gestellt werden, senkrecht durchschneiden. Dieses erleichtert die Möglichkeit, diese Circul stereographisch zu entwerfen: denn bey dieser Projectionsart behalten alle Winkel ihre Grösse.

§. 146.

Es sey demnach z. E. der Weg des Schattens MN stereographisch zu entwerfen. Nach §. 144 fallen die Durchschnittspuncten M, N in m, n, und so muß durch m n ein Circulbogen gezogen werden, welcher den Rand a e b in m und n senkrecht durchschneide. Es ist klar, daß man dazu das Centrum findet, wenn man an m und n Tangenten zieht. Denn wo diese sich durchschneiden, da ist das Centrum, aus welchem sich der Bogen m Q n ziehen läßt, und dieser stellt nun den stereographisch entworfenen Weg des Schattens vor. Auf gleiche Art werden auch die Wege der beyden Ende des Schattens und jede Zolle des Halbschattens stereographisch entworfen. So z. E. verwandelt sich die gerade Linie G K, welche ortographisch den äussern Rand des Halbschattens vorstellt, stereographisch in den Circulbogen g q k, und so ist das ganze Revier der Beschattung in den Raum g e k q g eingeschlossen. Die Mittelpuncte der Circul m Q n, g q k &c. liegen sämtlich in einer geraden Linie rc.

§. 147.

§. 147.

Auf gleiche Art verfährt man auch mit den Stundenlinien. So z. E. durchschneidet in der ortographischen Projection die Linie der 22sten Stunde den Rand A E B in P, und nach §. 144 fällt P in p. Da nun A der Pol für die Stundenlinien der ortographischen Projection ist, weil sie mit L D parallel, demnach mit A C B senkrecht sind, so fällt nach §. 144 der Pol A stereographisch in a, so wie B in b. Zieht man durch b C a eine gerade Linie, so werden auf dieser die Centra liegen, aus welchen die Circulbögen p, 20, π dergestallt gezogen werden müssen, daß sie sowohl in p als π rechte Winkel machen, und a ist die stereographische Entwerfung ihres gemeinschaftlichen Pols.

§. 148.

Auf diese Art werden demnach die Stundenlinien entworfen, und die Stunden beygeschrieben. Zieht man nun durch einen beliebigen Punct t eine gerade Linie C t w, so schließt man folgendermassen: Der Punct t liegt auf den Bogen p t v, welchen die 6 zöllige Verfinsterung durchläuft. w trift auf die 22te Stunde, demnach ist an dem Ort der Erdfläche, wo der Punct t hintrift, 22 Uhr, das will sagen 10 Uhr vor Mittag. Da aber t nahe bey der 21sten Stundenlinie, und zwar bey 20 St. 57′ liegt, so ist zu gleicher Zeit zu Berlin 20 Uhr 57′ Minuten. Der Ort t liegt

demnach

demnach um 1 St. 3' Zeit östlicher als Berlin. Trägt man endlich Ct auf die Scala δ (Fig. 5) so findet man 31 Grad für den Abstand des Puncts t vom Pol. Demnach ist seine Polhöhe $90 - 31 = 59$ Grad, dadurch findet sichs, daß der Punct t hinter dem Ladogasee liegt, und daß daselbst um 10 Uhr vor Mittag die ☌ ☽ ☉ eintrift, und die Verfinsterung von 6 Zollen ist.

§. 149.

Um aber dieses Nachrechnen zu erspahren, so ist dazu die achte Figur entworfen, wo die Grade der Breite vom Pol ausgerechnet von der Scala δ (Fig. 5) genommen sind. Und da die ganze Construction nach der Berliner Uhr ist, so ist auch darin der Berlinische Mittagscircul C O besonders gezogen. Man legt sodann die siebente Figur auf die achte, oder diese auf jene, so, daß sie sich um das gemeinsame Centrum oder den Pol C drehen lassen, bis daß z. E. für den Punct t der Berlinische Mittagscircul C O auf 20 Uhr 57' bey z fällt. Und so wird sichs finden, daß der Punct t (Fig. 8) über den Punct y zu liegen kömmt. Eben so auch, wenn C O (Fig. 8) auf C φ, 20 (Fig. 7) gelegt wird, so fällt die Stundenlinie p, 20 (Fig. 7) auf μ ξ (Fig. 8), demnach wenn es zu Berlin 20 Uhr ist, so ist an allen auf μ ξ liegenden Orten die scheinbare ☌ ☽ ☉, und besonders in n die Finsterniß von

3 Zol-

3 Zollen. In μ geht alsdann die Sonne auf, weil p (Fig. 7) am westlichen Rande der beleuchteten Halbkugel liegt, und p auf μ trift. p fällt etwas über $\frac{2}{7}$ zwischen der Linie der 3 und 6 zölligen Verfinsterung, und so ist die Finsterniß im μ bey aufgehender Sonne etwas über 5 Zoll. In ξ hingegen berührt der Mond die Sonne, und die Finsterniß ist daselbst = o.

§. 150.

Auf eben die Art wie der Punct y gefunden worden, lassen sich jede andere Puncte finden, wo die Finsterniß in ☌ ☽ ☉ auf eine gegebene Stunde eintrift, und von einer gegebenen Anzahl von Zollen ist. Auch können auf diese Art jede Oerter gefunden werden, wo die Sonne beym Aufgange und beym Niedergange anfängt und aufhört verfinstert zu werden.

§. 151.

So läßt sich auch die Aufgabe abändern. Man kann z. E. fragen, welcher Punct der Erdfläche in t sey, wenn die Finsterniß daselbst anfängt und aufhört. Diese Frage hängt von einem einigen Umstande ab. Denn welcher Ort immer in t seyn mag, so ist es daselbst allemal 22 Uhr, und die Polhöhe bleibt ebenfalls einerley. Es kommt daher schlechthin nur auf den Unterschied der Mittagskreise oder der Zeit an, um welche die Oerter vom Anfang, Mittel und Ende der Finsterniß, früher und später, in t kommen. Da nun t auf dem Kreise der 6 zölligen Verfinsterung liegt, so nehme man auf der Scala s die Summe der Halbmesser der Sonne und des Mondes $15' 49'' + 16' 45'' = 32' 34''$, und trage sie aus i in ψ und ω. Da nun ψ auf 20 St. 16', und ω auf 21 St. 51' fällt, i aber auf der 21sten Stundenlinie genommen worden, so ist

$$21 \text{ St.} - 20 \text{ St. } 16' = 0\ 44'$$
$$21 \text{ St. } 51' - 20 \text{ St.} = 0\ 51'$$

Demnach trift der Anfang der Verfinsterung um 44' früher, das Ende um 51' später in t als die ☌ ☽ ☉. Und eben dieses gilt von allen Puncten auf dem Kreise der 6 zölligen Verfinsterung. Diese Puncten liegen für den Anfang der Finsterniß um 44' Zeit östlicher, für das Ende aber um 51' westlicher als sie nach §. 149. 150. für die Zeit der ☌ ☉ ☽ gefunden werden. Wenn demnach diese gefunden sind, so finden sich jene ohne Mühe.

XIII. Die Genauigkeit der Projectionen.

§. 152.

Man giebt gemeiniglich den Vorschlag, die Projectionen der Erdfinsternissen auf einen Regalbogen vorzunehmen, so, daß der Diameter der Erde wenigstens einen Fuß groß sey. Damit wird der Halbmesser von 6 Zoll oder

oder 72 Linien. Und da dieser in so viele Minuten getheilt wird als die Parall. ☽ — Parall. ⊙ beträgt, so wird eine Minute immer grösser als eine Linie, und eine Minute der stündlichen Bewegung grösser als $\frac{1}{2}$ Linie. Es läßt sich daher die Zeit von 15 zu 15 Secunden noch sehr gut unterscheiden. Und da selbst die Berechnungen nicht zuverläßiger sind, so kann man sich aus diesem Grunde ganz füglich der Construction bedienen.

§. 153.

Dessen unerachtet behauptet **La Caille**, daß bey der Construction vieles nur beynahe richtig angenommen werde, und daß daher mehrere kleine Fehler entstehen, die sich zusammen bis auf 3 Minuten belaufen können. Dieser Ausspruch, den **La Caille** schlechthin nur vorträgt, gründet sich vermuthlich auf eine von ihm angestellte Untersuchung, vielleicht auch nur auf eine blosse Vergleichung dessen, was er durch Rechnung und durch Construction gefunden. Da indessen allerdings einige kleinere Umstände bey der Construction nicht geachtet werden, so bleibt immer zu untersuchen, ob sie so viel betragen, und ob sie in solchem Fall nicht können mitgenommen werden, ohne daß die Construction dadurch mühsamer werde. Diesen beyden Absichten gemäß, werde ich nun die Untersuchung vornehmen.

§. 154.

Bey den Projectionen der Erdfinsternissen setzt man voraus, daß sie die Finsterniß dergestallt entwerfen sollen, wie sie aus dem Mittelpunct der Sonne erscheinen würde; das heißt nun aus einer Entfernung die über 20000 Halbmesser der Erde beträgt. Man kann sie als unendlich ansehen, und thut es dadurch in der That, daß man die Erde wirklich ortographisch entwirft, weil diese Entwerfung eine unendliche Entfernung des Gesichtpuncts voraus setzt. Ich werde bey dieser Voraussetzung nach aller Schärfe bleiben, und darüber Rechnung tragen, was die nicht unendliche Entfernung der Sonne auf sich haben mag.

§. 155.

Fig. 9. Es sey demnach in der neunten Figur S der Mittelpunct der Sonne F E. T sey der Mittelpunct der Erde. Das Auge des Zuschauers befinde sich in der geraden Linie T S in einer unendlichen Entfernung. Die Diameter FE, A B seyn auf S T senkrecht. Der Mittelpunct des Mondes L sey etwas unterhalb der Linie S T. Zieht man demnach L C, R G senkrecht auf A B, so ist C die ortographische Projection des Mittelpuncts des Monds, und G die von seinem obern Rande, und es ist CT = L W, und C G = L R. Eben so entwirft sich jeder Punct h der Oberfläche der Erde mittelst der senkrechten Linie in H.

§. 156.

§. 156.

Man ziehe nun aus H die gerade Linie HRV, welche den Mond in R berühre, so wird einem Zuschauer in H der Theil der Sonne VE von dem Monde bedeckt erscheinen, und eben dieses erscheint auch dem Zuschauer in m, weil der Punct m in der Linie H R V liegt. Wenn demnach H die Projection des Puncts m wäre, so gieng alles bis so weit ganz richtig. Allein H ist die Projection des Puncts h; und wenn man aus h eine den Mond bey R berührende gerade Linie ziehen wollte, so würde diese unterhalb V treffen, und daher eine geringere Bedeckung der Sonne von dem Monde angeben. Der Winkel h H m kann bis auf 16 Minuten eines Grades oder $\frac{1}{4}$ Grad betragen, und daher die Lage der Länder bis auf 4 Meilen verrücken. Indessen ist es leicht, darüber Rechnung zu tragen, weil, wenn man die Finsterniß und ihre Grösse für den Ort m bestimmen will, man statt dessen den Ort h in H entwirft. Dieses wird sich im folgenden ergeben.

§. 157.

Man setze nun

den halben Diam. des Monds	LTM = ☽.
den halben Diam. der Sonne	STE = ⊙.
die Parallaxe des Monds	TLD = P.
die Parallaxe der Sonne	AST = p.
die Breite des Mondes	LTW = λ
den Halbmesser der Erde	TA = r
den Winkel - - - -	NTh = ω

so ist

$$LT = BD : \sin TLD = r : \sin P.$$
$$LW = LT . \sin LTW = r . \sin \lambda : \sin P = TC$$
$$LR = LT . \sin LTM = r . \sin \text{☽} : \sin P$$
$$HT = TN . \sin NTh = r . \sin \omega$$
$$LC = LT . \cos LTW = r . \cos \lambda : \sin P.$$

demnach

$$HC = r \sin \omega + r \sin \lambda : \sin P$$

$$LH = \surd (LC^2 + HC^2) = \frac{r}{\sin P} \surd (1 + 2 \sin \omega \sin P + \sin \omega^2 \sin P^2)$$

$$RH = \surd (LH^2 - LR^2) =$$

$$LH = \surd (LC^2 + HC^2) = \frac{r}{\sin P} . \surd (1 + 2 \sin \omega \sin \lambda \sin P + \sin \omega^2 \sin P^2)$$

$$RH = \surd (LH^2 - RL^2) = \frac{r}{\sin P} . \surd (1 + 2 \sin \omega \sin \lambda \sin P + \sin \omega^2 \, \text{ſ}P^2 - \text{ſ}\text{☽}^2)$$

Ferner findet sich

$$\sin LHR = LR : LH$$
$$\cos LHR = RH : LH$$
$$\sin LHC = LC : LH$$
$$\cos LHC = HC : LH$$

und damit

$$\sin RHC = \frac{LR . HC + LC . RH}{LH^2}$$

$$\cos RHC = \frac{RH . HC - LR . LC}{LH^2}$$

folglich

$$\cot RHC = \text{tang}\, HKT = \frac{RH . HC - LR . LC}{LR . HC + LC . RH}$$

Nun

Nun ist

$$HT + SV = ST . \cot RHC$$
$$ST = r : \sin p$$

demnach

$$SV = \frac{r . \cot RHC}{\sin p} - HT$$

oder

$$SV . \sin p = r . \cot RHC - HT . \sin p$$

Setzt man in dieser Formel die oben gefundene Werthe, so findet sichs $\frac{SV . \text{ſ}p}{r}$

$$= [(\sin \omega \text{ſ}P + \text{ſ}\lambda) \surd(1 + 2 \text{ſ}\omega \text{ſ}\lambda \text{ſ}P + \text{ſ}\omega^2 \text{ſ}P^2 - \text{ſ}☽^2) - \text{ſ}☽ . \cos\text{ſ}\lambda] : [\cos\text{ſ}\lambda . \surd(1 + 2 \text{ſ}\omega \text{ſ}\lambda \text{ſ}P + \text{ſ}\omega^2 \text{ſ}P^2 - \text{ſ}☽^2) + \text{ſ}☽ (\text{ſ}\omega \text{ſ}P + \text{ſ}\lambda)] - \sin \omega . \sin p.$$

und

$$\cos\text{ſ}RHT = [(\text{ſ}\omega \text{ſ}P + \text{ſ}\lambda) \surd(1 + 2 \text{ſ}\omega \text{ſ}\lambda \text{ſ}P + \text{ſ}\omega^2 \text{ſ}P^2 - \text{ſ}☽^2) - \text{ſ}☽ \cos\text{ſ}\lambda] : [1 + 2 \text{ſ}\omega . \text{ſ}\lambda . \text{ſ}P + \text{ſ}\omega^2 . \text{ſ}P^2]$$

§. 158.

Diese Formeln sind nun nach aller Schärfe richtig. Sie sind aber auch so weitläuftig, daß man allerdings darauf denken muß, sie abzukürzen. Dieses kann aber ganz füglich und sehr merklich geschehen. Denn bey den Finsternissen bleibt immer $\text{ſ}\lambda < \frac{1}{38}$, $\text{ſ}P < \frac{1}{56}$, $\text{ſ}\odot$ und $\text{ſ}☽ < \frac{1}{215}$. Wenn wir demnach auch $\text{ſ}\omega = 1$ setzen, so geben diese Werthe

$$\surd(1+2\,\text{ſ}\omega\,\text{ſ}\lambda\,\text{ſ}P+\text{ſ}\omega^2\,\text{ſ}P^2-\text{ſ☽})=\surd\left(1+\tfrac{1}{1814}+\tfrac{1}{3136}-\tfrac{1}{462225}\right)$$
$$=1,0006416.=1+\tfrac{1}{1560}$$

wofür, ohne Bedenken, 1 gesetzt werden kann, weil $\frac{1}{1560}$, in Absicht auf SV oder die Grösse der Finsterniß, auch wenn V in E fällt, keine $\frac{1}{4}$ Minute eines Zolles, oder kaum eine halbe Secunde eines Grades austrägt. Der ganze Ausdruck aber wird.

$$\frac{SV.\text{ſ}p}{r}=(\text{ſ}P+\text{ſ}\lambda)\,.\,1,0001384-(1-0,0008556)\,\text{ſ☽}-\text{ſ}\omega.\text{ſ}p.$$

Und wenn wir

$$\text{ſ}\lambda=\tfrac{56}{38}\,\text{ſ}P$$
$$\text{ſ☽}=\tfrac{56}{215}\,\text{ſ}P$$

nehmen, so wird

$$\frac{SV.\text{ſ}p}{r}=\text{ſ}P+\text{ſ}\lambda-\text{ſ☽}+0,0005653.\text{ſ}P.$$

Und so ist $0,0005653.\text{ſ}P$ der $\frac{1}{1771}$ Theil der Mondparallaxe, und beträgt demnach höchstens nur 2 Secunden. Da nun dieses der gröste mögliche Unterschied ist, so können wir schlechthin

$$\frac{SV.\sin p}{r}=\text{ſ}\omega\,\text{ſ}P+\text{ſ}\lambda-\text{ſ☽}-\text{ſ}\omega.\text{ſ}p$$

oder

$$\frac{SV.\sin p}{r}=(\text{ſ}P-\text{ſ}p)\,\text{ſ}\omega+\text{ſ}\lambda-\text{ſ☽}$$

setzen. Und eben so wird auch

$$\cos\text{ſ}RHT=\text{ſ}\omega.\,\text{ſ}P+\text{ſ}\lambda-\text{ſ☽}$$

Da

Da endlich

$$\frac{SE.\,\text{ſ}p}{r} = \text{ſin}\,\odot$$

ist, so wird sich

$$SE:SV = \text{ſ}\odot : [\text{ſ}\omega(\text{ſ}P - \text{ſ}p) + \text{ſ}\lambda - \text{ſ}☽]$$

verhalten.

§. 159.

Wenden wir nun den Ausdruck

$$SV.\,\text{ſ}p = r\,\text{ſ}P.\,\text{ſ}\omega - r\,\text{ſ}p\,\text{ſ}\omega + r\,\text{ſ}\lambda - r\,\text{ſ}☽$$

auf die Figur an, so findet sich

$$r\,\text{ſin}\,\omega = TH$$

$$\frac{r\,\text{ſin}\,\lambda}{\text{ſ}P} = TC$$

$$\frac{r\,\text{ſin}\,☽}{\text{ſ}P} = CG$$

demnach

$$SV.\,\text{ſ}p = TH.(\text{ſ}P - \text{ſ}p) + TC.\,\text{ſ}P - CG.\,\text{ſ}P$$

§. 160.

Man ziehe nun SRg, SLc, ERn, so sieht man in g den Mittelpunct S, in n den Rand E von dem Rande des Mondes R, in c aber den Mittelpunct S von dem Mittelpunct L bedeckt, und es ist

$$SE:SV = gn:gH$$

Ferner ist

$$Tg:TG = Tc:TC = ST:SL = \text{ſin}\,P:(\text{ſ}P - \text{ſ}p)$$

und

$$\text{ſin}\,nRc : \text{ſ}\odot = \text{ſ}P:(\text{ſ}P - \text{ſ}p)$$

Hieraus ergiebt sich

$$ng = \frac{r}{\text{ſ}P - \text{ſ}p} \cdot \text{ſ}\odot$$

$$gc = \frac{r}{\text{ſ}P - \text{ſ}p} \cdot \text{ſ}☽$$

$$Tc = \frac{r}{\text{ſ}P - \text{ſ}p} \cdot \text{ſ}\lambda$$

§. 161.

Da auch

$$TA = \frac{r}{\text{ſ}P - \text{ſ}p} \cdot (\text{ſ}P - \text{ſ}p)$$

so kann man $r = \text{ſ}P - \text{ſ}p$, demnach $\frac{r}{\text{ſ}P - \text{ſ}p} = 1$ setzen. Man kann aber auch statt der Sinus von ⊙, ☽, λ, P, p schlechthin nur die Winkel nehmen, und so wird

$AT = P - p$, $ng = \odot$, $gc = ☽$, $Tc = \lambda$

gemacht. Dabey ist nun kein Fehler der über den vorhin erwähnten $\frac{1}{1771}$ Theil von P oder AT gehe.

§. 162.

Es kömmt demnach bey der ortographischen Projection schlechthin nur auf den Winkel mHh an. Da nun $hHT = 90°$ ist, so ist

$$\text{cos}\, mHT = \text{sin}\, mHh$$

demnach

$$\text{sin}\, mHh = \text{ſ}\omega . \text{ſ}P + \text{ſ}\lambda - \text{ſ}☽$$

oder $\text{ſ}\, mHh \backsim HG$

wofür wir ohne Bedenken

$$hHm \backsim SV$$

und damit den Winkel $hHm = SHV$ setzen können,

können, welcher die in H gesehene Entfernung des Mondrandes vom Mittelpunct der Sonne ist. Nun ist hH auf HT senkrecht, und der Winkel hHm < 16′. Dieses hat den Erfolg, daß auch immer der Bogen mh dem Winkel hHm gleich ist. Hingegen mit der Perpendiculäre hp hat es eine andere Bewandtnis. Diese ist = hH. sin hHm. Setzt man demnach in der ortographischen Projection Hr = hp = hH. sin hHm, so ist r der Punct, wo die aus V durch R und h gezogene Linie eintrift; und der Zuschauer in r wird die Bedeckung eben so sehen, als der in h. Hieraus erhellet demnach, wie viel man vor- und nachgeben muß, wenn man für jeden Punct h die Bedeckung der Sonne vom Monde, vermittelst der ortographischen Projection, bis auf 2 Secunden eines Grades, das will sagen, so genau es auf einem Regalbogen möglich ist, bestimmen will.

§. 163.

Nun ist rH am größten, wenn H in T, und V in E fällt: denn alsdenn wird Hh = P − p, und hHm = 16′, welches ich hier für den Halbmesser der Sonne setze. Demnach wird, wenn man P − p = 61′ setzen, in diesem Fall rH = 61′. sin 16′ = 17″, welches, wenn es auch auf die Zeit des Anfanges und des Endes der Finsterniß ganz seinen Einfluß hat, keine 28″ Zeit beträgt; und für ½ Minute Zeit kann man

man in der ganzen Sache ohnehin nicht gut stehen. Für die Europäischen Länder, welche ohnehin nicht unter der Sonne, sondern näher gegen den Pol liegen, wird der Unterschied noch merklich geringer. Es ist übrigens auch c nicht vollkommen die ortographische Projection von dem Punct k. Da aber der Winkel CLc, auch wenn C in B fällt nur = p = 10″ ist, so wird der daher entstehende Fehler in die 96 mal geringer als der bey hHm, und hat demnach vollends nichts zu sagen.

§. 164.

Ich sehe also nicht, wie **La Caille** einen Fehler von 3 Minuten finden kann. Es bleibt aber noch ein Umstand zurücke, und dieser rührt von der sphäroidischen Figur der Erde her, wo die Axe um $\frac{1}{230}$ Theil kürzer ist als der Durchmesser des Aequators. Dieses giebt auf die Parallaxe von 61′ einen Unterschied von 16″, und ist daher weder mehr noch minder bemerkbar als der vorhergehende, ja, er hebt denselben, besonders zur Zeit der Aequinoctien, größtentheils auf, weil alsdenn TN den Aequator, und AB die Axe vorstellt. Da es aber nicht mehr Mühe macht die sphäroidische als die sphärische Erde ortographisch zu entwerfen, so kann der daherrührende Fehler ganz gehoben werden. Und da man, wenn man so genau gehen will, den vorhergehenden immer nachholen kann, so hat die ortographische Projection

alle

alle Zuverläßigkeit, die man von der Grösse eines Regalbogens erwarten kann.

§. 165.

Endlich könnte es vielleicht auch noch daran fehlen, daß man bey der ortographischen Projection die Bewegung des Mondes von der Sonne gleichförmig setzt, da doch der Mond seine Geschwindigkeit stündlich, ja augenblicklich ändert. Allein diese Besorgnis ist nicht so groß als sie scheint. Wir dürfen zu dem Ende nur die oben (§. 68) gegebene allgemeine Formel der stündlichen Bewegung vornehmen. In dieser geben alle Glieder, die nur mit der ersten Dignität von x multiplicirt sind, den gleichförmigen Theil der Bewegung des Mondes in x Stunden. Die mit x^2 und x^3 multiplicirten Glieder geben den ungleichförmigen Theil, auf den wir hier eigentlich sehen. Wenn wir unter diesen diejenigen weglassen, die selbst, wenn $x = 3$ Stunden ist, auf keine Secunde anwachsen, so sind die übrigen

$$= + 1,021\, x^2 \, f\, M - 0,376\, x^2 \, f\, 2E$$
$$- 0,140\, x^2 . f\, 2M + 0,155\, x^2 \, f(2E - M)$$

Es dauert aber keine Erdfinsterniß 6 Stunden. Wenn wir demnach $x = \pm 3$ setzen, so beträgt die Ungleichheit

$$= + 9{,}''189\, f\, M - 3,384\, f\, 2E$$
$$- 1,260\, f\, 2M + 1,395\, f(2E - M)$$

Und da sich hier $2E = 0$ setzen läßt, so wird

die

die Ungleichheit für 3 Stunden Bewegung

$$= 7{,}794'' \int M$$
$$- 1{,}260 \int 2\,M.$$

Für 2 Stunden ist sie nur

$$= + 3{,}464 \int M - 0{,}560 \int 2\,M$$

und für 1 Stunde nur

$$= 0{,}866 \int M.$$

Man kann sich demnach, wenn man so genau gehen will, dieser Formeln bedienen, um der Ungleichheit auf eine sehr leichte Art Rechnung zu tragen; und so ist auch diesem Anstande geholfen. Die Ungleichheit in dem increm. latit. horar. und so auch in der Parallaxe beträgt für 3 Stunden eine unerhebliche Kleinigkeit; und so bleibt die Mondbahn in der ortographischen Projection eine gerade Linie. Endlich beträgt die Aenderung der Axe V R (Fig. 6) für 3 Stunden Zeit ebenfalls so viel als nichts, besonders bey den Aequinoctien. Sie ist bey den Solstitien am grösten; und beträgt daselbst die 3 stündige Bewegung der Sonne 7′ 23″ = 0,002148 mit dem Sinus der Neigung der Ecliptic sin (23° 28′ 20″) = 0,3983 multiplicirt, demnach = 0,0008554 des Halbmessers, oder P — p = 61′ gerechnet, 3 Secunden, das will sagen, auf einen Regalbogen einen Punct. Aus allem erhellet demnach, daß die ortographische Projection von dem Fehler von drey Minuten, die ihr La Caille vorgeworfen, ganz frey ist, und daß

sie

sie, mit leichter Mühe, so zuverläßig gemacht werden kann, als man es verlangt.

XIV. Die Zeit der grösten Verfinsterung.

§. 166.

Die Finsterniß ist aller Orten am grösten, wenn der Mittelpunct des ☽ und der ☉ einander am nächsten sind. Diese kleinste Entfernung läßt sich bey der ortographischen Projection, durch Versuchen, sehr leicht und genau finden. Und dieses ist auch der Vorschlag, der gewöhnlich gegeben wird. Hingegen geht es dabey mit der Bestimmung der Zeit nicht so leicht, weil sich diese Entfernung in 2 bis 3 Minuten Zeit sehr wenig ändert. Die Sache muß demnach aus dem Differentialcalcul gefunden werden, und da verfällt man auf eine transcendente Formel, welche für den Fall, wo man für einen gegebenen Ort die Zeit der grösten Verfinsterung sucht, ohne unendliche Reihen oder andere Näherungsarten nicht aufgelöst werden kann. Hingegen läßt sie sich für einen ganzen Parallelcircul der Erde geometrisch construiren, wenn die Oerter darauf zu bestimmen sind, wo die gröste Verfinsterung zu einer fürgegebenen Stunde eintrift. Diese Construction werde ich nun in der zehnten Figur folgendermassen beschreiben.

§. 167.

§ 167.

Fig. 10. Diese Figur stellt eben die Finsterniß wie die fünfte Figur vor. Der Unterschied ist nur, daß der Parallelcircul von Berlin MTN hier ortographisch entworfen, als eine Ellipse erscheint, deren längere Axe M N, die kürzere m n ist. E V ist die scheinbare Mondbahn in Stunden getheilt. Auf M N beschreibt man den halben Circul MHN, und durch H wird die Linie H L auf die Mondbahn E V senkrecht gezogen, und es wird

$$LH = \frac{12}{3,14159\ldots} = \frac{42}{11}$$

einer Stunde der Mondbahn gemacht. Auf diese Art wird der Circul M H N in q L Q hinaufgerückt, so, daß H in L fällt, und L O mit HD parallel bleibt. Der Circul q L Q wird sodann in Stunden getheilt. Ferners trägt man n H, welcher der Unterschied der beyden halben Axen der Ellipse M n N ist, aus D in G und g, und theilt D G und D g nach den Sinus der Stundenbögen ein, welches, vermittelst des Circuls g F G, leicht geschehen kann. Und damit ist nun die Sache vorbereitet.

§. 168.

Soll nun z. E. gefunden werden, welcher Ort auf dem Berlinischen Parallelkreise in T um 4 Uhr nach Mittag die gröste Verfinsterung hat; so nimmt man die vierte Stunde auf

auf DG und auf den Bogen LQ, und zieht sie durch eine gerade Linie RS zusammen. Mit dieser Linie wird sodann TV parallel gezogen, und damit ist V der Mittelpunct des Mondes, zu der Zeit, wo der Mond aus T gesehen die Sonne am meisten bedeckt. Nun fällt V auf 5 Uhr 23′ nach der Berliner Uhr, in T aber ist es erst 4 Uhr. Demnach liegt der Ort T um 1 St. 23′ Zeit westlicher als Berlin, welches in Grade verwandelt $20\frac{3}{4}$ Grad giebt. Der Ort T fällt demnach mitten in Irrland auf dem Berlinischen Parallelcircul, von 52° $32\frac{1}{2}$′ Breite. Eben so verfährt man auch für jede übrigen Stunden. Man findet dadurch eigentlich nur den geringsten Abstand der Mittelpuncte. Man kann aber sodann ohne Mühe sehen, ob eine Finsterniß dabey möglich ist, weil dieser Abstand TV kleiner als die Summe der Halbmesser der ⊙ und des ☽ seyn muß. Für jede andere Parallelcircul muß die Construction besonders vorgenommen werden.

§. 169.

Die Linien RS sind unter sich von der parallelen Lage nicht sehr verschieden, und wenn die Finsterniß im Aequinoctio ist, so wird der Unterschied am geringsten, weil alsdann Dn = o ist, und demnach G, N und S, T zusammen fallen. Dieser Umstand von der fast parallelen Lage der Linien RS macht, daß man die Aufgabe umkehren, und durch eine sehr geschwinde Näherung finden kann, um wie viel Uhr die Finsterniß an einem fürgegebenen Orte am größten ist. So z. E. für Berlin, wo T und V auf eine Zeit treffen müssen, sieht man sogleich, daß dieses gegen $5\frac{1}{4}$ Uhr geschehen müsse. Man sucht demnach welcher Ort auf dem Berlinischen Parallelkreise um $5\frac{1}{4}$ Uhr die gröste Verfinsterung hat, und findet, daß dieser Ort nur $2\frac{1}{2}$ Minuten östlicher liegt. Da nun der Mondschatten, besonders gegen 6 Uhr, vielfach schneller fortläuft, so darf man nur diese $2\frac{1}{2}$ Minuten von halb 6 Uhr abziehen, und die gröste Verfinsterung zu Berlin wird auf 5 Uhr $27\frac{1}{2}$ Minuten fallen. Für andere Oerter muß man die Stunden auf E V dergestalt ändern, als wenn die Figur für dieselben construirt worden wäre, oder werden sollte.

§. 170.

Dieses Verfahren habe ich vermittelst des Differentialcalculs gefunden. Es läßt sich aber auch bloß aus der Zusammensetzung der Bewegung herleiten. Man bestimmt die Geschwindigkeit des Puncts T nach seiner tangentialen Richtung durch den Raum, den derselbe mit dieser Geschwindigkeit in einer Stunde durchlaufen könnte. Dieses giebt die erste Seite des Parallelogramms. Die andere Seite giebt die stündliche Bewegung des Mondes auf E V, welche aber rückwerts getragen wird. Die Diagonale giebt sodann die relative Bewegung des

des Puncts T in Beziehung auf den stehenbleibenden Mond, und V T wird auf dieser Diagonale senkrecht seyn. Denn es sey in der eilften Figur T t die Geschwindigkeit des Puncts Fig. 11.
T in seinem Parallelkreise, T λ die Geschwindigkeit des Monds in seiner Bahn, welche hier rückwerts genommen wird. Man vollende das Parallelogramm T λ d t und ziehe die Diagonale T d, so stellt diese die relative Geschwindigkeit und Bewegung des Puncts T, in Beziehung auf den Mond, vor. Zieht man demnach T V auf T d senkrecht, so wird V der Punct seyn, wo der Mond in seiner Bahn V E die kleinste Entfernung von T hat.

XV. Die Zuverläßigkeit bey den Finsternissen.

§. 171.

Wenn es überhaupt nur die Frage ist, ob eine Finsterniß seyn werde, so hat es damit keine Schwürigkeit, so oft die Finsterniß, nach der Berechnung, eine merkliche Grösse hat. Ich habe in der ecliptischen Tafel gezeigt, daß man damit ausreicht, wenn man dabey schlechthin nur die mittlern Bewegungen gebraucht, und allenfalls auf eine von der Jahrszeit abhängende kleine Verbesserung mit acht hat. Hingegen giebt es Umstände, wo mehrere Schärfe gebraucht werden muß, und wobey auch die genauesten Berechnungen fehl schlagen können. So z. E. wenn eine Sonnenfinsterniß total ist, so sucht man, besonders wenn sie auf Europa fällt, die Oerter zu bestimmen, wo sie total gesehen wird. Hiebey wird nun der geringste Fehler in den Tafeln merklich; und wer diese Oerter mit allzuvieler Zuverläßigkeit angeben würde, der würde sich und die Astronomie dem Gelächter, selbst des gemeinen Mannes, bloß geben, und von denen, die einer solchen Erscheinung zu Gefallen eine Reise vergeblich vornehmen würden, nichts wenigers als Dank und Segen erhalten. Eben so verlangt man von den Tafeln die äusserste Genauigkeit, wenn man vermittelst derselben und der Beobachtung die geographische Länge des Ortes finden will, wo eine Finsterniß beobachtet worden.

§. 172.

Soll nun hiebey der Grad der Zuverläßigkeit bestimmt werden, so kömmt es fürnehmlich auf den Fehler der Länge und der Breite des Mondes zur Zeit der Finsterniß an. Der Fehler in der Länge kann zuweilen auf eine Minute eines Grades anwachsen, und allenfalls, wiewohl nur selten, etwas grösser seyn. Dieses versteht sich von den Mayerschen Tafeln. Denn die, so vor denselben herauskamen, fehlen wohl zuweilen 8 bis 10 und mehr Minuten, und sind daher um eben so viel unzuverläßiger.

Dazu kömmt nun noch, daß man bey der Beobachtung selbst gar leicht eine Minute fehlen kann. Es kann und muß aber dieser Fehler nicht auf Rechnung der Tafeln gesetzt werden.

§. 173.

Mit der Breite des Mondes hat es eine andere Bewandtnis. Sie hängt bey den Finsternissen dergestalt von dem Orte des ☊ ab, daß, wenn man diesen Ort und den Ort der Sonne und die Neigung der Mondbahn gegen die Eccliptic weiß, die Grösse der Finsterniß, oder vielmehr der geringste Abstand der Mittelpuncte dadurch, auch ohne Rücksicht auf die Zeit, gefunden werden kann. Und dieses ist auch der Grund, warum die schlechtesten Tafeln, in Absicht auf die Breite des Mondes, noch so ziemlich zusammen treffen, so sehr sie auch, in Ansehung der Zeit, von einander abgehen. Aus eben diesem Grunde liessen sich die Finsternisse, in Absicht auf ihre Grösse, auf der eccliptischen Tafel vorstellen, ungeachtet dieselbe nach den mittlern Bewegungen construirt ist, welche doch zuweilen die Finsterniß bis auf 14 Stunden früher oder späther angeben, als sie wirklich zutreffen.

§. 174.

So lange man die in der 13ten Tafel vorgestellte Ungleichheit in der Bewegung des Knoten nicht wuste; so konnte hieraus ein Fehler entstehen, der aber, in Absicht auf die Breite des ☽ sich nur auf 1 Minute belaufen könnte. Denn da diese Ungleichheit sich nur auf 10′ 18″ beläuft, und daher das argum. latit. nur um soviel zu groß oder zu klein wird, so erhellet aus der funfzehnten Tafel, wo für 1 Grad höchstens nur 5′ 14″ Breite gerechnet wird, daß der daher entstehende Fehler sich nur auf 51″ 48‴ und daher nicht ganz auf eine Minute belaufen kann. Die Neigung der Mondbahn und den Ort des ☊ hatte man vorzeiten fürnemlich aus den Finsternissen geschlossen, und erstere, als eine runde Zahl, von 5 Graden genommen. Die funfzehnte Tafel giebt sie für die Syzigien nur um 18″ grösser. Und dieses beträgt für die Finsternisse, die 5 und mehrmal näher bey dem Knoten sind, eine unbemerkbare Kleinigkeit.

§. 175.

