Wie das Denken das Rechnen lieben lernte (Versuch in fünf Aufzügen)

Maarten Bullynck

Mein Debüt im Oberseminar Friedrich Kittlers, hoch im 4. Stock des zweiten Hinterhofs der Sophienstraße, war etwa Mai 2002. Mit allen Verwirrungen des damaligen Jünglings hielt ich einen überambitionierten Vortrag, dessen Eckpunkte bis heute Eckpunkte meiner Faszination bleiben – Alltagssprache, Gespräch, Paradoxe, Mathematik.

Der Vortrag nahm in des polnischen Logikers, Alfred Tarski, Text, “Ueber den Wahrheitsbegriff in den formalen Sprachen” seinen Anfang.[1] Das wesentliche Ergebnis von Tarski in diesem Text ist, dass Wahrheit nicht innerhalb einer formalen Sprache definiert werden kann, sondern nur in einer Metasprache, einer höheren Sprache. Ein kleinerer Text ist aber dem Haupttext vorangeschickt, “Ueber den Wahrheitsbegriff in den nicht-formalen Sprachen”, in dem die vielleicht wichtigere Untersuchung geführt wird, ob denn ein Wahrheitsbegriff in der Alltagssprache definierbar ist. Nein, ist Tarskis Antwort, denn die Alltagssprache ist ihre eigene Metasprache, und – man bemerke die kühne Schlussfolgerung – deswegen ist die Alltagssprache auch universal einsetzbar, und ist das Gerede für die Rede unersetzlich.

Wie schön logisch-philosophisch Tarskis Abhandlung auch, sie scheitert wenigstens zweimal an der Technizität der Sprache. Einmal im kleinen Text, weil Tarskis Formalisierungsversuche zur Wahrheit in der Alltagssprache an der Ordnung der Buchstaben, der Numerierung der Zeilen und der Seitenzahl scheitern. Aus “Es schneit nur dann und wann es schneit” als zu beweisender Aussage wird in einem ersten Schritt “Die Aussage, die aus den Buchstaben Ee Es Leerzeichen Es Cee usw. besteht, ist wahr, nur dann und wenn es schneit”. In einem weiteren Schritt wird auch die Seite und Zeile, auf der die Buchstaben der Aussage stehen mit in die Faltung der zu beweisenden Aussage genommen, und hier scheitert alles in dem Neudruck, den ich damals anno 2002 benutzte – die Seitenzahlen stimmten nicht

[1] Tarski, A. (1935), “Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen”, *Studia Philosophica Commentarii Societatis philosophicae Polonorum*, 1, S. 261–406. Neudruck in *Logik-Texte. Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik*, hg. K. Berka und L. Kreiser, Berlin, Akademie-Verlag, S. 445–559.

mehr überein. Der Text kann als Gedrucktes nicht einmal sich selbst bewältigen. Andermal scheitert Tarski im großen Text, weil Kurt Gödel einige Zeit zuvor gezeigt hatte, dass auch die Arithmetik (als einfache formale Sprache) ihre eigene Metasprache sein kann, und deswegen Hilberts Programm, die Mathematik formal und zugleich vollständig zu machen, zur Unvollständigkeit führt.

Während Hilbert oder Tarski nur die Transposition sprachlicher Zeichen in arithmetische vollstreckten, beweist Gödel 1931, dass umgekehrt man auch mit nur Arithmetik über Inhalte sprechen kann, dann aber entweder Paradoxe oder Unvollständigkeit mit im Kauf nehmen muss. Zu demselben Schluss war Emil Post schon 1921 gekommen, hatte aber seine Ergebnisse nicht veröffentlicht.[2] Für ihn bedeutete das Ergebnis, das er und Gödel erzielt hatten, dass es Grenzen gibt an der "mathematicizing power of Homo Sapiens" und deswegen die Mathematik eine informelle Sprache benutzen darf, wenn nicht muss, denn die rein formale Entwicklung ist ja eine Sache der Routine und gewährt keinen Schutz gegen Paradoxien. Und – würde ich jetzt hinzufügen – deswegen ist die Arithmetik auch universal einsetzbar, und ist auch in der Mathematik Klatsch und Gespräch durchaus möglich.

Tarskis Text ist ein großartiges Zeugnis der diskursiven Wende der Zwischenkriegszeit und fasst eine fast 500-jährige Entwicklung zusammen, eine Entwicklung die Buchstaben und Zahlen auf dem Papier so nahe geführt hat, dass Turings Schreibemaschine eine universale Turingmaschine und Modell der Berechenbarkeit überhaupt werden konnte. Erste Ansätze der Verzahnung alphabetischer mit numerischen Zeichen[3] auf Papier sind gleichursprüglich mit den Versuchen, das klassiche, mittelalterliche und scholastische Wissen auf Buchdruckkunst umzustellen. Eben mit diesen Reformen des Wissens und dessen Übermittlung[4] kommt langsam eine Kalkülisierung des neuzeitlichen Diskurses im Gange. Eines deren hervorstechendsten Merkmale ist die Plättung der Zeichen, das Entstehen der Ununterscheidbarkeit zwischen Operator und Operand, eben der Schlüssel zur Turingmaschine[5], oder eben Effekt von der Tatsache, dass die mit algebraischen Zeichen operierenden Mathematik eine universale Sprache sein kann. Deswegen kann auch das Denken über Zeichen verlaufen, kann das Denken diskret werden, kann es rechnen lernen – hier fünf Aufzüge zu dieser Entwicklung.

1. Aufzug: enumeratio Schon Petrus Ramus (1515–1572), nach Walter J. Ong zentral in der westeuropäischen Umstellung mittelalterlichen und mündlich überlieferten Wissens auf die Buchdruckkunst, hatten, neben der Logizifierung der Rhetorik, die Mathematik,

[2] De Mol, L. (2006), "Closing the circle: An analysis of Emil Post's early work", *Bulletin of Symbolic Logic*, 12 (2), S. 267–289.

[3] Die einen, alphabetischen Zeichen von den Griechen herkommend, die anderen, numerischen über die Araber von den Indern, wenn nicht von den Chinesen – oder auch: William Burroughs hat immer recht mit seinem "language is a virus from another planet", sie kommen immer von anderswo. Vgl. Kittler, F. A. (1998), *Daten – Zahlen – Codes*, Hochschule für Grafik und Buchkunst, Leipzig.

[4] Man müsste hinzufügen, und mit deren beider Schattenseite, Kryptographie, auf die wir hier nicht zu sprechen kommen.

[5] Kittler, F. A. (1990), "Vom Take off der Operatoren", *Das Magazin - Wissenschaftszentrum Nordrhein-Westfalen*, 3 (33), S. 15–19,

als neue Kunst der Ordnung, ins Curriculum der Neuzeit eingebracht.[6] Des Ramus eigene Bücher exzellieren aber noch in Diagrammen und Visualisierung alten Wissens, dies wird sich eingehend im 17. Jahrhundert ändern, langsam werden die Zeichen den Befehl übernehmen.

