I. H. LAMBERT

ACADEMIAE SCIENTIARVM ELECTORALIS BOICAE MEMBRI ET PROFESSORIS HONORARII, SOCIETATIS PHYSICO-MEDICAE BASILEENSIS MEMBRI, REGIAE SOCIETATI SCIENTIARVM GOETTINGENSI COMMERCIO LITERARIO ADIVNCTI

INSIGNIORES ORBITAE COMETARVM PROPRIETATES.

AVGVSTAE VINDELICORVM,
SVMTIBVS EBERHARDI KLETT VIDVAE.
MDCCLXI.

PRAEFATIO.

Plurima ſupereſſe videntur, Matheſeos adplicatae capita, quae etſi iam paſſim ab Auctoribus ſint pertractata, attamen ab eo fine, ad quem erant perducenda, immenſum quantum diſtant. Duo potiſſimum ſunt, quae moram nectere poſſe, primo quidem intuitu videntur. Quodſi enim theoria vel maxime ob praxin excolatur, ſaepiſſime citatiori paſſu, illa neglecta vel obiter tractata, ad hanc properamus, eamque ingredimur viam, quae primo ſeſe nobis offert, nulla habita breuitatis ambituumue ratione. Porro & ipſa theoria, quam curatius euoluendam esse prospicimus, haud raro speciem problematis intricatissimi prae se fert, atque cum eam leuiter adspicimus vel e limine tantum salutamus, ita videtur complexa & ardua, ut & eos qui laboris sunt patientissimi & quos in noua & elegantiora fert animus impiger, deterrere possit. Nescio tamen quaenam subinde felicioris successus spes intuentem penitiusque rimantem arrideat, ut cum labore improbo rem adgreditur, spem ipse euentus superet, certe hic viam sternat iis, qui ad veram absolutamque metam pertingere gestiunt.

Quae sese mihi obtulerunt specimina, utramque hanc difficultatis caussam luce sua collustrantia, his edoctus sum, problema quoduis intricatius peculiarem sibique propriam requirere methodum, peculiaremque artificiorum heuristicorum combinationem, quae nisi iunctim sumta & suo quaeque ordine meditanti succurrant, spem elegantioris solutionis fallunt, aut nonnisi per prolixiores ambages, eo quo deueniendum erat, conducunt. Accedit quandoque, ut solutio quaestionis vel ideo incassum tentetur, quod verum rei momentum adhucdum latet, atque saepissime,

quid

quid sibi velit id quod vel quaerimus vel iam inuenimus, menti sese subducit. Hoc vero ipso praetergredimur id in quo cardo rei vertitur. Quodsi porro theoria praestruenda reuera deprehendatur nimis complexa difficultatisque plena, expedit utique casum euoluere specialiorem magisque concinnum, quo facto haud raro res praeter exspectationem ita cadit, ut elegantiores proprietates, quas casus iste nobis offert, leui mutatione facta uniuersalius patere atque ad casus omnes extendi posse facili negotio peruideamus. Contra ea haud raro huiuscemodi theoria difficilioris speciem mentitur, re vero actu tentata longe sese ostendit faciliorem. Denique casus iste, quem curatius examinare propositum est, pluries multifariis circumstantiis a re ipsa prorsus alienis ita videtur inuolutus, ut an istae remoueri tutoque praetermitti queant, primo quidem obtutu nequaquam liquescat, re autem curatius perlustrata non modo deprehendantur alienae verum & quandoque mere arbitrariae.

Exempla, quibus his assertionibus lux adfundatur, aliunde in medium heic proferre superfluum duco, quippe singula veluti in ſummam collecta in hoc opuſculo occurrunt, in quo *Proprietates inſigniores orbitae cometarum* eodem prorſus modo euolutas dedi, quo tribus abhinc annis in tractatu *Les proprietés remarquables de la route de la lumiere par les airs*, ſemitas luminis per plura media diaphana ſphaerica eaque concentrica perueſtigaui.