Bis dahin gieng demnach alles richtig. Es hat aber der Mondlauf auch in Absicht auf die Breite solche Ungleichheiten, wobey die Rechnung nicht mehr so einfach bleibt. **Mayer** begnügt sich zwar mit den zwo oben (§. 43) angegebenen Gleichungen. Und diese mögen wohl überhaupt deswegen einfacher seyn, weil er dabey den wahren Ort der Sonne, des Mondes und des Knoten gebraucht. Ich habe aber, um den Unterschied zu finden, aus diesen beyden Gleichungen diejenige hergeleitet,

wo

wo die Breite des Mondes durch die mittlern Bewegungen vorgestellet wird, und diese war lange nicht mehr so einfach. Es sey, alles nach den mittlern Bewegungen,

$$☽ - ☊ = \lambda$$
$$☽ - ☉ = E$$
$$\text{anom. med. } ☽ = M$$
$$\text{anom. med. } ☉ = a$$

so ist nach der darüber angestellten Rechnung, die Breite des Mondes in Secunden eines Grades ausgedrückt

$$\begin{aligned}
= 18484 . \sin\lambda & - 1015\, s(\lambda + M) & + 20\, s(2E - \lambda - 2M) \\
- 12\, s\, 3\lambda & + 1033\, s(\lambda - M) & + 19\, s(2E - \lambda + a) \\
+ 626\, s(2E - \lambda) & + 63\, s(\lambda - 2M) & - 12\, s(2E - \lambda - a) \\
& + 118\, s(2E + \lambda) & - 12\, s(4E - \lambda - M) \\
& - 227\, s(2E + \lambda - M) & \\
& - 169\, s(2E - \lambda + M) &
\end{aligned}$$

wo noch eine Menge von kleineren Gliedern, die unter 12″ sind, weggelassen worden. Solche kleinere Glieder sollten sich nun auch bey der Mayerschen Gleichung (§. 43) befinden. Allein Mayer sagt ausdrücklich, daß er aus Ermanglung tauglicher Beobachtungen, daran nicht habe denken können, und daß er daher für 1 Minute Fehler nicht gut stehe. Indessen glaubt er, daß diese Minute sich bey den Finsternissen auf 20″ herunterbringen lasse, oder nicht beträchtlicher sey.

§. 176.

Nun wird bey der Projection der Erdfinsternisse der Halbmesser der Erde, welcher 860

 Meilen

Meilen ist, durch den Unterschied der Parallaxen P — p vorgestellt (§. 161). Dieser Unterschied, wenn p = 10″ genommen wird, ist, vermög der achtzehnten Tafel, dergestalt veränderlich, daß er von 53′ 47″ bis auf 61′ 19″ in den Syzigien anwachsen kann. Es ist demnach

$$53' \, 47'' : 860 = 1' : 15,99$$
$$61 : 19 : 860 = 1 : 13,65$$

Und so beträgt 1 Minute Fehler in der Projection einen Fehler von $13\frac{2}{3}$ bis 16 Meilen. Ist demnach die Mayersche Bestimmung der Breite bis auf 20″ in den Finsternissen richtig, so beträgt dieses eine Ungewißheit von nicht mehr denn 5 Meilen. Es ist aber dieses nicht von der Erdfläche, sondern von dem plano projectionis zu verstehen: denn auf der Erdfläche selbst nimmt der Fehler beynahe in umgekehrter Verhältnis des Sinus der Sonnenhöhe zu.

§. 177.

Es ist ferner bey den Erdfinsternissen der Halbmesser des Schattens = semid. ☽ — semid. ⊙. Nimmt man demnach aus der 18 und 19ten Tafel den grösten Halbmesser des ☽ = 16′ 46″, und aus der 20sten Tafel den kleinsten Halbmesser der ⊙ = 15′ 47″, so ist der Unterschied = 0′ 59″. Und dieses ist demnach der gröste mögliche Halbmesser des Schattens. Da derselbe alsdann statt findet, wenn P = 61′ 29″ ist, demnach auf 1 Minute

nute Fehler $13\frac{2}{3}$ Meilen gerechnet werden, so ist

$$60'' : 59'' = 13,65 : 13,42$$

Demnach ist auf dem Projectionsplan die halbe Breite des Schattens von $13\frac{2}{5}$ Meilen. Diese Breite wird ebenfalls in umgekehrter Verhältnis des Sinus der Sonnenhöhe grösser.

§. 178.

Die Folge, die wir hieraus ziehen können, ist, daß in denen Fällen, wo der Schatten am grösten ist, diejenigen Oerter, welche nach der Rechnung der Mittelpunct des Schattens trift, die Sonne ganz gewis völlig von dem Monde bedeckt sehen. Denn wenn auch der Fehler wegen der Breite in Projectionsplan sich auf 10 Meilen belaufen sollte, so liegen solche Oerter dennoch noch $3\frac{2}{5}$ Meilen tief im Schatten, und sehen folglich die Sonne ganz verfinstert. Um so viel mehr noch, wenn der Fehler sich höchstens nur auf 5 Meilen beläuft.

§. 179.

Ist hingegen semid. ☽ < semid. ⊙, so erscheint die Sonne ringförmig. Der gröste mögliche Ring ist, wenn der Mond in der Erdferne, die Sonne aber in der Erdnähe ist: denn alsdenn ist

semid. ☽ = 14′ 43″
semid. ⊙ = 16 20

der Unterschied = — 1 37

Da nun alsdann 1 Minute Fehler 16 Meilen beträgt, so ist

$$60'' : 16 \text{ M.} = 97'' : 25,87 \text{ M.}$$

Es sind daher die Grenzen, wo man den größten möglichen Ring sehen kann, fast doppelt weiter als die Grenzen der größten möglichen Verfinsterung. Und um so viel Zuverläßiger kann, wer den Ring sehen will, die Reise nach dem nächsten Orte, wo nach der Rechnung der Mittelpunct des Halbschattens durchgeht, anstellen.

§. 180.

Wenn hingegen der semid. ☽ und ☉ ganz, oder beynahe gleich sind, so wird auch dieser Grad von Zuverläßigkeit vermindert, weil es dabey geschehen kann, daß der Halbmesser des Schattens keine halbe Meile breit ausfällt, die Tafeln aber um 5 Meilen fehlen können. Man kann sich sodann begnügen, die Finsterniß, so fern man sie an seinem Wohnorte sieht, zu beobachten.

§. 181.

Die Zolle der Verfinsterung sind zwölfte Theile des Sonnendurchmessers, oder sechste Theile des Halbmessers der Sonne. Nun verändert sich der Halbmesser der Sonne von $15' 47''$ bis zu $16' 20''$. Dieses giebt für die Breite von 6 Zollen

$$1' : 15' 47'' = 13,65 \text{ Meil.} : 215,44 \text{ Meil.}$$
$$1' : 16 \quad 20 = 15,99 \qquad : 261,17$$

denn

demnach für 1 Zoll 35, 91 und 43, 53 Meilen. Inner diesen Grenzen ist demnach auf dem Projectionsplan die Grösse eines Zolles der Verfinsterung veränderlich. Kann sich nun der Fehler der Tafeln auf 5 Meilen belaufen, so ist die Bestimmung der Grösse der Finsterniß um $\frac{1}{7}$ oder $\frac{1}{8}$ Zoll unzuverläßig.

§. 182.

Was endlich die Fehler betrift, so von der Länge des Mondes abhängen, so betreffen sie die Zeit und etwann auch die geographische Bestimmung der Länge der Oerter, wo die Finsterniß beobachtet wird. Wenn hiebey die Unzuverläßigkeit der Tafeln auf 1 Minute eines Grades gesetzt wird, so beträgt dieses ungefehr 2 Minuten Zeit, weil die stündliche Bewegung des Monds von der Sonne zwischen 27 und 36 Minuten fällt. Dieser Fehler hat demnach eben den Erfolg, als wenn die Tafeln für einen Ort berechnet wären, welcher um 2 Minuten Zeit östlicher oder westlicher liegt. Der Irrthum oder die Unzuverläßigkeit in Bestimmung der geographischen Länge, trägt demnach $\frac{1}{2}$ Grad aus; dazu kann aber noch $\frac{1}{2}$ Grad kommen, sofern man in der Beobachtung selbst um 1 Minute fehlen kann.

XVI. Tafeln für den Mondlauf ausser den Syzigien.

§. 183.

Den bisher beschriebenen Tafeln für die Syzigien, habe ich noch einige andere beygefügt, um den Mondlauf auch ausser den Syzigien zu berechnen, ohne daß dazu besondere Epochen nöthig wären. Man verwandelt nemlich die Zeit, für welche der Mondlauf berechnet werden solle, in die Bissextilform und alten Calender. Sodann findet man aus der ersten und zweyten Tafel die Zeit und Umstände des nächstvorhergehenden mittlern ecliptischen Neumonds, welches, wie wir oben (§. 29.30) gesehen haben, durch eine blosse Addition geschieht. Diese Zeit wird von der fürgegebenen abgezogen, damit man für jede Tage, Stunden, Minuten ꝛc. aus der zehnten Tafel die mittlere Bewegungen addiren, und dadurch die Umstände für die fürgegebene Zeit finden könne.

§. 184.

Da man aber dadurch nur den mittlern Ort des ☽, der ☉ ꝛc. findet, so müssen diese erst noch auf den wahren Ort reducirt werden. Dazu dienen nun folgende Tafeln.

1°. Für die Sonne, wird so wie oben die Tab. 12 gebraucht.

2°. Für die Gleichung der Zeit, die nächstfolgende Tab. 13, und was diese austrägt, wird aus der Tab. 10 nachgeholt.

3°. Für den wahren Ort des ☊ die Tab. 13.

4°. Für den wahren Ort des Monds in seiner Bahn die Tab. 24, 25, 26, 27, 28, welche nach den Formeln des §. 49. berechnet sind.

5°. Für die Reduction des Monds auf die Ecliptic die Tab. 14, wie oben.

6°. Für die Breite des Monds die Tab. 29, welche die zwo Mayerschen (§. 43) vorstellt, weil die Formeln des §. 175, ohne Noth, mehrere Tafeln würden erfordert haben.

7°. Für die Parallaxe die Tab. 30, welche ebenfalls die 3 Mayerschen (§. 44) vorstellt, weil sie für die mittlern Bewegungen kaum um 1 Secunde verschieden sind.

8°. Für die stündliche Bewegung des Monds in seiner Bahn die Tab. 31, welche aus den Formeln des §. 68. 70 berechnet ist.

9°. Für die stündliche Veränderung der Breite, die Tab. 32. Diese Tafel habe ich aus der Formel des §. 175 hergeleitet, und gefunden, daß die stündliche Veränderung der Breite

$$\begin{aligned} &= 178'' \cos\lambda && + 3\cos(2E+\lambda) \\ &+ \ 5\cos(2E-\lambda) && - 4\cos(2E+\lambda-M) \\ &- 19\cos(\lambda+M) && - 3\cos(2E-\lambda+M) \end{aligned}$$

ist.

10°.

10°. Für den horizontalen Halbmesser des Mondes, vermittelst der horizontalen parall. aequatoria die Tab. 19, wie oben.

11°. Für die stündliche Bewegung und den Halbmesser der Sonne die Tab. 20, wie oben.

12°. Für die Declin. ang. eccl. und reduct. ad eccl. die Tab. 21, 22, 23, wie oben.

Die Gleichung, so von dem Fortrücken der Nachtgleichen herrührt, habe ich weggelassen. Sie beträgt höchstens 17″ oder 18″, und kann daher mit unter die übrigen weggelassenen kleinern Artickel (§. 48) gerechnet werden. Sie nimmt indessen zu und ab, wie der Sinus der doppelten Länge des ☊, indem sie $= -18''$ sin 2 ☊ ist. Und so wird sie, wenn die Finsternisse um die Zeit der Nachtgleichen eintreffen, auf nichts heruntergebracht.

§. 185.

Da ich die Tafeln von No. 1 bis No. 23 nach der Ordnung auf einander folgen lassen, wie sie bey Berechnung der Finsternisse am bequemsten ist, so konnten sie nicht zugleich auch für die übrigen Umstände des Mondlaufes angeordnet werden. Ich habe demnach in dem vorhergehenden §. die Ordnung angegeben, wie sie aufzuschlagen sind, wenn der Mond ausser den Syzigien ist. Man sieht daraus, daß sie von Tab. 24 bis Tab. 32 dennoch auf einander folgen, und nur nach Tab. 28 die Tab. 14 nach-

nachgeschlagen werden muß. Ich werde nun den Gebrauch durch einige Beyspiele erläutern.

XVII. Berechnung des wahren Orts der Sonne und des Mondes ausser den Syzigien.

§. 186.

Es geschieht sehr oft, daß man, ohne Rücksicht auf den Mondlauf, den wahren Ort der Sonne, ihre Inclination, die Gleichung der Zeit ꝛc. zu wissen verlangt. Ich werde demnach damit anfangen, weil die Tafeln dazu ebenfalls eingerichtet sind. Es muß ohnehin auch bey Berechnung des Mondlaufes, wenn die wahre Zeit fürgegeben, diese vorerst in die mittlere verwandelt werden. Laßt uns demnach z. E. setzen, es sey für 1769 den 3ten Brachmonat, neuen Calenders, Abends um 8 Uhr, Berliner Uhr und wahre Zeit, der wahre Ort der Sonne zu suchen.

§. 187.

Man sehe dieses erstlich als mittlere Zeit an, und reducire sie auf die Pariser Uhr, welche nach Tab. 4 um 44′ 25″ späther geht. Dieses steht so

1769. Jun.	3	8	0	0
		—	44	25
1769. Jun.	3	7	15	35

Diese

Diese Zeit verwandle man nach der Regel am Ende der Tab. 2 in die Bissertilform, so müssen 6 Stunden, und wegen des alten Calenders 11 Tage, abgezogen werden. Und dann findet sich in der dritten Tafel die Anzahl der Tage

1769. 144 T. 1 St. 15′ 35″

Für die nunmehr so reducirte Zeit lassen sich nun die Tafeln gebrauchen.

§. 188.

Zu diesem Ende nimmt man aus der ersten Tafel die dieser Zeit nächstvorhergehende Epoche nebst den mitlern Ort der Sonne und ihrer mittlern Anomalie

	T.	St.	′	″	s	o	′	″	s	o	′	″
1759 —	23	5	7	1	8	27	33	27	5	18	44	32

Zieht man nun 1759 von 1769 ab, so bleiben 10; und da hier die Tage vom Ende des Jahrs genommen worden, so schlägt man in der zwoten Tafel den zehnten Jahrgang auf, wo man sogleich den Neumond No. 117 nehmen, und die Zeit und Bewegung der Sonne ausschreiben kann, welches so steht

	167	19	53	40	5	15	29	20	5	15	19	1

Diese Zahlen werden zu denen von der Epoche addirt, und so findet sich die Zeit dieses mittlern Neumondes und der Sonnenlauf

1769 +	144	14	46	39	2	13	2	47	11	4	3	33

Diese Zeit wird von der fürgegebenen

1769 + 144 1 15 35

abgezogen, und so bleibt

— 0 13 31 4

Um

Um so viel ist demnach der mittlere Neumond später als die fürgegebene Zeit; und was dieses nach der zehnten Tafel austrägt, muß von dem für den Neumond gefundenen Ort der Sonne abgezogen werden. Demnach für

T. St. ′ ″	ſ ° ′ ″	ſ ° ′ ″
— 13 0 0	— 0 0 32 2	— 0 0 32 2
— 31 0	— 1 16	— 1 16
— 4	0	0
— 13 31 4	— 0 0 33 18	— 0 0 33 18

zieht man diese Zahlen wirklich von

1769 + 144 14 46 39	2 13 2 47	11 4 3 33

ab, so bleibt

1769 + 144 1 15 35	2 12 29 29	11 3 30 15

Dieses giebt in der 11. Tafel die Gleichung des Mittelpuncts der Sonne + 50 40

demnach den wahren Ort der Sonne

2 13 20 9

§. 189.

Dabey würde es sein Bewenden haben, wenn die fürgegebene Zeit, mittlere Zeit wäre. Da sie aber wahre Zeit ist, so findet sich aus der zwölften Tafel

für an. med. ⊙ 11^s $3^\circ\ 30'\ 15''$ - - — $3'\ 22''$

für ⊙ ver. 2 13 20 29 + 5 36

+ 1 16

um so viel geht die wahre Zeit der mittlern vor. Nun ist nach der zwanzigsten Tafel für

an. med. ⊙ $11^s\ 3^\circ\ 30'\ 15''$ horar. ⊙ — $2'\ 24''$

und dieses giebt für $1' 28''$ Zeit $3''$ Bewegung, und um so viel muß der gefundene Ort der Sonne $2^s 13° 20' 9''$ vermindert werden. Er ist demnach
2 13 20 6

§. 190.

Die ganze Rechnung nach der vorläufigen Reduction der Zeit (§. 187) steht folgender massen

		☉	anom. ☉
1769			
1759	T. St. ′ ″	s ° ′ ″	s ° ′ ″
	— 23 5 7 1	8 27 33 27	5 18 44 32
10	167 19 53 40	5 15 29 20	5 15 19 1
☌☉☽.	144 14 46 39	2 13 2 47	11 4 3 33
	144 1 15 35		
	— 13 31 4		
	— 13 0 0	— 32 2	— 32 2
	— 31 0	— 1 16	— 1 16
	— 4	— 0	— 0
		— 33 18	— 33 18
		2 12 29 29	11 3 30 15
	— 3 22	+ 50 40	
	+ 5 38		
		2 13 20 9	
	+ 1 16	— 3	
		2 13 20 6	

§. 191.

Diese Rechnung kann auf mehrerley Arten gemacht werden. So z. E. hatte statt des Neumondes No. 117 ein jeder anderer aus dem

dem zehnten Jahrgange genommen werden können. Ich habe diesen gewählt, weil er der nächste ist. Man nehme aber z. E. den Neumond No. 113, so steht die Rechnung folgendermassen.

1769				
1759	−23 5 7 1	8 27 33 27	5 18 44 32	Tab. I.
10	49 16 57 28	1 19 3 43	1 18 53 45	T.II.No.113
	26 11 50 27	10 16 37 10	7 7 38 17	
	144 1 15 35			
	+ 117 13 25 8			
	+ 90 0 0 0	2 28 42 30	2 28 42 14	
	27 0 0 0	26 36 45	26 36 40	Tab. X.
	13 0 0	32 2	32 2	
	25 0	1 2	1 2	
	8	0	0	
		3 25 52 19	3 25 51 58	
		2 12 29 29	11 3 30 15	
Tab. XII.	— 3 22	+ 50 40	- - - -	Tab. XI.
	+ 5 38	2 13 20 9		
	+ 2 16	— 3	Tab. XX.	
		2 13 20 6		

Da hier der Neumond No. 113 von der fürgegebenen Zeit um 117 Tage, 13 St. ꝛc. entfernt ist, so müsten für diesen grössern Unterschied auch mehr Zahlen aus der zehnten Tafel ausgeschrieben werden, als in dem erstern Fall. Indessen thut man, wegen etwann zu besorgender Druck- oder Rechenfehler, immer gut, wenn man den Ort der Sonne auf zweyerley Arten berechnet.

 §. 192.

§. 192.

Die Berechnung des wahren Orts des Mondes, wird, wegen der mehrern Verbesserungen des mittlern Ortes, etwas weitläuftiger. Man gebraucht dazu die Tab. 24 . . 32. Um diese Verbesserungen anfangs besonders zu erläutern, werde ich die oben (§. 124) berechneten Data aus dem zweyten Beyspiele gebrauchen. Diese sind für die Zeit des wahren Vollmonds

long. ☉ med.	6	9	46	6	= ☉
an. med. ☉	3	0	42	8	= a
long. med. ☽	0	3	43	17	= ☽
an. med. ☽	10	6	23	29	= M
long. med. ☊	6	0	58	21	= ☊

Aus diesen sucht man erstlich

E = ☽ — ☉ =	5	23	57	11
☉ — ☊ =	0	8	47	45
λ = ☽ — ☊ =	6	2	44	56

demnach

2 E =	11	17	54	22
4 E =	11	5	48	44
2 λ =	0	5	29	52

Dieses wird vorläufig berechnet, damit man sodann die Argumente durch blosses addiren und subtrahiren daraus finden, und die denselben entsprechende Verbesserungen oder Gleichungen ausschreiben könne, wie folgt:

Argu-

Argumente		Verbesserungen		
M =	10 6 23 29	+ 4 51 45	- - - -	Tab. 24.
E =	5 23 57 11	- - - -	— 0 8 43	Tab. 25.
2E — M =	1 11 30 53	- - - -	— 0 50 10	Tab. 26.
a =	3 0 42 8	+ 11 20	- - - -	Tab. 27.
a + M =	1 7 6 —	- - - -	— 1 3	T. 28. Col. 1
a — M =	4 24 19 —	- - - -	— 1 24	- - - Col. 2
M + 2E =	9 24 18 —	+ 2 39	- - - -	- - - Col. 3
M — E =	4 12 26 —	- - - -	— 17	- - - Col. 4
2(M — E) =	8 24 52 —	+ 3 29	- - - -	- - - Col. 5
4E — M =	0 29 25 —	- - - -	— 26	- - - Col. 6
2E — a =	8 17 12 —	+ 2 26	- - - -	- - - Col. 7
a + 2E - M =	4 12 13 —	- - - -	— 34	- - - Col. 8
a - 2E + M =	1 19 11 —	- - - -	— 2 57	- - - Col. 9
M — 2λ =	10 0 54 —	+ 49		
2(⊙ - ☊) =	0 17 35 —	- - - -	— 14	
Summa		+ 5 12 28	— 1 5 48	
		— 1 5 48		
		+ 4 6 40		

Nun war

☽ m = 0 3 43 17

demnach ☽ v = 0 7 49 57

Es war aber in dem zweyten Beyspiele

⊙ v = 6 7 50 23

demnach ⊙ v — ☽ v = 6 0 0 26

Dieser kleine Unterschied von der wahren Oppositione in orbita hätte = 0 seyn sollen. Es trift aber sehr selten zu, daß die Formeln (§. 47. 61) bis auf 1 Secunde übereinstimmen, weil bey jeder einige kleinere Artickel weggelassen worden, für die man ohnehin nicht gut stehen kann, und die die Rechnung, ohne sie zuverläßiger zu machen, nur verlängern würden (§. 48. 49. 56). Nach den Formeln (§. 36-41) das ist, nach den Mayerschen Tafeln finde ich für eben die Zeit den Ort des Mondes in orbita

$$L''' = 0\ 7\ 50\ 26$$

welcher von

$$\odot v = 6\ 7\ 50\ 23$$

oder von der ☍ in orbita nur um 3″ abgeht. Ueberhaupt sind die für die Syzigien besonders herausgebrachte Formeln (§. 61) zuverläßiger als die übrigen, und, aus gewissen Betrachtungen, zuverläßiger als die Mayerschen Tafeln selbst, ungeachtet sie aus diesen hergeleitet sind. Denn für die Zeit der wahren Syzigien werden viele von den Gleichungen, die Mayer allerdings nicht bis auf einzelne Secunden bestimmen konnte, vollends $= 0$, und damit fällt das Unzuverläßige von ihrer Bestimmung weg. Dahin gehört die sehr beträchtliche Gleichung (§. 41), welche, wie ich (§. 53) gezeigt habe, zur Zeit der wahren Syzigien $= 0$ wird.

§. 193.

Ich werde nun noch ein vollständiges Beyspiel anführen, und dieses ist unter denen am Ende vorkommenden das fünfte. Anno 1783 den neunten Hornung Abends gegen 7 Uhr, Berliner Uhr neuen Calenders, tritt der Mond vor die Pleiaden und bedeckt sie. Für diese

Zeit

Zeit verlangt man den wahren Ort und jede Umstände des Sonnen- und Mondlaufes zu wissen. Diese Zeit ist erstlich alten Calenders und Bissextilform

1783, 29 T. 13 St. 0 0
— 44 25 diff. merid.

1783, 29 = 12 = 15 35

Wir wollen sie als mittlere Zeit gelten lassen, und erstbemeldte Umstände berechnen.

§. 194.

Man sucht hiebey Anfangs wiederum den nächsten mittlern eccliptischen Neumond, nach den zwo ersten Tafeln. Dieser fällt auf

1783. 51 T. 7 St. 34′ 52″

demnach um

21 = 19 = 19 17

später als die fürgegebene Zeit. Für diesen Zwischenraum werden aus der zehnten Tafel die mittlern Bewegungen ausgeschrieben, und die Summen davon von den für den mittlern Neumond gefundenen Datis subtrahirt, bey dem ☊ aber, weil seine Bewegung rückwerts geht und daher negativ ist, addirt. Damit findet sich für die fürgegebene Zeit

long. med. ☊ = ☊ = 11 29 55 7
long. med. ☉ = ☉ = 10 19 42 2
An. med. ☉ = a = 7 10 27 52
long. med. ☽ = ☽ = 1 23 52 50
An. med. ☽ = M = 11 5 38 43

Dieses alles wird auf der obern Hälfte des Blatts angeordnet, wie man es in dem Beyspiele sieht. Man kann auch sogleich in der eilften und dreyzehnten Tafel die Gleichung des Mittelpuncts der Sonne und des ☊ hinschreiben, um den wahren Ort der

$$\odot v = 10\ 20\ 58\ 21$$

$$☊' = 11\ 29\ 48\ 27$$

zu haben. Und damit lassen sich ebenfalls Tab. 12, 21, 22, 23 die Gleichung der Zeit, die Declination, die Ascens. rect. und der ang. eccl. finden. Ich habe es aber, um den Raum zu spahren, in dem Formular des Beyspiels weggelassen.

§. 195.

Noch fehlt die Gleichung, wodurch der mittlere Ort des Mondes in den wahren verwandelt wird. Diese findet sich auf der vordern Hälfte des Blatts unten berechnet. Alle Argumente sind, wie sie nach Tab. 24 - - 28 erfordert werden, der Ordnung nach angeführt, die Gleichungen in zwo Columnen beygeschrieben, und die Tafeln, woraus sie genommen, mit angemerkt. Die Gleichung ist demnach $+ 2° 53' 25''$, und giebt den wahren Ort des ☽ in orbita

$$L''' = 1\ 26\ 46\ 15.$$

§. 196.

§. 196.

Aus ☉ v, ☊, L‴ werden sodann die Argumente nach Tab. 14 und 29 formirt, um die Reduction des ☽ auf die Ecliptic — 6′ 21″ und die Breite des ☽ = 4° 25′ 22″ zu erhalten. Dieses findet sich mitten auf der letzten Hälfte des Blatts.

§. 197.

Die Parallaxe folgt gleich darauf. Sie gebraucht nach Tab. 29. drey von den bereits für die Gleichung des Mondes berechnete Argumente M, 2 E — M und E; und damit findet sie sich = 54′ 28″, welches nach Tab. 19 den Halbmesser des Mondes = 14′ 51″ giebt. Und damit ist dieses auch abgefertigt.

§. 198.

Noch bleibt die stündliche Bewegung des Mondes sowohl in seiner Bahn als nach der Breite. Erstere wird nach Tab. 31 berechnet, und fordert meistens die bereits für die Gleichung des Monds gefundene Argumente, nur daß zu einigen 6 oder 3 Zeichen addirt werden, welches schlechthin wegen der dadurch erhaltenen geschmeidigern Einrichtung der Tafel erfordert wird. Die Argumente, und die damit aus den Tafeln No. 31 genommene Bestimmungsstücke der stündlichen Bewegung des ☽ in seiner Bahn, finden sich in dem Beyspiel der Ordnung nach angeführt, und geben den horar. ☽ in orbita $= 29' 46''$.

§. 199.

Das incr. horar. latit. und dessen Argumente und Berechnung steht neben bey. In allen Argumenten kömmt $\lambda =$ ☽ — ☊ vor, und alle werden aus den mittlern Bewegungen gefunden. Man sieht auch leicht, daß 2 E, 2 E — M bereits unter den Argumenten für die Länge des Mondes steht, und nicht noch einmal berechnet werden darf. Damit findet sich nach Tab. 32 das incr. latit. horar. $= + 1' 26''$, welches, da es positiv ist, nach Norden gerechnet wird, so wie auch die ebenfalls positive Breite.

§. 200.

Diese letzten Argumente, das erste davon ausgenommen, hätten auch schlechthin nur in Zeichen und Graden berechnet werden können, wiewohl sie in dem Beyspiel die meisten übrigen bis auf Minuten berechnet sind. Eine ähnliche Abkürzung läßt sich auch mit den letzten Argumenten für den horar. ☽ vornehmen, welches aber, da sie fast nur abgeschrieben werden, und auch dieses unterbleiben kann, nicht der Mühe lohnt.

§. 201.

Da Anno 1783 die Länge des hellen Sterns der Pleiaden $=$ 1. 26. 57. 39 ist, die Länge des

des ☽ in orbita aber = 1. 26. 46. 15 gefunden worden, so ist der Unterschied = 11′ 24″; und diesen hat der Mond noch zu durchlaufen, ehe er in ☌ mit dem Stern kömmt. Nun ist seine stündliche Bewegung in orbita = 29′ 46″, demnach durchläuft der Mond die 11′ 24″ in 22′ 59″ Zeit, welches zu der fürgegebenen Zeit (§. 193)

1783. Febr. 9 7 St. 0′ 0″

hinzugethan

1783. Febr. 9 7 ” 22 59

für die Zeit der ☌ ☽ ✱ pleiad. giebt. Es ist dieses mittlere Zeit. Nun findet sich nach Tab. 12 die Gleichung der Zeit

a = 7 10 27 52	· · · —	5′ 5″
⊙ v = 10 20 58 21	· · · —	9 35
		— 14 40
1783. Febr. 9 7 22 59		
1783. Febr. 9 7 8 19		

welches demnach die wahre Zeit der ☌ in orbita, neuen Calenders Berliner Uhr ist.

§. 202.

Es muß nun aber auch die Breite des ☽ um so viel vermehrt werden als 22′ 59″ Zeit austragen. Da das incr. horar. latit. = 1′ 26″ gefunden worden, so giebt dieses 33″. Um so viel ist die Breite des Mondes 4° 25′ 11″ zur Zeit der ☌ grösser. Sie ist demnach

= 4°

$= 4^0\ 25'\ 44''$. Da nun die Breite der lucid. pleiad. $= 4.\ 1.\ 18$ ist, so sieht man, daß zwar der Mond aus dem Mittelpunct der Erde gesehen, den hellen Stern der Pleiaden nicht bedecken wird, daß aber diese Bedeckung in den nördlichen Ländern, und besonders in Deutschland, wird gesehen werden können.

XVIII. Tafeln für die Bedeckung der Fixsterne von dem Monde.

§. 203.

Die Bestimmung der Zeit, wenn der Mond einen Fixstern bedecken wird, fordert bey dem Gebrauch der Mayerschen Tafeln viele Weitläuftigkeiten und Versuche, weil sie dadurch nur auf eine indirecte Art berechnet werden kann. Da nun dieses ein Hauptgrund mit ist, warum man besonders um die Länge zur See zu finden, die Mondstafeln gern genau und geschmeidig zu haben wünscht, so habe ich mir auch noch diese Mühe nicht reuen lassen, einige Tage Zeit auf wirklich langwierige Berechnung geschmeidiger Formeln zu verwenden.

§. 204.

Nach Tab. 29 ist die gröste mögliche Breite des Mondes $= 5^\circ\ 9'\ 8'' + 8'\ 50'' = 5^\circ\ 17'\ 58''$, und nach Tab. 30 die gröste mögliche

Paral-

Parallaxe $= 1^\circ\, 1'\, 32''$ (welche $M = E = 180^\circ$ voraus setzt, und daher in den Vollmonden statt haben kann, wie es auch Tab. 18. erhellet). Demnach ist $5^\circ\, 17'\, 58'' + 1^\circ\, 1'\, 32'' = 6^\circ\, 19'\, 30''$. Addirt man hiezu noch den grösten möglichen horizontalen Halbmesser des Mondes, welcher nach Tab. 19. $= 16'\, 47''$ ist; so ist die Summe $= 6^\circ\, 36'\, 13''$. Und dieses ist demnach die gröste mögliche Breite, die ein Fixstern haben kann, um, von dem Monde bedeckt, irgend auf der Erde gesehen werden zu können. Ich habe solche in den 6 Doppelmayerschen Charten aufgesucht, und darin in die 260 gefunden, die eine geringere Breite haben, und die demnach der Mond zuweilen bedecken kann. Sie liegen sämtlich in einem Streifen, der zu beyden Seiten der Ecliptic eine Breite von $6^\circ\, 36'\, 13''$ hat, und demnach in allem $13^\circ\, 12'\, 26''$ breit ist. Nun ist die Parallaxe $1^\circ\, 1'\, 32''$ und der Halbmesser $16'\, 47''$ doppelt genommen und zusammen addirt $= 2^\circ\, 36'\, 38''$; und dieses ist die Breite des Streifens den der Mond, von der ganzen Erdfläche gesehen, zu bedecken scheint. Dieses ist nur der fünfte Theil von den $13^\circ\, 12'\, 26''$, und so werden in der Zeit eines periodischen Monats auch nur der $\frac{1}{5}$ von den 260 Sternen von dem Monde bedeckt, welches demnach für eine Zeit von 4 Wochen 52 Sterne, und damit täglich zween giebt. Das will nun sagen, es werde nicht leicht ein Tag vergehen, da der Mond nicht 1, 2 oder mehrere Sterne bedecken solte, wenn man die ganze Erdfläche mit in Betrachtung zieht. Bindet man sich aber an einen bestimmten Ort der Erdfläche, so wird anstatt $2^{\circ}\, 36'\, 38''$ nur der Durchmesser des Mondes $33'\, 34''$ genommen, und so finden sich auch nur 11 oder 12 Sterne, die in Zeit von 4 Wochen von dem Monde bedeckt gesehen werden können, diese sind für einzelne Schiffer. Dahingegen, wer vollständige Ephemeriden für jede Schiffer und Reisen berechnen will, die vorerwähnte 52 für jeden periodischen Monat berechnen muß. Da übrigens dieses nur beyläuftig zu verstehen ist, so wird es bald mehr bald minder zu berechnen geben. Die Frage ist nun nur, wie die Rechnung geschmeidig einzurichten ist.

§. 205.

Wer Ephemeriden berechnet, sucht gemeiniglich die Umstände des Mondlaufes für jeden Mittag durch das ganze Jahr durch, zuweilen auch für jede Mitternachtsstunde, oder auch für die Zeit wenn der Mond durch den Mittagskreis seiner Sternwarte geht, damit er sich zur Beobachtung gefaßt machen könne. Es kann aber der Mond mehrere Stunden, vor oder nach, einen Fixstern bedecken, oder wenigstens demselben sehr nahe kommen; und so müßte die Zeit durch Interpolation, so gut es angeht, gefunden, und sodann nochmals genauer

nauer berechnet werden, wie es eigentlich erfordert wird, wenn die Rechnung den Schiffern statt einer correspondirenden Beobachtung solle dienen können.

§. 206.

Um dieses abzukürzen, und die Aufgabe geradehin aufzulösen, habe ich mir sie so vorgestellt: **Es ist ein Firstern gegeben, der von dem Monde bedeckt werden kann, und man solle die Zeit finden, wenn er von dem Monde bedeckt wird, oder die Zeit, wenn ☌ ☽ ✱ *in orbita* ist.** Diese Aufgabe werde ich eben, so wie oben die von der Zeit der Syzigien, von den Ephemeriden oder andern vorläufigen Berechnungen unabhängig machen. Dahin dienen nun folgende Betrachtungen.

§. 207.

Einmal wird kein Stern allemale, wenn der Mond vorbeygeht, von demselben bedeckt: Denn der Stern kann z. E. eine nördliche Breite von 6° 36′ 13″ haben, alldieweil der Mond eine südliche Breite von fünf und mehr Grad hat, und damit 11 und mehr Grad unter demselben vorbey geht. Es ist demnach nothwendig, daß der ☊ an einem solchen Orte des Thierkreises sey, wo der Mond in ☌ ☽ ✱ ungefehr eben die Breite hat, die der Stern hat. Ich sage ungefehr: denn die Breite des

Sterns

Sterns kann um die ganze Summe der Parallaxe des Mondes und seines Halbmessers verschieden seyn, und er wird dennoch, wenigstens da, wo der Mond im Mittagskreise am Horizonte erscheint, denselben berühren. Wenn demnach die Breite des Sterns an sich schon grösser ist als die Breite des Mondes, nach Tab. 29, werden kann, so kann man immer entweder die Parallaxe, oder den Halbmesser des Mondes, oder die Summe von beyden, davon abziehen, und der Ueberrest wird geringer werden, als die Breite des Mondes seyn kann. Man kann aber dieses unterlassen, und sich schlechthin begnügen, dem Mond seine gröste Breite zu geben, und zwar südlich oder nördlich, nachdem es die Breite des Sterns ist. Und dadurch wird der Ort des ☊, und zugleich auch werden damit die Jahre bestimmt, in welchen die Bedeckung möglich ist. Denn da der ☊ in einem Jahre nicht ganz 20 Grad durchläuft, so kann man ohne Mühe finden, in welchem Jahre derselbe in ein fürgegebenes Zeichen des Thierkreises eintrift.

§. 208.

Ist aber die Breite des Sterns an sich schon kleiner, als die Breite des Mondes werden kann, so kann man schlechthin die Breite des Sterns in der funfzehnten Tafel aufsuchen, und damit das Argumentum latitudinis des Monds finden, welches dem Mond eben die

Breite

Breite giebt. Dieses findet man allemal auf zweyerley Arten, und beyde können gebraucht werden. Denn so z. E. ist die nördliche Breite $= 2^\circ\ 30'\ 0''$, der Mond mag im Anfang des zweyten, oder im Ende des vierten Zeichens seines Argum. latit. seyn. Das so gefundene Argum. latit. wird von der auch nur beyläufig genommenen Länge des Sterns abgezogen, und so findet sich der Ort, wo ☊ seyn muß, damit der Stern von dem Monde bedeckt werden könne.

§. 209.