1628/9 fing René Descartes (1596–1650) mit der Niederschrift seiner berühmten *Regulae ad directionem ingenii*[7] an, er führte diesen Text aber nie zu Ende. In diesem Text versucht Descartes den Prozess des Denkens, genauer eine Methode des Denkens, nach dem Blaudruck der symbolischen Mathematik zu konstruieren. Wie auch in dem erst später geschriebenen *Discours de la Méthode* (1637) erörtert Descartes zuerst seine allgemeine Methode und fügt diesem *Discours* dann Beispiele aus der Physik, und ganz besonders aus der Mathematik hinzu, in 1637 eben jene berühmte *la Géométrie*, welche die analytische Geometrie begründen wird. Gleichfalls sind in den *Regulae* die Regeln XVIII bis XXI eine Skizze zu einer allgemeinen Algebra. Henk Bos hat vor kurzem die These aufgestellt, dass Descartes an der Niederschrift der *Regulae* scheiterte, weil die symbolische Algebra eine Wurzelausziehung wie $\sqrt{2}$ nicht mit einem endlichen Rechenprozess und/oder Zeichenprozess zu Ende zu führen konnte, oder schlimmer noch, das Ergebnis nicht einmal mit einer endlichen Anzahl von Ziffern anschreiben konnte, während eine Wurzelausziehung geometrisch in endlicher Zeit ausführbar und konstruierbar ist.[8] Tatsächlich liegt hinter der in den *Regulae* empfohlene *mathesis universalis* (allgemeine Wissenskunst nach mathematischen Beispiel) eine noch tiefere und wesentlichere Schicht, die der Geometrie, des Visuellen, der *res extensa*.

Nach Regula V liegt die Methode in der Ordnung und Anordnung der gedachten Dinge, Descartes' Gebrauch der Wendungen "videre", "intuiri", "clarus", und "distinctus" zeigt aber die visuelle Maschinerie, welche dieser Ordnung ermöglicht. Insbesondere die Wendung "continuo et nullibi intterupto cogitatione motu" (mittels einer stetigen und nirgendwo unterbrochenen Bewegung des Denkens) macht die Stetigkeit seiner Vorunterstellung klar. An eben derselben Stelle (Regula VII) steht ebenfalls das Ergebnis: "sufficienti et ordinata enumeratione complecti" (in einer hinreichenden und ordentlichen Enumeratio/Aufzählung umfassen). Solche umfassende Aufzählung ist bei Descartes aber in wesentlichem keine Aufzählung sondern eine Darstellung. Nach Regula XIV (und XV) sind nur die "nudas figures" (die nackten Figuren) der Einbildungskraft so zugänglich, dass erst dann auch die Vernunft am klarsten wahrnimmt. Im Gegensatz dazu (Regula XVI) steht das "per brevissimas notas designare" (mit kürzesten Notizen anzeigen), welches nützlich ist, wenn die anwesende Aufmerksamkeit des Denkens nicht gefordert ist. Diese Notizen oder einfach (algebraische) Zeichen , wie sich im Kommentar zu Regula XVI schnell herausstellt, beugen den Irrungen des Gedächtnisses vor, während das Denken sich mit anderem beschäftigt.

[6] Ong, W. J. (1958), *Ramus. Method, and the Decay of Dialogue. From the Art of Discourse to the Art of Reason*, Harvard University Press, Harvard, 2004 Reprint, Chicago University Press, Chicago, S. 8 et passim. Siehe auch Verdonk, J. J. (1966), *Petrus Ramus en de Wiskunde*, Van Gorcum, Assen.

[7] Descartes, R. (1701), "Regulae ad directionem ingenii", in: *Opuscula posthuma, physica et mathematica*, S. 1–66 (Folio 2), Blaev, Amsterdam.

[8] Bos, H. (2001), *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*, Springer, New York, S. 261–269

Diese Inkommensurabilität bei Descartes zwischen Figur und Zeichen aber auch zwischen Geometrie und Zahl, allgemeiner noch zwischen Kontinuum und Diskretheit zieht weite Kreise nach sich während der nächsten zwei Jahrhunderte. Descartes sah seiner Methode und seiner Geometrie viele Kritiken ausgesetzt, erwähnen wir doch eine, die nicht öffentlich ausgetragen wurde, obwohl sie ins Herz der cartesischen Methode stößt. In den Jahren 1630–1640 wagte sich der englische Mathematiker John Pell (1611–1685) an verschiedenen Versuchen, einerseits eine allgemeine Algebra in der Tradition von Harriot und Oughtred zu begründen, andererseits eine neue Methode des Lernens zu entwickeln. So veröffentlichte er *The English Schoole* (1635), in welchem Buch die Bibel in ihren Wörtern zerlegt wurde und der Länge nach in eine Vokabelliste neugeordnet. Pell unternahm auch eine nie abgeschlossene Übersetzung von Johann Amos Comenius' *Informatorium maternum, die Mutter Schul* (1633/1636), und schließlich entwickelte er in nie veröffentlichten Skizzen langsam eine "Logistica" oder allgemeine mathematische Zeichenkunst.[9] Über seine Korrespondenten in London und Paris, aber vor allem über seine Kollegen in Utrecht und Leiden, wo Pell in diesen Jahren arbeitet, war Pell bestens über Descartes' Arbeiten, auch über die nie veröffentlichten wie die *Regulae* unterrichtet. Pell gehörte auch zu den wenigen die sich für des Diophants überlieferte unbestimmte Analytik interessierten.

Gerade in diesem Netz von Interessen stieß Pell auf ein diophantisches Problem (über gleichschenklige Dreiecken mit ganzzahligen Seiten) mit illustrer Genealogie. Das Problem findet sich schon bei Diophant, François Viète hatte das Problem in seiner *Zetetica* (1593) gelöst, Roberval hatte das Problem in verallgemeinerter Form der mathematischen Gemeinde vorgelegt (1633), Fermat hatte ihm geschrieben (1636), er hatte ja das Problem schon 7 Jahre früher gelöst, und schließlich kam auch Descartes mit einer Lösung, die im wesentlichen auf Viète weiterbaut, welche Lösung dann endlich Frans von Schooten in seinen *Exercitationes Mathematicae* (1657) veröffentlichen wird. 1668 schreibt dann John Pell seine Lösung auf, in seiner Umarbeitung der *Teutschen Algebra* seines Schülers Johannes Rahn.

In der Analyse von Descartes' Lösungsmethode schreibt Pell: "this Pattern shews you a disorderly mixture of Answers in Great Numbers amongst Smaller Numbers", insbesondere gibt es "inverted repetitions" und "confused Anticipations".[10] Fazit: Die von Descartes geforderte "sufficienti et ordinata enumeratione complecti" (Regula VII) ist keineswegs zurückfinden, im Gegenteil produziert Descartes' Methode eine ungeordnete Reihe von Lösungen, mit Wiederholungen und Auslassungen. Pell hingegen zeigt eine Methode an, die Aufgabe anders zu "zerlegen", d.h. in andere symbolische Ordnung übersetzen ("a question propounded in symbols" heißt es in einer Rezension von Pells algebraischer Methode). So kann man am Anfang der Aufgabe die gemeinsamen Teiler der auftretenden Zahlen aufsuchen, und die Zahlen per Teilung vereinfachen. Das Ergebnis ist ein Algorithmus zur Auffindung aller Lösungen der

[9] Biographische Einzelheiten nach Malcolm, N. and Stedall, J. (2005), *John Pell (1611–1685) and his correspondence with Sir Charles Cavendish: the mental world of an early modern mathematician*, Oxford University Press, Oxford, hier insbesondere S. 40–49 und 262–265.

[10] Rahn, J. H. (1668), *An Introduction to Algebra Translated out of the HighDutch into English by Thomas Brancker. Much Altered and Augmented by D. P[ell] Also a Table of Odd Numbers less than One Hundred Thousand, shewing those that are Incomposit and Resolving the rest into their Factors or Coefficients, &c.*, W.G. for Moses Pitt at the White-Hart in Little Britain, London, S. 142 & 147.

Aufgabe, der Größe nach geordnet, ohne Auslassungen. “Orderly” und “complete Enumeration” schreibt Pell, als wiederhole er grinsend Descartes’ eigene “sufficienti et ordinata enumeratione”. Descartes scheitert zum zweiten Mal an der Diskretheit.