Plures utique iam proſtant methodi orbitam cometae ex datis tribus ipſius locis geocentricis, vel tentando, vel conſtructione, vel denique ſubducto calculo definiendi, unde hoc certe reſpectu de crambe bis, ter vel centies recocta ſermonem heic eſſe iniiciendum iudicabunt, qui norunt, quaenam veſtigia mihi hac in re erant premenda. Illuſtria ſane ſi quae vel maxime hoc nomen merentur, at ni fallor veſtigia tantum, quae a primis fontibus veluti per ſaltum eo deducebant, quo, praeſtructa enucleatiori theoria, via con. cinniori deueniendum fuiſſet. Nota iam erant prima quibus cetera ſuperſtruerentur principia polique iura, at ab ipſo hoc pro. blemate, quo ex tribus obſeruationibus eruenda erat cometae orbita, quodque ſcopi primarii vices ſuſtinet, nimis iſta videbantur remota. Mirum tamen videri

pote-

poterat, an elegantiſſimae illae proprietates, quibus gaudent ſectiones conicae, & in quibus eruendis ſummi geometrae veluti certatim ab antiquiſſimis retro temporibus operam collocarunt indefeſſam, prorſus inutiles atque ſuperfluae forent, ſimul ac cometarum orbitis eſſent adplicandae? Res ipſa utique tentamine digna, ſpes haud inana, at ſuperauit euentus, quippe elegantiores iſtae proprietates, dum cometarum orbitis ita adplicantur, ut areae ſubſtituatur tempus numeris abſolutis definitum, quantumuis iam ſint concinnae, concinniores euadunt. Has iam ita in hoc opuſculo congeſſi, ut eas poſitiones, quae independenter ab orbitis cometarum ſectiones conicas in ſe ſpectatas concernunt, quo uniuerſalius paterent, lemmatum inſtar proponerem, eaſque hac ratione a ceteris, quae ad euoluendas orbitarum proprietates quicquam facerent, diſtinguerem. Nouis iam nota interſerere e re eſſe videbatur, quo clarius eluceſceret poſitionum nexus. Ex nouis tamen ea tantum in medium protuli, quae elegantiora eſſent & uniuerſaliora, quibuſque in apricum productis haud deeſſent, quae ulterius progreſſuro viam oſtendere poſſent, quaeque

ſubin-

ſubinde indicaui. Huc referas meditata de proiectione orthographica in planum eccliptices vel aliud quoduis utiliter ipſi ſubſtituendum. Similiter Lemmata quaedam in prima Sectione ipſi tractationi praefixa, & quae in Sectione IV. de differentia orbitarum parabolicarum, ellipticarum & hyperbolicarum breuibus diſſerui. Orbitam potiſſimum parabolicam curatius perluſtraui, atque theoremata & problemata ad eam ſpectantia luce ſua ita videbantur conſpicua, ut quae plerumque illuſtrationis ergo adferuntur exempla, hic deeſſe poſſent abſque ullo claritatis detrimento. Orbitas vero ellipticas in ultima Sectione eatenus tantum perueſtigavi, quatenus palam fieret, qua ratione elegantiſſimae orbitae parabolicae proprietates ceteris quoque ſectionibus conicis eſſent adplicabiles. Hanc vero prouinciam ſi quis in ſe ſuſcipere operae pretium eſſe ducat, utiliter in ſubſidium vocabit, quae ſummus EVLERVS eximia qua pollet ingenii ſagacitate in *Theoria motuum Planetarum & Cometarum* demonſtrata dedit.

PRO-

PROPRIETATES INSIGNIORES ORBITAE COMETARVM.

SECTIO I.

Praeſtruuntur Lemmata uniuerſaliora, quibus indoles Parabolae, variaeque ipſius proprietates in theoria motus Cometarum uſui futurae exponuntur.

LEMMA I.

§. 1. *Sit AF axis, F focus parabolae AN, ducto radio vectore quocunque FN, & tangente NT, erit angulus $TNF = \frac{1}{2}.NFB$.* Fig.

DEMONSTRATIO.

Etenim per naturam parabolae eſt $FT = FN$, adeoque $FTN = TNF$. Sed $FTN + TNF = NFB$, quare $TNF = \frac{1}{2} NFB$.

LEMMA II.

§. 2. *E vertice A erigatur AS ad axin normalis, quae tangentem TN ſecet in S, ducatur FS, dico angulum AFN eſſe biſectum, & triangula AFS, SFN eſſe ſimilia.*

DEMONSTRATIO.

Etenim per naturam parabolae eſt $TS = SN$, $FT = FN$, adeoque angulus $TFS = SFN$. Porro FS eſt ad tangentem TN normalis, adeoque triangulum FSN rectangulum. Sed ob angulum SAF rectum, triangulum FAS quoque eſt rectangulum, unde ob angulos AFS, SFN aequales, utrumque iiſdem gaudet angulis. Sunt ergo ſimilia.

COROLLARIVM I.

§. 3. Erit ergo $AF : FS = FS : FN$. *Quare FS eſt media proportionalis inter FA & FN.*

COROLLARIVM II.