Es hat aber dieses seine sehr weite Schranken. Denn die Breite des Sterns kann um die ganze Summe der Parallaxe und des Halbmessers des Mondes sowohl vermehrt als vermindert werden, und die Summe oder der Ueberrest in der funfzehnten Tafel aufgesucht, wird die argum. latit. angeben, welche die Schranken der Möglichkeit der Bedeckung bestimmen. Dieses, durch das vorhin (§. 193 seqq.) berührte Beyspiel von den Pleiaden, zu erläutern, so haben wir für 1783 und den hellen Stern der Pleiaden (§. 201. 202)

long. $= 1^s\ 26^\circ\ 51'\ 29''$
latit. $= +\ 4\ \ 1\ \ 18$

Sucht man diese Breite in der funfzehnten Tafel auf, so entspricht derselben das

Argum. latit. $= 1^s\ 23^\circ\ 30'$

und

$4^s\ 6^\circ\ 30'$

Werden beyde von der Länge des Sterns abgezogen, so bleibt für den Ort des ☊

0 3 21

9 20 20

Man nehme ferner die Summe der mittlern Parallaxe 57′ 43″ und des mittlern Halbmessers des Mondes 15′ 44″, welche = 1° 13′ 37″ ist, und addire und subtrahire von der Breite des Sterns, so ist die

Summe = + 5 14 55

Differenz = + 2 47 41

Die Summe geht über die Breite 5° 0′ 18″ hinaus, und kömmt der grösten möglichen Breite = 5° 17′ 58″ (§. 204) sehr nahe. Demnach kann das argum. latit. aus diesem Grunde von dem erstbestimmten

$1^s\ 23'\ 30''$

bis zu

4 6 30

gehen, und es wird selten zutreffen, daß die Bedeckung nicht irgend auf der Erde sichtbar seyn sollte. Nehmen wir aber die Differenz

+ 2° 47′ 41″

so giebt diese in der funfzehnten Tafel die beyden argum. latit.

$1^s\ 4^\circ$

4 26.

Dieses sind demnach die äussersten Schranken

für

für den hellen Stern der Pleiaden. Und wenn wir die übrigen kleinern Sterne mitnehmen, so erstrecken sich diese Schranken noch weiter, daß, wenn leicht der Mond eine nördliche Breite hat, einige von den Pleiaden werden bedeckt gesehen werden können. Die Breite des Mondes ist aber fast 10 Jahre nördlich, und so kann es nicht fehlen, daß die Bedeckung nicht sehr ofte auch in Europa sichtbar seyn sollte, weil in 10 Jahren der Mond in die 130 mal bey den Pleiaden vorbey geht.

§. 210.

Bey andern Sternen sind die Schranken, inner welche die Bedeckung möglich ist, verschieden, und sehr ungleich. Die grösten möglichen Schranken sind für solche Sterne, deren Breite um die Summe der Parallaxe und des Halbmessers des Mondes kleiner ist als die gröste Breite des Monds: denn addirt man diese Summe zu der Breite des Sterns, so trift man auf das argum. latit. von 3 oder 9 Zeichen. Subtrahirt man sie aber, so erhält man das kleinste oder das gröste mögliche arg. latit. und dieses ist von 3 oder 9 Zeichen am weitesten entfernt. In diesem Fall kann das argum. latit. von 1 bis 5, oder von 7 bis 11 Zeichen seyn, und demnach die Bedeckung 6 Jahre nach einander erfolgen.

§. 211.

Hingegen werden diese Schranken viel enger, je mehr die Breite des Sterns grösser oder kleiner als die erstbestimmte Breite ist. Die geringste Möglichkeit ist für die oben (§. 204) bestimmte Breite von 6° 36′ 13″, weil dabey alle Umstände zusammen treffen müssen, wenn der Mond den Stern auch nur berühren soll. Der andere Fall ist, wenn die Breite des Sterns $= 0$ ist: denn da muß das arg. latit. immmer $0^s \pm 14°$, oder $6^s \pm 14°$ seyn, wenn die Bedeckung irgend auf der Erde gesehen werden solle. Der Zwischenraum dieser Schranken ist $= 28°$. Und da der ☊ jährlich nur 20 Grad durchläuft, so erfolgt die Bedeckung dennoch 16 bis 17 Monate nach einander, so, daß man für alle die Fälle, wo die Breite des Sterns nicht grösser als die gröste Breite des Mondes ist, sich überhaupt begnügen kann, das Jahr zu wissen, in welchem die Bedeckungen erfolgen.

§. 212.

Diese Frage kann in eine andere aufgelöst werden, daß man nemlich den Monat des Jahrs finde, in welchem die Finsternisse sich bey ☊ eräugnen. Man setze z. E. die Bedeckung der Pleiaden dauere nur ein Jahr. Nun haben wir vorhin gefunden, daß dieses geschieht, wenn der Ort des ☊ in ♈ 0° 3′ 21″ ist.

ist. Demnach, wenn die Finsternisse bey ☊ zur Zeit der Frühlings-Nachtgleiche eintreffen. Nehmen wir nun aus der ersten Tafel die Epoche von 1759, wo ☉ = $8^s\ 27°\ 33'\ 27''$ ist, und die Finsterniß dieser Epoche sich bey ☊ eräugnet, so dörfen wir nur diesen Ort der Sonne von dem ☊ = $0^s\ 3°\ 21'$ abziehen, und mit dem Ueberreste $3^s\ 5°\ 48'$ in die zweyte Tafel gehen, um die Jahre aufzusuchen, wo ♉ bey ☉ = $3^s\ 5°\ 48'$, oder wenigstens nur einige Grade davon entfernt, angezeichnet ist. Dieses findet sich im 5ten, 6ten, 24sten, 25sten Jahrgange. Addirt man diese zu 1759, so fällt man auf die Jahre 1764, 1765, 1783, 1784. Und um diese Zeit würden die Pleiaden von dem Monde bedeckt erscheinen, wenn auch die Grenze ihrer Möglichkeit auf ein Jahr eingeschränkt wären.

§. 213.

Auf diese Art läßt sich das Jahr, wo eine Bedeckung möglich ist, gleichsam durch einen beyläufigen Ueberschlag finden, wiewohl man für solche Sterne deren Breite nahe an die oben (§. 204) bestimmte $6°\ 36'\ 13''$ kömmt, dieser Ueberschlag weniger beyläuftig seyn muß, weil da die Schranken der Möglichkeit sehr enge sind. Man sucht aber das Jahr dennoch anfangs nur beyläuftig, und berechnet sodann, wie wir es oben bey den Finsternissen gesehen haben, für die Finsternisse, zwischen welche die Bedeckung erfolgt, oder nach dem Ueberschlage vermuthet wird, das argum. latit. und den Ort des Knoten, so läßt sich das übrige aus der zehnten Tafel, wo die tägliche Bewegung des Knoten angezeichnet ist, nachholen.

§. 214.

Z. E. es sey die Frage vom Aldebaran. Die Breite desselben ist 5° 29′ 49″ südlich, und seine Länge gegen das Jahr 1775 ist $2^s\ 6° \ 36' \ 50''$. Diese Breite ist grösser als die gröste mögliche Breite des Mondes, sie ist aber noch über einen Grad geringer als die 6° 36′ 13″ (§. 204). Demnach sind die Bedeckungen noch sehr wohl möglich, so, daß einige nach einander erfolgen können. Wir werden uns am sichersten an das Mittel halten, und demnach das argum. latit. $= 9^s$, oder 270 Grad setzen, weil dieses dem Monde die gröste südliche Breite giebt. Zieht man diese 9^s von der Länge des Aldebaran $2^s\ 6\frac{1}{2}°$ ab, so bleiben $5^s\ 6\frac{1}{2}°$ für den Ort, wo der ☊ seyn muß, und zwar giebt dieses die Zeit der grösten möglichen Bedeckung. Soll nun diese Zeit für die auf 1759 folgende Jahre gefunden werden, so nimmt man aus der ersten Tafel bey 1759 den Ort der ☉ $= 8^s\ 27\frac{1}{2}°$, und zieht denselben von dem so eben bestimmten Ort des ☊ $= 5^s\ 6\frac{1}{2}°$ ab. Mit dem Ueberreste $8^s\ 9°$ geht man in die zweyte Tafel

Tafel und sucht die Jahrgänge auf, wo ☋ bey ⊙ = 8ˢ 9°, oder ☊ bey ⊙ = 2ˢ 9°, oder wenigstens nicht um viele Grade davon weg ist. Dieses findet sich in dem sechszehnten Jahrgang bey dem Neumond No. 188; denn wird das arg. latit. + 6° 3′ 42″ von ⊙ = 2ˢ 12° 4′ 4″ abgezogen, so bleibt 2ˢ 6° 0′ 22″ welches von den 2ˢ 9° kaum um 3 Grad entfernt ist. Diese 3 Grade mögen aber, in Absicht auf die Bewegung des ☊, fast 2 Monat austragen, und so kann die Sache folgendermassen genauer bestimmt werden.

§. 215.

Man schreibt nemlich aus der ersten Tafel bey 1759 das argum. latit. die Tage vom Ende des Jahrs und den Ort der ⊙, welcher zugleich der Ort des Mondes ist, aus. Eben dieses thut man auch bey dem Neumond No. 188 der zweyten Tafel. Die Rechnung ist wie bey der Berechnung der Finsternisse folgende:

	argum. latit.	T. St. ′ ″	☉	
1775				
1759	♈ − 0 0 59	− 23 5 7 1	8 27 33 27	Tab. 1.
16	☊ + 6 3 42	73 0 1 6	2 12 4 4	T. 2. No. 188.
	♈ + 6 2 43	49 18 54 5	11 9 37 31	
☽ =	11 9 37 31			
☊ =	5 3 34 48			
	5 6 36 50			
	3 2 2			
	1 35 19	− 30 0 0 0	− 1 5 17 31	Tab. 10.
	1 26 43	+ 19 18 54 5	+ 10 4 20 0	
	1 25 47	− 27 0 0 0	− 11 25 45 46	Tab. 10.
	56	− 7 5 5 55	+ 10 8 34 14	
	56	− 7 0 0	− 3 50 35	Tab. 10.
	0	− 7 12 5 55	+ 10 4 43 39	
			2 6 36 50	long. aldebaran
	5 6 36 50	− 7 12 5 55	4 1 53 11	dist. aldeb. − ☽.
	− 28 36	+ 9 0 0 0	3 28 35 15	Tab. 10.
	5 6 8 14	1 11 54 5	3 17 56	
	− 48	+ 6 0 0	3 17 39	Tab. 10.
	5 6 7 26	1 17 54 5	17	
	0	+ 31	17	
☊ =	5 6 7 26	1 17 54 36	0	
			2 6 36 50	long. ☽

Man findet nemlich zuerst für den eccliptischen Neumond No. 188, welcher 1775. 49 Tage, 18 St. 54′ 5″ nach der mittlern Bewegung und Bissextilform eintrift, den Ort der

☉ und des ☽ 11ˢ 9° 37′ 31″

des ☊ 5 3 34 48.

§. 216.

Da nun aber der Ort des ☊ für die gesuchte Zeit = 5ˢ 6° 36′ 50″ seyn soll, so zieht man den

den erstern von diesem ab, und der Ueberrest 3° 2′ 2″ zeigt nach der zehnten Tafel, daß der ☊ um 57 T. 7 St. früher in 5ˢ 6° 36′ 50″ gewesen. Für diesen Zwischenraum wird ebenfalls aus der zehnten Tafel die mittlere Bewegung des ☽ ausgeschrieben, und von dem ☽ abgezogen, welches, wie man aus der Rechnung sieht, mit dem Abziehen bey dem ☊ zugleich geschehen kann. Man findet dadurch den Ort des ☽ = 10. 4. 43. 39, und die Zeit 7 T. 12 St. 5′ 55″ vor dem Anfang des Jahrs 1775, und zu dieser Zeit ist der ☊ in 5ˢ 6° 36′ 50″. Da aber der Mond alsdann nicht in ☌ mit dem Aldebaran ist, so zieht man den Ort des ☽ von der Länge des Aldebaran ab, und der Ueberrest 4. 1. 53. 11 ist der Bogen, den der ☽ noch zu durchlaufen hat, bis er in ☌ mit dem Aldebaran kömmt. Aus der zehnten Tafel ergiebt sich nun wiederum, daß dieses 9 T. 6 St. 0′ 31″ nachher, und demnach 1775. 1 T. 17 St. 54′ 36″ alten Calenders und Bissertilform geschieht, wo der Mond nach seiner mittlern Bewegung in 2ˢ 6° 36′ 50″, der ☊ aber in 5ˢ 6° 7′ 36″ ist. Dieses ist demnach die Zeit der mittlern ☌ des ☽ und des Aldebaran. Für diese Zeit können auf eben die Art die übrigen Umstände des mittlern Mond- und Sonnenlaufes berechnet werden. Die Hauptfrage aber ist, sodann daraus die eigentliche Zeit der wahren ☌ in orbita und die übrigen wahren Umstände des

Sonn- und Mondlaufes zu finden. Dieses setzt besondere Formeln und Tafeln voraus, von denen nun die Rede seyn soll.

§. 217.

Die aufzulösende Aufgabe ist überhaupt folgende: **Wenn die Zeit gegeben, da der Mond nach seiner mittlern Bewegung in einem fürgegebenen Punct seiner Bahn ist, die Zeit zu finden, da derselbe, nach seiner wahren Bewegung, in eben diesen Punct seiner Bahn ist.** Die Auflösung dieser Aufgabe ist der oben (§. 82) für die Syzigien gegebenen ganz ähnlich, und noch dadurch einfacher, daß der fürgegebene Punct als unbeweglich angesehen werden kann. Denn der Zwischenraum beyder Zeiten beläuft sich höchstens auf 13 bis 14 Stunden, und in dieser Zeit ist das Fortrücken der Sterne ganz unmerklich. Man nimmt daher schlechthin die Prostaphaeresis des Monds für die Zeit da derselbe nach seiner wahren Bewegung, in dem fürgegebenen Punct ist, und dividirt sie durch seine mittlere stündliche Bewegung. Man setze demnach die Zeit der wahren ☌ sey τ Stunden nach der mittlern ☌, und zur Zeit der mittlern ☌ sey

der mittlere Ort der $\odot = \odot$

des ☊ = ☊

die

die mittlere anom. $\odot = a$

des $☽ = M$

das mittlere arg. latit. $= \lambda$

$☽ - \odot = E$

so ist zur Zeit der wahren ☌ (§. 66)

der mittlere Ort der $\odot$

$= \odot + (2' \; 27'' \; 50''' \; 58^{IV}) \tau$

des ☊

$= ☊ - (0 \quad 7 \quad 56 \quad 35) \tau$

die mittlere anom. $\odot$

$= a + (2 \quad 27 \quad 50 \quad 31) \tau$

des ☽

$= M + (32 \quad 39 \quad 46 \quad 30) \tau$

das mittlere argum. latit.

$= \lambda + (33 \quad 4 \quad 24 \quad 9) \tau$

der mittlere Abstand $☽ - \odot$

$= ☽ - \odot + (30 \quad 28 \quad 36 \quad 36) \tau$

Und die mittlere stündliche Bewegung des ☽

$= 32' \; 56'' \; 27''' \; 34^{IV}$

Diese Werthe müssen in der Formel des §. 47. gesetzt werden, welche die Prostaphäresis $☾ - L'''$ ausdrückt, und so erhält man

$(32 \quad 56 \quad 27 \quad 34) \tau$

$= 22652''$

$$= 22652'' \sin(\ M + 32' \ 39'' \ 46''' \ 30^{\mathrm{IV}} \tau) + 122'' \sin(\ E + 30' \ 28'' \ 36''' \ 36^{\mathrm{IV}} \tau)$$
$$- 773 \sin(2M + 65 \ 19 \ 33 \ 0 \tau) - 2319 \sin(2E + 60 \ 57 \ 13 \ 12 \tau)$$
$$+ 36 \sin(3M + 97 \ 59 \ 19 \ 30 \tau) - 23 \sin(4E + 121 \ 54 \ 26 \ 24 \tau)$$
$$- 680 \sin(\ a + 2 \ 27 \ 50 \ 31 \tau) + 4586 \text{ſ}(2E - M + 27 \ 27 \ 26 \ 42 \tau)$$
$$+ 10 \sin(2a + 4 \ 55 \ 41 \ 2 \tau) - 31 \text{ſ}(4E - 2M + 54 \ 54 \ 53 \ 24 \tau)$$
$$+ 105 \text{ſ}(M + a + 35 \ 7 \ 37 \ 1 \tau) + 175 \text{ſ}(2E + M + 93 \ 26 \ 59 \ 42 \tau)$$
$$- 145 \text{ſ}(M - a + 30 \ 11 \ 55 \ 59 \tau) - 210 \text{ſ}(2E - 2M - 4 \ 2 \ 19 \ 48 \tau)$$
$$+ 150 \text{ſ}(2E - a + 58 \ 29 \ 22 \ 41 \tau) - 24 \text{ſ}(E - M - 2 \ 1 \ 9 \ 54 \tau)$$
$$+ 46 \text{ſ}(2E - M + a + 29 \ 55 \ 17 \ 13 \tau) + 52 \text{ſ}(4E - M + 88 \ 24 \ 39 \ 56 \tau)$$
$$- 235 \text{ſ}(2E - M - a + 24 \ 59 \ 36 \ 11 \tau) - 58 \text{ſ}(2\lambda - M + 33 \ 29 \ 1 \ 48 \tau)$$
$$- 47 \text{ſ}(2\Omega - 2\odot - 5 \ 11 \ 33 \ 6 \tau)$$

§. 218.

§. 218.

Diese Gleichung habe ich anfangs, so wie sie hier steht, aufgelöst, und sodann die in §. 48 erwähnten weggelassenen Glieder noch mitgenommen. Der Erfolg war, daß in beyden Fällen theils einerley, theils verschiedene Glieder in der herausgebrachten Formel entweder unmerklich klein oder nett $= 0$ wurden. Diese konnte ich demnach sämtlich weglassen. Und so erhielt ich für die Zeit, welche zur Zeit der mittlern ♂ hinzugethan werden muß, in Secunden-Zeit ausgedrückt, folgende Formel:

$+ 41332'' \sin. M$	$+ 128'' \sin (a + M)$
$+ 838 \sin 2M$	$+ 204 \sin (a - M)$
$+ 19 \sin 3M$	$+ 212 \sin (2E - a)$
$- 1239 \sin a$	$- 298 \sin (2E + M)$
$+ 18 \sin 2a$	$+ 428\, \text{ſ} (a - 2E + M)$
$+ 223 \sin E$	$+ 71\, \text{ſ} (a + 2E - M)$
$- 3500 \sin 2E$	$+ 85\, \text{ſ} (2 \odot - 2 ☊)$
$+ 8 \sin 4E$	$+ 105\, \text{ſ} (M - 2 \lambda)$
$+ 8522\, \text{ſ} (2E - M)$	$+ 26\, \text{ſ} (2E + M - a)$
$+ 23\, \text{ſ} 2 (2E - M)$	$+ 27\, \text{ſ} (M - 4E)$
$- 43\, \text{ſ} (E - M)$	
$- 304\, \text{ſ} 2 (E - M)$	

§. 219.

Unter den hiebey weggelassenen Gliedern sind folgende die beträchtlichsten

— 35''

$$
\begin{array}{l}
-35'' \sin(2E+2M) \\
+18 \sin(4E-M-a) \\
+17 \sin(2E-2M-a) \\
+12 \sin(E+M) \\
-13 \sin(2M-a) \\
-9 \sin(2E+3M) \\
-9 \sin(4E-2M-a) \\
-11 \sin 2\lambda \\
+8 \sin(2E+M+a) \\
\&c.
\end{array}
$$

Das erste dieser Glieder liesse ich weg, weil es schlechthin nur von den $19'' \cos(2☽-2S+2M) = 19'' \cos(2E+2M)$ (§. 48) herrühret, weil es sonst $=0$ würde gewesen seyn.

§. 220.

Nach der (§. 218) angegebenen Formel habe ich die 33ste Tafel nach ihren verschiedenen Argumenten berechnet. Es sind eigentlich fünf grössere Tafeln und zehn kleinere, nach folgender Ordnung:

$$
\begin{array}{ll}
\text{I}^{\circ}. & \left.\begin{array}{l} +41332 \sin M \\ +\quad 838 \cos 2M \\ +\quad 19 \cos 3M \end{array}\right\} \\
\text{II}^{\circ}. & \left.\begin{array}{l} +\quad 223 \sin E \\ -\;3500 \cos 2E \\ +\quad 8 \cos 4E \end{array}\right\} \\
\text{III}^{\circ}. & \left.\begin{array}{l} +\;8522 \cos(2E-M) \\ +\quad 23 \cos(4E-2M) \end{array}\right\}
\end{array}
$$

IV°.

$$\begin{aligned}
&\text{IV}^{\circ}. - 1239 \sin a \\
&\quad + 18 \, \text{f} \, 2a \\
&\text{V}^{\circ}. - 43 \sin (E - M) \\
&\quad - 304 \, \text{f}(2E - 2M)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{VI}^{\circ}. + 128 \sin (a + M) \\
&\text{VII}^{\circ}. + 204 \sin (a - M) \\
&\text{VIII}^{\circ}. + 212 \sin (2E - a) \\
&\text{IX}^{\circ}. + 298 \sin (\text{VI}^{\text{f}} + 2E + M) \\
&\text{X}^{\circ}. + 428 \sin (a - 2E + M) \\
&\text{XI}^{\circ}. + 71 \sin (a + 2E - M) \\
&\text{XII}^{\circ}. + 85 \sin (2 \odot - 2 \Omega) \\
&\text{XIII}^{\circ}. + 105 \sin (M - 2\lambda) \\
&\text{XIV}^{\circ}. + 26 \sin (2E + M - a) \\
&\text{XV}^{\circ}. + 27 \sin (M - 4E)
\end{aligned}$$

Dem neunten Argumente $2E + M$ habe ich sechs Zeichen beygefügt, damit das Zeichen — ebenfalls in + verwandelt, und damit die letzten 10 Argumente in eine Tafel und unter einerley Rubrique gebracht werden konnten.

§. 221.

Die ganze Rechnung werde ich nun noch durch das sechste der am Ende befindlichen Beyspiele erläutern. Es betrift die Bedeckung des Aldebaran vom Monde, welche, wie wir oben (§. 215. 216) gesehen haben, nach der mittlern Bewegung 1775, Jan. 1 T. 17 St. 54′ 36″ alten Calenders, Sissextilform, mittleter Zeit und Pariser Uhr eintrift. Es wird,

wie

wie vorhin, aus der ersten Tafel die Epoche 1759, und aus der zwoten Tafel der Neumond No. 188 ausgeschrieben, und dadurch für diesen Neumond

die Zeit 1775.		49	18	54	5	
	☊	5	3	34	48	
	⊙	11	9	37	31	= ☽
an.	⊙	8	0	32	1	
an.	☽	7	14	39	55	

gefunden. Dieser Neumond ist demnach 48 T. 0 St. 59′ 29″ früher als die fürgegebene Zeit der mittlern ☌. Man schreibt demnach aus der zehnten Tafel aus, wie viel für 48 T. 0 St. 59′ 29″ von ⊙, a, M, ☽ muß abgezogen und hingegen zu ☊ addirt werden, um die mittlern Umstände des Sonn- und Mondlaufes für die Zeit der mittlern ☌ ☽ et aldeb. zu finden. Es ist demnach für dieselbe

die Zeit 1775.		1	17	54	34
	☊ =	5	6	7	26
	⊙ =	9	22	16	22
	a =	6	13	11	0
	M =	10	17	0	24
	☽ =	2	6	36	49

Hieraus findet sich

☽ — ⊙ = E =	4	14	20	27
☽ — ☊ = λ =	9	0	29	23
⊙ — ☊ =	4	16	8	56

Mit diesen Datis geht man in die 33ste Tafel, und

und schreibt, der Ordnung nach, die Argumente und die denselben entsprechenden Gleichungen aus, wie sie in dem Beyspiel auf dem untern Viertel der ersten Hälfte des Blatts stehen. Die Gleichungen werden in eine Summe zusammen gerechnet, und so findet sichs, daß die wahre ☌ in orbita um 8 St. 44′ 13″ früher geschieht, und demnach 1775. 1 T. 9 St. 10′ 31″ alten Calenders, Bissextilform, mittlerer Zeit, Pariser Uhr, eintrift. Zu dieser Zeit hat der ☽ in seiner Bahn einerley Länge mit dem Aldebaran in der Ecliptic, demnach 2ˢ 6° 36′ 49″ nach der wahren Bewegung.

§ 222.

Da man aber für eben diese Zeit die übrigen Umstände des Mond- und Sonnenlaufes wissen muß, so geht man wiederum in die zehnte Tafel und schreibt da aus, wie viel für die — 8 St. 44′ 13″, um welche die wahre ☌ früher geschieht, von ☉, a, M, ☽ abgezogen und hingegen zu ☊ addirt werden muß. Und so findet sich, wie in dem Beyspiele zu sehen, für die Zeit der wahren ☌ der mittlere Ort

des ☊ =	5	6	8	36
der ☉ =	9	21	54	50
a =	6	12	49	28
M =	10	12	15	2
☽ =	2	1	49	0.

§. 223.

Hiedurch findet sich nach Anleitung der
Tab. 11. die Gleichung ⊙ $= + 26' \, 14''$
13. . . . des ☊ $= - 2 \; 22$
und damit der wahre Ort der
⊙ $= 9 \; 22 \; 21 \; 4$
☊ $= 5 \; 6 \; 6 \; 14$
Da nun auch der wahre Ort des Mondes
$L''' = 2 \; 6 \; 36 \; 49$
ist, so lassen sich hieraus die Argumente für Tab. 14 und 29 formiren, und
reduct. ad eccl. $= + 0 \; 0 \; 14$
lat. ☽ $= - 5 \; 9 \; 25$
finden, wie dieses mitten auf der letzten Hälfte des Blatts in dem Beyspiele zu sehen.

§. 224.

Die Gleichung der Zeit, welche nach Tab. 12
$= - 9' \, 24''$
gefunden wird; ingleichem die reduct. eccl. ad aequatorem, welche nach Tab. 23
$= + 1 \; 47 \; 37$
gefunden wird, und die asc. rect. ⊙
$= 9 \; 24 \; 8 \; 41$
giebt, habe ich, Raums halber, in dem Beyspiele weggelassen. Es ist aber für sich klar, daß man beyde gebraucht.

§. 225.

Für die übrigen unten auf der letzten Hälfte des Blatts bestimmte Umstände, gebraucht man die vorhin (§. 222) gefundenen Data, und so erhält man nach

Tab. 30	die Parall. ☽	=	54′ 31″
• • 19	der Semid. ☽	=	14 52
• • 31	der Horar. ☽	=	30 3
• • 32	das incr. lat. horar.	=	+0 5

Und damit sind die zu einer Projection erforderlichen Umstände des Sonn- und Mondlaufes bestimmt. In Absicht auf den Aldebaran gebraucht es noch dessen asc. recta, welche 1775 = $2^s\ 5^\circ\ 45'\ 25''$ ist, die Declination = $16^\circ\ 2'\ 32''$, und der Winkel, den der aus dem Pol der Ecliptic durch den Aldebaran gezogene Bogen mit dem durch den Aldebaran gehenden Mittagskreis daselbst macht, und welcher = $10^\circ\ 15'\ 13''$ gefunden wird.

§. 226.

Ich werde aber, um die Projectionsart zu erläutern, mich dieses Beyspiels nicht bedienen. Denn ausser daß die berechnete Bedeckung des Aldebaran fürnemlich nur in den Südländern sichtbar ist, so wird es dienlicher seyn, die oben (§. 193) berechnete Bedeckung der Pleiaden vorzunehmen, weil dabey mehrere Sterne zugleich vorkommen. Die Berechnung war für den hellen Stern der Pleiaden, oder die Alcione. Ich setzte dabey die Zeit der wahren ☌ in orbita als beyläufig bekannt voraus, und so liessen sich die Umstände des Sonnen- und Mondlaufes, und damit auch die eigentliche Zeit der ☌ berechnen, und gleichsam nachholen. Um aber auch den Gebrauch der 33sten Tafel bey diesem Fall zu zeigen, so habe ich die Berechnung nochmals vorgenommen, und in dem siebenten der am Ende befindlichen Beyspiele vorgestellt. Dieses Beyspiel ist von dem sechsten, in Absicht auf die Anordnung, weiter nicht verschieden, als in zweyen Stücken. Einmal habe ich die Länge der Alcione 1. 26. 57. 38 von dem Orte des Neumondes 11. 11. 11. 34 abgezogen, welche zunächst auf die verlangte ☌ folgt. Der Unterschied 9. 14. 13. 56 war demnach der Bogen, den der Mond von der Zeit der ☌ bis zu dem Neumonde nach seiner mittlern Bewegung durchläuft; und aus der zehnten Tafel findet sichs, daß dieses in 21 T. 13 St. 42′ 40″ geschieht. Dadurch liessen sich auch die übrigen Data für die Zeit der mittlern ☌

1783.. 29 T. 17 St. 52′ 12″

☊ =	11ˢ	29°	54′	22″
☉ =	10	19	55	52
a =	7	10	41	42
M =	11	8	41	57
☽ =	1	26	57	38

finden. Und vermittelst der 33sten Tafel fand sichs

sichs hieraus, daß die wahre ☌ in orbita 5 St. 13′47″ früher geschieht, und demnach, so viel diese Zeit nach der zehnten Tafel austrägt, die zwote Reduction vorgenommen werden muß, um endlich für die Zeit der wahren ☌ in orbita den wahren Ort

des ☊ = 11 39 48 14
der ☉ = 10 20 59 18
des ☽ = 1 26 57 38

so wie auch die übrigen in dem Beyspiele zu ersehende Stücke zu finden.

§. 227.

Das andere ist, daß die Zeit der wahren ☌ in dem Beyspiele ohne alle Reduction gelassen worden, um den Raum für das übrige aufzubehalten. Ich werde sie demnach hier nachholen. Die Zeit ist

		T.	St.	′	″	
	1783.	29	12	38	25	
hievon gehen ab		—	6	0	0	wegen der Bissextilform
		—		14	40	wegē der Gleich. der Zeit
dies giebt	1783.	29	6	23	45	
hingegen komen hinzu	+	11	0	0	0	wegen des alten Calend.
		+		44	25	wegen der Berliner Uhr.
Dies giebt	1783.	40	7	8	10	

oder nach Tab. 3.

1738.	Febr.	9	7	8	10

welches von der obigen Bestimmung (§. 201) nur um 9″ verschieden ist.

§. 228.

Nun findet sich für den wahren Ort der Sonne

		s	°	′	″
		10	20	59	18
die red. ad eccl. Tab. 23	=	+	2	23	44
demnach die asc. recta	=	10	23	23	2
Es ist aber die asc. recta der Alcione	=	1	23	38	40
Diff.	=	3	0	15	38

Um so viel ist demnach, für die Zeit da Alcione in ☌ mit dem ☽ ist, die Sonne schon abendwerts fortgerückt. Verwandelt man demnach diesen Bogen in Zeit, so giebt derselbe

6 St. 1′ 2″

Da nun die ☌ Abends um

7 · 8 10

geschieht, so ist die

Diff. 1 · 7 8

Und um so viel Zeit wäre Alcione abendwerts vom Mittage weg, wenn die tägliche Umwälzung der Sterne nicht um $\frac{1}{365}$ten Theil geschwinder wäre. Der Unterschied beträgt 11″, und damit ist Alcione um 1 St. 6′ 57″ früher am Mittagskreise, als die ☌ eintrift. Demnach culminiret sie um

6 St. 1′ 13″

Dieses ist nun die Zeit, die in der Projection zum Grunde gelegt wird.

§. 229.

Ferner ist die Breite

des Mondes	=	4	25	50
der Alcione	=	4	1	34

also der Mond nördlicher um 0 24 16.

§. 230.

Endlich ist die Declination der Alcione = 23° 26′ 30″, und der Winkel, welchen die zween aus dem Weltpole und dem Pol der Ecliptic durch die Alcione gehende Circul daselbst machen = 13° 41′ 22″. Aus diesen Stücken wird sich nun die Projection ergeben.

§. 231.

Man mache in der zwölften Figur nach einer angenommenen Scala ε, die Halbmesser AC = CB der Mondparallaxe 54′ 28″ gleich, und ziehe ECR durch C auf AB senkrecht, so stellt AB den Parallelkreis der Ecliptic vor, welcher durch die Alcione geht, und CE läuft in den Nordpol der Ecliptic. Auf eben der Scala ε nimmt man die reduct. ☽ ad eccl. 6′ 20″, und trägt sie, weil sie negativ ist, aus C vorwärts in D. Eigentlich sollte sie in Verhältnis des Halbmessers zum Cosinus der Breite des Mondes 0, 9970 vermindert werden; es trägt dieses aber kaum 1 Secunde aus, und so kann es unterbleiben. Fig. 12.

Aus D wird D L senkrecht gezogen, und dem vorhin (§. 229) gefundenen Unterschied der Breite gleich gemacht, so stellt L den Ort des Mondes zur Zeit der ☌ in orbita vor. Es fällt aber L aufwerts, weil der Mond nördlicher ist. Seine Breite ist ebenfalls im Zunehmen, und so wird das incr. latit. horar. $= + 1' 26''$ aus L in F aufwerts getragen, und F H mit A C B parallel gezogen. Aus L in H trägt man sodann den horar. ☽ $= 29' 46''$ und zieht durch L H die gerade Linie n L H c, welche die Mondbahn vorstellt. In der Figur ist sowohl L F als L H doppelt grösser genommen, damit alles besser auseinander fiele, und selbst auch die Linie L H sich genauer ziehen liesse. Der horar. ☽ ist auf der Scala ζ in Minuten getheilt; und so läßt sich die Mondbahn dergestalt in Stunden und Minuten theilen, daß L auf 7 St. 8' 10'', als die Zeit der ☌ in orbita (§. 227) fällt. Uebrigens habe ich den beyden Scalen, so wie der ganzen Figur, eine solche Grösse gegeben, daß sich die bey der fünften Figur gezeichneten zwo Scalen γ, δ dabey gebrauchen liessen, so wie es auch vorhin bey der siebenten und achten Figur geschehen (§. 140).

§. 232.

Man mache nun ferner den Winkel E C V $= 13° 41' 21''$ (§. 230) und ziehe durch P C die gerade Linie N P C m, und durch die Linie

nie J C K senkrecht, so stellt N m die Weltaxe, und J K den durch die Alcione gehenden Parallelkreis des Aequators vor. Daß diese Axe von E gegen B zu falle, erhellet aus der sechsten Figur, weil die Länge der Alcione zwischen ♈ und ♋ fällt.

§. 233.

Man nehme nun die Declination der Alcione 23° 26′ 30″, und trage ihren Zusatz zu 90° oder 66° 33′ 30″ von der Scala δ (Fig. 5) aus C in P, und zwar deswegen aufwerts, weil die Declination nördlich ist. Denn wäre sie südlich, so müste man sie herunterwerts, und hingegen die Summe von derselben und von 90° aufwerts tragen. Gegenüber aus C in n trage man von gleicher Scala δ die doppelte Declination, so wird sich aus m durch J P K ein Circul ziehen lassen, welcher den von der Alcione 90 Grad abstehenden Mittagskreis in der stereographischen Projection vorstellt, und P stellt den Nordpol der Erde vor.

§. 234.

Um nun auch den Parallelkreis von Berlin zu entwerfen, so nehme man die Berliner Aequatorshöhe 37° 27′ 30″, und addirt sie zu dem compl. declin. 66° 33′ 30″. Die Summe 104° 1′ 0″ wird von der Scala δ aus C in N, und dann auch die Differenz

29° 6′ 0″ aus C in Q getragen. Wäre die Differenz negativ gewesen, so hätte sie aus C gegen m getragen werden müssen. Und wäre die Declination südlich gewesen, so hätte man anstatt 90° — 23° 26′ 30″ die Summa 90° + 23° 26′ 30″ nehmen müssen. Es ergeben sich aber alle diese Abänderungen, in jedem Fall, aus blosser Betrachtung der Umstände, von selbst. Nun wird auf QN, als auf einem Halbmesser, der Circul Q M N S beschrieben, und dieser stellt den Berliner Parallelcircul stereographisch vor. Er wird eben, so wie oben (§. 132), in Stunden getheilt. Man zieht nemlich durch M S die gerade Linie M T, und beschreibt auf dieser, als auf einem Halbmesser, den Circul S a G, und theilt diesen in 24 gleiche Theile oder Stunden, oder eigentlich in 23 St. 56′ 4″, als den Sterntag, ein, aber dergestalt, daß der Punct G, wo der Circul die Axe schneidet, auf die vorhin (§. 228) gefundene 6 St. 1′ 13″ als die Zeit der Culmination der Alcione falle. Durch die Theilungspuncte, dergleichen z. E. a ist, werden gerade Linien in den Pol P gezogen, welche den Parallelkreis M Q S in Stunden theilen werden, so wie sie dabey gezeichnet sind. Da man die Projection grösser machen muß, als sie in der Figur ist, so muß man die Eintheilung wenigstens von 10 zu 10 Minuten vornehmen.

§. 235.

§. 235.

Hieraus wird sich nun auch die scheinbare Mondbahn, so wie sie zu Berlin gesehen wird, entwerfen lassen. Man ziehe z. E. für 10 Uhr die Linie C b, und mit derselben c d parallel. Man trage C b auf die Scala δ (Fig. 5) und so viele Grade sie daselbst abschneidet, so viel nehme man auf der Scala γ, und trage sie aus c in d; so wird d der Punct der scheinbaren Mondbahn für 10 Uhr seyn. Auf gleiche Art verfahre man von Stund zu Stund, oder bey grössern Projectionen von 10 zu 10 Minuten, und so wird die scheinbare Mondbahn d f q construirt und zugleich auch eingetheilt seyn. Man sieht aus der Figur, daß es eine merklich krumme Linie ist, und die Stunden darauf ungleich sind. Beydes rührt von der Parallaxe her, weil der Mond die Zeit über nicht in gleicher Höhe bleibt.