2. Aufzug: algorithmus Erhard Weigel (1625–1699) war ein Kind der Diaspora im Dreißigjährigen Krieg (1618–1648). Jene Zäsur des Krieges und die damit einhergehenden Bruchlinien in Religion und Wissenschaften werden in Erhard Weigels Wirken präsent bleiben. Die Einheit der Wissenschaften, die Einheit des (religiösen) Kalenders, usw sind Teile seines (nach Comenius) pansophischen Programms. 1653 wird Weigel als Mathematikprofessor nach Jena berufen, 1657/8 gründet er zu Jena die “Pythagoreische Gesellschaft” (eine Art Privatschule bzw. Oberseminar) und veröffentlicht sein Hauptwerk *Analysis Aristotelica ex Euclide restituta*. In diesem Werk zeigt Weigel, wie man Aristoteles nur über den Euklid verstehen kann, und dass somit die Scholastik ihren Aristoteles immer falsch gelesen hat. Die Größen und Verhältnisse beim Euklid lassen sich mithin als Seienden (*entia*) und Begriffe (*notiones* usw. lesen, folglich gibt es eine universale Methode, welche alle wissenschaftlichen Disziplinen vereinheitlicht. Mit diesem Programm verärgert Weigel seine theologischen und philosophischen Kollegen in Jena, aber als erfolgreicher Dozent beeinflusst er mit seinen Ideen eine ganze Generation von Studenten.

Die Neuordnung aller Disziplinen und deren Inhalte unter dem Zeichen Euklids ist aber eigentlich eine Transposition alten Wissens in ein neues Kalkül. In der Erörterung der “partikularen” Methode findet man bei Weigel, warum es ihm wirklich geht. Nachdem er auf vier Seiten ausführlich einen geometrischen Satz mittels der scholastischen Barbara-Celarent-usw. Schlussmethode bewiesen hat, schreibt er:

> Totam hanc Syllogismorum [...] sic absolvit:
> Ang. C aequal. cbc. (a) & ang. a. aequal. ebd. (b) ergo c → a (c) aequal. cbe. → ebd. (d) Sed cbd. → cba. (e) aequal. 2. Rect. ergo (f) c → a → cba. aequal. 2. Rect. Q.E.D. Triplo paucioribus lineis, quam in modo Scholastico sunt syllogismi, pompose vocabulorum apparatu inflatissimi.[11]

Der mit pompösem Vokabular aufgeblase Diskurs der Scholastiker wird auf 3 Zeilen reduziert, nach dem Beispiel das Isaac Barrow in seinen *Euclidis Elementorum Libri xv. breviter demonstrati* (1655) gegeben hatte. Diese Kompression des Wissens ist worauf Weigel es abgesehen hat.

Dieser Gedanke lässt sich weiterverfolgen. 1661 veröffentlicht Weigels Schüler Johann Christoph Sturm (1635–1703) ein kleines Büchlein *Universalia Euclidea* mit (auf Weigels Anfrage)

[11] Weigel, E. (1671), *Idea Totius Encyclopaediae Mathematico-Philosoph.*, Johann Meyer, Jena, S. 167. (Die *Idea Totius Enc...* ist eine anders paginierte Neufauflage von Weigel, E. (1658), *Analysis Aristotelica ex Euclide restituta, genuinum sciendi modum, & Nativam restaurata Philosophiae faciem per omnes Disciplinas & Facultates ichnograpice depingens Opus omnium facultatum Culcoribus ad solidam eruditionem summe necessarium, maxime proficuum*, Grosium, Jena.)

einem Anhang zur Anwendung der Methode auf die Syllogistik.[12] Noch um einiges extremer als sein Lehrer Weigel verkündet Sturm in diesem Buch, dass die Sätze des Euklid nicht nur Mathematik sind, sondern alle auch Sätze der Philosophie![13] Denn, frei nach Weigel, lässt sich jede Proportion nicht nur geometrisch sondern in aller Allgemeinheit interpretieren: Köning:Prinz=2:1 usw.

Abstrahieren wir aber wiederum vom philosophischen Inhalt. Wie der Titel besagt, reduziert Sturm in diesem Buch das fünfte Buch Euklids (über Proportionen) und einen Teil des siebenten Buchs (über elementare Zahlensätze), insgesamt 35 Sätze auf 17. Gleichermaßen verfährt er im Anhang mit einigen Sylllogismen. Als Sturm 1670, unterdessen schon Mathematikprofessor in Altdorf, eine deutsche Übersetzung der Werke des Archimedes herausgibt, überbietet er in den Kommentaren seinen ersten Versuch aus 1661. Aufs neue reduziert er das fünfte Buch Euklids, diesmal aber auf nur vier Sätze:

> Hat also [...] der kunstliebende Leser in diesen 4. Lehrsätzen kürzlich und augenscheinlich erwiesen alles das jenige (ja noch mehr) was Euklides mit 24. absonderlichen und viel schwärern Beweistuhmen bekräfftiget hat.[14]

Das Verfahren zu dieser Zusammenziehung euklidischer Weisheit ist dasjenige von Barrow angegebene: eine Algebraisierung, eine Übersetzung in Lettern. Erhard Weigel selbst nennt diese Erfindung seines Schülers ein *logometrum* oder Schluss-Maaß.

In der Entwicklung der weigelschen Ideen spielt aber noch eine andere Transposition eine wichtige Rolle. Schon 1658 hatte Weigel das Diagramm als Kernstück der euklidisch–aristotelischen Methode entdeckt.[15] Weigel benutzte Linien zur Veranschaulichung logischer Sätze, sein Schüler Sturm Kreise[16], das Wichtigste dabei war aber, dass sowohl Linien als auch Kreise im Vergleich zur Algebra, zur literalen Formalisierung unökonomisch waren. Unökonomisch heißt hier: Sie nehmen mehr Platz ein, die logische Schlussfolgerung ist träger, die Operationalität beschränkter.

[12] J.C. Sturm (1661): *Universalia Euclidea : hoc est Liber Quintus Euclidis universalissimis inq[ue] omni entium genere veris demonstrationibus confirmatus ; Ita quidem Ut, quod Euclides quindecim Libri Quinti, [et] decem aliis Libri Septimi (triginta quinque in universum) Propositionibus, hic septendecim, adeoque dimidio paucioribus, neque istis prolixioribus, quin [et] facilius demonstratis exhibeatur ; Accedunt ejusdem XII Novi Syllogizandi Modi in Propositionibus absolutis, cum XX aliis in exclusivis, eadem methodo Geometrica demonstratis*, Den Haag.

[13] Man bemerke, dass Sturm 1660 Leiden besuchte und sich da u.A. mit Spinoza traf. Dessen *Ethica ordine geometrica* (1677), bei dem philosophische Sätze in Euklidischer Manier bewiesen werden, ist im Vergleich zu Sturm/Weigel formal fast brav zu nennen.

[14] Sturm, J. C. (1670), *Des Unvergleichlichen Archimedes Kunst=Bücher oder heutigs Tags befindliche Schrifften aus dem Griechischen in das Hoch=Teutsche übersetzt und mit nothwendigen Anmerkungen durch und durch erläutert*, Christoph Gerhardt, Nürnberg, S. 51.

[15] Man bemerke, dass erst jetzt (anno 2000) wieder die Einsicht errungen wurde, dass Diagramme für die antike Mathematik höchstwichtig waren. Siehe Netz, R. (1999), *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics: A Study in Cognitive History*, Cambridge (MA).

[16] Leibniz hat wohl seine Kreise, welche den heutigen Venn-Diagramme ähnlich sind, von Weigel oder Sturm übernommen.