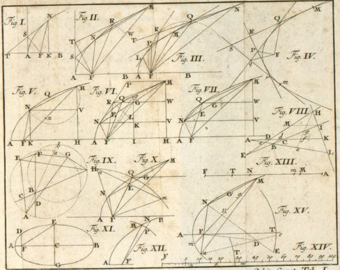
§. 4. Cum ſit $ASF = SNF$, erit $AF = SF. \text{ſin } ASF = SF. \text{ſin } SNF = FN. \text{ſin } FNT^2$. *Quare dato radio vectore FN & angulo FNT, facillime datur diſtantia foci a vertice AF, & ſitus axeos.*

COROLLARIVM III.

§. 5. Cum angulus FSN conſtanter ſit rectus, foco F & recta AS poſitione datis, ope normae, foco F & quibusuis punctis S adplicandae *dicto citius ducentur quotuis tangentes. SN, parabolae ambitum vel ſua ſponte delineaturae.*

SCHOLION.

§. 6. Propoſitiones hae longe uniuerſalius patent, atque paucis mutatis quibuſuis ſectionibus



Orbit. Comet. Tab. I.

nibus conicis adplicantur. Quod de parabola sequentem in modum palam fiet.

LEMMA III.

§. 7. *Si ad duo puncta parabolae N, M ducantur tangentes NR, RM, atque e foco F agantur rectae FN, FM, FR, triangula NFR, RFM erunt simi lia, & producta tangente MR in T, angulus TRN erit =NFR=RFM.* Fig. 1.

DEMONSTRATIO.

E vertice A erigatur AT ad axin AF normalis, producantur tangentes RM, RN in T & S, atque agantur rectae FS, FT. Quoniam anguli FSR, FTR sunt recti (§. 2.) eidemque rectae FR insistunt, puncta F, S, T, R erunt in peripheria circuli, cuius diameter FR. Quare FST + FRT = 180°, adeoque ASF = TRF = SNF. Unde cum triangula ista sint similia, erit quoque SFN = TFR. Quare SFT = NFR = SRT. Est vero (§. 1.) SNF = ½NFB, TMF = ½MFB, unde SNF − TMF = ½NFM. Sed per naturam quadranguli est SNF − TMF = NFM − TRS, adeoque NFM − TRS = ½NFM, siue TRS = ½NFM = NFR. Quare recta FR angulum NFM bisecat. Cumque sit SNF = TRF, erit quoque FNR = FRM, adeoque in triangulis FNR, FRM anguli respondentes sunt aequales, quare triangula ipsa sunt similia.

COROLLARIVM I.

§. 8. Erit ergo $FN:FR = FR:FM$. *Adeoque FR est media proportionalis inter FN, FM.* Unde $FN:FR = FR:FM = \sqrt{FN}:\sqrt{FM}$.

COROLLARIVM II.

§. 9. Datis ergo foco F & duobus parabolae punctis N, M, ob angulum NFM bisectum, & $FR = \sqrt{(FN.FM)}$, facillime ducentur tangentes RNS, MRT, atque ad has normales FS, FT, proinde & TSA, & FA.

COROLLARIVM III.

§. 10. Similiter dato triangulo FNM dabitur triangulum FRM, quare & angulus RMF, eritque $AF = FM.\sin RMF^2$ (§. 4.)

COROLLARIVM IV.

§. 11. Cum fit $FRM = FNR$, manente recta FN & tangente NR, angulus FRM erit constans, quaecunque fit rectae FM ad FN inclinatio. Uniuersalius itaque patet methodus parabolam construendi supra (§. 5.) exposita.

COROLLARIVM V.

§. 12. Ducta chorda NM, erit summa angulorum $RNM + RMN = TRS = NFR$.

COROLLARIVM VI.

§. 13. Porro cum fit

$NR:RM = \sin RMN:\sin RNM$

& ob

& ob angulum NFM bisectum

$$NR:RM = \sin RMF:\sin RNF$$

erit

$$\sin RMN:\sin RNM = \sin RMF:\sin RNF$$

COROLLARIUM VII.

§. 14. Ob triangula FNR, FRM similia, est

$$NR:RM = FN:FR$$

Sed (§. 8.)

$$FN:FR = \sqrt{FN}:\sqrt{FM}$$

Quare (§. 13.)

$$\sqrt{FN}:\sqrt{FM} = \sin RMF:\sin RNF$$

LEMMA IV.

§. 15. *Si ad tria parabolae puncta L, M, N* Fig. 3. *ducantur tangentes LR, RN, PMQ, puncta intersectionis P, R, Q una cum foco F erunt in peripheria circuli.*

DEMONSTRATIO.