§. 236.

Ungeachtet nun diese Projection unmittelbar für die Alcione eingerichtet ist, so hindert dennoch nichts, daß sie nicht auch für die übrigen Pleiaden dienen sollte. Denn A B ist der Parallelkreis der Ecliptic, welcher durch die Alcione geht, und C E läuft in den Pol der Ecliptic. Man nehme demnach den Unterschied der Länge zwischen der Alcione und den übrigen Pleiaden, diesen Unterschied vermindere

mindere man in der vorhingedachten Verhältniß des Halbmessers zum cosin. declin. (§. 231) und trage ihn aus C gegen B, wenn er positiv ist, gegen A aber wenn er negativ ist. Durch die Puncte, so man hiedurch findet, ziehe man Linien durch A B senkrecht, und auf diese trage man den Unterschied der Breite zwischen der Alcione und der vorhabenden Plejade, und zwar heraufwerts, wenn diese nördlicher ist, und herunterwerts, wenn sie südlicher ist, so werden die sämtliche Pleiaden, wie sie in der Figur gezeichnet sind, eingetragen werden können. Will man aber dieses genauer haben, so berechne man die Distanz der Alcione von jeder der übrigen Pleiaden, und dem Winkel, um welchen jede von dem Mittagskreise der Alcione west- oder ostwerts abliegt. Dieser Winkel läßt sich sodann construiren, und die Distanz, von der Scala ε genommen, aus C auftragen.

§. 237.

Nimmt man nun den Halbmesser des Monds 30′ 3″ auf der Scala ε, so kann man aus jedem Punct f der scheinbaren Mondbahn einen Circul beschreiben, welcher den Mond vorstellen wird, und zwar so, wie derselbe bey den Sternen vorbey geht. So wie dieser Circul in der Figur gezeichnet ist, bedeckt er die Electra, und fängt an die Merope zu bedecken. Man sieht auch leicht, daß Alcione bald

bald darauf auch wird bedeckt werden, zumal da der Mittelpunct des Mondes nahe vorbey geht. Gegen 9 Uhr werden auch Atlas und Pleione bedeckt, und damit in allem fünf Pleiaden, nebst dem nächst bey der Alcione befindlichen Sternchen. So bald einmal Electra angefangen hat bedeckt zu werden, ist immer wenigstens eine der Pleiaden unter dem Monde, und gegen $8\frac{3}{4}$ Uhr bedeckt der Mond die Alcione, Pleione und den Atlas zugleich. Die Erscheinung dauert von 6 Stunden 12′ bis 9 Stunden 43′ in einem fort. Die Celeno, Maia, Taigete, Asterope bleiben zu Berlin über dem Monde nordwerts, und erscheinen daher nur in südlichern Gegenden von dem Monde bedeckt.

§. 238.

Man setze nun einen Ort der ebenfalls auf dem Berlinischen Parallelcircul, aber um 15° oder 1 Stunde westlicher liegt. Dieses ist um Sonnenzeit, und so ist daselbst 6 Uhr, wenn es zu Berlin bereits 7 Uhr ist. Nun culminirt die Alcione zu Berlin um 6 Stunden 1′ 13″ (§. 228). Um diese Zeit ist es demnach daselbst erst 5 St. 1′ 13″. Und eben daselbst erfolgt die Culmination nach der dortigen Sonnenuhr um nicht gar eine Stunde später, nemlich um 5 St. 1′ 3″. Denn da der Stern zu seiner täglichen Umwälzung nur 23 Stunden 56′ 4″ Sonnenzeit gebraucht, so verkürzt

er

er jede Zeit um eben so viel, und dieses trägt für die 15° oder für die Stunde, um welche der Ort westlicher liegt, 10 Secunden aus. Der Erfolg ist nun dieser, daß in Q 5 St. 1′ 3″ müssen geschrieben, und die Zeit von da an fortgezählt werden, anstatt daß es für Berlin von 6 St. 1′ 13″ an geschahe. Sodann muß man auf der Linie n L S c, wo die Stunden 5, 6, 7, 8, 9, 10 angezeichnet stehen, jede derselben um 1 vermindern, und demnach 4, 5, 6, 7, 8, 9 hinschreiben, und so das übrige wie vorhin vornehmen.

§. 239.

Wollte man aber die Projection für einen Ort noch mitnehmen, der zwar nicht in dem Berliner Parallelkreise, aber unter dem Berliner Mittagskreise liegt, so bleibt, in Absicht auf die Zeit, alles wie bey Berlin. Man muß aber statt des Berliner Parallelkreises M Q S N denjenigen construiren und eintheilen, den die Polhöhe des fürgegebenen Ortes erfordert.

§. 240.

Man kann aber übrigens auch für den ersten Fall (§. 238) die Stunden auf M Q S lassen, wie sie sind. Dieses ist aber eben so viel als wenn man setzte, daß an dem um 15 Grad westlicher liegenden Ort, die Uhr um 10″ verrückt wäre, so, daß sie anstatt 5 St. 1′ 3″. zu zeigen, 5 St. 1′ 13″ zeigte. Darüber

kann

kann man immer Rechnung tragen. Hingegen müssen sodann auch auf n L S c statt der Stunden 4, 5 . . 9, die Zeiten 4 St. 0' 10''; 5 St. 0' 10'' hingeschrieben, oder die Stunden selbst um so viel vorwerts gerückt werden. Der Erfolg ist sodann, daß die ganze scheinbare Mondbahn q d, so eingetheilt, wie die für Berlin ist, um 1 St. — 10'' = 59' 50'' der Scala ζ in einer mit n L S c parallelen Richtung gegen B zu, verschoben werden muß oder kann, um nach der um 10'' zu früh gehenden Uhr alle Umstände der Bedeckung für den um 15 Grade auf dem Berliner Parallelcircul westlicher liegenden Ort anzugeben.

Tafeln

für die

Neu= und Vollmonde,

Sonn= und Mondsfinsternisse,

Umstände des Sonn= und Mond=
laufes ausser den Syzigien,

Bedeckungen der Fixsterne von
dem Monde,

Halbmesser, Parallaxe und
stündliche Bewegung,

Stündliche Veränderung der
Breite ꝛc.

nebst den

in der Abhandlung erwähnten

Beyspielen.

Jahre	arg. latit. ☽		′	″	Vom Anfang des Jahrs T.	St.	′	″	Vom Ende des Jahrs T.	St.	′	″
— 747	☊	—	8	27	62	14	52	19	302	15	7	41
— 718	☋	—	5	14	42	7	41	39	327	22	18	21
— 689	☊	—	2	0	22	0	30	58	343	5	29	2
— 660	☋	+	1	13	1	17	20	18	363	12	39	42
— 632	☊	+	4	26	346	16	9	38	18	13	50	22
— 603	☋	+	7	40	326	8	58	57	38	21	1	3
— 574	☊	+	10	53	306	1	48	17	59	4	11	53
— 545	☋	+	14	6	285	18	37	36	79	11	22	24
— 527	☋	—	14	4	296	14	20	23	68	15	39	37
— 498	☊	—	10	51	276	7	9	43	88	22	50	17
— 469	☋	—	7	38	255	23	59	3	109	6	0	57
— 440	☊	—	4	25	235	16	48	22	129	13	11	38
— 411	☋	—	1	12	215	9	37	42	149	20	22	18
— 382	☊	+	2	2	195	2	27	1	170	3	32	59
— 353	☋	+	5	15	174	19	16	21	190	10	43	39
— 324	☊	+	8	28	154	12	5	41	210	17	54	19
— 295	☋	+	11	42	134	4	55	0	231	1	5	0
— 266	☊	+	14	55	113	21	44	20	251	8	15	40
— 248	☊	—	13	14	124	17	27	8	240	12	32	52
— 219	☋	—	10	1	104	10	16	28	260	19	43	32
— 190	☊	—	6	48	84	3	5	48	281	2	54	12
— 161	☋	—	3	35	63	19	55	8	301	10	4	52
— 132	☊	—	0	22	43	12	44	28	321	17	15	32
— 103	☋	+	2	51	23	5	33	47	342	0	26	13
— 74	☊	+	6	5	2	22	23	7	362	7	36	53
— 46	☋	+	9	18	347	21	12	27	17	8	47	33
— 17	☊	+	12	31	327	14	1	47	37	15	58	13
+ 1	☋	—	15	38	338	9	44	35	26	20	16	25
+ 30	☊	—	12	25	318	2	33	54	47	3	26	6
+ 59	☋	—	9	11	297	19	23	15	67	10	36	45

Mittlerer Ort der ☉				Mittl. anom. der ☉				Mittl. anom. des ☽			
s	°	′	″	s	°	′	″	s	°	′	″
11	20	58	6	9	9	45	44	8	1	29	19
10	13	10	57	8	19	27	9	4	3	54	0
9	23	23	49	7	29	8	15	0	6	18	41
9	3	36	40	7	8	49	31	8	8	43	22
8	13	49	31	6	18	30	46	4	11	8	3
7	24	2	23	5	28	12	2	0	13	32	43
7	4	15	14	5	7	53	17	8	15	57	24
6	14	28	5	4	17	34	33	4	18	22	5
6	25	16	19	4	28	3	6	4	15	30	45
6	5	29	11	4	7	44	21	0	17	55	26
5	15	42	2	3	17	25	36	8	20	20	8
4	25	54	53	2	27	6	52	4	22	44	49
4	6	7	45	2	6	48	8	0	25	9	30
3	16	20	36	1	16	29	23	8	27	34	11
2	26	33	27	0	26	10	39	4	29	58	52
2	6	46	19	0	5	51	54	1	2	23	33
1	16	59	10	11	15	33	10	9	4	48	14
0	27	12	1	10	25	14	25	5	7	12	55
1	8	0	14	11	5	42	58	5	4	21	35
0	18	13	6	10	15	24	13	1	6	46	16
11	28	25	57	9	25	5	28	9	9	10	56
11	8	38	48	9	4	46	43	5	11	35	37
10	18	51	39	8	14	27	59	1	14	0	18
9	29	4	31	7	24	9	14	9	16	24	59
9	9	17	22	7	3	50	30	5	18	49	40
8	19	30	13	6	13	31	45	1	21	14	20
7	29	43	5	5	23	13	1	9	23	39	1
8	10	31	19	6	3	41	34	9	20	47	41
7	20	44	11	5	13	22	49	5	23	12	22
7	0	57	2	4	23	4	5	1	25	37	3

Jahre	arg. latit. ☽				Vom Anfang des Jahrs				Vom Ende des Jahrs			
			′	″	T.	St.	′	″	T.	St.	′	″
88	☋	—	5	58	277	12	12	32	87	17	47	28
117	☊	—	2	45	257	5	1	52	108	0	58	8
146	☋	+	0	28	236	21	51	11	128	8	8	49
175	☊	+	3	42	216	14	40	31	148	15	19	29
204	☋	+	6	55	196	7	29	50	168	22	30	10
233	☊	+	10	8	176	0	19	10	189	5	40	50
262	☋	+	13	21	155	17	8	30	209	12	51	30
280	☋	—	14	39	166	12	51	17	198	17	8	43
309	☊	—	11	25	146	5	40	37	219	0	19	23
338	☋	—	8	12	125	22	29	57	239	7	30	3
367	☊	—	5	8	105	15	19	17	259	14	40	43
396	☋	—	1	55	85	8	8	36	279	21	51	24
425	☊	+	1	18	65	0	57	56	300	5	2	4
454	☋	+	4	32	44	17	47	16	320	12	12	44
483	☊	+	7	45	24	10	36	36	340	19	23	24
512	☋	+	10	58	4	3	25	55	361	2	34	5
540	☊	+	14	12	349	2	15	15	16	3	44	45
558	☊	—	13	58	359	21	58	2	5	8	1	58
587	☋	—	10	45	339	14	47	22	25	15	12	38
616	☊	—	7	31	319	7	36	41	45	22	23	19
645	☋	—	4	18	299	0	26	1	66	5	33	59
674	☊	—	1	5	278	17	15	21	86	12	44	39
703	☋	+	2	9	258	10	4	40	106	19	55	20
732	☊	+	5	22	237	2	54	0	127	3	6	0
761	☋	+	8	35	217	19	43	20	147	10	16	40
790	☊	+	11	49	197	12	32	39	167	17	27	21
819	☋	+	15	2	177	5	21	59	188	0	38	1
837	☋	—	13	8	188	1	4	46	177	4	55	14
866	☊	—	9	55	167	17	54	6	197	12	5	54
895	☋	—	6	41	147	10	43	25	217	19	16	35

Mittlerer Ort der ☉				anom. ☉				anom. ☽			
s	°	′	″	s	°	′	″	s	°	′	″
6	11	9	53	4	2	45	20	9	28	1	44
5	21	22	44	3	12	26	35	6	0	26	25
5	1	35	36	2	22	7	51	2	2	51	6
4	11	48	27	2	1	49	6	10	5	15	47
3	22	1	18	1	11	30	22	6	7	40	28
3	2	14	9	0	21	11	37	2	10	5	8
2	12	27	0	0	0	52	53	10	12	29	49
2	23	15	14	0	11	21	24	10	9	38	29
2	3	28	5	11	21	2	40	6	12	3	10
1	13	40	57	11	0	43	56	2	14	27	51
0	23	53	49	10	10	25	12	10	16	52	32
0	4	6	40	9	20	6	27	6	19	17	13
11	14	19	32	8	29	47	43	2	21	41	54
10	24	32	24	8	9	28	58	10	24	6	35
10	4	45	15	7	19	10	14	6	26	31	16
9	14	58	6	6	28	51	29	2	28	55	57
8	25	10	58	6	8	32	45	11	1	20	38
9	5	59	11	6	19	1	18	10	28	29	18
8	16	12	2	5	28	42	33	7	0	53	59
7	26	24	53	5	8	23	48	3	3	18	40
7	6	37	44	4	18	5	4	11	5	43	20
6	16	50	35	3	27	46	19	7	8	8	1
5	27	3	26	3	7	27	35	3	10	32	42
5	7	16	18	2	17	8	50	11	12	57	23
4	17	29	9	1	26	50	6	7	15	22	4
3	27	42	0	1	6	31	21	3	17	40	44
3	7	54	52	1	16	59	54	11	20	11	25
3	18	43	6	0	26	41	10	11	17	20	5
2	28	55	57	0	6	22	25	7	19	44	46
2	9	8	48	11	16	3	41	3	22	9	27

Jahre	arg. latit. ☽			Vom Anfang des Jahrs				Vom Ende des Jahrs			
		′	″	T.	St.	′	″	T.	St.	′	″
924	☊ —	3	28	127	3	32	46	238	2	27	14
953	☋ —	0	15	106	20	22	6	258	9	37	54
982	☊ +	2	58	86	13	11	25	278	16	48	35
1011	☋ +	6	12	66	6	0	45	298	23	59	15
1040	☊ +	9	25	45	22	50	5	319	7	9	55
1669	☋ +	12	38	25	15	39	24	339	14	20	36
1087	☋ +	15	32	36	11	22	12	328	18	37	48
1116	☊ —	12	19	16	4	11	31	349	1	48	29
1144	☋ —	9	6	361	3	0	51	4	2	59	9
1173	☊ —	5	52	340	19	50	10	24	10	9	50
1202	☋ —	2	39	320	12	39	30	44	17	20	30
1231	☊ +	0	34	300	5	28	50	65	0	31	10
1260	☋ +	3	47	279	22	18	9	85	7	41	51
1289	☊ +	7	0	259	15	7	29	105	14	52	31
1318	☋ +	10	14	239	7	56	49	125	22	3	11
1347	☊ +	13	27	219	0	46	8	146	5	13	52
1365	☊ —	14	53	229	20	28	56	135	9	31	4
1394	☋ —	11	29	209	13	18	16	155	16	41	44
1423	☊ —	8	16	189	6	7	36	175	23	52	24
1452	☋ —	5	2	168	22	56	55	196	7	3	5
1481	☊ —	1	49	148	15	46	15	216	14	13	45
1510	☋ +	1	24	128	8	35	34	236	21	24	26
1539	☊ +	4	38	108	1	24	54	257	4	35	6
1568	☋ +	7	51	87	18	14	14	277	11	45	46
1597	☊ +	11	4	67	11	3	33	297	18	56	27
1626	☋ +	14	17	47	3	52	53	318	2	7	7
1644	☋ —	13	52	57	23	35	41	307	6	24	19
1673	☊ —	10	39	37	16	25	0	327	13	35	0
1702	☋ —	7	25	17	9	14	20	347	20	45	40
1730	☊ —	4	12	362	8	3	39	2	21	56	21

Mittlere Ort der ☉				anom. ☉				anom. ☽			
ſ	°	′	″	ſ	°	′	″	ſ	°	′	″
1	19	21	40	10	25	44	56	11	24	34	8
0	29	34	31	10	5	26	11	7	26	58	49
0	9	47	23	9	15	7	27	3	29	23	30
11	20	0	14	8	24	48	42	0	1	48	11
11	0	13	5	8	4	29	58	8	4	12	52
10	10	25	57	7	14	11	13	4	6	37	33
10	21	14	11	7	24	39	46	4	3	46	13
10	1	27	2	7	4	21	2	0	6	10	54
9	11	39	53	6	14	2	17	8	8	35	35
8	21	52	45	5	23	43	33	4	11	0	16
8	2	5	36	5	3	24	48	0	13	24	57
7	12	18	27	4	13	6	3	8	15	49	38
6	22	31	19	3	22	47	19	4	18	14	19
6	2	44	10	3	2	28	34	0	20	39	0
5	12	57	1	2	12	9	50	8	23	3	41
4	23	9	53	1	21	51	5	4	25	28	22
5	3	58	6	2	2	19	38	4	22	37	1
4	14	10	57	1	12	0	54	0	25	1	42
3	24	23	48	0	21	42	9	8	27	26	23
3	4	36	40	0	1	23	25	4	29	51	4
2	14	49	31	11	11	4	40	1	2	15	45
1	25	2	22	10	20	45	55	9	4	40	26
1	5	15	14	10	0	27	11	5	7	5	7
0	15	28	5	9	10	8	26	1	9	29	48
11	25	40	56	8	19	49	42	9	11	54	29
11	5	53	48	7	29	30	57	5	14	19	9
11	16	42	2	8	9	59	30	5	11	27	49
10	26	54	53	7	19	40	46	1	13	52	30
10	7	7	45	6	29	22	1	9	16	17	11
9	17	20	36	6	9	3	17	5	18	41	52

Jahre	arg. latit. ☽		′	″	Vom Anfang des Jahrs T.	St.	′	″	Vom Ende des Jahrs T.	St.	′	″
1759	☋	—	0	59	342	0	52	59	23	5	7	1
1788	☊	+	2	14	321	17	42	19	43	12	17	41
1817	☋	+	5	28	301	10	31	38	63	19	28	22
1846	☊	+	8	41	281	3	20	58	84	2	39	2
1875	☋	+	11	54	260	20	10	18	104	9	49	42
1904	☊	+	15	7	240	12	59	37	124	17	0	23
1922	☊	—	13	3	251	8	42	24	113	21	17	36
1951	☋	—	9	49	231	1	31	44	134	4	28	16
1980	☊	—	6	36	210	18	21	4	154	11	38	56
2009	☋	—	3	22	190	11	10	23	174	18	49	37
2038	☊	—	0	9	170	3	59	43	195	2	0	17
2067	☋	+	3	4	149	20	49	3	215	9	10	57
2096	☊	+	6	18	129	13	38	22	235	16	21	38
2125	☋	+	9	31	109	6	27	42	255	23	32	18
2154	☊	+	12	44	88	23	17	2	276	6	42	58
2172	☊	—	15	26	99	18	59	49	265	11	0	11
2201	☋	—	12	12	79	11	49	8	285	18	10	52
2230	☊	—	8	59	59	4	38	28	306	1	21	32
2259	☋	—	5	46	38	21	27	48	326	8	32	12
2288	☊	—	2	32	18	14	17	7	346	15	42	53
2316	☋	+	0	41	363	13	6	27	1	16	53	33
2345	☊	+	3	54	343	5	55	47	22	0	4	13
2374	☋	+	7	8	322	22	45	6	42	14	14	54
2403	☊	+	10	21	302	15	34	26	62	14	25	34
2432	☋	+	13	34	282	8	23	46	82	21	36	14
2450	☋	—	14	36	293	4	6	34	72	1	53	26
2479	☊	—	11	22	272	20	55	53	92	9	4	7
2508	☋	—	8	9	252	13	45	13	112	16	14	47
2537	☊	—	4	56	232	6	34	33	132	23	25	27
2566	☋	—	1	42	211	23	23	52	153	6	36	8

Mittlerer Ort der ⊙				anom. ⊙				anom. ☽			
f	°	′	″	f	°	′	″	f	°	′	″
8	27	33	27	5	18	44	32	1	21	6	33
8	7	46	18	4	28	25	47	9	23	31	14
7	17	59	10	4	8	7	3	5	25	55	55
6	28	12	1	3	17	48	18	1	28	20	36
6	8	24	52	2	27	29	34	10	0	45	17
5	18	37	44	2	7	10	49	6	3	9	58
5	29	25	59	2	17	39	22	6	0	18	37
5	9	38	50	1	27	20	38	2	2	43	18
4	19	51	41	1	7	1	53	10	5	7	59
4	0	4	33	0	16	43	9	6	7	32	40
3	10	17	24	11	26	24	24	2	9	57	21
2	20	30	15	11	6	5	39	10	12	22	2
2	0	43	7	10	15	46	55	6	14	46	43
1	10	55	58	9	25	28	10	2	17	11	24
0	21	8	49	9	5	9	26	10	19	36	5
1	1	57	3	9	15	37	59	10	16	44	44
0	12	9	55	8	25	19	14	6	19	9	25
11	22	22	46	8	5	0	30	2	21	34	6
11	2	35	37	7	14	41	45	10	23	58	47
10	12	48	29	6	24	23	1	6	26	23	28
9	23	1	20	6	4	4	16	2	28	48	9
9	3	14	11	5	13	45	31	11	1	12	50
8	13	27	3	4	23	26	47	7	3	37	31
7	23	39	54	4	3	8	2	3	6	2	12
7	3	52	45	3	12	49	18	11	8	26	53
7	14	40	59	3	23	17	50	11	5	35	33
6	24	53	50	3	2	59	5	7	8	0	14
6	5	6	41	2	12	40	21	3	10	24	55
5	15	19	32	1	22	21	36	11	12	49	36
4	25	32	24	1	2	2	52	7	15	14	17

Erstes

Neumonde No.	arg. latit. ☽	°	′	″	T.	St.	′	″
0	☊	0	0	0	0	0	0	0
1					29	12	44	1
2					59	1	28	6
3					88	14	12	9
4					118	2	56	12
5					147	15	40	15
	☋							
6	+	4	1	24	177	4	24	18
7					206	17	8	20
8					236	5	52	23
9					265	18	36	26
10					295	7	20	29
11					324	20	4	32
	☊							
12	+	8	2	47	354	8	48	38
					Zweytes			
13					18	15	32	38
14					48	4	16	41
15					77	17	0	44
16					107	5	44	46
17	−	18	36	3	136	18	28	49
	☋							
18	+	12	4	11	166	7	12	52
19					195	19	56	55
20					225	8	40	58
21					254	21	25	1
22					284	10	9	4
23	−	14	34	39	313	22	53	7
	☊							
24	+	16	5	35	343	11	37	10

Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
s	°	′	″	s	°	′	″	s	°	′	″
0	29	6	24	0	29	6	19	0	25	49	0
1	28	12	49	1	28	12	38	1	21	38	1
2	27	19	13	2	27	18	57	2	17	27	1
3	26	25	37	3	26	25	16	3	13	16	2
4	25	32	1	4	25	31	35	4	9	5	2
5	24	38	26	5	24	37	54	5	4	54	3
6	23	44	50	6	23	44	13	6	0	43	3
7	22	51	14	7	22	50	32	6	26	32	4
8	21	57	39	8	21	56	51	7	22	21	4
9	21	4	3	9	21	3	10	8	18	10	4
10	20	10	27	10	20	9	29	9	13	59	5
11	19	16	51	11	19	15	48	10	9	48	5

Jahr.

0	18	23	16	0	18	22	7	11	5	37	6
1	17	29	30	1	17	28	26	0	1	26	6
2	16	36	4	2	16	34	45	0	27	15	7
3	15	42	29	3	15	41	4	1	23	4	7
4	14	48	53	4	14	47	23	2	18	53	7
5	13	55	17	5	13	53	42	3	14	42	8
6	13	1	42	6	13	0	1	4	10	31	8
7	12	8	6	7	12	6	20	5	6	20	9
8	11	14	30	8	11	12	39	6	2	9	9
9	10	20	54	9	10	18	58	6	27	58	10
10	9	27	19	10	9	25	17	7	23	47	10
11	8	33	33	11	8	31	36	8	19	36	11

Drittes

Neumonde No.	arg. latit. ☽	°	′	″	T.	St.	′	″
25					7	18	21	12
26					37	7	5	15
27					66	19	49	18
28					96	8	33	21
29	—	10	33	16	125	21	17	24
	☋							
30	+	20	6	58	155	10	1	27
31					184	22	45	30
32					214	11	29	33
33					244	0	13	36
34					273	12	57	39
35	—	6	31	52	303	1	41	42
	☊							
36					332	14	25	45
37					362	3	9	47
					Viertes			
38					26	9	53	50
39					55	22	37	53
40					85	11	21	56
41	—	2	30	28	115	0	5	59
	☋							
42					144	12	50	2
43					174	1	34	5
44					203	14	18	8
45					233	3	2	11
46					262	15	46	14
	☊							
47	+	1	30	56	292	4	30	16
48					321	17	14	19
49					351	5	58	22

Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
s	°	′	″	s	°	′	″	s	°	′	″
0	7	40	7	0	7	37	55	9	15	25	11
1	6	46	31	1	6	44	14	10	11	14	12
2	5	52	55	2	5	50	33	11	7	3	12
3	4	59	20	3	4	56	51	0	2	52	13
4	4	5	44	4	4	3	10	0	28	41	13
5	3	12	8	5	3	9	29	1	24	30	13
6	2	18	33	6	2	15	48	2	20	19	14
7	1	24	57	7	1	22	7	3	16	8	14
8	0	31	21	8	0	28	26	4	11	57	15
8	29	37	45	8	29	34	45	5	7	46	15
9	28	44	10	9	28	41	4	6	3	35	16
10	27	50	34	10	27	47	23	6	29	24	16
11	26	56	58	11	26	53	42	7	25	13	16

Jahr.

0	26	3	22	0	26	0	1	8	21	2	17
1	25	9	47	1	25	6	20	9	16	51	17
2	24	16	11	2	24	12	39	10	12	40	18
3	23	22	35	3	23	18	58	11	8	29	18
4	22	29	0	4	22	25	17	0	4	18	19
5	21	35	24	5	21	31	36	1	0	7	19
6	20	41	48	6	20	37	55	1	25	56	20
7	19	48	12	7	19	44	14	2	21	45	20
8	18	54	37	8	18	50	33	3	17	34	21
9	18	1	1	9	17	56	52	4	13	23	21
10	17	7	25	10	17	3	11	5	9	12	22
11	16	13	50	11	16	9	30	6	5	1	22

Neumonde No.	°	'	"	T.	St.	'	"
50				15	12	42	25
51				45	1	26	28
52				74	14	10	31
	☋						
53	+ 5	32	19	104	2	54	34
54				133	15	38	37
55				163	4	22	40
56				192	17	6	43
57				222	5	50	46
58				251	18	34	49
	☊						
59	+ 9	33	43	281	7	18	51
60				310	20	2	54
61				340	8	46	57
							Sechstes
62				4	15	31	0
63				34	4	15	3
64	− 17	5	7	63	16	59	6
	☋						
65	+ 13	35	7	93	5	43	9
66				122	18	27	12
67				152	7	11	15
68				181	19	55	17
69				211	8	39	20
70	− 13	3	44	240	21	23	23
	☊						
71	+ 17	36	30	270	10	7	26
72				299	22	51	29
73				329	11	35	32
74				359	0	19	35

Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
s	°	′	″	s	°	′	″	s	°	′	″
0	15	20	14	0	15	15	49	7	0	50	22
1	14	26	38	1	14	22	8	7	26	39	23
2	13	33	2	2	13	28	27	8	22	28	23
3	12	39	27	3	12	34	46	9	18	17	24
4	11	45	51	4	11	41	5	10	14	6	24
5	10	52	15	5	10	47	24	11	9	55	25
6	9	58	40	6	9	53	43	0	5	44	25
7	9	5	4	7	9	0	2	1	1	33	25
8	8	11	28	8	8	6	21	1	27	22	26
9	7	17	52	9	7	12	40	2	23	11	26
10	6	24	17	10	6	18	59	3	19	0	27
11	5	30	41	11	5	25	18	4	14	49	27

Jahr.

0	4	37	5	0	4	31	37	5	10	38	28
1	3	43	29	1	3	37	56	6	6	27	28
2	2	49	54	2	2	44	15	7	2	16	29
3	1	56	18	3	1	50	34	7	28	5	29
4	1	2	42	4	0	56	53	8	23	54	30
5	0	9	7	5	0	3	12	9	19	43	30
5	29	15	31	5	29	9	31	10	15	32	31
6	28	21	55	6	28	15	50	11	11	21	31
7	27	28	19	7	27	22	9	0	7	10	31
8	26	34	44	8	26	28	28	1	2	59	32
9	25	41	8	9	25	34	47	1	28	48	32
10	24	47	32	10	24	41	6	2	24	37	33
11	23	53	56	11	23	47	25	3	20	26	33

Neumonde	arg. latit. ☽							
No.		°	′	″	T.	St.	′	″
75					23	7	3	38
76	—	9	2	20	52	19	47	41
	☋							
77					82	8	31	44
78					111	21	15	46
79					141	9	59	49
80					170	22	43	52
81					200	11	27	55
82	—	5	0	56	230	0	11	58
	☊							
83					259	12	56	1
84					289	1	40	4
85					318	14	24	7
86					348	3	8	10
								Achtes
87					12	9	52	13
88	—	0	59	33	41	22	36	16
	☋							
89					71	11	20	18
90					101	0	4	21
91					130	12	48	24
92					160	1	32	27
93					189	14	16	30
	☊							
94	+	3	1	51	219	3	0	33
95					248	15	44	36
96					278	4	28	39
97					307	17	12	42
98					337	5	56	45

Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
ſ	°	′	″	ſ	°	′	″	ſ	°	′	″
0	23	0	21	0	22	53	44	4	16	15	34
1	22	6	45	1	22	0	3	5	12	4	34
2	21	13	9	2	21	6	22	6	7	53	34
3	20	19	34	3	20	12	41	7	3	42	35
4	19	25	58	4	19	19	0	7	29	31	35
5	18	32	22	5	18	25	19	8	25	20	36
6	17	38	46	6	17	31	38	9	21	9	36
7	16	45	11	7	16	37	57	10	16	58	37
8	15	51	35	8	15	44	15	11	12	47	37
9	14	57	59	9	14	50	34	0	8	36	38
10	14	4	24	10	13	56	53	1	4	25	38
11	13	10	48	11	13	3	12	2	0	14	39
Jahr.											
0	12	17	12	0	12	9	31	2	26	3	39
1	11	23	36	1	11	15	50	3	21	52	40
2	10	30	1	2	10	22	9	4	17	41	40
3	9	36	25	3	9	28	28	5	13	30	40
4	8	42	49	4	8	34	47	6	9	19	41
5	7	49	14	5	7	41	6	7	5	8	41
6	6	55	38	6	6	47	25	8	0	57	42
7	6	2	2	7	5	53	44	8	26	46	42
8	5	8	26	8	5	0	3	9	22	35	43
9	4	14	51	9	4	6	22	10	18	24	43
10	3	21	15	10	3	12	41	11	14	13	43
11	2	27	39	11	2	19	0	0	10	2	44

Neumonde No.	arg. latit. ☽ °	′	″	T.	St.	′	″
99				1	12	40	48
	☋						
100	+ 7	3	15	31	1	24	50
101				60	47	8	53
102				90	2	52	56
103				119	15	36	59
104				149	4	21	2
105	− 19	35	35	178	17	5	5
	☊						
106	+ 11	4	38	208	5	49	8
107				237	18	33	11
108				267	7	17	14
109				296	20	1	17
110				326	8	45	19
111	− 15	34	12	355	21	29	22
							Zehntes
	☋						
112	+ 15	6	2	20	4	13	25
113				49	16	57	28
114				79	5	41	31
115				108	18	25	34
116				138	7	9	37
117	− 11	32	48	167	19	53	40
	☊						
118	+ 19	7	26	197	8	37	43
119				226	21	21	46
120				256	10	5	48
121				285	22	49	51
122				315	11	33	54
123	− 7	31	24	345	0	17	57
	☋						

Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
s	°	′	″	s	°	′	″	s	°	′	″
0	1	34	3	0	1	25	19	1	5	51	44
1	0	40	28	1	0	31	38	2	1	40	45
1	29	46	52	1	29	37	57	2	27	29	45
2	28	53	16	2	28	44	16	3	23	18	46
3	27	59	40	3	27	50	35	4	19	7	46
4	27	6	5	4	26	56	54	5	14	56	47
5	26	12	29	5	26	3	13	6	10	45	47
6	25	18	53	6	25	9	32	7	6	34	48
7	24	25	18	7	24	15	51	8	2	23	48
8	23	31	42	8	23	22	10	8	28	12	49
9	22	38	6	9	22	28	29	9	24	1	49
10	21	44	30	10	21	34	48	10	19	50	49
11	20	50	55	11	20	41	7	11	15	39	50

Jahr.

0	19	57	19	0	19	47	26	0	11	28	50
1	19	3	43	1	18	53	45	1	7	17	51
2	18	10	8	2	18	0	4	2	3	6	51
3	17	16	32	3	17	6	23	2	28	55	52
4	16	22	56	4	16	12	42	3	24	44	52
5	15	29	20	5	15	19	1	4	20	33	52
6	14	35	45	6	14	25	20	5	16	22	53
7	13	42	9	7	13	31	39	6	12	11	53
8	12	48	33	8	12	37	58	7	8	0	54
9	11	54	58	9	11	44	17	8	3	49	54
10	11	1	22	10	10	50	36	8	29	38	55
11	10	7	46	11	9	56	55	9	25	27	55

Eilftes

Neumonde No.	arg. latit. ☽ ° ′ ″	T.	St.	′	″
124		9	7	2	0
125		38	19	46	3
126		68	8	30	6
127		97	21	14	9
128		127	9	58	12
129	— 3 30 1	156	22	42	15
	☊				
130		186	11	26	18
131		216	0	10	20
132		245	12	54	23
133		275	1	38	26
134		304	14	22	29
	☋				
135	+ 0 31 23	334	3	6	32
136		363	15	50	35

Zwölftes

Neumonde No.	arg. latit. ☽ ° ′ ″	T.	St.	′	″
137		27	22	34	38
138		57	11	18	41
139		87	0	2	44
140		116	12	46	47
	☊				
141	+ 4 32 47	146	1	30	49
142		175	14	14	52
143		205	2	58	55
144		234	15	42	58
145		264	4	27	1
146		293	17	11	4
	☋				
147	+ 8 34 10	323	5	55	7
148		352	18	39	10

Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
s	°	′	″	s	°	′	″	s	°	′	″
0	9	14	10	0	9	3	14	10	21	16	56
1	8	20	35	1	8	9	33	11	17	5	56
2	7	26	59	2	7	15	52	0	12	54	57
3	6	33	23	3	6	22	11	1	8	43	57
4	5	39	47	4	5	28	30	2	4	32	58
5	4	46	12	5	4	34	49	3	0	21	58
6	3	52	36	6	3	41	8	3	26	10	58
7	2	59	0	7	2	47	27	4	21	59	59
8	2	5	25	8	1	53	46	5	17	48	59
9	1	11	49	9	1	0	5	6	13	38	0
10	0	18	13	10	0	6	24	7	9	27	0
10	29	24	37	10	29	12	43	8	5	16	1
11	28	31	2	11	28	19	2	9	1	5	1

Jahr.

0	27	37	26	0	27	25	20	9	26	54	1
1	26	43	50	1	26	31	39	10	22	43	2
2	25	50	15	2	25	37	58	11	18	32	2
3	24	56	39	3	24	44	17	0	14	21	3
4	24	3	3	4	23	50	36	1	10	10	3
5	23	9	27	5	22	56	55	2	5	59	4
6	22	15	52	6	22	3	14	3	1	48	4
7	21	22	16	7	21	9	33	3	27	37	5
8	20	28	40	8	20	15	52	4	23	26	5
9	19	35	4	9	19	22	11	5	19	15	6
10	18	41	29	10	18	28	30	6	15	4	6
11	17	47	53	11	17	34	49	7	10	53	7

Dreyzehntes

Neumonde No.	arg. latit. ☽ °	′	″	T.	St.	′	″
149				17	1	23	13
150				46	14	7	16
141				76	2	51	19
152	— 18	4	40	105	15	35	21
	☊						
153	+ 12	35	34	135	4	19	24
154				164	17	3	27
155				194	5	47	30
156				223	18	31	33
157				253	7	15	36
158	— 14	3	16	282	19	59	39
	☋						
159	+ 16	36	58	312	8	43	42
160				341	21	27	45
				Vierzehntes			
161				6	4	11	48
162				35	16	55	50
163				65	5	39	53
164	— 10	1	53	94	18	23	56
	☊						
165				124	7	7	59
166				153	19	52	2
167				183	8	36	5
168				212	21	20	8
169				242	10	4	11
170	— 6	0	29	271	22	48	14
	☋						
171				301	11	32	17
172				331	0	16	20
173				360	13	0	22

Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
ſ	°	′	″	ſ	°	′	″	ſ	°	′	″
0	16	54	17	0	16	41	8	8	6	42	7
1	16	0	42	1	15	47	27	9	2	31	7
2	15	7	6	2	14	53	46	9	28	20	8
3	14	13	30	3	14	0	5	10	24	9	8
4	13	19	54	4	13	6	24	11	19	58	9
5	12	26	19	5	12	12	43	0	15	47	9
6	11	32	43	6	11	19	2	1	11	36	10
7	10	39	7	7	10	25	21	2	7	25	10
8	9	45	31	8	9	31	40	3	3	14	10
9	8	51	56	9	8	37	59	3	29	3	11
10	7	58	20	10	7	44	18	4	24	52	11
11	7	4	44	11	6	50	37	5	20	41	12

Jahr.