Erst 1672 erfindet Weigel – ganz im Sinne seines Pythagoreismus – die Tetractys, welche das Wissen und dessen Zusammenhänge berechenbar macht. Es handelt sich um ein quaternäres Numerationssystem:

Dezimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 usw.
Tetractys	0	1	2	3	10	11	12	13	20	21	22 usw.

Weigel zeigt, wie sich mit diesem System addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren lasse, sowie eine Regeldetri (Dreisatz) auszuführen sei, mithin eine komplette Arithmetik zulässt. Dann zeigt Weigel aber auch, wie die Vier sich in allen Bereichen des Wissens zurückfinden lässt, insbesondere auch für die Musik, und die Tetractys letztendlich als "computum cognitiones" (Berechnung der Gedanken) in der Philosophie angewandt werden könne.[17]

Im selben Jahr 1672 noch fangen Weigels nur allzu konsequente Bemühungen an, die Arithmetik gleichzeitig mit dem Lesen und Schreiben jungen Kindern zu lehren. Denn weil man die "Rudimenta Mathematica" in den Schulen nicht gelehrt hat, und "das zarte Lehr=Feld bey der Jugend nur mit lauter Wörter=Pflanzen und Sprach=Samen bestecket und bestreuet worden" ist, hat man sich von den "realitäten" abgekehrt sowie "Streit= und Zanck=Distel" wachsen lassen. Stattdessen hätte man "das Salz derer Mathematichen Ermessungen so bald unter den Wörter=Samen" mischen sollen und "die scharffe Wurtzel der Zahlen und Figuren in das Lehr=Feld" einsenken sollen.[18] Kurzum:

> Auf allen Schulen [sollen] die Rudimenta der Arithmetic und Geometriae [...] so bald mit dem lesen und schreiben fleissig [getrieben werden][19]

Wenn die Mathematik direkt, als Rechnung, in die Sprache gebracht werden kann, stärker noch, man mit Buchstaben, Wörter und Begriffen rechnen kann, müssen Rechnen, Lesen und Schreiben simultan gelehrt werden. Den Samen dazu hat Erhard Weigel in Deutschland gesät, sein ausgebreiter Schülerkreis wird es im Laufe des 18. Jhs. umsetzen.[20] Statt Descartes' an der *res extensa* gebundenen Reguln steht Weigel für einen anderen Weg, den der Pythagoreer der Neuzeit, den des Diskreten.[21]

[17] Weigel, E. (1672), Tetractys Summum tum Arithmeticae tum Philosophiae discursivae compendium, Artis magnae sciendi genuina radix , Werther, Jena, S. 25.

[18] Weigel, E. (1672), *Vorstellung der Kunst= und Handwercke...*, Bauhofer, Jena, S. 104–105.

[19] Ebenda, S. 30.

[20] Am bekanntesten sind Leibniz, Pufendorf, J.C. Sturm, L.C. Sturm, Hamberger usw. als Schüler Weigels. Insgesamt ist Weigels Einfuss über seine Schüler (und deren Schüler, wie z.B. Christian Wolff) kaum zu überschätzen, man vgl. die Liste in Schlee, H. (1968), *Erhard Weigel und sein süddeutscher Schülerkreis*, Quelle und Meyer, Heidelberg, S. 132–141.

[21] Man bemerke, dass Weigel erst 1691, zu Anlass eines Besuchs bei Christiaan Huygens in Holland, Descartes' Werk kennenlernt.

3. Aufzug: reductio In Leibnizens famösem Text "Meditationes de cognitione, veritate et ideis" (1684)[22] findet man eine Auseinandersetzung mit den Ideen Descartes' (besonders mit den *Regulae*[23]) zurück und zwar mit Weigel-Sturm'schen Obertönen. Im Text übernimmt Leibniz Descartes' Unterschied der dunklen und klaren, und verworrenen und deutlichen (distinkten) Ideen, differenziert aber noch weiter. Leibniz unterscheidet zwischen einer *cognitio symbolica* oder *coeci* (symbolischem oder blindem[!] Denken) und einer *cognitio intuitiva* (intuitivem oder direktem Denken). Beim ersteren (vor allem bei komplexen Sachen, Leibniz' Beispiel ist das Vieleck als zusammengesetzter Begriff) benutzt man Zeichen (*notiones*), die man sich eines nach dem anderen vage vorstellt, beim letzteren hingegen stellt sich die Idee auf einmal dem Geist vor. Die zweite Art des Denkens ist dem ersteren – nach Leibniz –vorzuziehen, weil die benutzten Notionen Dunkles enthalten können, oder noch weiter zerlegbar sind, hingegen ist eine Idee, die per *cognitio intuitiva* ankommt, immer einfach, klar und nicht weiter zerlegbar.

So weit scheint er Descartes zu folgen und nur Figur und Zeichen in *cognitio intuitiva* und *cognitio symbolica* transponiert zu haben. Jedoch ist der Einschnitt der Transposition ein wichtiger. Denn statt, wie Descartes, nur das Klare und Deutliche für wahr anzunehmen, deutet Leibniz darauf hin, dass auch zusammengesetzte Dinge Wahrheit beanspruchen können. Nämlich ist ein Beweis ein Zusammengesetztes, aber – so wie auch eine Berechnung kraft ihrer Korrektheit – kraft seiner Form gültig, so lange er nicht wie in der Scholastik mit "schulmäßig angeordneten Syllogismen" geführt wird. Letzter Zusatz geschieht mit Hinweis auf Herlins und Dasypodius' Euklid-Edition (1566), eben jene Edition aus der Weigel in der *Analysis Aristotelica ex Euclide restituta* vier Seiten auf 3 Zeilen zurückbringt.

Diesen Ansatz Leibniz' führt Christian Wolff (1679–1758) weiter aus. Eine zentrale Standardformel in Wolffs Werken ist diese: "quae notionem rei ingrediuntur", d.h., "die einzelnen Gedanken, die die Kenntnis von einer Sache ausmachen". Wolffs Formel ist aber zu verstehen im Dialog mit Leibniz' "Meditationes", Wolff bessert Leibniz in seiner *Psychologica Empirica* (1738) nach. Er schlägt eine "reductio cognitionis symbolicae ad quasi intuitivam"[24] vor, das Mittel dazu ist eine *ars combinatorica characteristica*, als Übersetzungsinstrument, als Interface. Demgemäß unterscheidet Wolff drei Stufen bei der ersten Grundoperation des Verstands (*intellectus operatio*), die das (Er)Fassen, das Begreifen oder Kapieren (*apprehensio*) heißt. Erstens die *cognitio intuitiva*, wo die einzelnen Ideen sich entweder gleichzeitig unserer Aufmerksamkeit vorstellen oder die Aufmerksamkeit sich sukzessiv verschiedenen Ideen zuwendet (§326). Zweitens ein Modus des Denkens, bei dem die Art oder Gattung abgeleitet wird, nämlich eine Idee so zerlegt wird, dass die Aufmerksamkeit sukzessiv über sie bewegt und die erfassten Stücke zusammen im Gedächtnis beibehält (§327). Schließlich drittens, die *cognitio symbolica*, bei der zuerst eine *recensio vocabularum aut signorum* (eine Musterung des Vokabulars oder der Zeichen) geschieht. Und dann: "quibus ea indigitantur, quae notio-

[22]Leibniz, G. W. (1684), "Meditationes de cognitione, veritate et ideis", *Acta Eruditorum*, S. 537–542.
[23]Der Text war damals zwar noch unveröffentlicht, aber Leibniz hatte die Manuskripte Descartes' 1672 in Paris sichten können.
[24]Wolff, C. (1738), *Psychologia Empirica*, Renger, Frankfurt und Leipzig, S. 226.