Est enim (§. 7.)

$$TRL = \tfrac{1}{2}.LFN = \tfrac{1}{2}LFM + \tfrac{1}{2}MFN$$

Sed (§. cit.)

$$\tfrac{1}{2}.LFM = PFM$$

$$\tfrac{1}{2}.MFN = MFQ$$

Quare

$$TRL = PFM + MFQ = PFQ.$$

Unde in quadrangulo FPRQ anguli oppositi PFQ+PRQ=180°. Quae proprietas est quadrilateri circulo inscripti, constat ergo propositum.

COROLLARIVM I.

§. 16. Tribus itaque parabolae tangentibus positione datis, per puncta interſectionis P, Q, R duci poterit circulus QRPF, qui per focum parabolae tranſeat.

COROLLARIVM II.

§. 17. Proinde ſi poſitione dentur quatuor parabolae tangentes, duo deſcribentur circuli, quorum interſectio focum parabolae exhibeat.

LEMMA V.

§. 18. *Manente utraque tangente LR, RN, ſitus tertiae PMQ varietur utcunque, ratio inter partes abſciſſas LP, RQ erit conſtans.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim

$$LFP = \tfrac{1}{2}LFM$$
$$LFR = \tfrac{1}{2}LFN$$

unde

$$PFR = \tfrac{1}{2}MFN = MFQ$$

adeoque addendo partem communem RFM, erit

$$RFQ = PFM = LFP$$

Sed eſt quoque

$$PLF = QRF$$

unde triangula LPF, RQF ſunt ſimilia, adeoque ratio inter LP & RQ conſtans.

COROLLARIVM I.

§. 19. Erit ergo

$$LP:RQ = LR:RN = LF:RF$$

fiue

$$LP:RQ = \sqrt{LF}:\sqrt{NF}$$

COROLLARIVM II.

§. 20. Hinc quoque erit

$$RP:QN = \sqrt{LF}:\sqrt{NF}$$

COROLLARIVM III.

§. 21. Quare &

$$LR = PR + \frac{RQ.LR}{RN}$$

fiue

$$\frac{PR}{LR} + \frac{RQ}{NR} = 1.$$

COROLLARIVM IV.

§. 22. Cum fit

$$PFM = LFP$$
$$PFR = MFQ$$

erit addendo $PFQ = LFR = \frac{1}{2}LFM$
Eft vero quoque $FPM = FLP = FRQ$
quare triangula LRF, RNF, PFQ funt fimilia.

COROLARIVM V.

§. 23. Quicunque ergo fit fitus tangentis PMF, manente utraque tangente LR, RN, ratio inter latera FP, PQ, FQ erit conftans.

LEMMA VI.

Fig. 4. §. 24. *Tribus parabolae tangentibus Rr, RQ, rq positione datis, si ducatur quarta quaecunque qPQ, ratio inter partes abscissas qP, PQ erit constans.*

DEMONSTRATIO.

Etenim per corollarium quintum Lemmatis praecedentis (§. 23.) ratio inter PF, PQ nec non inter PF, Pq est constans, quare & ratio inter PQ, Pq constans erit.

LEMMA VII. PROBLEMA I.

§. 25. *Tribus rectis Rr, RQ, rq positione datis, ducenda sit quarta qQ talis ut partes abscissae qP, PQ sint in ratione data.*

SOLVTIO.

Problema hoc indeterminatum est. At si unica recta qQ ducta sit conditioni satisfaciens, dabuntur quatuor parabolae tangentes, quarum ope definietur situs foci F per §. 17. atque proinde construetur ipsa parabola per §. 9. siue quotlibet eius tangentes per §. 5. Cunctae vero vi lemmatis sexti conditioni problematis satisfacient.

Aliter.

Cum sit (§. 24.)

$$qP:PQ = SR:RM = rm:Sr$$

erit componendo

$$SR:SM = rm:mS$$

siue

fiue

$$SM:Sm = SR:rm$$

Sed eſt quoque (§. 19.)

$$SM:Sm = QM:Sq$$

Quare

$$SR:rm = QM:Sq.$$

Data itaque ratione inter qP, PQ per analogiam primam dabitur RM & rm, adeoque ſitus punctorum contactus M, m. Aſſumta itaque abſciſſa qualibet QM, erit haec ad Sq in ratione conſtante Sr:rm. Unde pro quouis puncto Q dabitur reſpondens q, quo duci poſſit recta qQ.

Aliter.