0	6	11	9	0	5	56	56	6	16	30	12
1	5	17	33	1	5	3	15	7	12	19	13
2	4	23	57	2	4	9	34	8	8	8	13
3	3	30	21	3	3	15	53	9	3	57	14
4	2	36	45	4	2	22	12	9	29	46	14
5	1	43	10	5	1	28	31	10	25	35	15
6	0	49	34	6	0	34	50	11	21	24	15
6	29	55	59	6	29	41	9	0	17	13	16
7	29	2	23	7	28	47	28	1	13	2	16
8	28	8	47	8	27	53	47	2	8	51	16
9	27	15	11	9	27	0	6	3	4	40	17
10	26	21	36	10	26	6	25	4	0	29	17
11	25	28	0	11	25	12	44	4	26	18	18

Neumonde No.	arg. latit. ☽	°	′	″	T.	St.	′	″
174					24	19	44	25
175					54	8	28	28
176	—	1	59	5	83	21	12	31
	☊							
177					113	9	56	34
178					142	22	40	37
179					172	11	24	40
180					202	0	8	43
181					231	12	52	46
	☋							
182	+	2	2	18	261	1	36	48
183					290	14	20	51
184					320	3	4	54
185					349	15	48	57
					Sechzehntes			
186					13	22	33	0
187					43	11	17	3
	☊							
188	+	6	3	42	73	0	1	6
189					102	12	45	9
190					132	1	29	12
191					161	14	13	15
192					191	2	57	18
193					220	15	41	20
	☋							
194	+	10	5	6	250	4	25	23
195					279	17	9	26
196					309	5	53	29
197					338	18	37	32

☉				anom. ☉				anom. ☽			
s	°	'	"	s	°	'	"	s	°	'	"
0	24	34	24	0	24	19	3	5	22	7	18
1	23	40	49	1	23	25	22	6	17	56	19
2	22	47	13	2	22	31	41	7	13	45	19
3	21	53	37	3	21	38	0	8	9	34	19
4	21	0	1	4	20	44	19	9	5	23	20
5	20	6	26	5	19	50	38	10	1	12	20
6	19	12	50	6	18	56	57	10	27	1	21
7	18	19	14	7	18	3	16	11	22	50	21
8	17	25	38	8	17	9	35	0	18	39	22
9	16	32	3	9	16	15	54	1	14	28	22
10	15	38	27	10	15	22	13	2	10	17	23
11	14	44	51	11	14	28	32	3	6	6	23
Jahr.											
0	13	51	16	0	13	34	51	4	1	55	24
1	12	57	40	1	12	41	10	4	27	44	24
2	12	4	4	2	11	47	29	5	23	33	25
3	11	10	28	3	10	53	48	6	19	22	25
4	10	16	53	4	10	0	7	7	15	11	25
5	9	23	17	5	9	6	25	8	11	0	26
6	8	29	41	6	8	12	44	9	6	49	26
7	7	36	5	7	7	19	3	10	2	38	27
8	6	42	30	8	6	25	22	10	28	27	27
9	5	48	54	9	5	31	41	11	24	16	28
10	4	55	18	10	4	38	0	0	20	5	28
11	4	1	43	11	3	44	19	1	15	54	28

Neumonde No.	arg. latit. ☽ ° ′ ″	T. St. ′ ″
198		3 1 21 35
199	− 16 33 44	32 14 5 38
	☊	
200	+ 14 6 30	62 2 49 41
201		91 15 33 44
202		121 4 17 47
203		150 17 1 50
204		180 5 45 52
205	− 12 32 21	209 18 29 55
	☋	
206	+ 18 7 53	239 7 13 58
207		268 19 58 1
208		298 8 42 4
209		327 21 26 7
210		357 10 10 10
		Achtzehntes
211	− 8 30 57	21 16 54 13
	☊	
212		51 5 38 16
213		80 18 22 19
214		110 7 6 21
215		139 19 50 24
216		169 8 34 27
217	− 4 29 33	198 21 18 30
	☋	
218		228 10 2 33
219		257 22 48 36
220		287 11 30 39
221		317 0 14 42
222		346 12 58 45

Tafel.

Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
ſ	°	′	″	ſ	°	′	″	ſ	°	′	″
0	3	8	7	0	2	50	38	2	11	43	29
1	2	14	31	1	1	56	57	3	7	32	29
2	1	20	55	2	1	3	16	4	3	21	30
3	0	27	20	3	0	9	35	4	29	10	30
3	29	33	44	3	29	15	54	5	24	59	31
4	28	40	8	4	28	22	13	6	20	48	31
5	27	46	33	5	27	28	32	7	16	37	32
6	26	52	57	6	26	34	51	8	12	26	32
7	25	59	21	7	25	41	10	9	8	15	33
8	25	5	45	8	24	47	29	10	4	4	33
9	24	12	10	9	23	53	48	10	29	53	34
10	23	18	34	10	23	0	7	11	25	42	34
11	22	24	58	11	22	6	26	0	21	31	34
Jahr.											
0	21	31	23	0	21	12	45	1	17	20	35
1	20	37	47	1	20	19	4	2	13	9	35
2	19	44	11	2	19	25	23	3	8	58	36
3	18	50	35	3	18	31	42	4	4	47	36
4	17	57	0	4	17	38	1	5	0	36	37
5	17	3	24	5	16	44	20	5	26	25	37
6	16	9	48	6	15	50	39	6	22	14	37
7	15	16	12	7	14	56	58	7	18	3	38
8	14	22	37	8	14	3	17	8	13	52	38
9	13	29	1	9	13	9	36	9	9	41	39
10	12	35	25	10	12	15	55	10	5	30	39
11	11	41	50	11	11	22	14	11	1	19	40

Neumonde No.	arg. latit. ☽ ° ' "	T. St. ' "
223	— 0 28 10	10 19 42 48
	☊	
224		40 8 26 51
225		69 21 10 54
226		99 9 54 56
227		128 22 38 59
228		158 11 23 2
	☋	
229	+ 3 33 14	188 0 7 5
230		217 12 51 8
231		247 1 35 11
232		276 14 19 14
233		306 3 3 17
234		335 15 47 20
	☊	
235	+ 7 34 38	365 4 31 22
		Zwanzigstes
236		29 11 15 25
237		58 23 59 28
238		88 12 43 31
239		118 1 27 34
240	— 19 4 13	147 14 11 37
	☋	
241	+ 11 36 2	177 2 55 40
242		206 15 39 43
243		236 4 23 46
244		265 17 7 49
245		295 5 51 51
246	— 15 2 49	324 18 35 54
	☊	
247	— 15 37 25	354 7 19 57

Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
s	°	′	″	s	°	′	″	s	°	′	″
0	10	48	14	0	10	28	33	11	27	8	40
1	9	54	38	1	9	34	52	0	22	57	41
2	9	1	2	2	8	41	11	1	18	46	41
3	8	7	27	3	7	47	30	2	14	35	42
4	7	13	51	4	6	53	49	3	10	24	42
5	6	20	15	5	6	0	8	4	6	13	43
6	5	26	39	6	5	6	27	5	2	2	43
7	4	33	4	7	4	12	46	5	27	51	43
8	3	39	28	8	3	19	5	6	23	40	44
9	2	45	52	9	2	25	24	7	19	29	44
10	1	52	17	10	1	31	43	8	15	18	45
11	0	58	41	11	0	38	2	9	11	7	45
0	0	5	5	11	29	44	21	10	6	56	46

Jahr.

0	29	11	29	0	28	50	40	11	2	45	46
1	28	17	54	1	27	56	59	11	28	34	46
2	27	24	18	2	27	3	18	0	24	23	47
3	26	30	42	3	26	9	37	1	20	12	47
4	25	37	7	4	25	15	56	2	16	1	48
5	24	43	31	5	24	22	15	3	11	50	48
6	23	49	55	6	23	28	34	4	7	39	49
7	22	56	19	7	22	34	53	5	3	28	49
8	22	2	44	8	21	41	12	5	29	17	50
9	21	9	8	9	20	47	31	6	25	6	50
10	20	15	32	10	19	53	50	7	20	55	51
11	19	21	56	11	19	0	8	8	16	44	51

Neumonde No.	arg. latit. ☽ ° ′ ″	T.	St.	′	″
248		18	14	4	0
249		48	2	48	3
250		77	15	32	6
251		107	4	16	9
252	− 11 1 25	136	17	0	12
	☋				
253	+ 19 38 49	166	5	44	15
254		195	18	28	18
255		225	7	12	21
256		254	19	56	23
257		284	8	40	26
258	− 7 0 1	313	21	24	29
	☊				
259		343	10	8	32
		Zwey und zwan-			
260		7	16	52	35
261		37	5	36	38
262		66	18	20	41
263		96	7	4	44
264	− 2 58 38	125	19	48	47
	☋				
265		155	8	32	50
266		184	21	16	52
267		214	10	0	55
268		243	22	44	58
269		273	11	29	1
	☊				
270	+ 1 2 46	303	0	13	4
271		332	12	57	7
272		362	1	41	10

zigstes Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
s	°	′	″	s	°	′	″	s	°	′	″
0	18	28	21	0	18	6	27	9	12	33	52
1	17	34	45	1	17	12	46	10	8	22	52
2	16	41	9	2	16	19	5	11	4	11	52
3	15	47	34	3	15	25	24	0	0	0	53
4	14	53	58	4	14	31	43	0	25	49	53
5	14	0	22	5	13	38	2	1	21	38	54
6	13	6	46	6	12	44	21	2	17	27	54
7	12	13	11	7	11	50	40	3	13	16	55
8	11	19	25	8	10	56	59	4	9	5	55
9	10	25	49	9	10	3	18	5	4	54	55
10	9	32	23	10	9	9	37	6	0	43	56
11	8	38	48	11	8	15	56	6	26	32	56
zigstes Jahr.											
0	7	45	12	0	7	22	15	7	22	21	57
1	6	51	36	1	6	28	34	8	18	10	57
2	5	58	1	2	5	34	53	9	13	59	58
3	5	4	25	3	4	41	12	10	9	48	58
4	4	10	49	4	3	47	31	11	5	37	59
5	3	17	13	5	2	53	50	0	1	26	59
6	2	23	38	6	2	0	9	0	27	16	0
7	1	30	2	7	1	6	28	1	23	5	0
8	0	36	26	8	0	12	47	2	18	54	1
8	29	42	51	8	29	19	6	3	14	43	1
9	28	49	15	9	28	25	25	4	10	32	1
10	27	55	39	10	27	31	44	5	6	21	2
11	27	2	3	11	26	38	3	6	2	10	2

Drey und zwan=

Neumonde No.	arg. latit. ☽ ° ′ ″	T.	St.	′	″
273		26	8	25	13
274		55	21	9	16
275		85	9	53	19
	☋				
276	+ 5 4 10	114	22	37	21
277		144	11	21	24
278		174	0	5	27
279		203	12	49	30
280		233	1	33	33
281		262	14	17	36
	☊				
282	+ 9 5 33	292	3	1	39
283		321	15	45	42
284		351	4	29	45

Vier und zwan=

285		15	11	13	48
286		44	23	57	50
287	− 17 33 17	74	12	41	53
	☋				
288	+ 13 6 57	104	1	25	56
289		133	14	9	59
290		163	2	54	2
291		192	15	38	5
292		222	4	22	8
293	− 13 31 53	251	17	6	11
	☊				
294	+ 17 8 21	281	5	50	14
295		310	18	34	17
296		340	7	18	20

ziastes Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
s	°	′	″	s	°	′	″	s	°	′	″
0	26	8	28	0	25	44	22	6	27	59	3
1	25	14	52	1	24	50	41	7	23	48	3
2	24	21	16	2	23	57	0	8	19	37	4
3	23	27	41	3	23	3	19	9	15	26	4
4	22	34	5	4	22	9	38	10	11	15	4
5	21	40	29	5	21	15	57	11	7	4	5
6	20	46	53	6	20	22	16	0	2	53	5
7	19	53	18	7	19	28	35	0	28	42	6
8	18	59	42	8	18	34	54	1	24	31	6
9	18	6	6	9	17	41	13	2	20	20	7
10	17	12	30	10	16	47	32	3	16	9	7
11	16	18	55	11	15	53	51	4	11	58	8

zigstes Jahr.

0	15	25	19	0	15	0	10	5	7	47	8
1	14	31	41	1	14	6	29	6	3	36	9
2	13	38	7	2	13	12	48	6	29	25	9
3	12	44	32	3	12	19	7	7	25	14	10
4	11	50	56	4	11	25	26	8	21	3	10
5	10	57	20	5	10	31	45	9	16	52	10
6	10	3	45	6	9	38	4	10	12	41	11
7	9	10	9	7	8	44	23	11	8	30	11
8	8	16	33	8	7	50	42	0	4	19	12
9	7	22	57	9	6	57	1	1	0	8	12
10	6	29	22	10	6	3	20	1	25	57	13
11	5	53	46	11	5	9	39	2	21	46	13

Neumonde No.	arg. latit. ☽ ° ′ ″	T. St. ′ ″
297		4 14 2 22
298		34 2 46 25
299	— 9 30 30	63 15 30 28
	☋	
300		93 4 14 31
301		122 16 58 34
302		152 5 42 37
303		181 18 26 40
304		211 7 10 43
305	— 5 29 6	240 19 54 46
	☊	
306		270 8 38 49
307		299 21 22 52
308		329 10 6 54
309		358 22 50 57
		Sechs und zwan-
310		23 5 35 0
311	— 1 27 42	52 18 19 3
	☋	
312		82 7 3 6
313		111 19 47 9
314		141 8 31 12
315		170 21 15 15
316		200 9 59 18
	☊	
317	+ 2 33 41	229 22 43 21
318		259 11 27 24
319		289 0 11 26
320		318 12 55 29
321		348 1 39 32

☉				anom. ☉				anom. ☽			
s	°	′	″	s	°	′	″	s	°	′	″
0	4	42	10	0	4	15	58	3	17	35	13
1	3	48	35	1	3	22	17	4	13	24	14
2	2	54	59	2	2	28	36	5	9	13	14
3	2	1	23	3	1	34	55	6	5	2	15
4	1	7	47	4	0	41	13	7	0	51	15
5	0	14	12	4	29	47	32	7	26	40	16
5	29	20	36	5	28	53	51	8	22	29	16
6	28	27	0	6	28	0	10	9	18	18	17
7	27	33	25	7	27	6	29	10	14	7	17
8	26	39	49	8	26	12	48	11	9	56	18
9	25	46	13	9	25	19	7	0	5	45	18
10	24	52	37	10	24	25	26	1	1	34	19
11	23	59	2	11	23	31	45	1	27	23	19

zigstes Jahr.

0	23	5	26	0	22	38	4	2	23	12	19
1	22	11	50	1	21	44	23	3	19	1	20
2	21	18	15	2	20	50	42	4	14	50	20
3	20	24	39	3	19	57	1	5	10	39	21
4	19	31	3	4	19	3	20	6	6	28	21
5	18	37	27	5	18	9	39	7	2	17	22
6	17	43	52	6	17	15	58	7	28	6	22
7	16	50	16	7	16	22	17	8	23	55	22
8	15	56	40	8	15	28	36	9	19	44	23
9	15	3	4	9	14	34	55	10	15	33	23
10	14	9	29	10	13	41	14	11	11	22	24
11	13	15	53	11	12	47	33	0	0	11	24

Neumonde No.	arg. latit. ☽ °	′	″	T.	St.	′	″
322				12	8	23	35
	☋						
323	+ 6	35	5	41	21	7	38
324				71	9	51	41
325				100	22	35	44
326				130	11	19	45
327				160	0	3	50
328	− 20	3	45	189	12	47	52
	☊						
329	+ 10	36	29	219	1	31	55
330				248	14	15	58
331				278	3	0	1
332				307	15	44	4
333				337	4	28	7
				Acht und zwan-			
334	− 16	2	21	1	11	12	10
	☋						
335	+ 14	37	52	30	23	56	13
336				60	12	40	16
337				90	1	24	19
338				119	14	8	22
339				149	2	52	24
340	− 12	0	58	178	15	36	27
	☊						
341	+ 18	39	16	208	4	20	30
342				237	17	4	33
343				267	5	48	36
344				296	18	32	39
345				326	7	16	42
346	− 7	59	34	355	20	0	45
	☋						

zigstes Jahr.

☉				anom. ☉				anom. ☽			
s	°	′	″	s	°	′	″	s	°	′	″
0	12	22	17	0	11	53	52	1	3	0	25
1	11	28	42	1	11	0	11	1	28	49	25
2	10	35	6	2	10	6	30	2	24	38	26
3	9	41	30	3	9	12	49	3	20	27	26
4	8	47	54	4	8	19	8	4	16	16	27
5	7	54	19	5	7	25	27	5	12	5	27
6	7	0	43	6	6	31	46	6	7	54	28
7	6	7	7	7	5	38	5	7	3	43	28
8	5	13	32	8	4	44	24	7	29	32	28
9	4	19	56	9	3	50	43	8	25	21	29
10	3	26	20	10	2	57	2	9	21	10	29
11	2	32	44	11	2	3	21	10	16	59	30

zigstes Jahr.

0	1	39	9	0	1	9	40	11	12	48	30
1	0	45	33	1	0	15	59	0	8	37	31
1	29	51	57	1	29	22	18	1	4	26	31
2	28	58	21	2	28	28	37	2	0	15	31
3	28	4	46	3	27	34	56	2	26	4	32
4	27	11	10	4	26	41	15	3	21	53	32
5	26	17	34	5	25	47	34	4	17	42	33
6	25	23	59	6	24	53	53	5	13	31	34
7	24	30	23	7	24	0	12	6	9	20	34
8	23	36	47	8	23	6	31	7	5	9	35
9	22	43	11	9	22	12	50	8	0	58	35
10	21	49	36	10	21	19	9	8	26	47	36
11	20	56	0	11	20	25	28	9	22	36	36

Neumonde	arg. latit. ☽	
No.	° ′ ″	T. St. ′ ″
347		20 2 44 48
348		49 15 28 51
349		79 4 12 54
350		108 16 56 56
351		138 5 40 59
352	— 3 58 10	167 18 25 2
	☊	
353		197 7 9 5
354		226 19 53 8
355		256 8 37 11
356		285 21 21 14
357		315 10 5 17
	☋	
358	+ 0 3 13	344 22 49 20
		Von jedem Neumond
½	☋ 15 20 7	14 18 22 1

Verwandlung (§. 20)
der Bissextilform in gemeine Jahrform.

Im Jahr nach dem Schaltjahr	Vor dem 24. Febr.	Nach dem 24. Febr.
1	— 18 Stund.	+ 6 Stund.
2	— 12	+ 12
3	— 6	+ 18

☉				anom. ☉				anom. ☽			
ſ	°	′	″	ſ	°	′	″	ſ	°	′	″
0	20	2	24	0	19	31	47	10	18	25	37
1	19	8	48	1	18	38	6	11	14	14	37
2	18	15	13	2	17	44	25	0	10	3	37
3	17	21	37	3	16	50	44	1	5	52	38
4	16	28	1	4	15	57	3	2	1	41	38
5	15	34	26	5	15	3	22	2	27	30	39
6	14	40	50	6	14	9	41	3	23	19	39
7	13	47	14	7	13	16	0	4	19	8	40
8	12	53	38	8	12	22	19	5	14	57	40
9	12	0	3	9	11	28	37	6	10	46	40
10	11	6	27	10	10	34	56	7	6	35	41
11	10	12	51	11	9	41	15	8	2	24	41
zum nächsten Vollmonde.											
0	14	33	12	0	14	33	9	6	12	54	30

Verwandlung (§. 20)
der gemeinen Jahrform in Bissextilform.

Im Jahr nach dem Schaltjahr	Vor dem 24. Febr.	Nach dem 24. Febr.
1	+ 18 St.	− 6 St
2	+ 12	− 12
3	+ 6	− 18

Dritte Tafel

Gesammlete Tage der Schaltjahrform.

Jan.	Febr.	Mart.	Apr.	Mai	Jun.	Jul.	Aug.	Sept.	Oct.	Nov.	Dec.
1	32	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
2	33	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
3	34	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
4	35	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
5	36	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
6	37	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
7	38	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
8	39	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
9	40	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
10	41	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
11	42	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
12	43	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
13	44	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
14	45	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
15	46	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
16	47	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
17	48	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
18	49	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
19	50	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
20	51	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
21	52	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
22	53	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
23	54	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
24	55	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
25	56	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
26	57	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
27	58	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
28	59	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
29	60	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
30	—	90	121	151	182	212	243	274	304	335	365
31	—	91	—	152	—	213	244	—	305	—	366

Oerter	Unterschied des Mittags				Polhöhe		
	St.	′	″		°	′	″
Paris - - -	0	6	0		48	50	14
Berlin - -	0	44	25	O	52	32	30
Bologna - -	0	36	5	O	44	29	40
Breſt - - -	0	27	23	W	48	23	0
Brüſſel - -	0	8	7	O	50	51	0
Conſtantinopel	1	46	14	O	41	1	10
Copenhagen ,	0	41	41	O	55	40	45
Danzig - -	1	4	44	O	54	22	0
Genf - - -	0	17	0	O	46	12	0
Goettingen	0	30	16	O	51	32	18
Greenwich	0	9	10	W	51	28	30
Leipzig - -	0	40	0	O	51	19	41
Madrit - -	0	24	18	W	40	25	0
Marſeille -	0	12	9	O	43	17	45
München -	0	37	0	O	48	9	55
Neapolis -	0	47	35	O	40	50	15
Nüremberg	0	34	56	O	49	27	17
Padua - -	0	38	22	O	45	22	26
Pekin - - -	7	37	10	O	39	54	0
Petersburg -	1	52	0	O	59	56	0
Prag - - -	0	49	40	O	50	4	30
Rom - - -	0	40	37	O	41	54	11
Stockholm -	1	2	51	O	59	20	30
Schwezingen	0	24	35	O	49	56	30
Strasburg - -	0	21	45	O	48	34	35
Tyrnau - -	1	0	55	O	48	23	30
Warſchau -	1	15	0	O	52	14	0
Wien - - -	0	56	10	O	48	12	32
Upſal - - -	1	1	10	O	59	51	50
Uraniburg -	0	42	10	O	55	54	15
Liſſabon - -	0	45	50	W	38	42	20
London - -	0	9	40	W	51	31	0

Argum.

	O +			I +			II +		
	St.	′	″	St.	′	″	St.	′	″
0	0	0	0	5	13	18	8	47	6
1	0	11	3	5	22	30	8	51	42
2	0	22	6	5	31	34	8	56	6
3	0	33	8	5	40	32	9	0	20
4	0	44	10	5	49	21	9	4	24
5	0	55	12	5	58	3	9	8	16
6	1	6	10	6	6	38	9	11	56
7	1	17	8	6	16	4	9	15	28
8	1	28	4	6	23	21	9	18	46
9	1	38	58	6	31	33	9	21	53
10	1	49	50	6	39	35	9	24	52
11	2	0	40	6	47	27	9	27	37
12	2	11	26	6	55	12	9	30	12
13	2	22	10	7	2	47	9	32	36
14	2	32	52	7	10	13	9	34	48
15	2	43	29	7	17	31	9	36	49
16	2	54	2	7	24	38	9	38	39
17	3	4	32	7	31	37	9	40	18
18	3	14	57	7	38	26	9	41	46
19	3	25	19	7	45	5	9	43	4
20	3	35	34	7	51	34	9	44	9
21	3	45	46	7	57	54	9	45	4
22	3	55	53	8	4	2	9	45	49
23	4	5	54	8	10	2	9	46	21
24	4	15	50	8	15	51	9	46	43
25	4	25	41	8	21	29	9	46	54
26	4	35	25	8	26	58	9	46	54
27	4	45	3	8	32	15	9	46	43
28	4	54	34	8	37	23	9	46	22
29	5	3	59	8	42	20	9	45	50
30	5	13	18	8	47	6	9	45	7
	— XI			— X			— IX		

anom. med. ☽

III + St.	′	″	IV + St.	′	″	V + St.	′	″	
9	45	7	8	7	18	4	33	31	30
9	44	14	8	1	46	4	25	2	29
9	43	10	7	56	6	4	16	30	28
9	41	55	7	50	18	4	7	53	27
9	40	30	7	44	22	3	59	13	26
9	38	55	7	38	19	3	50	30	25
9	37	10	7	32	10	3	41	42	24
9	35	14	7	25	52	3	32	52	23
9	33	8	7	19	28	3	23	59	22
9	30	53	7	12	58	3	15	3	21
9	28	26	7	6	20	3	6	4	20
9	25	50	6	59	35	2	57	2	19
9	23	6	6	52	45	2	47	57	18
9	20	10	6	45	48	2	38	50	17
9	17	5	6	38	44	2	29	41	16
9	13	51	6	31	35	2	20	31	15
9	10	26	6	24	19	2	11	18	14
9	6	54	6	16	58	2	2	2	13
9	3	11	6	9	31	1	52	45	12
8	59	19	6	1	58	1	43	27	11
8	55	19	5	54	21	1	34	8	10
8	51	11	5	46	37	1	24	47	9
8	46	51	5	38	48	1	15	24	8
8	42	24	5	30	55	1	6	1	7
8	37	49	5	22	57	0	56	37	6
8	33	4	5	14	53	0	47	12	5
8	28	11	5	6	46	0	37	47	4
8	23	10	4	58	34	0	28	21	3
8	18	0	4	50	18	0	18	54	2
8	12	43	4	41	57	0	9	27	1
8	7	18	4	33	31	0	0	0	0
— VIII			— VII			— VI			

Argum.

	O			I			II		
	−			−			−		
	St.	′	″	St.	′	″	St.	′	″
0	0	0	0	2	2	22	3	33	54
1	0	4	15	2	6	4	3	36	7
2	0	8	30	2	9	44	3	38	15
3	0	12	46	2	13	22	3	40	20
4	0	17	1	2	16	58	3	42	20
5	0	21	16	2	20	32	3	44	18
6	0	25	30	2	24	3	3	46	12
7	0	29	44	2	27	32	3	48	0
8	0	33	57	2	30	58	3	49	44
9	0	38	10	2	34	21	3	51	25
10	0	42	22	2	37	42	3	53	2
11	0	46	33	2	41	0	3	54	34
12	0	50	44	2	44	16	3	56	3
13	0	54	54	2	47	29	3	57	27
14	0	59	3	2	50	38	3	58	47
15	1	3	11	2	53	45	4	0	2
16	1	7	18	2	56	48	4	1	14
17	1	11	23	2	59	49	4	2	20
18	1	15	28	3	2	47	4	3	23
19	1	19	31	3	5	41	4	4	21
20	1	23	33	3	8	32	4	5	15
21	1	27	33	3	11	20	4	6	5
22	1	31	32	3	14	4	4	6	49
23	1	35	29	3	16	46	4	7	30
24	1	39	26	3	19	23	4	8	6
25	1	43	19	3	21	57	4	8	38
26	1	47	10	3	24	28	4	9	5
27	1	51	1	3	26	55	4	9	27
28	1	54	50	3	29	19	4	9	45
29	1	58	37	3	31	38	4	9	58
30	2	2	22	3	33	54	4	10	7
	+			+			+		
	XI			X			IX		

anom. med. ⊙

III			IV			V			
St.	′	″	St.	′	″	St.	′	″	
4	10	7	3	39	18	2	7	46	30
4	10	11	3	37	9	2	3	54	29
4	10	11	3	34	55	2	0	0	28
4	10	6	3	32	37	1	56	4	27
4	9	56	3	30	15	1	52	6	26
4	9	42	3	27	49	1	48	5	25
4	9	24	3	25	19	1	44	2	24
4	9	0	3	22	45	1	39	58	23
4	8	33	3	20	7	1	35	52	22
4	8	0	3	17	26	1	31	43	21
4	7	23	3	14	40	1	27	33	20
4	6	41	3	11	51	1	23	21	19
4	5	55	3	8	59	1	19	7	18
4	5	4	3	6	2	1	14	52	17
4	4	9	3	3	2	1	10	36	16
4	3	9	2	59	59	1	6	18	15
4	2	5	2	56	52	1	1	58	14
4	0	59	2	53	41	0	57	38	13
3	59	45	2	50	28	0	53	16	12
3	58	25	2	47	11	0	48	54	11
3	57	2	2	43	50	0	44	30	10
3	55	35	2	40	27	0	40	5	9
3	54	4	2	37	1	0	35	40	8
3	52	28	2	33	31	0	31	14	7
3	50	48	1	29	59	0	26	47	6
3	49	4	2	26	24	0	22	20	5
3	47	17	2	22	45	0	17	53	4
3	45	23	2	19	4	0	13	25	3
3	43	25	2	15	21	0	8	57	2
3	41	24	2	11	34	0	4	28	1
3	39	18	2	7	46	0	0	0	0
+ VIII			+ VII			+ VI			

Arg. Anom. ⊙ + Anom. ☽

	0 — VI +	I — VII +	II — VIII +	
0	0′ 0″	3′ 30″	6′ 4″	30
1	0 7	3 36	6 7	29
2	0 15	3 43	6 11	28
3	0 22	3 49	6 14	27
4	0 29	3 55	6 18	26
5	0 37	4 0	6 21	25
6	0 44	4 7	6 24	24
7	0 51	4 13	6 27	23
8	0 58	4 19	6 29	22
9	1 5	4 24	6 32	21
10	1 13	4 30	6 35	20
11	1 20	4 36	6 37	19
12	1 27	4 41	6 39	18
13	1 35	4 46	6 42	17
14	1 42	4 52	6 44	16
15	1 49	4 57	6 46	15
16	1 56	5 2	6 48	14
17	2 3	5 7	6 49	13
18	2 10	5 12	6 51	12
19	2 17	5 17	6 52	11
20	2 24	5 22	6 54	10
21	2 30	5 26	6 55	9
22	2 37	5 31	6 56	8
23	2 44	5 35	6 57	7
24	2 51	5 40	6 58	6
25	2 57	5 44	6 59	5
26	3 4	5 48	6 59	4
27	3 11	5 52	6 59	3
28	3 17	5 56	7 0	2
29	3 24	6 0	7 0	1
30	3 30	6 4	7 0	0
	V — XI +	IV — X +	III — IX +	

Arg. Anom. ⊙ — Anom. ☽

	0 — VI +	I — VII +	II — VIII +	
0	0′ 0″	5′ 16″	9′ 7″	30
1	0 11	5 26	9 13	29
2	0 22	5 35	9 18	28
3	0 33	5 44	9 23	27
4	0 44	5 54	9 28	26
5	0 55	6 3	9 32	25
6	1 6	6 12	9 37	24
7	1 17	6 20	9 42	23
8	1 28	6 29	9 46	22
9	1 39	6 38	9 50	21
10	1 50	6 46	9 54	20
11	2 1	6 55	9 58	19
12	2 12	7 3	10 1	18
13	2 22	7 11	10 4	17
14	2 23	7 19	10 8	16
15	2 44	7 27	10 11	15
16	2 54	7 35	10 13	14
17	3 5	7 42	10 16	13
18	3 15	7 50	10 18	12
19	3 26	7 57	10 20	11
20	3 36	8 4	10 22	10
21	3 47	8 11	10 24	9
22	3 57	8 18	10 26	8
23	4 7	8 25	10 27	7
24	4 17	8 31	10 29	6
25	4 27	8 38	10 30	5
26	4 37	8 44	10 31	4
27	4 47	8 50	10 31	3
28	4 57	8 56	10 32	2
29	5 6	9 2	10 32	1
30	5 16	9 7	10 32	0
	V — XI +	IV — X +	III — IX +	

		2 anom. ☽ + An. ☉	Anom. ☉ − 2 an. ☽	2(☽−☊) − An. ☽		2(☊−☉)		Für den Vollmond anom. ☽			
O. IV	0	0″	0″	0′	0″	0′	0″	0′	0″	30	
— +	3	3	2	0	6	0	5	0	6	27	
	6	6	3	0	12	0	10	0	12	24	
	9	8	5	0	18	0	14	0	18	21	
	12	11	7	0	24	0	19	0	24	18	
	15	14	8	0	29	0	24	0	29	15	
	18	16	10	0	35	0	28	0	35	12	
	21	19	11	0	40	0	33	0	40	9	
	24	21	13	0	46	0	37	0	46	6	
	27	24	15	0	51	0	41	0	51	3	+ −
I. VII	0	26	16	0	57	0	46	0	57	0	XI. V
— +	3	29	17	1	1	0	50	1	1	27	
	6	31	19	1	7	0	54	1	7	24	
	9	33	20	1	11	0	58	1	11	21	
	12	35	21	1	16	1	2	1	16	18	
	15	37	23	1	20	1	5	1	20	15	
	18	39	24	1	24	1	8	1	24	12	
	21	41	25	1	28	1	11	1	28	9	
	24	43	26	1	32	1	14	1	32	6	
	27	44	27	1	36	1	17	1	36	3	+ −
II. VIII	0	46	28	1	39	1	20	1	39	0	X. IV
— +	3	47	29	1	42	1	22	1	42	27	
	6	48	29	1	44	1	24	1	44	24	
	9	49	30	1	46	1	26	1	46	21	
	12	50	30	1	48	1	27	1	48	18	
	15	51	31	1	50	1	29	1	50	15	
	18	52	31	1	51	1	30	1	51	12	
	21	52	32	1	52	1	31	1	52	9	
	24	53	32	1	53	1	31	1	53	6	
	27	53	32	1	54	1	32	1	54	3	+ −
	30	53	32	1	54	1	32	1	54	0	IX. III

Zehnte Tafel

Tägliche Bewegung.

Tag	☊ ° ′ ″	☉ s ° ′ ″	Ap. ☉	Anom. ☽ s ° ′ ″	☽ s ° ′ ″
1	0 3 11	0 0 59 8	0	0 13 3 54	0 13 10 35
2	0 6 21	0 1 58 17	0	0 26 7 48	0 26 21 10
3	0 9 32	0 2 57 25	0	1 9 11 42	1 9 31 45
4	0 12 43	0 3 56 33	0	1 22 15 36	1 22 42 20
5	0 15 53	0 4 55 42	1	2 5 19 30	2 5 52 55
6	0 19 4	0 5 54 50	1	2 18 23 24	2 19 3 30
7	0 22 14	0 6 53 58	1	3 1 27 18	3 2 14 5
8	0 25 25	0 7 53 7	1	3 14 31 11	3 15 24 40
9	0 28 36	0 8 52 15	2	3 27 35 5	3 28 35 15
10	0 31 46	0 9 51 23	2	4 10 38 59	4 11 45 50
11	0 34 57	0 10 50 32	2	4 23 42 53	4 24 56 25
12	0 38 8	0 11 49 40	2	5 6 46 47	5 8 7 0
13	0 41 18	0 12 48 48	2	5 19 50 41	5 21 17 35
14	0 44 29	0 13 47 57	2	6 2 54 35	6 4 28 10
15	0 47 40	0 14 47 5	3	6 15 58 29	6 17 38 45
16	0 50 50	0 15 46 13	3	6 29 2 23	7 0 49 20
17	0 54 1	0 16 45 22	3	7 12 6 17	7 13 59 55
18	0 57 11	0 17 44 30	3	7 25 10 11	7 27 10 30
19	1 0 22	0 18 43 38	3	8 8 14 6	8 10 21 6
20	1 3 33	0 19 42 47	4	8 21 18 0	8 23 31 41
21	1 6 43	0 20 41 55	4	9 4 21 54	9 6 42 16
22	1 9 54	0 21 41 3	4	9 17 25 47	9 19 52 51
23	1 13 5	0 22 40 12	4	10 0 29 41	10 3 3 26
24	1 16 15	0 23 39 20	4	10 13 33 35	10 16 14 1
25	1 19 25	0 24 38 28	4	10 26 37 29	10 29 24 36
26	1 22 37	0 25 37 37	5	11 9 41 23	11 12 35 11
27	1 25 47	0 26 36 45	5	11 22 45 17	11 25 45 46
28	1 28 58	0 27 35 53	5	0 5 49 11	0 8 56 21
29	1 32 9	0 28 35 2	5	0 18 53 5	0 22 6 56
30	1 35 19	0 29 34 10	5	1 1 56 59	1 5 17 31
60	3 10 38	1 29 8 20	11	2 3 53 58	2 10 35 2
90	4 45 57	2 28 42 30	16	3 5 50 56	3 15 52 32
120	6 21 17	3 28 16 40	21	4 7 47 55	4 21 10 3
150	7 56 36	4 27 50 50	27	5 9 44 54	5 26 27 34
180	9 31 55	5 27 24 59	32	6 11 41 52	7 1 45 5

Zehnte Tafel

Stündliche Bewegung.