nem rei ingrediuntur“ (§328, S. 238), übersetzt, “[das Vokabular, die Zeichen], an denen die einzelnen Gedanken aufgerufen werden, die die Kenntnis von einer Sache ausmachen”.[25]

Die *ars combinatorica characteristica* bei Wolff soll eine Verortung der Ideen und deren Verbindung zulassen, und so ein Interface der symbolischen Sprache zur intuitiven ermöglichen. Die beiden Elementaroperationen, die in einer *characteristica* nach Wolff ausführbar sein sollten, sind Substitution und Derivation (§299), sie ermöglichen “eine Art Kalkül”. Und obwohl nach §310–11 eine *characteristica* selbstverständlich für das Gedächtnis nutzlich ist, kann sie die *cognitio symbolica* in *cognitio quasi intuitivam* verwandeln, nämlich *per demonstrata* (per Beweis, §312). Charakteristik des Beweis, wie schon in Leibniz’ “Meditationes”, ist die Bündigkeit, die Symbolhaftigkeit. Denn ein Symbol kann als Zeiger auf ein komplexen, oder langen Begriff fungieren (Substitution), die Verbindung der Zeichen führt dann zur Kombination der Begriffe und deren nachfolgende Reduktion (Derivation). Das Zusammenbündeln, wenn nicht Zusammenraffen von sukzessiv wahrgenommen Zeichen bringt, wenn die Form innerhalb einer *characteristica* liegt, das Denken per Zeichen in den Kreis der Wahrheit.[26] Hier stehen Wolff wie auch Leibniz in der Weigel-Sturm’schen Tradition.

Wolffs tiefgreifende Anatomie des Denkens – ganz klar nach dem Muster des Lesens von Zeichen auf einer Zeile, wenn nötig mit Wörterbuch in der Hand – wird ganz explizite, wenn man ein wenig jetzt zurückblättert und das Beispiel der *cognitio symbolica* mit langer Analyse ruhig liest. Wolffs erstes Beispiel, zur Erörterung der *characteristica*, ist die *tabula pythagorica.*

Diese Tabelle oder Recheninstrument (je nach Interpretation) realisiert die Verhältnisse zwischen den Zeichen/Zahlen. Man kann, wenn man zwei Zeichen/Zahlen hat, mittels der py-

[25]Das lateinische Verb *indigitare* hat eine lange Vorgeschichte. Im Wesentlichen bedeutete *indigitare* bei den Römern das Aufrufen von Göttern im Gebet oder in einer Beschwörung. Allerdings ist die Bedeutung subtiler, und deutet *indigitare* auch hin auf das geschickt Zusammenbringen von Gottheit, Funktion und Ritual (Wort und Handlung).

[26]Siehe Ungeheuer, G. (1986), “Sprache und symbolische Erkenntnis bei Wolff”, in: *Christian Wolff, 1679–1754*, hg. von W. Schneiders, Felix Meiner Verlag, Hamburg, S. 89–112. Ungeheuer hat als Erster auf Wolffs Innovation aufmerksam gemacht, und ihm verdankt die hier gegebene Darstellung wohl einiges.

thagoreischen Tafel, ihr Produkt finden, ihre Summe, ihre Differenz, oder auch die eine Zahl durch die andere dividieren. Aller Kalkül lässt sich nach Wolff zwecks der *tabula* durch "per substitutionem characterum aequivalentium pro auquivalentibus" lösen (§298). Allgemeiner gilt in der Arithmetik mittels des Abacus (§299) , dass die Substitution oder Derivation der richtigen Zeichen "regulis algorithmi docetur" (von den Regeln des Algorithmus bzw. der Anschreibeweise geleitet wird) und diese Regeln dann "axiomatis continentur" (von den Axiomen zusammengehalten werden).

Als weiteres Beispiel führt Wolff die Formel für Polygonalzahlen an (mit n als Zeiger für die Seite und a für die Anzahl der Winkel):

$$\frac{n^2(a-2)-n(a-4)}{2}$$

Nun fungiert diese Formel nach Wolffs Analyse folgendermaßen:

> Characteres tam speciosi, quam numeri nobis in memoriam revocant, quantitatum numeri polygoni ingrediamur, & signa-combinationum ostendunt, quomodo ad eandum concurrant.
> So wie die algebraischen Zeichen Zahlen in unserem Gedächtnis abrufen, so machen wir uns die Quantität des Polygonalzahls klar, & die Zeichen der Kombination zeigen, wie man zu dieser [Quantität] kommt.[27]

Eben die Richtigkeit der Formel (oder deren Syntax) bürgt dafür, dass die Reihung von per Symbol erfassten Ideen auf eine gewisse Zahl, auf ein gewisses Zeichen innerhalb des Algorithmus/Anschreibesystem führt. Mithin ist das Denken nicht mehr rein visuell und am Substrat des Stetigen gebunden, sondern wird diskret, wird eine Lektüre oder eine Rechnung.

4. Aufzug: recensio Bei den Polygonalzahlen ist die *recensio vocabularum aut signorum*, die Musterung, relativ einfach, man muss ja nur die ganzen Zahlen der Reihe nach (ohne Auslassungen und der Größe nach – nach John Pell) mustern. Im Allgemeinen aber ist eben diese *recensio* der kritische Punkt in Wolffs Analyse des Denkens, denn ein Wörterbuch der einfachen Gedanken samt einer Syntax des Denkens ist nicht so unmittelbar gegeben. Scripsit Johann Heinrich Lambert (1728–1777) im Jahre 1768:

> Ein topisches System, welches ein Abstractum wäre, von allem was sich bey einem jeden Objecte gedenken, betrachten, bestimmen, untersuchen läßt [...] ein Inventarium, ein *Formular* etc. von allem [...], was bey jeder Sache, wenn sie an sich und nach ihren Verhältnissen erschöpft werden sollte, zu suchen ist.
> Nun ist das Zahlengebäude gleichsam das Abstractum alles dessen, wo man mit Zahlen rechnet oder aller Discreten-Quantitäten. Es ist ein allgemeiner Typus,

[27] Wolff, *Psychologica Empirica*, S. 227.

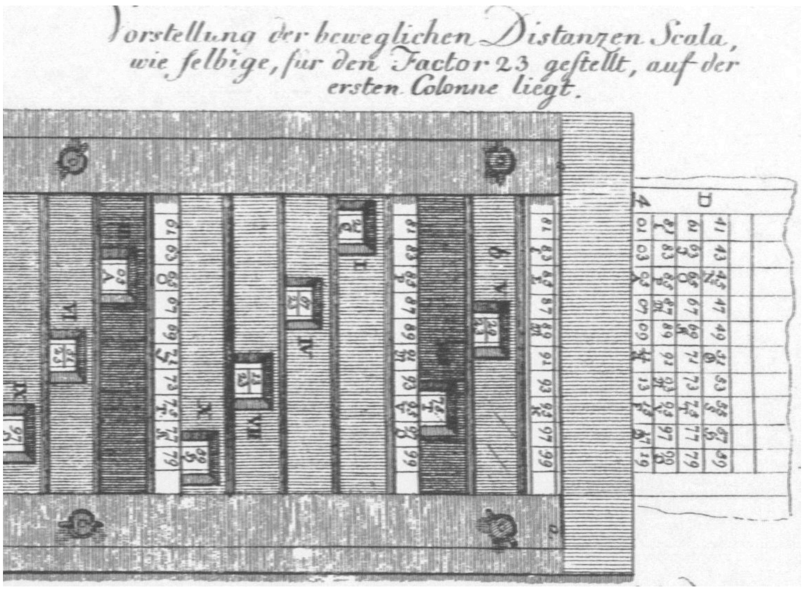
> ein Formular davon, und die Verhältnisse und Verwandlungen der Zahlen haben die Arithmetik als ihre eigene Theorie.[28]

Erneut wird hier ein Werkzeug der klassischen Rhetorik (die Topik) aufgegriffen, damit er mathematisiert würde. Wenn sozusagen Johannes Sturm (1507–1589) und Petrus Ramus ihre Umstellung der Scholastik auf die Druckpresse mit der Logifizierung der Rhetorik angefangen haben (wo aus Dialog Methode wird), so findet man am Ende des 18. Jhs. die Weiterführung dieses Programms. Die Funktionen der klassischen Rhetorik, die *recensio* (das Sammeln von Gedanken) und die *inventio* (das Finden von Ideen) sind jetzt an der Reihe, ihre Mathematisierung durchzumachen. Die Wolff'sche Wendung, "signa-combinationum ostendunt, quomodo ad eandum concurrant" ("die Zeichen der Kombination zeigen, wie man zu dieser [Quantität] kommt"), fragt eine Studie der Algorithmen/Anschreibesysteme und der Syntax ihrer Zeichen. In rhetorischem Gewand wäre dies die Frage nach einer Topik mit beigelieferter Heuristik oder Findungsmethode.[29]

Jene Aufgabe, den Zugriff auf eine Topik, auf ein Wörterbuch, auf ein Repertorium der Zeichen und Ideen, diesen Zugriff zu mathematisieren, wird dem Leipziger Mathematiker Carl Friedrich Hindenburg (1741–1808) zufallen. Hindenburg, heutzutage fast vergessen als Mathematiker, entfaltete zwischen 1780 und 1800 seine größte Wirkung, gerade zu einer Zeit als der große Mathematiker J. L. Lagrange an seinen Freund, den Mathematiker und Enzyklopädisten, J. d'Alembert schrieb, die Minen der Analysis scheinen erschöpft zu sein und die Mathematik als Disziplin sei mit Aussterben bedroht. Tatsächlich waren die Hochtage der Newton-Leibniz'schen Analyse vorüber und scheiterte die Mathematik an vielen Problemen, wie z.B. das Dreikörperproblem oder die Lösung der Gleichungen fünften Grades. In dieser Krisenzeit machte sich Hindenburg daran, die Werkzeuge der Mathematik zu verbessern, d.h., die Tabellen und die Formeln besser zugänglich zu machen.

[28] Lambert, J. H. (1781–7), *Deutscher gelehrter Briefwechsel*, hg. von Johann III Bernoulli, Selbstverlag, Berlin, 5 Bde. Hier Band I, S. 284–5.

[29] J. H. Lambert verstand es, diese Aufgabe für sich alleine zu lösen und bewältigen – man lese das *Neue Organon* (1764) als Heuristik und die *Anlage zur Architectonic* (1765/1771) als Topik. Es ist aber nur wenigen gegeben, "Gespräche [als] würkliche Dissertationen über eine Materie, ohne Sprung oder Lücke" (Lichtenberg, G. (1778), "Johann Heinrich Lambert", *Teutscher Merkur*, (3), S. 259–278, hier S. 274) zu führen, wie es angeblich Lambert in seinem Alltag tat.



Hindenburg begann seine Karriere mit einem Entwurf eines mechanischen Siebs, um Primzahlen aus den ganzen Zahlen – nach der Art des Eratosthenes – zu sieben (siehe obige Figur). Dafür verfertigte er ein konfigurierbares Rastermuster, mit dem man die auf Papier angeordneten Zeichen "sieben" konnte. Ebenfalls verfasste er eine fast arithmetische Beschreibung eines chemischen Ofens mit verschiedenen Schalthebeln: Er übersetzte die möglichen Kombinationen der Hebelstände in eine Tabelle von Zahlen, denen die Ofenfunktionen entsprachen, die "Physiognomie" des Ofens, nannte Hindenburg seine Tabelle. Eben diese Erfahrungen der Übersetzung zwischen Zahlensystemen und Maschinen führten Hindenburg 1781 zu seiner grundlegenden Idee:

> Operationum combinatoriarum fundamentum et veluti normam propositam esse in numeros scribendi mode ac ratione unam fere atque unicam.
> Das Fundament sowie der vorgeschlagene Maßstab der kombinatorischen Operationen, liegen in der einzigen Art und Weise, wie man Zahlen (Ziffern) anschreibt.[30]

Kurzum: "Wir haben jetzt alle Arbeit auf die simpelsten Gesetze des Numerierens zurückgebracht." Hindenburg hatte eingesehen, dass die Numerationssysteme eigentlich aus der Kombination von n Zeichen entstehen, binär aus zwei, dezimal aus 10 Zeichen. Dies ist die Verallgemeinerung der Weigel-Leibniz'schen Gedanken, andere Zeichensysteme zu entwerfen, in denen sich das Wissen übersichtlicher oder zugänglicher darstellen lässt.

Dazu kam, dass Hindenburg auf die Idee kam, zu beweisen, dass alle Zeichensysteme auf Zahlen zurückgebracht werden konnten. Hierin liegt sein wesentlicher Beitrag zur Realisie-

[30] Hindenburg, C. (1781), *Novi Systematis Permutationem Combinationum ac Variationum Primas Lineas et Logisticae Serierum Formulis AnalyticoCombinatoriis per Tabulas Exhibendas Conspectum*, Breitkopf (kurze Version) & Crusius (lange Version), Leipzig, S. XVI.

rung einer adressierbaren *characteristica*. Man nehme als Sachen $a, b, c, d, e, f, \ldots$, lassen sie sich durch $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ ersetzen, ohne dass das System ihrer Kombinationen sich ändert? Die Antwort ist ja, denn, wie Hindenburg zeigt, die Annahme, es wäre unmöglich, führt zu einer Absurdität.

> Transpositionum species ne cogitari quidem, nedum exhiberi, ulla potest, cui non respondeat numeris ex Elementis pro rebus assumtis. Sit enim, si fieri potest, ...$fcadbe$ eiusmodi species; ergo ...631425 non est numerus Q.E.A.
> Es lässt sich keine Art von Transposition von Dingen denken und keine Art anzeigen, wenn sie möglich ist, der keiner Zahl entsprechen würde, bei der die Ziffern für die gegebenen Dingen stehen. Denn, man nehme an, ...$fcadbe$ sei eine solche Art, dann ist ...631425 keine Zahl. Was absurd ist. [31]

Aus der Existenz der Zahlen lassen sich auf einmal die Existenz von Kombinationen von Dingen ableiten, oder wenigstens doch deren Prinzip. Hindenburgs Beweis, dass die Substitution von Zeichen an der Sache nichts ändert, ist in verschiedenen Hinsichten eben so revolutionär wie trivial. Denn, erstens, lassen sich mittels dieser Beweismethode, beliebige Dinge mit beliebigen Zeichen anzeigen, mithin auch Gruppen (bei Hindenburg *formae*) von Zeichen durch ein Zeichen (welches als Zeiger, bei Hindenburg *index*, fungiert).[32] Zweitens, all diese Zeichen lassen sowieso durch Zahlen anzeigen. Drittens, das System oder die Anordnung der Verbindungen und Verhältnisse der Dinge, bzw. der Zeichen bzw. der Zahlen ist eben bekannt, als Zahlengebäude oder Anordnung der Zeichen auf Papier, mithin ist ein Zugriff möglich und verläuft auch dieser vollständig über Zahlen. Man kann also mögliche Zahlengebäude (Kombinationssysteme von Zeichen) vorfertigen (auf Papier), um dann später, mittels der Zeigestruktur, die richtigen Zahlen in dem Gebäude, auf dem Papier zurückzufinden. Ein "einfaches Anweisen und Abschreiben" wie es Hindenburg öfters ausdruckte.