Stunden	☊ ′	☊ ″	☉ et a ′	☉ et a ″	Anom. ☽ °	Anom. ☽ ′	Anom. ☽ ″	☽ °	☽ ′	☽ ″
1	0	8	2	28	0	32	39	0	32	56
2	0	16	4	56	1	5	19	1	5	53
3	0	24	7	23	1	37	59	1	38	49
4	0	32	9	51	2	10	39	2	11	46
5	0	40	12	19	2	43	18	2	44	42
6	0	48	14	47	3	15	59	3	17	39
7	0	56	17	15	3	48	38	3	50	35
8	1	4	19	43	4	21	18	4	23	32
9	1	12	22	11	4	53	58	4	56	28
10	1	19	24	38	5	26	38	5	29	25
11	1	27	27	6	5	59	17	6	2	21
12	1	35	29	34	6	31	57	6	35	18
13	1	43	32	2	7	4	37	7	8	14
14	1	51	34	30	7	37	16	7	41	10
15	1	59	36	58	8	9	56	8	14	7
16	2	7	39	25	8	42	36	8	47	3
17	2	15	41	53	9	15	16	9	20	0
18	2	23	44	21	9	47	55	9	52	56
19	2	31	46	49	10	20	35	10	25	53
20	2	39	49	17	10	53	15	10	58	49
21	2	47	51	45	11	25	55	11	31	46
22	2	55	54	13	11	58	34	12	4	42
23	3	3	56	40	12	31	15	12	37	39
24	3	11	59	8	13	3	54	13	10	35

Min.	☊	⊙ et a	An. ☽	☽	M.	☊	⊙ et a	An. ☽	☽
	"	' "	' "	' "		"	' "	' "	' "
1	0	0 2	0 33	0 33	31	4	1 16	16 52	17 1
2	0	0 5	1 5	1 6	32	4	1 19	17 25	17 34
3	0	0 7	1 38	1 39	33	4	1 21	17 58	18 7
4	1	0 10	2 11	2 12	34	4	1 24	18 31	18 40
5	1	0 12	2 44	2 45	35	5	1 26	19 3	19 13
6	1	0 15	3 16	3 18	36	5	1 29	19 36	19 46
7	1	0 17	3 49	3 51	37	5	1 31	20 9	20 19
8	1	0 20	4 21	4 24	38	5	1 34	20 41	20 52
9	1	0 22	4 53	4 56	39	5	1 36	21 14	21 25
10	1	0 25	5 26	5 29	40	5	1 39	21 47	21 58
11	1	0 27	5 59	6 2	41	5	1 41	22 20	22 31
12	2	0 30	6 32	6 35	42	6	1 43	22 52	23 4
13	2	0 32	7 4	7 8	43	6	1 46	23 24	23 36
14	2	0 34	7 37	7 41	44	6	1 48	23 57	24 9
15	2	0 37	8 10	8 14	45	6	1 51	24 29	24 42
16	2	0 39	8 43	8 47	46	6	1 53	25 2	25 15
17	2	0 42	9 15	9 20	47	6	1 56	25 35	25 48
18	2	0 44	9 48	9 53	48	6	1 58	26 8	26 21
19	3	0 47	10 21	10 26	49	6	2 1	26 40	26 54
20	3	0 49	10 53	10 59	50	7	2 3	27 13	27 27
21	3	0 52	11 26	11 32	51	7	2 6	27 46	28 0
22	3	0 54	11 59	12 5	52	7	2 8	28 19	28 33
23	3	0 57	12 32	12 38	53	7	2 11	28 51	29 6
24	3	0 59	13 4	13 11	54	7	2 13	29 24	29 39
25	3	1 2	13 37	13 44	55	7	2 15	29 57	30 12
26	3	1 4	14 9	14 16	56	7	2 18	30 29	30 45
27	4	1 6	14 41	14 49	57	8	2 20	31 2	31 18
28	4	1 9	15 14	15 22	58	8	2 23	31 35	31 51
29	4	1 11	15 47	15 55	59	8	2 25	32 8	32 24
30	4	1 14	16 20	16 28	60	8	2 28	32 39	32 56

	O			I			II		
	°	'	"	°	'	"	°	'	"
0	0	0	0	0	56	49	1	39	10
1	0	1	59	0	58	33	1	40	11
2	0	3	57	1	0	15	1	41	10
3	0	5	56	1	1	56	1	42	7
4	0	7	54	1	3	36	1	43	3
5	0	9	53	1	5	15	1	43	56
6	0	11	51	1	6	53	1	44	48
7	0	13	49	1	8	29	1	45	38
8	0	15	47	1	10	5	1	46	26
9	0	17	44	1	11	39	1	47	12
10	0	19	41	1	13	12	1	47	57
11	0	21	38	1	14	44	1	48	39
12	0	23	35	1	16	14	1	49	20
13	0	25	31	1	17	43	1	49	58
14	0	27	27	1	19	11	1	50	35
15	0	29	22	1	20	37	1	51	10
16	0	31	16	1	22	2	1	51	43
17	0	33	10	1	23	26	1	52	13
18	0	35	3	1	24	48	1	52	41
19	0	36	56	1	26	8	1	53	7
20	0	38	48	1	27	27	1	53	32
21	0	40	40	1	28	45	1	53	56
22	0	42	30	1	30	1	1	54	16
23	0	44	21	1	31	15	1	54	33
24	0	46	11	1	32	28	1	54	49
25	0	47	59	1	33	39	1	55	3
26	0	49	47	1	34	49	1	55	15
27	0	51	34	1	35	57	1	55	25
28	0	53	20	1	37	3	1	55	33
29	0	55	5	1	38	7	1	55	39
30	0	56	49	1	39	10	1	55	42
	+ XI			+ X			+ IX		

III			IV			V			
°	′	″	°	′	″	°	′	″	
1	55	42	1	41	16	0	58	56	30
1	55	44	1	40	16	0	57	9	29
1	55	43	1	39	14	0	55	21	28
1	55	40	1	38	10	0	53	32	27
1	55	35	1	37	4	0	51	42	26
1	55	28	1	35	57	0	49	51	25
1	55	19	1	34	47	0	47	59	24
1	55	8	1	33	36	0	46	6	23
1	54	55	1	32	23	0	44	12	22
1	54	40	1	31	8	0	42	18	21
1	54	22	1	29	51	0	40	23	20
1	54	2	1	28	33	0	38	26	19
1	53	40	1	27	13	0	36	29	18
1	53	16	1	25	51	0	34	31	17
1	52	50	1	24	28	0	32	33	16
1	52	22	1	23	3	0	30	34	15
1	51	52	1	21	37	0	28	34	14
1	51	20	1	20	9	0	26	35	13
1	50	46	1	18	39	0	24	34	12
1	50	9	1	17	8	0	22	32	11
1	49	30	1	15	36	0	20	31	10
1	48	50	1	14	2	0	18	29	9
1	48	8	1	12	26	0	16	27	8
1	47	23	1	10	49	1	14	24	7
1	46	37	1	9	11	0	12	21	6
1	45	48	1	7	32	0	10	18	5
1	44	58	1	5	51	0	8	15	4
1	44	6	1	4	9	0	6	11	3
1	43	11	1	2	26	0	4	7	2
1	42	14	1	0	42	0	2	4	1
1	41	16	0	58	56	0	0	0	0
+ VIII			+ VII			+ IV			

I. Argum. Anom. med. ⊙

	O		I		II		III		IV		V		
	+		+		+		+		+		+		
	'	''	'	''	'	''	'	''	'	''	'	''	
0	0	0	3	47	6	37	7	43	6	45	3	56	30
1	0	8	3	54	6	41	7	43	6	41	3	49	29
2	0	16	4	1	6	45	7	43	6	37	3	41	28
3	0	24	4	8	6	48	7	43	6	33	3	34	27
4	0	32	4	14	6	52	7	42	6	28	3	27	26
5	0	40	4	21	6	56	7	42	6	24	3	19	25
6	0	47	4	28	6	59	7	41	6	19	3	12	24
7	0	55	4	34	7	3	7	41	6	14	3	4	23
8	1	3	4	40	7	6	7	40	6	10	2	57	22
9	1	11	4	47	7	9	7	39	6	5	2	49	21
10	1	19	4	53	7	12	7	37	5	59	2	42	20
11	1	27	4	59	7	15	7	36	5	54	2	34	19
12	1	34	5	5	7	17	7	34	5	49	2	26	18
13	1	42	5	11	7	20	7	33	5	43	2	18	17
14	1	50	5	17	7	22	7	31	5	38	2	10	16
15	1	58	5	22	7	25	7	29	5	32	2	2	15
16	2	5	5	28	7	27	7	27	5	26	1	54	14
17	2	13	5	34	7	29	7	25	5	21	1	46	13
18	2	20	5	39	7	31	7	23	5	15	1	38	12
19	2	28	5	46	7	32	7	21	5	9	1	30	11
20	2	35	5	50	7	34	7	18	5	2	1	22	10
21	2	43	5	55	7	36	7	15	4	56	1	14	9
22	2	50	6	0	7	37	7	13	4	50	1	6	8
23	2	57	6	5	7	38	7	10	4	43	0	58	7
24	3	5	6	10	7	39	7	6	4	37	0	49	6
25	3	12	6	15	7	40	7	3	4	30	0	41	5
26	3	19	6	19	7	41	7	0	4	23	0	33	4
27	3	26	6	24	7	42	6	56	4	17	0	25	3
28	3	33	6	28	7	42	6	53	4	10	0	16	2
29	3	40	6	32	7	43	6	49	4	3	0	8	1
30	3	47	6	37	7	43	6	45	3	56	0	0	0
	—		—		—		—		—		—		
	XI		X		IX		VIII		VII		VI		

II. Arg. Longit. vera ⊙

	O +		I +		II +		III —		IV —		V —		
	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	
0	0	0	8	23	8	45	0	0	8	45	8	23	0
1	0	20	8	33	8	35	0	21	8	55	8	12	1
2	0	40	8	43	8	24	0	43	9	3	8	0	2
3	0	59	8	53	8	12	1	5	9	12	7	48	3
4	1	19	9	1	8	0	1	26	9	19	7	35	4
5	1	39	9	9	7	47	1	47	9	26	7	22	5
6	1	58	9	17	7	34	2	9	9	32	7	9	6
7	2	18	9	23	7	20	2	30	9	37	6	54	7
8	2	37	9	30	7	5	2	51	9	42	6	40	8
9	2	56	9	35	6	50	3	11	9	45	6	25	9
10	3	15	9	40	6	34	3	32	9	49	6	9	10
11	3	34	9	44	6	18	3	52	9	51	5	53	11
12	3	52	9	47	6	1	4	11	9	53	5	37	12
13	4	10	9	50	5	44	4	31	9	54	5	20	13
14	4	28	9	52	5	26	4	50	9	54	5	3	14
15	4	46	9	53	5	8	5	8	9	53	4	46	15
16	5	3	9	54	4	50	5	26	9	52	4	28	16
17	5	20	9	54	4	31	5	44	9	50	4	10	17
18	5	37	9	53	4	11	6	1	9	47	3	52	18
19	5	53	9	51	3	52	6	18	9	44	3	34	19
20	6	9	9	49	3	32	6	34	9	40	3	15	20
21	6	25	9	45	3	11	6	50	9	35	2	56	21
22	6	40	9	42	2	51	7	50	9	30	2	37	22
23	6	54	9	37	2	30	7	20	9	23	2	18	23
24	7	9	9	32	2	9	7	34	9	17	1	58	24
25	7	22	9	26	1	47	7	47	9	9	1	39	25
26	7	35	9	19	1	26	8	0	9	1	1	19	26
27	7	48	9	12	1	5	8	12	8	53	0	59	27
28	8	0	9	3	0	43	8	24	8	43	0	40	28
29	8	12	8	55	0	21	8	35	8	33	0	20	29
30	8	23	8	45	0	0	8	45	8	23	0	0	30
	+ VI		+ VII		+ VIII		— IX		— X		— XI		

Argum. Anom. med. ☉

	O		I		II		III		IV		V		
	+		+		+		+		+		+		
	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	
0	0	0	5	1	8	47	10	18	9	4	5	17	30
1	0	11	5	10	8	53	10	18	8	59	5	8	29
2	0	22	5	19	8	58	10	18	8	53	4	58	28
3	0	32	5	28	9	3	10	18	8	47	4	48	27
4	0	43	5	37	9	9	10	17	8	41	4	38	26
5	0	53	5	46	9	14	10	17	8	35	4	28	25
6	1	4	5	55	9	19	10	16	8	29	4	18	24
7	1	14	6	3	9	23	10	15	8	22	4	8	23
8	1	25	6	12	9	27	10	14	8	16	3	58	22
9	1	35	6	20	9	31	10	13	8	10	3	48	21
10	1	35	6	28	9	35	10	12	8	3	3	38	20
11	1	55	6	36	9	39	10	10	7	56	3	27	19
12	2	5	6	44	9	42	10	8	7	48	3	17	18
13	2	15	6	52	9	46	10	6	7	41	3	6	17
14	2	25	7	0	9	50	10	4	7	34	2	56	16
15	2	35	7	8	9	53	10	2	7	26	2	45	15
16	2	45	7	16	9	56	9	59	7	18	2	35	14
17	2	55	7	23	9	58	9	56	7	10	2	24	13
18	3	5	7	31	10	1	9	53	7	2	2	13	12
19	3	15	7	38	10	3	9	50	6	54	2	2	11
20	3	25	7	45	10	5	9	46	6	46	1	51	10
21	3	35	7	52	10	7	9	43	6	37	1	40	9
22	3	44	7	58	10	9	9	39	6	29	1	29	8
23	3	54	8	5	10	11	9	35	6	20	1	18	7
24	4	4	8	12	10	13	9	31	6	12	1	7	6
25	4	14	8	18	10	14	9	27	6	3	0	56	5
26	4	23	8	24	10	15	9	23	5	45	0	45	4
27	4	33	8	30	10	16	9	18	5	45	0	34	3
28	4	42	8	36	10	17	9	14	5	36	0	23	2
29	4	52	8	42	10	18	9	9	5	27	0	12	1
30	5	1	8	47	10	18	9	4	5	17	0	0	0
	—		—		—		—		—		—		
	XI		X		IX		VIII		VII		VI		

Vierzehnte Tafel

Reduction des ☽ auf die Ecliptic, §. 97.

	O. VI		I. VII		II. VIII		
	′	″	′	″	′	″	
0	0	0	6	2	6	2	30
1	0	14	6	9	5	55	29
2	0	29	6	15	5	47	28
3	0	43	6	21	5	39	27
4	0	58	6	27	5	30	26
5	1	12	6	32	5	20	25
6	1	26	6	37	5	10	24
7	1	41	6	41	5	0	23
8	1	55	6	45	4	50	22
9	2	9	6	48	4	39	21
10	2	23	6	51	4	28	20
11	2	37	6	54	4	17	19
12	2	50	6	56	4	5	18
13	3	3	6	57	3	53	17
14	3	16	6	57	3	41	16
15	3	29	6	57	3	29	15
16	3	41	6	57	3	16	13
17	3	53	6	57	3	3	12
18	4	5	6	56	2	50	11
19	4	17	6	54	2	37	10
20	4	28	6	51	2	23	9
21	4	39	6	48	2	9	8
22	4	50	6	45	1	55	7
23	5	0	6	41	1	41	6
24	5	10	6	37	1	26	5
25	5	20	6	32	1	12	5
26	5	30	6	27	0	58	4
27	5	39	6	21	0	43	3
28	5	47	6	15	0	29	2
29	5	55	6	9	0	14	1
30	6	2	6	2	0	0	0
	+	+	+	+	+	+	
	XI.	V	X.	IV	IX.	III	

Argum. ☽ ver. — ☊ ver.

	O. VI			I. VII			II. VIII			
	+ —			+ —			+ —			
	°	′	″	°	′	″	°	′	″	
0	0	0	0	2	30	0	4	19	59	30
1	0	5	14	2	34	31	4	22	34	29
2	0	10	28	2	38	59	4	25	4	28
3	0	15	42	2	43	24	4	27	30	27
4	0	20	55	2	47	46	4	29	50	26
5	0	26	8	2	52	5	4	32	6	25
6	0	31	21	2	56	21	4	34	17	24
7	0	36	33	3	0	34	4	36	22	23
8	0	41	44	3	4	44	4	38	23	22
9	0	46	55	3	8	50	4	40	18	21
10	0	52	4	3	12	53	4	42	9	20
11	0	57	13	3	16	52	4	43	54	19
12	1	2	31	3	20	47	4	45	34	18
13	1	7	27	3	24	39	4	47	9	17
14	1	12	33	3	28	28	4	48	38	16
15	1	17	38	3	32	12	4	50	2	15
16	1	22	40	3	35	53	4	51	21	14
17	1	27	42	3	39	29	4	52	35	13
18	1	32	41	3	43	2	4	53	43	12
19	1	37	39	3	46	30	4.	54	46	11
20	1	42	36	3	49	55	4	55	44	10
21	1	47	30	3	53	15	4	56	36	9
22	1	52	22	3	56	31	4	57	22	8
23	1	57	12	3	59	43	4	58	3	7
24	2	2	0	4	2	50	4	58	39	6
25	2	6	46	4	5	53	4	59	9	5
26	2	11	30	4	8	51	4	59	34	4
27	2	16	11	4	11	45	4	59	53	3
28	2	20	50	4	14	34	5	0	7	2
29	2	25	26	4	17	18	5	0	15	1
30	2	30	0	4	19	59	5	0	18	0
	— +			— +			— +			
	XI V			X. IV			IX. III			

Sechzehnte Tafel

Stündliche Veränderung der Breite ☽, §. 99. in den Syzigien.

		Argum. ☽ med. — ☋ oder VI + ☽ — ☊		M + ☊ — ☽	M — ☊ — ☽		
O. VI	0	3′	7″	20″	4″	30	
— +	3	3	7	20	4	27	
	6	3	6	20	4	24	
	9	3	5	20	4	21	
	12	3	3	20	4	18	
	15	3	1	19	4	15	
	18	2	58	19	4	12	
	21	2	54	19	4	9	
	24	2	51	18	4	6	
	27	2	47	18	4	3	— +
I. VII	30	2	42	17	3	0	XI. V
— +	3	2	37	17	3	27	
	6	2	31	16	3	24	
	9	2	25	16	3	21	
	12	2	19	15	3	18	
	15	2	12	14	3	15	
	18	2	5	13	3	12	
	21	1	58	13	3	9	
	24	1	50	12	2	6	
	27	1	42	11	2	3	— +
II. VIII	0	1	34	10	2	0	X. IV
— +	3	1	26	9	2	27	
	6	1	17	8	2	24	
	9	1	7	7	1	21	
	12	0	58	6	1	18	
	15	0	48	5	1	15	
	18	0	39	4	1	12	
	21	0	29	3	1	9	
	24	0	19	2	0	6	
	27	0	10	1	0	3	— +
	30	0	0	0	0	0	IX. III

Siebenzehnte Tafel

Stündliche Bewegung des Monds in den Syzigien, §. 100.

Argum. Anom. med. ☽

	O		I		II		III		IV		V		
	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	
0	29	34	30	1	31	16	33	15	35	34	37	27	30
1	29	34	30	2	31	20	33	19	35	39	37	29	29
2	29	34	30	4	31	23	33	24	35	43	37	32	28
3	29	34	30	6	31	27	33	28	35	47	37	35	27
4	29	35	30	7	31	30	33	33	35	52	37	38	26
5	29	35	30	9	31	34	33	38	35	56	37	40	25
6	29	35	30	12	31	38	33	42	36	1	37	42	24
7	29	36	30	14	31	42	33	46	36	5	37	44	23
8	29	36	30	16	31	45	33	51	36	9	37	47	22
9	29	36	30	18	31	49	33	56	36	13	37	49	21
10	29	37	30	20	31	52	34	1	36	17	37	51	20
11	29	38	30	23	31	56	34	6	36	21	37	52	19
12	29	39	30	25	32	0	34	11	36	25	37	54	18
13	29	39	30	27	32	4	34	16	36	29	37	56	17
14	29	40	30	29	32	7	34	20	36	34	37	57	16
15	29	41	30	32	32	11	34	25	36	38	37	59	15
16	29	41	30	36	32	16	34	30	36	41	38	0	14
17	29	42	30	39	32	20	34	34	36	45	38	1	13
18	29	43	30	41	32	23	34	39	36	49	38	3	12
19	29	44	30	43	32	27	34	44	36	53	38	4	11
20	29	46	30	45	32	31	34	48	36	56	38	5	10
21	29	47	30	48	32	35	34	53	36	59	38	6	9
22	29	49	30	51	32	39	34	57	37	2	38	7	8
23	29	50	30	54	32	44	35	2	37	5	38	8	7
24	29	52	30	57	32	48	35	7	37	8	38	9	6
25	29	53	31	0	32	52	35	12	37	12	38	9	5
26	29	54	31	3	32	57	35	16	37	15	38	9	4
27	29	55	31	7	33	2	35	21	37	18	38	10	3
28	29	57	31	10	33	6	35	25	37	21	38	10	2
29	29	59	31	13	33	11	35	30	37	24	38	10	1
30	30	1	31	16	33	15	35	34	37	27	38	10	0
	XI		X		IX		VIII		VII		VI		

Für den Vollmond werden noch 2″ addirt.

Siebenzehnte Tafel

Stündliche Bewegung des ☽ in den Syzigien, §. 100.

		Anom. m. ☉	ſ VI + an. ☽ — an. ☉	Anom. ☾ + an. ☉	ſ III. + an. ☽		
O. VI	0	3	3	1	1	30	
— +	3	3	3	1	1	27	
	6	3	3	1	1	24	
	9	3	3	1	1	21	
	12	3	3	1	1	18	
	15	3	3	1	1	15	
	18	3	3	1	1	12	
	21	3	3	1	1	9	
	24	3	3	1	1	6	
	27	3	3	1	1	3	— +
I. VII	0	3	3	1	1	0	XI. V
— +	3	3	3	1	1	27	
	6	2	2	1	1	24	
	9	2	2	1	1	21	
	12	2	2	1	1	18	
	15	2	2	1	1	15	
	18	2	2	1	1	12	
	21	2	2	1	1	9	
	24	2	2	1	1	6	
	27	2	2	1	1	3	— +
II. VIII	0	1	1	0	0	0	X. IV
— +	3	1	1	0	0	27	
	6	1	1	0	0	24	
	9	1	1	0	0	21	
	12	1	1	0	0	18	
	15	1	1	0	0	15	
	18	1	1	0	0	12	
	21	0	0	0	0	9	
	24	0	0	0	0	6	
	27	0	0	0	0	3	— +
	30	0	0	0	0	0	IX. III

18. Tafel, Parallaxe des Monds in den Syzigien,

Argum. Anom. med. ☽, §. 101.

	O ′	O ″	I ′	I ″	II ′	II ″	III ′	III ″	IV ′	IV ″	V ′	V ″	
0	53	57	54	21	55	31	57	17	59	17	60	52	30
1	53	57	54	23	55	34	57	21	59	20	60	54	29
2	53	57	54	24	55	37	57	25	59	24	60	57	28
3	53	57	54	26	55	40	57	29	59	28	60	59	27
4	53	57	54	27	55	43	57	33	59	32	61	1	26
5	53	58	54	29	55	46	57	37	59	35	61	3	25
6	53	58	54	31	55	50	57	41	59	39	61	5	24
7	53	58	54	33	55	53	57	45	59	43	61	7	23
8	53	59	54	35	55	56	57	49	59	46	61	9	22
9	53	59	54	37	55	59	57	53	59	50	61	11	21
10	54	0	54	39	56	3	57	57	59	53	61	12	20
11	54	0	54	41	56	6	58	1	59	57	61	14	19
12	54	1	54	43	56	10	58	5	60	0	61	15	18
13	54	1	54	45	56	13	58	9	60	3	61	17	17
14	54	2	54	48	56	17	58	13	60	7	61	18	16
15	54	3	54	50	56	20	58	17	60	10	61	19	15
16	54	4	54	53	56	24	58	21	60	13	61	21	14
17	54	5	54	55	56	28	58	25	60	16	61	22	13
18	54	6	54	58	56	31	58	29	60	19	61	23	12
19	54	7	55	0	56	35	58	33	60	22	61	24	11
20	54	8	55	3	56	39	58	37	60	25	61	25	10
21	54	9	55	5	56	42	58	41	60	28	61	26	9
22	54	10	55	8	56	46	58	45	60	31	60	26	8
23	54	11	55	10	56	50	58	49	60	34	61	27	7
24	54	12	55	13	56	54	58	53	60	37	61	27	6
25	54	14	55	16	56	58	58	57	60	39	61	28	5
26	54	15	55	19	57	2	59	1	60	42	61	28	4
27	54	16	55	22	57	5	59	5	60	45	61	28	3
28	54	18	55	25	57	9	59	9	60	47	61	29	2
29	54	19	55	28	57	13	59	13	60	50	61	29	1
30	54	21	55	31	57	17	59	17	60	52	61	29	0
	XI		X		IX		VIII		VII		VI		

Für den Vollmond werden noch 3″ addirt.

Parall. ☽		Semid. ☽		Parall. ☽		Semid. ☽	
′	″	′	″	′	″	′	″
54	5	14	45	57	45	15	45
54	16	14	48	57	56	15	48
54	27	14	51	58	7	15	51
54	38	14	54	58	18	15	54
54	49	14	57	58	29	15	57
55	0	15	0	58	40	16	0
55	11	15	3	58	51	16	3
55	22	15	6	59	2	16	6
55	33	15	9	59	13	16	9
55	44	15	12	59	24	16	12
55	55	15	15	59	35	16	15
56	6	15	18	59	46	16	18
56	17	15	21	59	57	16	21
56	28	15	24	60	8	16	24
56	39	15	27	60	19	16	27
56	50	15	30	60	30	16	30
57	1	15	33	60	41	16	33
57	12	15	36	60	52	16	36
57	23	15	39	61	3	16	39
57	34	15	42	61	14	16	42
57	45	15	45	61	25	16	45

In den Mondsfinsternissen

I° Semidiam umbrae
$= \text{parall.} ☽ + \text{parall.} \odot - \text{ſemid.} \odot$

II° Semid. penumbrae
$= \text{parall.} ☽ + \text{parall.} \odot + \text{ſemid.} \odot$.

Nach Mayer muß
$= \frac{61}{60} (\text{parall.} ☽ + \text{parall.} \odot) \mp \text{ſemid.} \odot$
genommen werden.

		Semid. ⊙		Horar. ⊙			
		′	″	′	″		
O	0	15	47	2	23	30	
	10	15	47	2	23	20	
	20	15	48	2	23	10	
I	0	15	49	2	24	0	XI
	10	15	51	2	24	20	
	20	15	53	2	25	10	
II	0	15	55	2	25	0	X
	10	15	57	2	26	20	
	20	16	0	2	27	10	
III	0	16	3	2	28	0	IX
	10	16	6	2	29	20	
	20	16	8	2	29	10	
IV	0	16	11	2	30	0	VIII
	10	16	13	2	31	20	
	20	16	16	2	32	10	
V	0	16	17	2	32	0	VII
	10	16	18	2	33	20	
	20	16	19	2	33	10	
	30	16	20	2	33	0	VI

In den Projectionen der Erdfinsternisse ist

I° Semid. telluris
= parall. ☽ — parall. ⊙

II° Semid. umbrae
= ſemid. ☽ — ſemid. ⊙

III° Semid. penumbrae
= ſemid. ☽ + ſemid. ⊙.

Ein und zwanzigste Tafel

Declination der ☉, §. 104.

	O VI			I VII			II VIII			
	°	′	″	°	′	″	°	′	″	
0	0	0	0	11	29	15	20	10	41	30
1	0	23	54	11	50	16	20	23	13	29
2	0	47	47	12	11	6	20	35	23	28
3	1	11	39	12	31	44	20	47	11	27
4	1	35	30	12	52	10	20	58	36	26
5	1	59	20	13	12	23	21	9	38	25
6	2	23	8	13	32	23	21	20	17	24
7	2	46	54	13	52	9	21	30	32	23
8	3	10	38	14	11	41	21	40	28	22
9	3	34	19	14	30	59	21	49	49	21
10	3	57	57	14	50	3	21	58	50	20
11	4	21	31	15	8	52	22	7	26	19
12	4	45	1	15	27	26	22	15	37	18
13	5	8	26	15	45	44	22	23	23	17
14	5	31	46	16	3	46	22	30	44	16
15	5	55	1	16	21	31	22	37	39	15
16	6	18	11	16	38	59	22	44	8	14
17	6	41	15	16	56	10	22	50	11	13
18	7	4	13	17	13	3	22	55	48	12
19	7	27	4	17	29	38	23	0	59	11
20	7	49	48	17	45	55	23	5	43	10
21	8	12	24	18	1	54	23	10	0	9
22	8	34	52	18	17	34	23	13	50	8
23	8	57	12	18	32	54	23	17	13	7
24	9	19	24	18	47	54	23	20	9	6
25	9	41	27	19	2	34	23	22	38	5
26	10	3	20	19	16	54	23	24	40	4
27	10	25	4	19	30	53	23	26	15	3
28	10	46	38	19	44	31	23	27	23	2
29	11	8	2	19	57	47	23	28	5	1
30	11	29	15	20	10	41	23	28	20	0
	V XI			IV X			III IX			

Zwey und zwanzigste Tafel

Winkel der Ecliptic mit dem Mittagskreis, §. 105.

	O VI			I VII			II VIII			
	°	′	″	°	′	″	°	′	″	
0	66	31	40	69	23	27	77	45	0	30
1	66	31	52	69	35	3	78	6	41	29
2	66	32	27	69	47	1	78	28	39	28
3	66	33	24	69	59	22	78	50	53	27
4	66	34	44	70	12	5	79	13	22	26
5	66	36	27	70	25	10	79	36	5	25
6	66	38	33	70	38	37	79	59	2	24
7	66	41	3	70	52	36	80	22	13	23
8	66	43	55	71	6	37	80	45	38	22
9	66	47	10	71	21	9	81	9	17	21
10	66	50	48	71	36	2	81	33	9	20
11	66	54	49	71	51	17	81	57	13	19
12	66	59	13	72	6	54	82	21	28	18
13	67	4	0	72	22	52	82	45	54	17
14	67	9	10	72	39	11	83	10	30	16
15	67	14	43	72	55	51	83	35	16	15
16	67	20	38	73	12	52	84	0	11	14
17	67	26	56	73	30	13	84	25	15	13
18	67	33	37	73	47	54	84	50	28	12
19	67	40	41	74	5	55	85	15	49	11
20	67	48	8	74	24	16	85	41	17	10
21	67	55	58	74	42	57	86	6	51	9
22	68	4	10	75	1	57	86	32	31	8
23	68	12	45	75	21	16	86	58	16	7
24	68	21	43	75	40	54	87	24	5	6
25	68	31	4	76	0	51	87	49	58	5
26	68	40	48	76	21	6	88	15	54	4
27	68	50	54	76	41	39	88	41	53	3
28	69	1	22	77	2	29	89	7	54	2
29	69	12	13	77	23	36	89	33	57	1
30	69	23	27	77	45	0	90	0	0	0
	V XI			IV X			III IX			

Drey und zwanzigste Tafel

Reduction der Ecliptic auf den Aequator, §. 106.

	O	VI		I.	VII		II.	VIII		
	°	'	"	°	'	"	°	'	"	
0	0	0	0	2	5	43	2	11	16	30
1	0	4	58	2	8	20	2	8	42	29
2	0	9	55	2	10	49	2	5	59	28
3	0	14	52	2	13	8	2	3	6	27
4	0	19	48	2	15	18	2	0	4	26
5	0	24	43	2	17	19	1	56	51	25
6	0	29	36	2	19	10	1	53	30	24
7	0	34	27	2	20	52	1	49	59	23
8	0	39	16	2	22	24	1	46	20	22
9	0	44	2	2	23	45	1	42	32	21
10	0	48	46	2	24	57	1	38	36	20
11	0	53	26	2	25	58	1	34	32	19
12	0	58	3	2	26	48	1	30	21	18
13	1	2	36	2	27	28	1	26	2	17
14	1	7	5	2	27	58	1	21	36	16
15	1	11	30	2	28	17	1	17	3	15
16	1	15	50	2	28	25	1	12	24	14
17	1	20	5	2	28	22	1	7	39	13
18	1	24	15	2	28	8	1	2	49	12
19	1	28	19	2	27	43	0	57	53	11
20	1	32	18	2	27	8	0	52	53	10
21	1	36	10	2	26	21	0	47	48	9
22	1	39	56	2	25	24	0	42	40	8
23	1	43	35	2	24	15	0	37	28	7
24	1	47	8	2	22	56	0	32	12	6
25	1	50	33	2	21	26	0	26	54	5
26	1	53	51	2	19	45	0	21	34	4
27	1	57	1	2	17	53	0	16	12	3
28	2	0	3	2	15	51	0	10	49	2
29	2	2	57	2	13	39	0	5	25	1
30	2	5	43	2	11	16	0	0	0	0
	+ V.	+ XI		+ IV	+ X		+ III.	+ IX		

Argum. Anom. med. ☽ = M

	O			I			II		
	°	′	″	°	′	″	°	′	″
0	0	0	0	2	58	12	5	15	47
1	0	6	10	3	3	40	5	19	15
2	0	12	21	3	9	4	5	22	36
3	0	18	29	3	14	26	5	25	53
4	0	24	39	3	19	44	5	29	4
5	0	30	49	3	24	59	5	32	11
6	0	36	58	3	30	13	5	35	11
7	0	43	5	3	35	22	5	38	4
8	0	49	13	3	40	29	5	40	54
9	0	55	21	3	45	31	5	43	35
10	1	1	27	3	50	40	5	46	13
11	1	7	31	3	55	25	5	48	44
12	1	13	36	4	0	16	5	51	8
13	1	19	38	4	5	4	5	53	28
14	1	25	41	4	9	49	5	55	46
15	1	31	42	4	14	29	5	57	49
16	1	37	40	4	19	5	5	59	51
17	1	43	37	4	23	38	6	1	45
18	1	49	34	4	28	5	6	3	34
19	1	55	29	4	32	28	6	5	16
20	2	1	22	4	36	48	6	6	53
21	2	7	12	4	41	3	6	8	23
22	2	13	0	4	45	14	6	9	46
23	2	18	46	4	49	18	6	11	3
24	2	24	31	4	53	19	6	12	13
25	2	30	14	4	57	17	6	13	18
26	2	35	56	5	1	9	6	14	15
27	2	41	34	5	4	58	6	15	6
28	2	47	9	5	8	40	6	15	50
29	2	52	42	5	12	16	6	16	27
30	2	58	12	5	15	47	6	16	56
	+ XI			+ X			+ IX		

III			IV			V			
—			—			—			
°	′	″	°	′	″	°	′	″	
6	16	56	5	38	7	3	20	31	30
6	17	19	5	35	0	3	14	32	29
6	17	36	5	31	47	3	8	31	28
6	17	46	5	28	27	3	2	25	27
6	17	49	5	25	1	2	56	14	26
6	17	44	5	21	29	2	50	0	25
6	17	33	5	17	51	2	43	42	24
6	17	16	5	14	7	2	37	21	23
6	16	51	5	10	16	2	30	56	22
6	16	18	5	6	16	2	24	28	21
6	15	40	5	2	11	2	17	54	20
6	14	55	4	57	59	2	11	19	19
6	14	1	4	53	42	2	4	43	18
6	13	1	4	49	19	1	58	4	17
6	11	54	4	44	50	1	51	21	16
6	10	40	4	40	16	1	44	34	15
6	9	20	4	35	36	1	37	46	14
6	7	51	4	30	49	1	30	56	13
6	6	16	4	25	56	1	24	3	12
6	4	34	4	20	58	1	17	10	11
6	2	43	4	15	53	1	10	14	10
6	0	47	4	10	42	1	3	17	9
5	58	43	4	5	28	0	56	20	8
5	56	33	4	0	8	0	49	21	7
5	54	15	3	54	44	0	42	20	6
5	51	52	3	49	14	0	35	17	5
5	49	21	3	43	39	0	28	15	4
5	46	45	3	38	0	0	21	12	3
5	44	0	3	32	14	0	14	8	2
5	41	7	3	26	25	0	7	4	1
5	38	7	3	20	31	0	0	0	0
+			+			+			
VIII			VII			VI			

Fünf und zwanzigste Tafel, für die Länge des ☽

Arg. ☽ med. — ☉ med. = E

	O		I		II	
	∓		+		±	
	′	″	′	″	′	″
0	0	0	33	52	32	26
1	1	23	34	30	31	41
2	2	47	35	5	30	54
3	4	9	35	38	30	5
4	5	31	36	5	29	12
5	6	53	36	33	28	18
6	8	14	36	57	27	21
7	9	34	37	18	26	23
8	10	55	37	36	25	24
9	12	14	37	53	24	22
10	13	32	38	7	23	19
11	14	49	38	15	22	14
12	16	5	38	23	21	6
13	17	20	38	28	19	58
14	18	33	38	28	18	49
15	19	45	38	26	17	37
16	20	55	38	21	16	24
17	22	4	38	13	15	10
18	23	10	38	3	13	55
19	24	16	37	50	12	40
20	25	19	37	34	11	22
21	26	20	37	17	10	3
22	27	18	36	56	8	44
23	28	15	36	30	7	25
24	29	10	36	3	6	5
25	30	4	35	33	4	44
26	30	54	35	0	3	24
27	31	43	34	24	2	2
28	32	28	33	47	0	40
29	33	11	33	7	0	41
30	33	52	32	26	2	4
	—		—		∓	
	XI		X		IX	

III ′	III ″	IV ′	IV ″	V ′	V ″	
2	4	35	57	35	50	30
3	27	36	36	35	6	29
4	48	37	14	34	19	28
6	10	37	48	33	30	27
7	31	38	22	32	38	26
8	51	38	52	31	44	25
10	11	39	18	30	47	24
11	29	39	42	29	49	23
12	49	40	5	28	47	22
14	8	40	23	27	44	21
15	26	40	38	26	39	20
16	43	40	52	25	32	19
17	55	41	2	24	22	18
19	11	41	9	23	12	17
20	24	41	14	21	59	16
21	36	41	16	20	45	15
22	46	41	15	19	30	14
23	54	41	11	18	13	13
25	1	41	3	16	54	12
26	7	41	52	15	43	11
27	11	40	39	14	12	10
28	13	40	32	12	50	9
29	12	40	3	11	27	8
30	10	39	41	10	3	7
31	6	39	17	8	39	6
32	0	38	49	7	14	5
32	51	38	18	5	47	4
33	41	37	45	4	21	3
34	28	37	10	2	55	2
35	14	36	32	1	28	1
35	57	35	50	0	0	0
+ VIII		+ VII		+ VI		