In dem Hindenburgischen Gewebe der Zeigerstrukturen gibt es zwei Extreme. Am einen Ende steht die 1_0 oder Eins als Zahl und nur als Zahl, denn an und für sich ist eine normale 1 möglicherweise auch ein Zeiger. An des Spektrums anderem Ende steht eine Art von "Zugriffsoperator", welcher ungefähr so aussieht: ⅂.[33] Die Syntax ist: <eine Anordnung von Zeichen> ⅂ <eine Adresse=Zahl n>. Dieses ⅂ müsste man jedoch als eben obiges Rastermuster interpretieren; je nach Anordnung der Zeichen auf Papier selektiert ⅂ eine bestimmte Gruppe (Muster) von Zeichen an der n-ten Stelle der Anordnung. Ganz klar ist Ordnung bei Hindenburgs Theorie wichtig: Wie bestimmt man, was ein Platz n ist? Dafür muss man nur auf Hindenburgs Elementareinsicht zurückgreifen: Substituiere für alle Dinge Zeichen, und

[31] Ebenda, S. XVII.

[32] Es werden später Hindenburgs Ideen Carl Friedrich Gauss (1777–1855) beeinflussen. Dessen kalkülatorisch und mathematikgeschichtlich wichtige Einführung eines Repräsentanten, d.h. eine Zahl steht für eine unendliche Klasse von Zahlen, kündet von der Ankunft der modernen Mathematik, welche mit Klassen, Äquivalenzen und Morphismen arbeitet. So ist bei Gauss $1 \pmod 7$ Repräsentant aller Zahlen, die Eins als Rest nach Teilung durch Sieben haben, in moderner Mathematik dann steht 1 im Feld GF_7, und stehen wir nahe bei der Plättung von Operator und Operand.

[33] Ebenda, S. XXXIII.

für die Zeichen Zahlen, dann ist die Ordnung diejenige Ordnung des Zählens (also der Größe nach). Hindenburg sieht aber ein, dass man auch andere Ordnungen definieren könnte. So ist auch die alphabetische Ordnung eine Ordung, und Hindenburg bemerkt, dass, obwohl "ihr Nützen blos auf Wörterbücher und Repertorien sich zu beschränken scheint", sie eigentlich "mit der Zahlenordnung in der genauesten Verbindung" steht.[34] Diese alphabetische (oder lexikographische) Ordnung lässt 1112 vor 12 vor 221 (oder aaab vor ab vor bba) stehen, aber hat sogar in der Mathematik (wo man doch der Größe nach man 12, 221, 1112 erwarten würde) einen Nutzen.[35]

5. Aufzug: institutio 1800–1801 entwickelte der Zürcher Johann Heinrich Pestalozzi (1746–1827) seine bahnbrechende pädagogische Methode, aufgrund eines "ABC der Anschauung" das Lesen, Schreiben und Rechnen allen Kindern zu lehren. Bei dieser Methode hatte die Mutter eine zentrale Rolle inne, denn sie musste (wenn eventuell selbst auch Analphabet) im Spiel mit dem Kind die An- und Abwesenheit von Körperteilen und Gegenständen, die Zerlegung der anwesenden Sachen usw. beibringen – aufgrund deren baut sich eben ein "ABC der Anschauung" auf, aufgrund deren baut sich die Kinderpsychologie des Da und Weg auf[36], und aufgrund deren sind die Generationen nach 1800 über die Mutterbindung und Muttermund alphabetisiert und wird Dichtung zur Literatur.[37] Das Spiel der Mutter mit dem Kind ist nach Pestalozzi selbst:

> [Das ABC der Anschauung] ist selber nichts anders als eine psychologisch geryhete lükkenlose Stuffenfolge von Übungen im Augenmaß und in den Fertigkeiten der Hand, zur mathematischen Sicherstellung der Vollendung eines jeden einzelnen Zugs. [...] Das ABC der Anschauung ist reine Mathematic.[38]

Wâhrend Pestalozzi ursprünglich (in dieser Reihenfolge) Schall, Zahl und Form als die wichtigsten Medien des Unterrichts bezeichnete, verkürzt sich diese Medienreihe langsam um eins, um den Schall.

Als 1800–1803 Pestalozzis Mitarbeiter Hermann Krüsi (1775–1844) den Kindern in Burgdorf mittels Pestalozzis Originalmethode das Rechnen beibringen will, scheitert er zuerst, die

[34] Hindenburg, C.F. (1795), "Ueber combinatorische Involutionen und Evolutionen, und ihren Einfluß auf die combinatorische Analytik", *Archiv der reinen und angewandten Mathematik*, 1 (1), S. 13–46, hier S. 16.

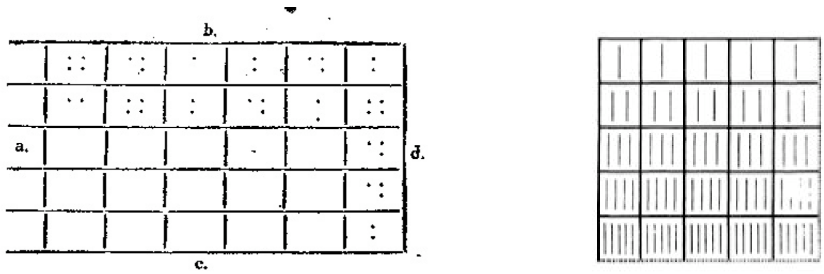
[35] Und so bietet Hindenburg insgesamt eine relativ vollständige Einführung in das, was man heute Algorithmen für das Indexieren, Sortieren und Suchen nennen würde. Tatsächlich ist Hindenburg im dritten Band von Donald Knuths *Art of Programming*, "Searching and Sorting", ein oft zitiertet Autor.

[36] Und bei Freud wird dies ein Spiel jenseits des Lustprinzips, bei Lacan das Fundament einer kombinatorischen Entwicklung des Symbolischen (die Täusche einer *lettre volée*) und schließlich bei Piaget Grundlage der kognitiven Entwicklung und mithin des Rechnens – oder wie die Geschichte manchmal ein *self-fulfilling prophecy* wird, weil eben die Medien unserer Kultur auf dem Boden unserer Seinsvergessenheit liegen bleiben.

[37] Kittler, F. A. (1986/7), *Aufschreibesysteme 1800/1900*, Wilhelm Fink, München, Teil I.

[38] Pestalozzi, J. H. (1803), *ABC der Anschauung oder Anschauungslehre der Massverhältnisse*, Zürich, Gessner, Neudruck in: *Sämtliche Werke* (1927–1996), Berlin, Leipzig und Zürich, 15. Band, S. 175–340, hier S. 177-178.

Übungen gehen zu schnell. Das Zählen der Punkten in den Fächern und Zusammenzählen geht mit zu großen Schritten fort. Stattdessen nimmt Krüsi einige herumliegende Bücher, und fängt zuerst an, mit dem Legen und Wegnehmen von Büchern das Zählen zu lehren. Hierin erfolgreich, führt er die Technik weiter, und beginnt dann die “hölzernen Buchstabentäfelchen” als Elemente des Unterrichts zu benutzen. So wird allmählich das Elementarunterricht in Sachen Rechnen das “Hinzuthun und Hinwegzählen von einem Buchstabentäfelchen”, “Hinzuzählen von 2 solchen Täfelchen” usw. Schließlich abstrahiert Krüsi von den Büchern und Täfelchen und ersetzt sie durch mit Kreide gezogenen Striche, die, richtig angeordnet, eine Tabelle der Einheiten bilden, an der man das Zählen lehren kann.[39]



Links Originalmethode, rechts die Tabelle der Einheiten

Diese Geschichte zeigt, wie das Lesen und Schreiben dem Rechnen (oder wenigstens dem Zählen) den Vortritt lassen müssen. Die Bücher, die Buchstabentäfelchen werden einfach umgedreht und als simple Objekte und Striche in den Prozess des Zählenlernens eingeschaltet. Bei diesem Zählen- und Rechenlernens, oder nach Pestalozzi: bei dem Explorieren der Zahlenverhältnisse, ist die Eins diejenige Zahl, auf die alles Zählen und Rechnen dauernd rekurrieren muss. Denn, die Zahl ist ”eine psychologische nothwendige Folge der begriffenen Eins“.[40] In dieser Abstraktion des Elementarunterrichts geht der Dessauer Pädagoge Ernst Tillich (1780–1807) noch um einen Schritt weiter. Für Tillich wird in Pestalozzis Methode nicht klargemacht, warum A mal B auch gleich B mal A sei, gerade an dieser Stelle gibt es eine bedeutende Lücke in den (in den Beschreibungen 200 Seiten umfassenden) Übungen an der Einheitstabelle. Deswegen doppelt Tillich die Eins, einmal als Eins, einmal als Einheit: “Auf diese Weise erscheint die absolute Einheit nicht als Element des Zählens, sondern nur als Element der Combination, d.i. als Bedingung der Möglichkeit des Zählens.”[41]

Um diese Doppelung auch theoretisch zu begründen, versucht Tillich, “die Combinationslehre des Herrn Prof. Hindenburg für die Methodik des Rechenlehrens zu benutzen.”[42] Tatsächlich

[39] Krüsi, H. (1830), “Geschichte der Entstehung und Bearbeitung der Pestalozzi'schen Anschauungslehre der Zahlenverhältnisse”, *J. P. Rossel's allgemeine Monatsschrift für Erziehung und Unterricht*, 13 (2) & 13 (3), S. 161–182 & 279–286, hier S. 168–170.

[40] Pestalozzi, J. H. (1803), *Anschauunglehre der Zahlenverhältnisse*, 1. Heft , Zürich, Bern, Tübingen, S. VI.

[41] Tillich, E. (1805), “Wissenschaftliche Darstellung der arithmetischen und geometrischen Anschauung, mit Rücksicht auf den mathematischen ...”, *Beiträge zur Erziehungskunst, zur Vervollkommnung sowohl ihrer Grundsätze als ihrer Methode*, 2 (1), S. 1–74, hier S. 27.

[42] Tillich, E. (1803), “Anzeige der vorzüglichsten Schriften über Pestalozzis Lehrart”, *Beiträge zur Erziehungskunst, zur Vervollkommnung sowohl ihrer Grundsätze als ihrer Methode*, 1 (2), S. 292–337, hier

ist Tillichs Doppelung Hindenburgisch: Die Eins als Element des Zählens ist eben die Anzeige der Position der Striche, die Einheit als Elements des Kombinierens ist das Zusammenfassen verschiedener Dinge als Gruppe, als Menge, die an sich wieder *eine* Menge von Dingen bildet usw. Die Eins wechselt mithin dauernd zwischen einem "formalen" und einem "materialen" Modus, zwischen "Princip des Combinirens" und Ergebnis des Combinirens, wenn neben "die Elemente des Combinirens auch zugleich der Inhalt des zu Combinirenden berücksichtigt wird".[43] Die Einheit wird Operator und Operand zugleich.

Aufgrund der praktischen Ergebnisse Krüsis und der theoretischen Hindenburgs kommt Tillich zur Schlussfolgerung, das Denken liege auf dem "Gebiet der Quantität", oder, "unser Denken [besteht] in nichts anderm als in dem Zusammenreihen arithmetischer Größen, durch welche das Gesetz der Causalität sich ausdrückt, und in Concreto, oder vielmehr in seiner ganzen Totalität darstellt."[44] Als wären wir schon 150 Jahre später beschreibt Tillich das Denken als das Geräusch des Rechners im Hintergrund:

> Die Zahl ist der einfachste Maaßstab der Wahrheit und die einfachste Darstellung des Denkens; nur inwiefern wir zählen, denken wir. Einen Denker, der nicht zugleich Arithmetiker ist, kann es nicht geben, wenn wir uns nicht selbst täuschen wollen; und wenn jemand schon denkt, ohne sich der Zahl *bewußt* zu werden, so liegen dennoch arithmetische Operationen im Hintergrunde.[45]

So wird um 1805 die Hardwareprogrammierung des Menschen in Sachen Kulturtechnik, wird das Lesen und Schreiben unter dem Zeichen des Rechens, auf den Punkt gebracht.

> Darum ist die Zahl der Anfangspunct des Denkens, so wie die Sprache der Anfang des Erkennens ist. Beide hängen innig zusammen, und reichen schwesterlich sich die Hand, bis sie in eins sich auflösen. Die Zahl bleibt als Typus innerer Operationen, die Sprache als das Vehikel derselben. Durch die erstere drückt sich ganz einfach das aus, was in uns vorgeht, wenn wir denken; durch die Letztere ist uns der Weg angedeutet, wie wir die Außenwelt für uns benutzen, um sie umzusetzen in Begriffe.[46]

Fazit Als Alan Turing 1936 schreibt:

> We may compare a man in the process of computing a real number to a machine which is only capable of a finite number of conditions [...] which we will call

S. 306. Für eine genauere Analyse von Pestalozzis und Tillichs Methoden im Rechnen siehe Bullynck, M. (2008), "The Transmission of Numeracy. Integrating Reckoning in Protestant North-German elementary education (1770-1810)", *Historia Paedagogica*, S. 1–23.

[43] Tillich, "Darstellung", S. 28.

[44] Ebenda, S. 21.

[45] Ebenda, S. 23.

[46] Tillich, "Darstellung", S. 71.

> "m-configurations". The machine is supplied with a "tape" [...] running through it, and divided into sections [...] each capable of bearing a "symbol". [...] The "scanned symbol" is the only one of which the machine is, so to speak, "directly aware". However, by altering its m-configuration the machine can effectively remember some of the symbols which it has "seen" (scanned) previously.[47]

so steht er am Ende einer langen Entwicklung, wie auch am Anfang einer neuen, uns bis heute nicht völlig erschlossenen Evolution.

Obwohl Descartes' Metaphorik des Visuellen, in Gänsefüsschen gewickelt, noch auftritt, so ist das Wesentliche eben, dass das Rechnen (oder Fast-Denken) völlig diskret über Symbole verläuft, mittels "m-configurations", die die Reduktion des Symbolischen auf das Intuitive ("directly aware") ermöglichen. Es bliebt uns aber noch die Aufgabe das Computerdenken auf ein "intuitives" zu reduzieren, uns den Zugang dazu zu erschließen. Wann wird man "das Salz derer Computer Ermessungen so unter den Wörter=Samen" mischen und "die scharffe Wurtzel der Codes und Algorithmen in das Lehr=Feld" einsenken?

[47] Turing, A. (1936), "On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem", *Proceedings of the London Mathematical Society*, 42 (2) & 43 (2), S. 230–265 & 544–546 (corr.), hier S. 231. Dazu noch die von Emil Post angezeigten Fehler in Turings Maschine, Post, E. (1947), "Recursive Unsolvability of a Problem of Thue", *Journal of Symbolic Logic*, 12 (1), S. 1–11, nämlich S. 7–11.