Sechs und zwanzigste Tafel, für die Länge des ☽

Arg. = 2 E — M

	O			I			II		
	°	′	″	°	′	″	°	′	″
0	0	0	0	0	37	46	1	5	48
1	0	1	20	0	38	54	1	6	26
2	0	2	38	0	40	3	1	7	4
3	0	3	58	0	41	11	1	7	42
4	0	5	17	0	42	18	1	8	19
5	0	6	35	0	43	24	1	8	54
6	0	7	53	0	44	28	1	9	28
7	0	9	11	0	45	31	1	10	0
8	0	10	30	0	46	34	1	10	31
9	0	11	49	0	47	37	1	11	1
10	0	13	6	0	48	38	1	11	30
11	0	14	24	0	49	39	1	11	58
12	0	15	42	0	50	39	1	12	24
13	0	16	59	0	51	38	1	12	49
14	0	18	16	0	52	35	1	13	13
15	0	19	33	0	53	32	1	13	35
16	0	20	48	0	54	29	1	13	56
17	0	22	5	0	55	24	1	14	16
18	0	23	19	0	56	18	1	14	34
19	0	24	34	0	57	11	1	14	51
20	0	25	49	0	58	3	1	15	7
21	0	27	3	0	58	55	1	15	21
22	0	28	18	0	59	45	1	15	34
23	0	29	31	1	0	35	1	15	45
24	0	30	43	1	1	23	1	15	55
25	0	31	55	1	2	9	1	16	3
26	0	33	6	1	2	55	1	16	11
27	0	34	18	1	3	40	1	16	17
28	0	35	28	1	4	22	1	16	21
29	0	36	38	1	5	5	1	16	25
30	0	37	46	1	5	48	1	16	27
	+ XI			+ X			+ IX		

III			IV			V			
—			—			—			
°	′	″	°	′	″	°	′	″	
1	16	27	1	6	40	0	38	40	30
1	16	28	1	6	0	0	37	31	29
1	16	27	1	5	18	0	36	20	28
1	16	24	1	4	35	0	35	8	27
1	16	20	1	3	51	0	33	54	26
1	16	15	1	3	6	0	32	41	25
1	16	8	1	2	21	0	31	27	24
1	16	1	1	1	34	0	30	14	23
1	15	51	1	0	45	0	28	59	22
1	15	40	0	59	55	0	27	45	21
1	15	28	0	59	3	0	26	29	20
1	15	15	0	58	11	0	25	12	19
1	15	1	0	57	18	0	23	55	18
1	14	44	0	56	24	0	22	38	17
1	14	26	0	55	29	0	21	19	16
1	14	6	0	54	33	0	20	2	15
1	13	44	0	53	36	0	18	45	14
1	13	23	0	52	40	0	17	26	13
1	13	0	0	51	41	0	16	6	12
1	12	36	0	50	40	0	14	46	11
1	12	10	0	49	38	0	13	27	10
1	11	42	0	48	36	0	12	6	9
1	11	13	0	47	33	0	10	43	8
1	10	44	0	46	30	0	9	26	7
1	10	13	0	45	25	0	8	5	6
1	9	41	0	44	20	0	6	45	5
1	9	7	0	43	13	0	5	25	4
1	8	31	0	42	6	0	4	4	3
1	7	54	0	40	59	0	2	43	2
1	7	19	0	39	49	0	1	22	1
1	6	40	0	38	40	0	0	0	0
+			+			+			
VIII			VII			VI			

Sieben und zwanzigste Tafel, für die Länge des ☽

Argum. Anom. med. ☽ = a

	0		I		II	
	+		+		+	
	′	″	′	″	′	″
0	0	0	5	31	9	40
1	0	13	5	41	9	46
2	0	24	5	51	9	52
3	0	35	6	1	9	58
4	0	47	6	11	10	3
5	0	58	6	21	10	9
6	1	10	6	30	10	14
7	1	21	6	40	10	19
8	1	33	6	49	10	24
9	1	44	6	58	10	29
10	1	55	7	7	10	33
11	2	7	7	16	10	37
12	2	18	7	25	10	41
13	2	29	7	34	10	45
14	2	40	7	42	10	49
15	2	51	7	51	10	52
16	3	2	7	59	10	55
17	3	13	8	7	10	58
18	3	24	8	15	11	1
19	3	35	8	23	11	3
20	3	46	8	31	11	6
21	3	57	8	39	11	8
22	4	8	8	46	11	10
23	4	18	8	54	11	12
24	4	29	9	1	11	14
25	4	40	9	8	11	16
26	4	50	9	15	11	17
27	5	0	9	21	11	18
28	5	11	9	28	11	19
29	5	21	9	34	11	20
30	5	31	9	40	11	20
	—		—		—	
	XI		X		IX	

III + ′	″	IV + ′	″	V + ′	″	
11	20	9	58	5	49	30
11	20	9	52	5	39	29
11	20	9	46	5	28	28
11	20	9	39	5	17	27
11	19	9	33	5	6	26
11	19	9	26	4	55	25
11	18	9	19	4	44	24
11	17	9	12	4	33	23
11	16	9	5	4	22	22
11	15	8	58	4	11	21
11	13	8	51	3	59	20
11	11	8	43	3	48	19
11	9	8	35	3	36	18
11	7	8	27	3	25	17
11	5	8	19	3	13	16
11	2	8	11	3	1	15
10	59	8	3	2	50	14
10	56	7	54	2	38	13
10	52	7	45	2	26	12
10	49	7	36	2	14	11
10	44	7	27	2	2	10
10	41	7	18	1	50	9
10	37	7	9	1	38	8
10	33	7	0	1	26	7
10	29	6	50	1	14	6
10	24	6	40	1	1	5
10	19	6	30	0	49	4
10	14	6	20	0	37	3
10	9	6	9	0	25	2
10	4	5	59	0	13	1
9	58	5	49	0	0	0
— VIII		— VII		— VI		

		a + M		a — M		M + 2E		M — E	2(M — E)	
		′	″	′	″	′	″	″	′	″
O. VI	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
— +	3	0	5	0	8	0	9	1	0	11
	6	0	11	0	15	0	18	2	0	22
	9	0	16	0	22	0	27	4	0	33
	12	0	22	0	30	0	36	5	0	44
	15	0	27	0	38	0	45	6	0	54
	18	0	32	0	45	0	54	7	1	5
	21	0	38	0	52	1	3	8	1	15
	24	0	43	0	59	1	12	10	1	25
	27	0	48	1	7	1	20	11	1	35
I. VII	0	0	53	1	13	1	28	12	1	45
— +	3	0	57	1	19	1	35	13	1	54
	6	1	2	1	25	1	43	14	2	3
	9	1	6	1	31	1	50	15	2	12
	12	1	10	1	37	1	57	16	2	20
	15	1	14	1	42	2	3	17	2	28
	18	1	18	1	47	2	9	17	2	36
	21	1	22	1	52	2	15	18	2	43
	24	1	25	1	57	2	21	19	2	50
	27	1	28	2	2	2	27	20	2	56
II. VIII	0	1	31	2	6	2	32	21	3	2
— +	3	1	34	2	9	2	36	21	3	7
	6	1	36	2	12	2	39	22	3	12
	9	1	38	2	15	2	43	22	3	16
	12	1	40	2	18	2	46	23	3	20
	15	1	41	2	20	2	49	23	3	23
	18	1	43	2	22	2	51	23	3	25
	21	1	44	2	23	2	53	24	3	27
	24	1	44	2	24	2	54	24	3	29
	27	1	45	2	25	2	55	24	3	30
	30	1	45	2	25	2	55	24	3	30

Argumente

4E — M	2 E — a		a — M + 2E	a + M — 2 E		M — (2 ☽ — 2 ☊)	2 ⊙ — 2 ☊		
0	0	0	0	0	0	0	0	30	
3	0	8	2	0	12	3	2	27	
6	0	15	5	0	24	6	5	24	
8	0	23	7	0	36	9	7	21	
11	0	31	10	0	49	12	10	18	
13	0	39	12	1	1	15	12	15	
16	0	46	14	1	13	18	14	12	
19	0	54	17	1	25	21	16	9	
21	1	1	19	1	36	24	19	6	
24	1	8	21	1	47	27	21	3	+ —
26	1	15	23	1	58	29	23	0	XI. V
28	1	22	25	2	8	31	25	27	
30	1	28	27	2	18	34	27	24	
33	1	34	29	2	28	36	29	21	
35	1	40	31	2	37	38	31	18	
37	1	46	33	2	45	41	33	15	
39	1	51	34	2	54	43	35	12	
41	1	56	36	3	2	45	37	9	
42	2	1	37	3	10	46	38	6	
44	2	6	39	3	17	48	39	3	+ —
45	2	10	40	3	24	50	41	0	X. IV
46	2	14	41	3	29	51	42	27	
48	2	17	42	3	34	53	43	24	
49	2	20	43	3	39	54	43	21	
50	2	23	44	3	43	55	44	18	
50	2	25	44	3	47	56	45	15	
51	2	27	45	3	50	57	46	12	
51	2	28	45	3	52	57	46	9	
52	2	29	46	3	54	58	47	6	
52	2	30	46	3	55	58	47	3	+ —
52	2	30	46	3	55	58	47	0	IX. III

Neun und zwanzigste Tafel, für die Breite des ☽

I. Argum. L''' — ☊'

	O. +	VI −		I. +	VII −		II. +	VIII −		
	°	'	"	°	'	"	°	'	"	
0	0	0	0	2	34	25	4	27	38	30
1	0	5	23	2	39	4	4	30	18	29
2	0	10	46	2	43	39	4	32	53	28
3	0	16	9	2	48	12	4	35	22	27
4	0	21	32	2	52	42	4	37	47	26
5	0	26	54	2	57	9	4	40	7	25
6	0	32	16	3	1	33	4	42	21	24
7	0	37	37	3	5	53	4	44	30	23
8	0	42	58	3	10	10	4	46	34	22
9	0	48	18	3	14	23	4	48	33	21
10	0	53	37	3	18	33	4	50	27	20
11	0	58	55	3	22	39	4	52	15	19
12	1	4	11	3	26	42	4	53	58	18
13	1	9	27	3	30	41	4	55	36	17
14	1	14	42	3	34	36	4	57	8	16
15	1	19	55	3	38	27	4	58	35	15
16	1	25	6	3	42	14	4	59	56	14
17	1	30	16	3	45	57	5	1	12	13
18	1	35	24	3	49	36	5	2	22	12
19	1	40	31	3	53	11	5	3	26	11
20	1	45	36	3	56	41	5	4	25	10
21	1	50	39	4	0	7	5	5	19	9
22	1	55	40	4	3	29	5	6	7	8
23	2	0	39	4	6	47	5	6	50	7
24	2	5	36	4	9	59	5	7	26	6
25	2	10	30	4	13	7	5	7	57	5
26	2	15	22	4	16	11	5	8	23	4
27	2	20	12	4	19	10	5	8	43	3
28	2	24	59	4	22	4	5	8	57	2
29	2	29	43	4	24	53	5	9	5	1
30	2	34	25	4	27	38	5	9	8	0
	− XI.	+ V		− X.	+ IV		− IX.	+ III		

II. Argum. $L''' + ☊' - 2\,☉'$

	O.	VI	I.	VII	II	VIII	
	+	−	+	−	+	−	
	′	″	′	″	′	″	
0	0	0	4	25	7	39	30
1	0	9	4	33	7	43	29
2	0	19	4	41	7	48	28
3	0	28	4	49	7	52	27
4	0	37	4	56	7	56	26
5	0	46	5	4	8	0	25
6	0	55	5	11	8	4	24
7	1	5	5	19	8	7	23
8	1	14	5	26	8	11	22
9	1	23	5	34	8	14	21
10	1	32	5	41	8	18	20
11	1	41	5	48	8	21	19
12	1	50	5	55	8	24	18
13	1	59	6	2	8	27	17
14	2	8	6	9	8	30	16
15	2	17	6	15	8	32	15
16	2	26	6	22	8	34	14
17	2	35	6	28	8	36	13
18	2	44	6	34	8	38	12
19	2	52	6	40	8	40	11
20	3	1	6	46	8	42	10
21	3	10	6	52	8	43	9
22	3	18	6	57	8	45	8
23	3	27	7	3	8	46	7
24	3	35	7	8	8	47	6
25	3	44	7	14	8	48	5
26	3	52	7	19	8	48	4
27	4	1	7	24	8	49	3
28	4	9	7	29	8	49	2
29	4	17	7	34	8	50	1
30	4	25	7	39	8	50	0
	−	+	−	+	−	+	
	XI.	V	X.	IV	IX.	III	

Dreyzigste Tafel, für die Parallaxe des ☽

I. Arg. Anom. med. ☽ = M

	O		I		II		III		IV		V		
	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	
0	54	10	54	30	55	29	56	58	58	37	59	56	30
1	54	10	54	32	55	32	57	1	58	40	59	58	29
2	54	10	54	33	55	34	57	5	58	43	60	0	28
3	54	10	54	35	55	37	57	8	58	46	60	2	27
4	54	11	54	36	55	39	57	12	58	49	60	4	26
5	54	11	54	38	55	42	57	15	58	52	60	5	25
6	54	11	54	39	55	45	57	19	58	55	60	7	24
7	54	11	54	41	55	47	57	22	58	58	60	8	23
8	54	11	54	42	55	50	57	25	59	1	60	10	22
9	54	12	54	44	55	53	57	29	59	4	60	11	21
10	54	12	54	46	55	56	57	32	59	7	60	13	20
11	54	12	54	48	55	59	57	35	59	10	60	14	19
12	54	13	54	49	56	2	57	38	59	13	60	15	18
13	54	13	54	51	56	5	57	42	59	16	60	16	17
14	54	14	54	53	56	8	57	45	59	18	60	17	16
15	54	15	54	55	56	11	57	48	59	21	60	18	15
16	54	15	54	57	56	14	57	51	59	23	60	18	14
17	54	16	54	59	56	17	57	55	59	26	60	19	13
18	54	17	55	1	56	20	57	58	59	29	60	20	12
19	54	18	55	3	56	23	58	1	59	31	60	21	11
20	54	19	55	5	56	26	58	4	59	34	60	22	10
21	54	20	55	7	56	29	58	8	59	36	60	22	9
22	54	21	55	9	56	32	58	11	59	39	60	23	8
23	54	22	55	12	56	36	58	14	59	41	60	24	7
24	54	23	55	14	56	39	58	18	59	44	60	25	6
25	54	24	55	17	56	42	58	21	59	46	60	25	5
26	54	25	55	19	56	45	58	24	59	48	60	26	4
27	54	26	55	22	56	49	58	28	59	50	60	26	3
28	54	28	55	24	56	52	58	31	59	52	60	26	2
29	54	29	55	27	56	55	58	34	59	54	60	26	1
30	54	30	55	29	56	58	58	37	59	56	60	26	0
	XI		X		IX		VIII		VII		VI		

II. Arg. = (2 E — M) III. Arg. = ☽ — ☉ = E

	0 — 6 +	1 — 7 +	2 — 8 +	0 +	I ±	II —	III —	IV ∓	V +	
0	38″	33″	19	25	12″	14″	27″	13″	14″	30
1	38	32	18	25	12	14	27	12	14	29
2	38	32	18	25	11	15	27	12	15	28
3	38	32	17	25	10	16	27	11	16	27
4	38	31	17	25	9	16	27	10	17	26
5	38	31	16	25	8	17	27	9	18	25
6	38	31	16	25	8	18	27	8	18	24
7	37	30	15	24	7	18	26	7	19	23
8	37	30	14	24	6	19	26	6	20	22
9	37	30	14	24	5	20	26	5	20	21
10	37	29	13	24	4	21	25	4	21	20
11	37	29	13	24	3	21	25	3	22	19
12	37	28	12	23	2	22	24	2	22	18
13	37	28	11	23	1	23	24	1	23	17
14	36	28	11	23	—	23	23	—	23	16
15	36	27	10	23	1	24	23	1	24	15
16	36	27	9	22	1	24	22	2	24	14
17	36	26	9	22	2	25	22	3	25	13
18	36	26	8	21	3	25	21	4	25	12
19	35	25	7	20	4	25	21	5	25	11
20	35	25	6	19	5	26	20	6	26	10
21	35	24	6	19	6	26	19	7	26	9
22	35	24	5	18	7	26	19	7	26	8
23	34	23	4	17	8	26	18	8	26	7
24	34	23	4	16	9	26	17	9	27	6
25	34	22	3	15	10	27	16	10	27	5
26	34	21	3	15	10	27	16	11	27	4
27	33	21	2	14	11	27	15	11	28	3
28	33	20	1	13	12	27	14	12	28	2
29	33	20	1	12	13	27	13	13	28	1
30	33	19	0	12	14	27	13	14	28	0
	11 — 5 +	10 — 4 +	9 — 3 +	+ XI	± X	— IX	— VIII	∓ VII	+ VI	

I. Arg. Anom. med. ☽ = M

	0		I		II		III		IV		V		
	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	′	″	
0	29	35	29	58	31	2	32	41	34	36	36	10	30
1	29	35	29	59	31	5	32	45	34	39	36	13	29
2	29	36	30	0	31	7	32	49	34	43	36	15	28
3	29	36	30	2	31	10	32	53	34	46	36	17	27
4	29	36	30	4	31	13	32	56	34	50	36	19	26
5	29	36	30	6	31	17	33	0	34	54	36	21	25
6	29	36	30	7	31	20	33	4	34	57	36	23	24
7	29	36	30	9	31	23	33	8	35	1	36	25	23
8	29	37	30	11	31	26	33	12	35	5	36	27	22
9	29	37	30	13	31	29	33	15	35	8	36	29	21
10	29	38	30	15	31	32	33	19	35	11	36	31	20
11	29	39	30	17	31	36	33	23	35	15	36	3[illegible]	19
12	29	39	30	19	31	39	33	27	35	18	36	34	18
13	29	40	30	21	31	42	33	31	35	21	36	35	17
14	29	40	30	23	31	45	33	35	35	25	36	36	16
15	29	41	30	25	31	48	33	39	35	28	36	38	15
16	29	42	30	27	31	52	33	42	35	31	36	39	14
17	29	43	30	30	31	55	33	46	35	34	36	40	13
18	29	44	30	32	31	59	33	49	35	37	36	41	12
19	29	44	30	34	32	2	33	54	35	40	36	42	11
20	29	45	30	37	32	5	33	58	35	43	36	43	10
21	29	46	30	39	32	9	34	2	35	46	36	44	9
22	29	47	30	41	32	13	34	5	35	49	36	45	8
23	29	49	30	44	32	16	34	9	35	52	36	46	7
24	29	50	30	46	32	20	34	13	35	55	36	46	6
25	29	51	30	49	32	23	34	17	35	57	36	47	5
26	29	52	30	52	32	27	34	21	36	0	36	47	4
27	29	54	30	54	32	30	34	24	36	3	36	47	3
28	29	55	30	57	32	34	34	28	36	5	36	47	2
29	29	56	31	0	32	38	34	32	36	8	36	48	1
30	29	58	31	2	32	41	34	36	36	10	36	48	0
	XI		X		IX		VIII		VII		VI		

II. Argum. ☽ — ☉ = E

	O	I	II	III	IV	V	
	+	±	—	—	∓	+	
0	42″	20″	22″	42″	21″	22″	30
3	42	16	26	41	17	26	27
6	41	12	29	41	13	29	24
9	40	7	33	40	9	33	21
12	38	3	34	38	4	36	18
15	36	2	36	36	—	38	15
18	33	6	38	34	4	40	12
21	31	10	40	31	9	42	9
24	28	14	41	28	13	43	6
27	24	18	41	25	18	44	3
30	20	22	42	21	22	44	0
	+	±	—	—	∓	+	
	XI	X	IX	VIII	VII	VI	

III. Argum. 2 E — M

	O	I	II	III	IV	V	
	—	—	—	+	+	+	
0	37″	32″	19″	0″	19″	33″	30
3	37	31	17	2	20	34	27
6	37	30	16	3	22	35	24
9	37	29	14	5	24	36	21
12	36	28	12	7	25	36	18
15	36	27	10	9	27	37	15
18	36	25	8	11	28	37	12
21	35	24	6	13	29	38	9
24	34	22	4	15	31	38	6
27	33	21	2	17	32	38	3
30	32	19	0	19	33	38	0
	—	—	—	+	+	+	
	XI	X	IX	VIII	VII	VI	

		IV°	V°	VI°	VII°
		2E+M	2E — a	4E—M	M + a
O. VI	0	5″	3	1	1
— +	3	5	3	1	1
	6	5	3	1	1
	9	5	3	1	1
	12	5	3	1	1
	15	5	3	1	1
	18	4	3	1	1
	21	4	2	1	1
	24	4	2	1	1
	27	4	2	1	1
I. VII	0	4	2	1	1
— +	3	4	2	1	1
	6	4	2	1	1
	9	4	2	1	1
	12	4	2	1	1
	15	3	2	1	1
	18	3	2	1	1
	21	3	2	1	1
	24	3	2	1	1
	27	3	1	1	1
II. VIII	0	2	1	1	0
— +	3	2	1	1	0
	6	2	1	0	0
	9	2	1	0	0
	12	1	1	0	0
	15	1	1	0	0
	18	1	0	0	0
	21	1	0	0	0
	24	0	0	0	0
	27	0	0	0	0
	30				

Argumente.

VIII°	IX°	X°		
$\int$ VI + a − 2E + M	$\int$ VI + a − M	$\int$ III + M		
2''	1	1	30	
2	1	1	27	
2	1	1	24	
2	1	1	21	
2	1	1	18	
2	1	1	15	
2	1	1	12	
2	1	1	9	
2	1	1	6	
2	1	1	3	— +
1	1	1	0	XI. V
1	1	1	27	
1	1	1	24	
1	1	1	21	
1	1	1	18	
1	1	1	15	
1	1	1	12	
1	1	1	9	
1	1	1	6	
1	1	1	3	— +
1	1	0	0	X. IV
1	0	0	27	
1	0	0	24	
1	0	0	21	
1	0	0	18	
0	0	0	15	
0	0	0	12	
0	0	0	9	
0	0	0	6	
0	0	0	3	— +
0	0		0	IX. III

Argumente.

		I°		II°	III°
		☽m — ☊m = λ		⊙ VI + λ + M	2E — λ
O. VI	0	2′	58″	19″	5″
+ —	3	2	58	19	5
	6	2	57	19	5
	9	2	56	19	5
	12	2	54	19	5
	15	2	52	19	5
	18	2	49	18	5
	21	2	46	18	5
	24	2	42	18	5
	27	2	38	17	4
I. VII	0	2	34	17	4
+ —	3	2	29	16	4
	6	2	24	15	4
	9	2	18	15	4
	12	2	12	14	4
	15	2	6	14	4
	18	1	59	13	3
	21	1	52	12	3
	24	1	45	11	3
	27	1	37	10	3
II. VIII	0	1	29	10	3
+ —	3	1	21	9	2
	6	1	12	8	2
	9	1	4	7	2
	12	0	55	6	2
	15	0	46	5	1
	18	0	37	4	1
	21	0	28	3	1
	24	0	18	2	0
	27	0	9	1	0
	30	0	0	0	0

Argumente.

IV°	V°	VI°		
$\int$ VI + λ + 2E − M	$\int$ VI − λ + 2E − M	2E + λ		
4″	3″	3″	30	
4	3	3	27	
4	3	3	24	
4	3	3	21	
4	3	3	18	
4	3	3	15	
4	3	3	12	
4	3	3	9	
4	3	3	6	
4	3	3	3	+ −
3	3	3	0	XI. V
3	3	3	27	
3	2	2	24	
3	2	2	21	
3	2	2	18	
3	2	2	15	
3	2	2	12	
3	2	2	9	
2	2	2	6	
2	2	2	3	+ −
2	1	1	0	X. IV
2	1	1	27	
2	1	1	24	
1	1	1	21	
1	1	1	18	
1	1	1	15	
1	1	1	12	
1	0	0	9	
0	0	0	6	
0	0	0	3	+ −
0	0	0	0	IX. III

Drey und dreyzigste Tafel, für die Zeit der ♂

I. Arg. Anom. med. ☽

	O			I			II		
	+			+			+		
	St.	′	″	St.	′	″	St.	′	″
0	0	0	0	5	56	51	10	8	41
1	0	12	31	6	7	26	10	14	20
2	0	25	2	6	17	55	10	19	46
3	0	37	33	6	28	15	10	25	1
4	0	50	3	6	38	28	10	30	5
5	1	2	32	6	48	32	10	34	56
6	1	15	0	6	58	29	10	39	35
7	1	27	26	7	8	18	10	44	2
8	1	39	51	7	17	56	10	48	16
9	1	52	13	7	27	28	10	52	19
10	2	4	33	7	36	48	10	56	9
11	2	16	50	7	46	2	10	59	47
12	2	29	4	7	55	4	11	3	10
13	2	41	16	8	3	59	11	6	21
14	2	53	25	8	12	42	11	9	21
15	3	5	31	8	21	16	11	12	9
16	3	17	31	8	29	41	11	14	43
17	3	29	27	8	37	55	11	17	4
18	3	41	20	8	45	59	11	19	14
19	3	53	10	8	53	53	11	21	11
20	4	4	52	9	1	37	11	22	54
21	4	16	29	9	9	10	11	24	25
22	4	28	2	9	16	31	11	25	44
23	4	39	30	9	23	41	11	26	49
24	4	50	52	9	30	41	11	27	42
25	5	2	9	9	37	29	11	28	22
26	5	13	17	9	44	6	11	28	50
27	5	24	24	9	50	32	11	29	4
28	5	35	18	9	56	47	11	29	6
29	5	46	8	10	2	50	11	28	56
30	5	56	51	10	8	41	11	28	33
	—			—			—		
	XI			X			IX		

= M

III +			IV +			V +			
St.	′	″	St.	′	″	St.	′	″	
11	28	33	9	44	29	5	32	39	30
11	27	58	9	38	10	5	22	26	29
11	27	10	9	31	41	5	12	8	28
11	26	10	9	25	2	5	1	46	27
11	24	58	9	18	13	4	51	17	26
11	23	32	9	11	15	4	40	45	25
11	21	54	9	4	7	4	30	6	24
11	20	4	8	56	51	4	19	25	23
11	18	2	8	49	26	4	8	38	22
11	15	48	8	41	50	3	57	49	21
11	13	22	8	34	7	3	46	56	20
11	10	44	8	26	15	3	35	58	19
11	7	53	8	18	13	3	24	56	18
11	4	50	8	10	4	3	13	53	17
11	1	37	8	1	47	3	2	43	16
10	58	12	7	53	21	2	51	33	15
10	54	33	7	44	47	2	40	19	14
10	50	47	7	36	7	2	29	2	13
10	46	46	7	27	18	2	17	42	12
10	42	35	7	18	22	2	6	22	11
10	38	11	7	9	18	1	55	1	10
10	33	37	7	0	8	1	43	35	9
10	28	52	6	50	51	1	32	10	8
10	23	56	6	41	28	1	20	42	7
10	18	50	6	31	56	1	9	12	6
10	13	33	6	22	17	0	57	42	5
10	8	6	6	12	34	0	46	10	4
10	2	25	6	2	45	0	34	38	3
9	56	36	5	52	49	0	23	6	2
9	50	38	5	42	46	0	11	33	1
9	44	29	5	32	39	0	0	0	0
— VIII			— VII			— VI			

	O			I			II		
	—			—			+		
	St.	′	″	St.	′	″	St.	′	″
0	0	0	0	0	48	32	0	47	25
1	0	1	57	0	49	27	0	46	20
2	0	3	55	0	50	20	0	45	12
3	0	5	52	0	51	10	0	44	1
4	0	7	49	0	51	55	0	42	45
5	0	9	45	0	52	36	0	41	27
6	0	11	41	0	53	13	0	40	5
7	0	13	36	0	53	47	0	38	41
8	0	15	30	0	54	15	0	37	12
9	0	17	22	0	54	40	0	35	42
10	0	19	13	0	54	59	0	34	9
11	0	21	2	0	55	18	0	32	32
12	0	22	50	0	55	30	0	30	53
13	0	24	37	0	55	39	0	29	12
14	0	26	22	0	55	42	0	27	28
15	0	28	5	0	55	43	0	25	42
16	0	29	47	0	55	39	0	23	54
17	0	31	25	0	55	30	0	22	3
18	0	33	0	0	55	17	0	20	11
19	0	34	34	0	55	0	0	18	18
20	0	36	7	0	54	39	0	16	22
21	0	37	34	0	54	13	0	14	25
22	0	38	59	0	53	44	0	12	28
23	0	40	22	0	53	11	0	10	28
24	0	41	42	0	52	34	0	8	29
25	0	42	58	0	51	52	0	6	29
26	0	44	12	0	51	7	0	4	26
27	0	45	23	0	50	17	0	2	27
28	0	46	30	0	49	22	0	0	22
29	0	47	32	0	48	25	0	1	40
30	0	48	32	0	47	25	0	3	43
	+			+			+		
	XI			X			IX		

= E

III + St.	′	″	IV + St.	′	″	V + St.	′	″	
0	3	43	0	53	51	0	52	16	30
0	5	46	0	54	47	0	51	10	29
0	7	49	0	55	40	0	50	0	28
0	9	53	0	56	31	0	48	45	27
0	11	52	0	57	17	0	47	28	26
0	13	53	0	57	58	0	46	8	25
0	15	53	0	58	34	0	44	45	24
0	17	52	0	59	7	0	43	18	23
0	19	50	0	59	36	0	41	47	22
0	21	47	0	59	59	0	40	14	21
0	23	43	1	0	19	0	38	39	20
0	25	37	1	0	36	0	37	0	19
0	27	27	1	0	49	0	35	18	18
0	29	17	1	0	56	0	33	36	17
0	31	6	1	0	59	0	31	50	16
0	32	52	1	0	57	0	30	1	15
0	34	36	1	0	52	0	28	10	14
0	36	18	1	0	43	0	26	18	13
0	37	57	1	0	28	0	24	24	12
0	39	34	1	0	10	0	22	28	11
0	41	9	0	59	47	0	20	31	10
0	42	38	0	59	20	0	18	31	9
0	44	6	0	58	49	0	16	30	8
0	45	31	0	58	14	0	14	29	7
0	46	53	0	57	35	0	12	28	6
0	48	11	0	56	52	0	10	25	5
0	49	27	0	56	5	0	8	22	4
0	50	39	0	55	14	0	6	17	3
0	51	46	0	54	17	0	4	11	2
0	52	50	0	53	17	0	2	5	1
0	53	51	0	52	16	0	0	0	0
— VIII			— VII			— VI			

	O			I			II		
	+			+			+		
	St.	′	″	St.	′	″	St.	′	″
0	0	0	0	1	11	21	2	3	20
1	0	2	30	1	13	30	2	4	32
2	0	4	59	1	15	38	2	5	43
3	0	7	48	1	17	44	2	6	53
4	0	9	57	1	19	48	2	7	59
5	0	12	26	1	21	51	2	9	1
6	0	14	55	1	23	51	2	10	2
7	0	17	23	1	25	50	2	11	1
8	0	19	51	1	27	49	2	11	57
9	0	22	19	1	29	46	2	12	51
10	0	24	46	1	31	40	2	13	43
11	0	27	14	1	33	34	2	14	32
12	0	29	41	1	35	26	2	15	18
13	0	32	7	1	37	15	2	16	2
14	0	34	32	1	39	3	2	16	44
15	0	36	57	1	40	50	2	17	23
16	0	39	21	1	42	34	2	17	59
17	0	41	44	1	44	16	2	18	33
18	0	44	7	1	45	56	2	19	5
19	0	46	29	1	47	35	2	19	35
20	0	48	50	1	49	11	2	20	2
21	0	51	9	1	50	45	2	20	25
22	0	53	28	1	52	17	2	20	45
23	0	55	46	1	53	48	2	21	4
24	0	58	3	1	55	17	2	21	20
25	1	0	19	1	56	43	2	21	34
26	1	2	34	1	58	7	2	21	44
27	1	4	48	1	59	29	2	21	53
28	1	7	0	2	0	49	2	22	0
29	1	9	11	2	2	6	2	22	3
30	1	11	21	2	3	20	2	22	2
	—			—			—		
	XI			X			IX		

2 E — M

III			IV			V			
+			+			+			
St.	′	″	St.	′	″	St.	′	″	
2	22	2	2	2	40	1	10	41	30
2	22	1	2	1	24	1	8	32	29
2	21	56	2	0	5	1	6	22	28
2	21	48	1	58	44	1	4	10	27
2	21	38	1	57	22	1	1	57	26
2	21	26	1	55	59	0	59	43	25
2	21	11	1	54	33	0	57	28	24
2	20	52	1	53	4	0	55	13	23
2	20	32	1	51	33	0	52	56	22
2	20	11	1	50	0	0	50	39	21
2	19	45	1	48	25	0	48	20	20
2	19	17	1	46	48	0	46	1	19
2	18	47	1	45	10	0	43	41	18
2	18	13	1	43	30	0	41	19	17
2	17	37	1	41	48	0	38	57	16
2	17	0	1	40	4	0	36	34	15
2	16	20	1	38	17	0	34	10	14
2	15	37	1	36	29	0	31	47	13
2	14	52	1	34	40	0	29	23	12
2	14	4	1	32	48	0	26	57	11
2	13	14	1	30	54	0	24	31	10
2	12	22	1	29	0	0	22	5	9
2	11	25	1	27	5	0	19	39	8
2	10	27	1	25	6	0	17	12	7
2	9	28	1	23	7	0	14	45	6
2	8	25	1	21	7	0	12	18	5
2	7	21	1	19	4	0	9	51	4
2	6	14	1	16	59	0	7	24	3
2	5	5	1	14	54	0	4	56	2
2	3	53	1	12	48	0	2	28	1
2	2	40	1	10	41	0	0	0	0
—			—			—			
VIII			VII			VI			

	O		I		II	
	—		—		—	
0	0′	0″	10′	5″	17′	38″
1	0	21	10	23	17	49
2	0	42	10	41	18	0
3	1	4	11	0	18	0
4	1	25	11	17	18	20
5	1	45	11	35	18	30
6	2	6	11	52	18	39
7	2	27	12	9	18	48
8	2	47	12	26	18	57
9	3	8	12	42	19	5
10	3	29	12	59	19	13
11	3	50	13	16	19	21
12	4	11	13	32	19	28
13	4	31	13	48	19	35
14	4	51	14	4	19	42
15	5	12	14	19	19	49
16	5	32	14	33	19	55
17	5	52	14	48	20	0
18	6	12	15	3	20	5
19	6	32	15	18	20	10
20	6	52	15	33	20	15
21	7	12	15	47	20	19
22	7	32	16	1	20	23
23	7	52	16	14	20	27
24	8	11	16	26	20	30
25	8	30	16	38	20	32
26	8	49	16	51	20	34
27	9	9	17	4	20	36
28	9	28	17	15	20	38
29	9	47	17	27	20	30
30	10	5	17	38	20	40
	+		+		+	
	XI		X		IX	

== a

III −	IV −	V −	
20′ 40″	18′ 10″	10′ 36″	30
20 41	17 59	10 17	29
20 40	17 47	9 58	28
20 40	17 36	9 38	27
20 39	17 24	9 18	26
20 38	17 12	8 58	25
20 37	17 0	8 38	24
20 35	16 48	8 18	23
20 33	16 35	7 58	22
20 31	16 22	7 37	21
20 28	16 8	7 16	20
20 24	15 53	6 55	19
20 20	15 39	6 34	18
20 16	15 24	6 13	17
20 11	15 10	5 52	16
20 7	14 55	5 31	15
20 2	14 40	5 9	14
19 56	14 24	4 47	13
19 50	14 8	4 25	12
19 43	13 52	3 54	11
19 38	13 35	3 42	10
19 30	13 18	3 20	9
19 23	13 0	2 57	8
19 15	12 43	2 35	7
19 6	12 26	2 13	6
18 57	12 9	1 51	5
18 49	11 51	1 29	4
18 40	11 32	1 7	3
18 30	11 13	0 44	2
18 20	10 55	0 22	1
18 10	10 36	0 0	0
+ VIII	+ VII	+ VI	

V. Argum.

	O		I		II	
	−		−		−	
0	0′	0″	4′	44″	5′	0″
1	0	11	4	50	4	56
2	0	23	4	56	4	50
3	0	34	5	1	4	44
4	0	46	5	6	4	39
5	0	57	5	11	4	32
6	1	8	5	14	4	25
7	1	19	5	18	4	18
8	1	30	5	21	4	11
9	1	41	5	24	4	2
10	1	51	5	27	3	55
11	2	2	5	29	3	48
12	2	13	5	31	3	39
13	2	24	5	32	3	31
14	2	34	5	34	3	22
15	2	43	5	34	3	13
16	2	53	5	35	3	5
17	3	3	5	34	2	56
18	3	12	5	34	2	46
19	3	21	5	33	2	36
20	3	30	5	32	2	26
21	3	39	5	30	2	16
22	3	47	5	29	2	7
23	3	56	5	26	1	57
24	4	3	5	24	1	46
25	4	11	5	21	1	36
26	4	19	5	18	1	26
27	4	25	5	14	1	15
28	4	32	5	9	1	4
29	4	39	5	5	0	53
30	4	44	5	0	0	43
	+		+		+	
	XI		X		IX	

E — M

III		IV		V		
+		+		+		
0'	43''	3'	46''	4'	2''	30
0	33	3	51	3	57	29
0	22	3	57	3	52	28
0	11	4	2	3	47	27
—		4	6	3	41	26
0	10	4	11	3	35	25
0	20	4	14	3	29	24
0	31	4	18	3	22	23
0	41	4	21	3	15	22
0	52	4	24	3	7	21
1	2	4	26	3	0	20
1	12	4	28	2	53	19
1	22	4	30	2	45	18
1	32	4	32	2	37	17
1	41	4	33	2	29	16
1	51	4	34	2	21	15
2	0	4	34	2	13	14
2	9	4	34	2	4	13
2	17	4	33	1	55	12
2	26	4	32	1	46	11
2	35	4	31	1	37	10
2	43	4	30	1	27	9
2	51	4	28	1	18	8
2	59	4	26	1	9	7
3	7	4	24	0	59	6
3	14	4	21	0	49	5
3	21	4	18	0	40	4
3	28	4	15	0	30	3
3	34	4	10	0	20	2
3	40	4	6	0	10	1
3	46	4	2	0	0	0
+		—		—		
VIII		VII		VI		

		VI°		VII°		VIII°		IX°		X°	
		a + M		a — M		2E — a		∫ VI + 2E + M		a — 2E + M	
		o′	o″	o′	o″	o′	o″	o′	o″	o′	o″
O. VI	0										
+ —	3	0	6	0	11	0	11	0	16	0	22
	6	0	13	0	21	0	22	0	31	0	45
	9	0	19	0	32	0	32	0	47	1	7
	12	0	26	0	42	0	43	1	2	1	29
	15	0	32	0	53	0	54	1	17	1	51
	18	0	38	1	3	1	5	1	32	2	12
	21	0	44	1	13	1	16	1	46	2	33
	24	0	50	1	23	1	26	2	0	2	54
	27	0	56	1	32	1	36	2	15	3	14
I. VII	0	1	1	1	42	1	46	2	29	3	34
+ —	3	1	7	1	51	1	56	2	42	3	53
	6	1	12	2	0	2	5	2	55	4	12
	9	1	17	2	8	2	13	3	7	4	30
	12	1	24	2	16	2	22	3	18	4	47
	15	1	29	2	24	2	30	3	30	5	3
	18	1	33	2	32	2	38	3	41	5	18
	21	1	36	2	39	2	45	3	51	5	33
	24	1	39	2	45	2	52	4	1	5	47
	27	1	43	2	51	2	58	4	10	5	59
II. VIII	0	1	46	2	55	3	4	4	18	6	12
+ —	3	1	49	3	2	3	9	4	26	6	22
	6	1	52	3	6	3	13	4	32	6	31
	9	1	55	3	10	3	18	4	38	6	40
	12	1	57	3	14	3	22	4	43	6	47
	15	1	59	3	17	3	26	4	48	6	54
	18	2	0	3	19	3	29	4	51	6	59
	21	2	1	3	22	3	30	4	54	7	3
	24	2	2	3	23	3	31	4	56	7	6
	27	2	3	3	24	3	32	4	57	7	7
	30	2	3	3	24	3	32	4	58	7	8

Argumente.

XI°		XII°		XIII°		XIV°	XV°		
a + 2E — M		2(⊙ — ☊)		M — 2λ		2E + M — a	M — 4E		
0'	0''	0'	0''	0'.	0''	0''	0''	30	
0	4	0	4	0	5	1	1	27	
0	7	0	9	0	11	3	3	24	
0	11	0	13	0	16	4	4	21	
0	15	0	17	0	22	6	6	18	
0	18	0	22	0	27	7	7	15	
0	22	0	26	0	32	8	8	12	
0	25	0	30	0	38	9	9	9	
0	29	0	35	0	43	11	11	6	
0	31	0	39	0	48	12	12	3	— +
0	36	0	43	0	53	13	13	0	XI. V
0	39	0	46	0	57	14	15	27	
0	43	0	50	1	2	15	16	24	
0	45	0	54	1	6	16	17	21	
0	48	0	57	1	10	17	18	18	
0	50	1	0	1	14	18	19	15	
0	53	1	3	1	18	19	20	12	
0	55	1	6	1	22	20	21	9	
0	58	1	9	1	25	21	22	6	
1	0	1	12	1	28	21	22	3	— +
1	2	1	14	1	31	22	23	0	X. IV
1	4	1	16	1	34	23	24	27	
1	5	1	18	1	36	23	24	24	
1	7	1	20	1	38	24	25	21	
1	8	1	21	1	40	24	25	18	
1	9	1	22	1	41	25	26	15	
1	10	1	23	1	43	25	26	12	
1	10	1	24	1	44	25	26	9	
1	11	1	25	1	44	26	27	6	
1	11	1	25	1	45	26	27	3	— +
1	11	1	25	1	45	26	27	0	IX. III

Beyspiele.

1771	Arg. latit.	T. St. ′ ″	Long. ☉
1759	☋ − 0 0 59	− 23 5 7 1	8 27 33 27
12	☊ + 4 32 47	146 1 30 49	4 24 3 3
Neumond	☋ + 4 31 48	122 20 23 48	1 21 36 30
subtr.	☋ + 15 20 7	14 18 22 1	0 14 33 12
Vollmond	☊ − 10 48 19	108 2 1 47	1 7 3 18
☽ =	7 7 3 18	+ 18 44 25	
☊ =	7 17 51 37	Apr. 17 20 46 12	
	+ 40	− 5 0 0	− 12 19
	+ 7	− 52 0	− 2 8
	0	− 28	− 1
	+ 47	− 5 52 28	− 14 28
☊′	7 17 52 24	Apr. 17 14 53 44	1 6 48 50
	− 8 59		+ 1 41 22
☊ v.	7 17 43 25		1 8 30 12
☽ v.	7 8 30 12		
☊ − ☽	11 20 46 47	- - - - -	- - - - -
	Argum.		

	s ° ′ ″	St. ′ ″	St. ′ ″	
M =	8 18 22 6	- - -	− 9 24 7	Tab. 5
a =	9 28 1 59	+ 3 38 11		Tab. 6
a + M =	6 16 24	+ 1 59		Tab. 7
a − M =	1 9 40	- - -	− 6 43	Tab. 8
a + 2 M =	3 4 46	- - -	− 53	T. 9. col. 1
a − 2 M =	4 21 18	- - -	− 20	- - - 2
2(☽ − ☊) − M =	2 20 3	- - -	− 1 52	- - - 3
2(☊ − ☉) =	0 21 37	- - -	− 34	- - - 4
M =	8 18 22	+ 1 51		- - - 5
		+ 3 42 1	− 9 34 29	

− 9 34 29

− 5 52 28

Apr. 17 20 46 12

Apr. 17 14 53 44 ☍ Berol. temp. med.

a′ = 9 27 48 − 6 46 } Tab. 12. aequ. temp.

☉ v. = 1 8 30 + 9 32 }

1771. Apr. 17 14 56 30 ☍ in orbita, Berol. temp. vero st. Jul.

Anom. ☉ = a	Anom. ☽ = M	☽	
5 18 44 32	1 21 6 33		Tab. 1
4 23 50 36	1 10 10 3		T. 2. No. 141
10 12 35 8	3 1 16 36		
0 14 33 9	6 12 54 30		T. 2. No. 359
9 28 1 59	8 18 22 6	7 7 3 18	
			Tab. 3 & 4
— 12 19	— 2 43 18	— 2 44 42	
— 2 8	— 28 19	— 28 33	Tab. 10
— 1	— 15	— 15	
— 14 28	— 3 11 52	— 3 13 30	
9 27 47 31	8 15 10 14	7 3 49 48	
a′	M′	☽′	Tab. 11. 13

- - - - - -	✠ 2 12	Reduct. ad Eccl. Tab. 14.
Argum.	— 48 3	Latit. ☽ Tab. 15.
☽′ = 7ˢ 3° 50′		
☊′ — 7 17 52		
M′ = 8 15 10		
5 15 58	- - - + 3 2	Tab. 16. Col. 1
8 1 8	- - - + 10	- - - - 2
3 0 48	- - - 0	- - - - 3
	— 3 12	Increm. latit. horar. ☽
M′ = 8 15 10	+ 34 24	Tab. 17
	+ 2	
a′ = 9 27 48	— 1	- - - Col. 1
4 17 22	✠ 2	- - - - 2
6 12 58	✠ 1	- - - - 3
11 15 10	— 1	- - - - 4
	+ 34 27	Horar. ☽ in orbita
M′ = 8 15 10	58 19	Tab. 18 Parall. ☽
	15 53	Tab. 19 Semid. ☽
a′ = 9 27 48	15 55	Tab. 20 Semid. ☉
	2 25	- - - Horar. ☉
	42 31	Tab. 19 Semid. umbrae

		T. St. ′ ″	Long. ☉
1773 1759	☋ — 0 0 59	— 23 5 7 1	8 27 33 27
14	☋ — 6 0 29	271 22 48 14	8 28 8 47
Neumond	☊ — 6 1 28	248 17 41 13	5 25 42 14
add.	☋ + 15 20 7	14 18 22 1	0 14 33 12
Vollmond	☋ + 9 18 39	263 12 3 14	6 10 15 26
☽	0 10 15 26	+ 6 44 25	
☊	6 0 56 47	Sept. 19 18 47 39	
	+ 1 27	— 11 0 0	— 27 6
	+ 7	— 54 0	— 2 13
	0	— 18	— 1
	+ 1 34	— 11 54 18	— 29 20
☊′	6 0 58 21	Sept. 19 6 53 21	6 9 46 6
	+ 10 18		— 1 55 44
☊ v.	6 1 8 39		6 7 50 22
☽ v.	0 7 50 22		☉ v.
☽ — ☊	6 6 41 43	- - - - - - - - -	
	Argum.		

M =	10 12 52 19	- - -	— 7 32 29	Tab. 5
a =	3 1 11 28	- - -	— 4 10 11	Tab. 6
a + M =	1 14 4	- - -	— 4 52	Tab. 7
a — M =	4 18 19	- - -	— 7 0	Tab. 8
a + 2 M =	11 26 56	+ 3		T. 9. col. 1
a — 2 M =	6 5 27	+ 3		- - - 2
2(☽ — ☊) — M =	2 5 45	- - -	— 1 44	- - - 3
2(☊ — ☉) =	11 11 23	+ 29		- - - 4
M =	10 12 52	+ 1 23		- - - 5
		+ 1 58	— 11 56 16	
		— 11 56 16		
		— 11 54 18		
	Sept.	19 18 47 39		
	Sept.	19 6 53 21	☍ Berol. temp. med.	
a′ =	3 0 42 …	+ 7 43		
☉ v. =	6 7 50 …	+ 2 34	Tab. 12. aequ. temp.	
	1773. Sept.	19 7 3 38	☍ in orbita, temp. vero Berol. st. Jul.	

Anom. ☉ = a	Anom. ☽ = M	☽	
5 18 44 32	1 21 6 33		Tab. 1
8 27 53 47	2 8 51 16		T.2. No. 170
2 16 38 19	3 29 57 49		
0 14 33 9	6 12 54 30		T.2. No. 359
3 1 11 28	10 12 52 19	0 10 15 26	
			Tab. 3 & 4
— 27 6	— 5 59 17	— 6 2 21	
— 2 13	— 29 24	— 29 39	Tab. 10
— 1	— 9	— 9	
— 29 20	— 6 28 50	— 6 32 9	
3 0 42 8	10 6 23 29	0 3 43 17	
a′	M′	☽′	Tab. 11. 13

- - - - -	— 1 36	Tab. 14. Reduct. ad Eccl.
Argum.	— 34 58	Tab. 15. latit. ☽
☽′ = 0 3 43		
☊′ = 6 0 58		
M′ = 10 6 23		
0 2 45	- - - — 3 7	Tab. 16. Col. 1
4 9 8	+ 13	- - - - 2
7 26 22	+ 2	- - - - 3
	— 2 52	Increm. latit. horar. ☽
M′ = 10 6 23	[+ 30 54 + 2	Tab. 17
a′ = 3 0 42	0	- - - Col. 1
1 5 41	— 2	- - - - 2
1 7 5	— 1	- - - - 3
1 6 23	— 1	- - - - 4
	+ 30 52	Horar. ☽
M′ = 10 6 23	55 15	Parall. ☽ Tab. 18
	15 3	Semid. ☽ Tab. 19
a′ = 3 0 42	16 3	Semid. ☉ Tab. 20
	2 28	Horar. ☉ - - -
	39 22	Semid. umbrae, Tab 19

1778	Argum. latit.	T. St. ′ ″	☉
1759	☋ − 0 0 59	− 23 5 7 1	8 27 33 27
19	☋ + 3 33 14	188 0 7 5	6 5 26 39
	☊ + 3 32 15	164 19 0 4	3 3 0 6
☽ =	3 3 0 6	+ 12 44 25	
☊ =	1 29 27 51	Jun. 13 7 44 29	
	+ 24	− 3 0 0	− 7 23
	+ 1	− 11 0	− 27
	0	− 40	− 2
	+ 25	− 3 11 40	− 7 52
☊′	2 29 18 16	Jun. 13 4 32 49	3 2 52 14
	− 1 7		+ 12 24
☊ v.	2 29 27 9		3 3 4 38
☽ v.	3 3 4 38		☉ v.
☽ − ☊ =	0 3 37 29	- - -	- - -

M =	6 23 9 16	+ - - -	− 3 34 12	Tab. 5
a =	11 23 50 59	+ 0 26 8		Tab. 6
a + M =	6 17 0	+ 2 3		Tab. 7
a − M =	5 0 42	- - -	− 5 9	Tab. 8
a + 2M =	1 10 9	- - -	− 34	T. 9. col. 1
a − 2M =	10 7 33	+ 25		- - - 2
2(☉ − ☊) − M =	5 13 55		− 31	- - - 3
2(☊ − ☉) =	11 23 55	+ 10		- - - 4
		+ 0 28 46	− 3 40 26	
		− 3 40 26		
		− 3 11 40		
		Jun. 13 7 44 29		

Jun. 13 4 32 49 ☌ Berol. temp. med.

a′ = 11 23 43 … − 49 } Tab. 12 aequ. temp.
☽ v. = 3 3 5 … − 1 7 }

1778 Jun. 13 4 30 53 ☌ in orbita, Berol. temp. vero st. Jul.

an. ⊙ = a	an. ☽ = M	☽	
5 18 44 32	1 21 6 33		Tab. 1
6 5 6 27	5 2 2 43		T. 2 No. 229
11 23 50 59	6 23 9 16	3 3 0 6	
			Tab. 3. 4
— 7 23	— 1 37 59	— 1 38 49	
— 27	— 5 59	— 6 2	Tab. 10
— 2	— 22	— 22	
— 7 52	— 1 44 21	— 1 45 13	
11 23 43 7	6 21 24 55	3 1 14 53	
a′	M′	☽′	Tab. 11. 13
- - - -	— 0 52		
	+ 18 58	red. ad eccl.	Tab. 14
☽′ = 3 1 15		latit. ☽	Tab. 15
☊′ = 2 29 28			
M′ = 6 21 25			
6 1 47	+ 3 7	Tab. 16. col.	1
6 23 12	+ 18	- - -	2
5 10 22	+ 4	- - -	3
	+ 3 29	Incr. horar. latit. ☽	
M′ = 6 21 25	+ 37 48	Tab. 17	
a′ = 11 23 43	— 3	- - Col.	1
0 27 42	— 3	- - -	2
6 15 8	+ 1	- - -	3
9 21 25	0	- - -	4
	+ 37 43	Horar. ☽ in orbita	
M′ = 6 21 25	61 10	Parall. ☽	T. 18
	16 41	Semid. ☽	T. 19
a′ = 11 23 43	15 47	Semid. ⊙	T. 20
	2 23	Horar. ⊙	
	61 0	Semid. ♁	T. 20
	+ 0 54	Semid. umbrae	
	32 28	Semid. penumbrae	
⊙ v. 3 3 4 38	23 26 9	Declin. ⊙	T. 21
	88 39 53	Ang. eccl.	T. 22
	+ 0 16 37	Red. ad aequ.	T. 23

	Argum. latit.	T. St. ′ ″	☉
1769	☋ — 0 0 59	— 23 5 7 1	8 27 33 27
1759	☊ — 11 32 48	167 19 53 40	5 15 29 20
10			
	☋ — 11 33 47	144 14 46 39	2 13 2 47
☽	2 13 2 47	+ 6 44 25	
☊	8 24 36 34	Mai 23 21 31 4	
	+ 2	— 12 0	— 30
	0	— 10	0
	+ 2	— 12 10	— 30
☊′	8 24 36 36	Mai 23 21 18 54	2 13 2 17
	— 4 23		+ 49 40
☊ v. =	8 24 32 13		2 13 51 57
☽ v. =	2 13 51 57		☉ v.
☽ - ☊ =	5 19 19 44	- - -	- - -

M =	6 11 40 25	- - -	— 1 49 43	Tab. 5
a =	11 4 3 34	+ 1 46 57		Tab. 6
a + M =	5 15 44	- - -	— 1 44	Tab. 7
a — M =	4 22 23	- - -	— 6 26	Tab. 8
a + 2M =	11 27 24	+ 3		T. 9. col. 1
a — 2M =	10 10 43	+ 24		- - - 2
(☽ - ☊) - M =	4 25 12	- - -	— 1 4	- - - 3
2(☊ — ☉) =	0 23 8	- - -	— 37	- - - 4

+ 1 47 24
— 1 59 34

— 0 12 10
Mai 23 21 31 4

Mai 23 21 18 54 ☌ Berol. temp. med.

a = 11 4 3 . . . — 3 19
☉ v. = 2 13 52 . . . + 5 24
} Tab. 12 aequ. temp.

1769 Mai 23 21 20 59 ☌ in orbita Berol. temp. vero.

an. ☉ = a	an. ☽ = M	☽	
5 18 44 32	1 21 6 33		Tab. 1
5 15 19 1	4 20 33 52		T. 2 No. 117
11 4 3 33	6 11 40 25	2 13 2 47	Tab. 3, 4
— 30	— 6 32	— 6 35	
0	— 5	— 5	Tab. 10
— 30	— 6 37	— 6 40	
11 4 3 4	6 11 33 48	2 12 56 7	
a′	M′	☽′	Tab. 11. 13
	′ ″		
- - - -	+ 2 32		
	+ 55 31	red. ad eccl.	Tab. 14
		latit. ☽	Tab. 15
☽′ = 2 13 3			
☊′ = 8 24 37			
M′ = 6 11 34			
11 18 20	- - — 3 3	Tab. 16. col.	1
11 29 54	+ 20	- - -	2
11 6 46	— 4	- - -	3
	— 3 27	Incr. horar. latit.	
M′ = 6 11 34	+ 38 3	Tab. 17	
a′ = 11 4 3	— 3	- - Col.	1
1 7 31	— 2	- - -	2
5 15 37	+ 1	- - -	3
2 4 3	0	- - -	4
	+ 37 59	Horar. ☽ in orbita	
M′ = 6 11 34	61 23	Parall. ☽	T. 18
	16 45	Semid. ☽	T. 19
a′ = 11 4 3	15 49	Semid. ☉	T. 20
	2 23	Horar. ☉	T. 20
	61 13	Semid. ♁	
	0 56	Semid. umbrae	T. 20
	32 34	Semid. penumbrae	
☉v. = 2 13 51 57	22 29 45	Declin. ☉	T. 21
	83 7 12	Ang. eccl.	T. 22
	— 1 22 11	Red. ad aequ.	T. 23

	Arg. latit.	T. St. , ″	☉
1783	☋ — 0 0 59	— 23 5 7 1	8 27 33 27
1759	☋ — 17 33 17	74 12 41 53	2 13 38 7
24	☊ — 17 34 16	51 7 34 52	11 11 11 34
☽ =	11 11 11 34	29 12 15 35	
☊ =	11 28 45 50	— 21 19 19 17	
	+ 1 6 43	— 21 0 0 0	— 20 41 55
	2 31	— 19 0 0	46 49
	3	— 19 0	47
	0	— 17	1
	+ 1 9 17		— 21 29 32
	11 29 55 7		10 19 42 2
	— 6 50		+ 1 16 19
☊′ =	11 29 48 17	☉ v. =	10 20 58 21

M = 11 5 38 43	+ 2 26 33	- - -	Tab. 24
☽ - ☉ = E = 3 4 10 48	- - -	— 7 46	Tab. 25
2 E = 6 8 21 36			
2 E — M = 7 2 42 53	+ 41 47	- - -	Tab. 26
a = 7 10 27 52	- - -	— 7 31	Tab. 27
a + M = 6 16 7	+ 29	- - -	T. 28. Col. 1
a — M = 8 4 49	+ 2 11	- - -	- - - 2
M + 2 E = 5 14 0	- - -	— 48	- - - 3
M — E = 8 1 28	+ 21	- - -	- - - 4
2 (M — E) = 4 2 56	- - -	— 2 50	- - - 5
4 E — M = 1 11 4	- - -	— 35	- - - 6
2 E — a = 10 27 54	+ 1 20	- - -	- - - 7
a + 2 E - M = 2 13 11	- - -	— 44	- - - 8
a - 2 E + M = 0 7 45	- - -	— 31	- - - 9
M — 2 λ = 7 17 43	+ 43		
2 ☉ - 2 ☊ = 9 8 34	+ 46		
	+ 3 14 10	— 20 45	
	— 0 20 45		
	+ 2 53 25		

a	M	☽	
5 18 44 32	1 21 6 33	- - - -	Tab. 1
2 13 12 48	6 29 25 9	- - - -	T. 2. No. 287
8 1 57 20	8 20 31 42	11 11 11 34	
— 20 41 51	9 4 21 54	9 6 42 16	Tab. 10
46 49	10 20 35	10 25 53	
47	10 21	10 26	
1	9	9	
— 21 29 28	9 14 52 59	9 17 18 44	
7 10 27 52	11 5 38 43	1 23 52 50	
		+ 2 53 25	Tab. 11. 13
	L''' =	1 26 46 15	

L''' — ☊' = 1 26 57 58	— 6′ 21″	Reduct. ☽ ad eccl. T. 14
- - - - - - - - - -	+ 4 19 4	
L''' + ☊ − 2 ☉ = 4 14 37 45	+ 6 18	
	+ 4 25 22	Latit. ☽. T. 29

M =	11 5 39	+ 54′ 23″	
2E — M =	7 2 43	+ 32	
E =	3 4 11	— 27	
		+ 54 28	Parall. ☽ Tab. 30
		14 51	Semid. ☽ Tab. 19

M =	11 5 39	+ 29 50
E =	3 4 11	— 41
2E — M =	7 2 43	+ 32
2E + M =	5 14 0	+ 5
2E — a =	10 27 54	— 2
4E — M =	1 11 4	— 1
M + a =	6 16 7	+ 1
VI + a — 2E + M =	6 7 45	+ 2
VI + a — M =	2 4 49	— 0
III + M =	2 5 39	— 0
Horar. ☽ Tab. 31.		29 46

λ =	1 23 58	+ 1′ 45″
VI + λ + M =	6 29 37	— 17
2E — λ =	4 14 23	— 4
VI + λ + 2E − M =	2 26 41	+ 0
VI — λ + 2E − M =	11 8 45	+ 3
2E + λ =	8 2 20	— 1
Incr. latit. horar.		+ 1 26
Tab. 32		

	Arg. latit.	T. St. ′ ″	☉
1775	☋ — 0 0 59	— 23 5 7 1	8 27 33 27
1759	☊ + 6 3 42	73 0 1 6	2 12 4 4
16	☋ + 6 2 43	49 18 54 5	11 9 37 31
☽ =	11 9 37 31	1 17 54 36	
♌ =	5 3 34 48	48 0 59 29	
	+ 2 32 30	— 48 0 0 0	— 1 17 18 40
	+ 8	— 59 0	— 2 28
	0	— 29	— 1
	+ 2 32 38	— 48 0 59 29	— 1 17 21 9
☊ =	5 6 7 26	1 17 54 34	9 22 16 22
	+ 1 4	— 8 0 0	— 19 43
	+ 6	— 44 0	— 1 48
	0	— 13	— 1
	+ 1 10	— 8 44 13	— 21 32
—	5 6 8 36	1 9 10 31	9 21 54 50
	— 2 22	— 6	+ 26 14
	5 6 6 14	1 3 10 31	9 22 21 4
	☊ v.	+ 44 25	☉ v.
		1 3 54 56	

M = 10 17 0 24	- - -	— 8 3 55	Tab. 33 arg. 1
E = 4 14 20 27	+ 1 0 58		- - - 2
2E — M = 10 11 40 30	- - -	— 1 46 28	- - - 3
a = 6 13 11 0	+ 4 51		- - - 4
E — M = 5 27 20 3	+ 27		- - - 5
a + M = 5 0 11	+ 1 1		- - - 6
a — M = 7 26 11	- - -	— 2 49	- - - 7
2E — a = 2 15 30	+ 3 26		- - - 8
VI + 2E + M = 1 15 41	+ 3 32		- - - 9
a — 2E + M = 8 1 30	- - -	— 6 17	- - - 10
a + 2E — M = 4 24 51	+ 42		- - - 11
2(☉ — ☊) = 9 2 18	- - -	— 1 25	- - - 12
M — 2λ = 4 16 2	+ 1 13		- - - 13
M — 4E = 1 2 30	+ 14		- - - 14
M — 4E = 4 19 39	+ 17		- - - 15
	+ 1 16 41	— 10 0 54	
	— 10 0 54		
	— 8 44 13		

a	M	☽	
5 18 44 32	1 21 6 33	- - - -	Tab. 1
2 11 47 29	5 23 33 25	- - - -	T. 2. No. 188
8 0 32 1	7 14 39 55	11 9 37 31	
— 1 17 18 32	— 8 27 7 10	— 9 2 28 2	Tab. 10
— 2 28	— 32 8	— 32 24	
— 1	— 16	— 16	
— 1 17 21 1	— 8 27 36 34	— 9 3 0 42	
6 13 11 0	10 17 0 24	2 6 36 49	♂ med.
— 19 43	— 4 21 18	— 4 23 33	Tab. 10
— 1 48	— 23 57	— 24 9	
— 1	— 7	— 7	
— 21 32	— 4 45 22	— 4 47 49	
6 12 49 28	10 12 15 2	2 1 49 0	♂ vera
		2 6 36 49	☽ v.
		5 6 6 14	☊ v.
		9 0 30 35	

		+ 0 0 14	Red. ad Eccl.
L‴ — ☊′ =	9 0 30 35	— 5° 9′ 6	Tab. 14
L‴ + ☊ − 2☉ =	11 28 0 55	— 0 0 19	
		— 5 9 25	lat. ☽. Tab. 29

M =	10 12 15	+ 55′ 1″	= 54′ 31″	Parall. ☽ T. 30
2E — M =	10 7 23	— 26		
E =	4 9 54	— 4	14 52	Semid. ☽ T. 19

M =	10 12 15	+ 30 31
E =	4 9 54	— 7
2E — M =	10 7 33	— 23
2E + M =	7 2 3	+ 4
2E — a =	2 6 59	— 1
4E — M =	6 27 21	+ 1
M + a =	4 25 4	— 1
VI + a — 2E + M =	2 5 16	— 0
VI + a — M =	8 0 34	+ 0
III + M =	1 12 15	— 1
Horar. ☽ Tab. 31.		+ 30 3

λ =	8 25 40	− 0′ 13″
VI + λ + M =	7 7 55	+ 0 15
2E — λ =	0 24 9	+ 5
VI + λ + 2E − M =	1 3 13	+ 3
VI — λ + 2E − M =	7 11 53	— 2
2E + λ =	5 15 28	— 3
Incr. latit. horar. Tab. 32		+ 0 5

1783	Argum. latit.	T. St. ′ ″	☉
1759	☋ — 0 0 59	— 23 5 7 1	8 27 33 27
24	☋ — 17 33 17	74 12 41 53	2 13 38 7
	☊ — 17 34 16	51 7 34 52	11 11 11 34
☽ =	11 11 11 34		
☊ =	11 28 45 50		
	+ 1 6 43	— 21 0 0 0	— 20 41 55
	+ 1 43	— 13 0 0	— 32 2
	+ 6	— 42 0	— 1 43
	+ 0	— 40	— 2
	+ 1 8 32	— 21 13 42 40	— 21 15 42
	11 29 54 22	29 17 52 12	10 19 55 52
	+ 40	— 5 0 0	— 12 19
	+ 2	— 13 0	— 32
	+ 0	— 47	— 2
	+ 42	— 5 13 47	— 12 53
	11 29 55 4	29 12 38 25	10 19 42 59
	— 6 50		+ 1 16 19
☊′ =	11 29 48 14	☉′ =	10 20 59 18

M =	11 8 41 57	- - -	— 4 19 58	T. 33. arg. 1
E =	3 7 1 46	+ 17 56		- - - 2
2E — M =	7 5 21 35	- - -	— 1 21 50	- - - 3
a =	7 10 41 42	+ 13 47		- - - 4
E — M =	3 28 19 49	+ 3 36		- - - 5
a + M =	6 19 24	- - -	— 41	- - - 6
a — M =	8 2 0	- - -	— 3 0	- - - 7
2E — a =	11 3 22	- - -	— 1 35	- - - 8
VI+2E+M =	11 22 45	- - -	— 35	- - - 9
a-2E+M =	0 5 20	+ 40		- - - 10
a+2E-M =	2 16 3	+ 1 9		- - - 11
2☉-2☊ =	9 10 3	- - -	— 1 24	- - - 12
M — 2λ =	7 14 35	- - -	— 1 13	- - - 13
2E+M-a =	10 12 3	- - -	— 19	- - - 14
M — 4E =	10 10 35	- - -	— 20	- - - 15
		+ 37 8	— 5 50 55	
		— 5 50 55		
		— 5 13 47		

a	M	☽	
5 18 44 32	1 21 6 33	- - - -	Tab. 1
2 13 12 48	6 29 25 9		T.2. No. 287
8 1 57 20	8 20 31 42	11 11 11 34	
		1 26 57 38	
		9 14 13 56	
— 20 41 51	— 9 4 21 54	— 9 6 42 16	
— 32 2	— 7 4 37	— 7 8 14	Tab. 10
— 1 43	— 22 52	— 23 4	
— 2	— 22	— 22	
— 21 15 38	— 9 11 49 45		
7 10 41 42	11 8 41 57	1 26 57 38	☌ med.
— 12 19	— 2 43 18	— 2 44 42	
— 32	— 7 4	— 7 8	Tab. 10
— 2	— 26	— 26	
— 12 53	— 2 50 48	— 2 52 16	
7 10 28 49	11 5 51 9	1 24 5 22	☌ vera
	L''' =	1 26 57 38	Long. verae.

L''' — ☊ = 1 27 9 24 { - - — 6′ 20″ red. au eccl.
+ 4 19 34 Tab. 14
L''' + ☊′ — 2 ☉′ = 4 14 48 16 + 6 16
4 25 50 lat. ☽ T. 29

M = 11 5 51 - - + 54 23
2E — M = 7 2 52 - - + 32 } = ′ ″ 54 28 par. ☽. T. 30
E = 3 4 22 - - — 27 14 41 sem ☽ T. 19

M =	11 5 51	+ 29 50
E =	3 4 22	— 41
2E — M =	7 2 52	+ 32
2E + M =	5 14 36	+ 5
2E — a =	10 28 16	— 2
4E — M =	1 11 13	— 1
M + a =	6 16 20	+ 1
VI + a − 2E + M =	6 7 37	+ 2
VI + a — M =	2 4 38	— 0
III + M =	2 5 51	— 0
Horar. ☽. Tab. 31		29 46

λ =	1 24 10	+ 1 45
VI + λ + M =	7 0 1	— 17
2E — λ =	4 14 35	— 4
VI + λ + 2E − M =	2 27 2	+ 0
VI − λ + 2E − M =	11 8 42	+ 3
2E + λ =	8 2 55	— 1
Incr. lat. horar. Tab. 32.		+ 1 26

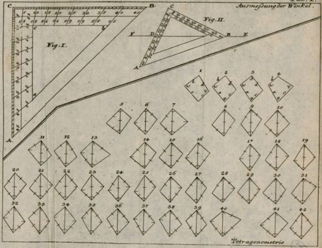
Finis.

Errata der Mondstafeln.

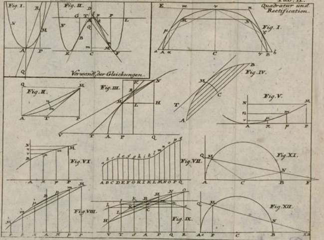
Tafeln.	anstatt	liese.
1ste Tafel 1ste Linie	11 20 58 6	11 2 58 6
„ „ „ 2te „ „	8 19 27 9	8 19 27 0
„ „ beym Jahr 790	3 17 40 44	3 17 46 47
„ „ „ „ „ „	Jahr 1669	1069
„ „ beym Jahr 1087	☋ +	☋ —
2te Tafel bey No. 1	29 12 44 1	29 12 44 3
„ „ „ „ No. 50	„ „ „ oben feh	len die Rubriquen.
„ „ „ „ No. 101	60 47 8 53	60 14 8 53
„ „ „ „ No. 151	141	151
„ „ „ „ No. 247	☊ —	☊ +
„ „ „ „ No. 296	11 5 53 46	11 5 35 46
„ „ „ „ No. 321	0 0 11 24	0 7 11 24
6te Tafel bey IV. 24	1 29 59	2 29 59
8te Tafel bey O. 14	2 23	2 33
13te Tafel bey O. 10	1 35	1 45
„ „ „ „ IV. 26	5 45	5 54
33te Tafel 3te Seite	III. Arg.	II. Arg.
33te Tafel IV. Arg. II. 3	18 0	18 10

Errata der Beyspiele.

Erstes Beyspiel	— 3 12 Incr. lat.	+ 3 12 Incr. lat.
Drittes Beyspiel	☊ = 1 29 27 51	☊ = 2 29 27 51
„ „ „ „ „	☊′ = 2 29 18 16	☊′ = 2 29 28 16


Ausmeßung der Winkel.
Fig. I.
Fig. II.
Tetragonometrie

Tab. II.



Quadratur und Rectification.
Fig. I.
Fig. II.
Verwandl. der Gleichungen.
Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. XI.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. XII.

A

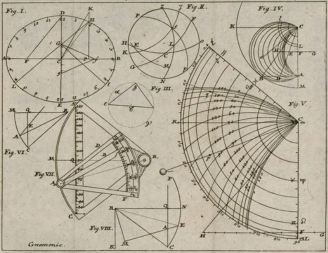
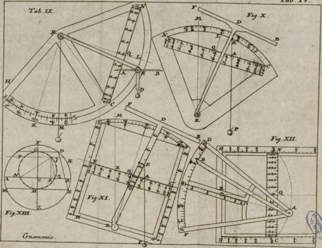


Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Gnomonic.


Tab. IX.
Fig. X.
Fig. XI.
Fig. XII.
Fig. XIII.
Gnomonic.

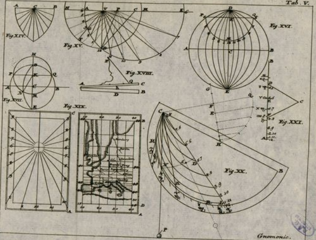


Fig. XIV.
Fig. XV.
Fig. XVI.
Fig. XVII.
Fig. XVIII.
Fig. XIX.
Fig. XX.
Fig. XXI.

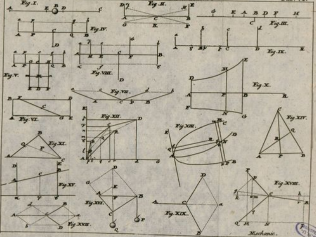


Fig. I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.
Fig. VI.
Fig. VII.
Fig. VIII.
Fig. IX.
Fig. X.
Fig. XI.
Fig. XII.
Fig. XIII.
Fig. XIV.
Fig. XV.
Fig. XVI.
Fig. XVII.
Fig. XVIII.
Fig. XIX.

Mechanic.

B

Tab. VII.

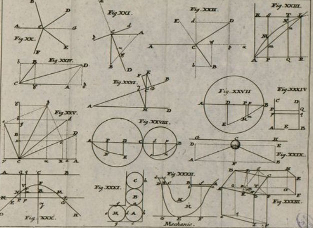


Fig. XX.
Fig. XXI.
Fig. XXII.
Fig. XXIII.
Fig. XXIV.
Fig. XXV.
Fig. XXVI.
Fig. XXVII.
Fig. XXVIII.
Fig. XXIX.
Fig. XXX.
Fig. XXXI.
Fig. XXXII.
Fig. XXXIII.
Fig. XXXIV.
Mechanic.

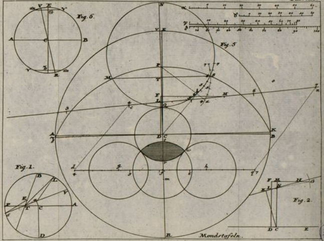


Fig. 6.
Fig. 5.
Fig. 1.
Fig. 2.
Mondstafeln.

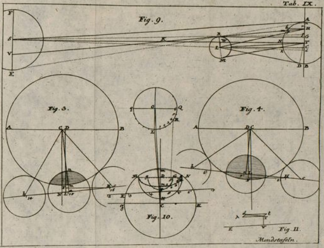
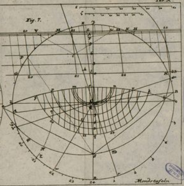

Tab. IX.
Fig. 9.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 10.
Fig. 11.
Mondstafeln.

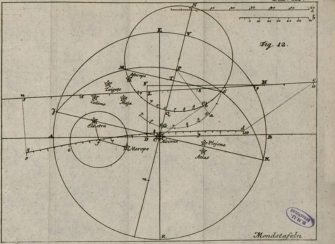
Fig. 8.

Fig. 7.



Mondstafeln

Tab: XI.



Mondstafeln

C