Cum ſit

$$Pq : \sin qrP = qr : \sin qPr$$

$$PQ : \sin QRP = QR : \sin QPR$$

&

$$qPr = QPR$$

erit

$$Pq:PQ = \frac{qr . \sin qrP}{\sin qPr} : \frac{QR . \sin QRP}{\sin qPr}$$

Quare

$$\frac{PQ}{Pq} . \sin qrP : \sin QRP = QR : qr = \frac{PQ}{Pq} : \frac{Sr}{SR}$$

Aſſumta itaque QR, dabitur quoque qr, & viciſſim.

LEMMA VIII. PROBLEMA II.

§. 26. *Duobus parabolae punctis N, M vna cum foco F poſitione datis conſtruere parabolam.* Fig. 5.

 SOLV-

SOLVTIO.

Diametro NM defcribatur femicirculus MVN, fiat $Fn = FN$, quo habeatur differentia nM. Haec transferatur ex N in V, ut chorda NV fit $= nM$. Ducatur MVH, atque ad hanc ex foco F demittatur normalis FH, erit haec axis parabolae. Denique fiat $AF = \frac{1}{2}(FM - FH)$ eritque A parabolae vertex. His vero datis facile abfoluetur parabolae conftructio.

DEMONSTRATIO.

Per naturam parabolae eft

$$FM = FH + 2AF$$
$$FN = FK + 2AF$$

Quare differentia

$$FM - FN = FH - FK = HK = NV$$

Sed ob angulum NVM rectum, chorda NM fubtendit femicirculum NVM, & NV eft axi AH parallela.

SCHOLION.

§. 27. Aliam huius problematis folutionem iam fupra indicauimus (§. 9.)

LEMMA IX. PROBLEMA III.

§. 28. *Dato triangulo NFM inuenire aream fegmenti NQM.*

SOLVTIO.

Ponatur parabolae parameter $= p$, porro

$AH = x \quad HM = y$
$AK = \xi \quad KN = \eta$

erit

erit area

$$\text{ſegmenti AMH} = \tfrac{2}{3}xy$$
$$\text{ſegmenti ANK} = \tfrac{2}{3}\xi\eta$$
$$\text{quadrilateri KNMH} = \tfrac{1}{2}(x-\xi).(\eta+y)$$

Quare area ſegmenti NQM erit

$$= \tfrac{2}{3}xy - \tfrac{2}{3}\xi\eta - \tfrac{1}{2}(x-\xi).(y+\eta)$$

ſiue debita reductione facta

$$= \tfrac{1}{6}(xy - \xi\eta - 3x\eta + 3\xi y)$$

At vero eſt

$$x = y^2 : p$$
$$\xi = \eta^2 : p$$

Quare ſubſtituendo erit area ſegmenti NQM

$$B = \frac{1}{6p}(y^3 - 3y^2\eta + 3y\eta^2 - \eta^3)$$

ſiue

$$B = (y-\eta)^3 : 6p = \mathrm{MV}^3 : 24\mathrm{AF}$$

Pendet itaque area ſegmenti NQM unice a differentia ordinatarum KN, HM, & diſtantia foci a vertice AF.

Sit iam

$$\mathrm{FM} = a$$
$$\mathrm{FN} = b$$
$$\angle \mathrm{NFM} = 2c$$
$$\mathrm{NM} = k$$

erit

$$2ab \cos 2c = a^2 + b^2 - k^2$$

ſed

$$\cos 2c = 1 - 2 \sin c^2$$

unde

$$4ab \sin c^2 = k^2 - (a-b)^2 = \mathrm{MV}^2$$
$$\mathrm{MV} = 2 \sin c \sqrt{ab}$$

Porro eſt (§. 8.)

$$\mathrm{FR} = \sqrt{ab}$$

Fig. 2.

Unde

Unde

$$RW = \sin c \,.\, \sqrt{ab}$$
$$MW = a - \cos c \,.\, \sqrt{ab}$$
$$\sin RMW^2 = b \sin c^2 : (a + b - 2\cos c \,.\, \sqrt{ab})$$

Sed (§. 4.)

$$AF = FM \,.\, \sin RMW^2$$

Quare

$$AF = \frac{ab \,.\, \sin c^2}{a + b - 2\cos c \,.\, \sqrt{ab}}$$

Eſt vero

Fig. 5. $$B = MV^3 : 24\, AF$$

Quare ſubſtituendo, erit

$$B = \tfrac{1}{3} \sqrt{ab} \,.\, \sin c\, (a + b - 2\sqrt{ab} \,.\, \cos c)$$

COROLLARIUM.

§. 29. Facile iam hinc habebitur area ſecto-ris parabolici NFMQ, ſi ſegmento NQM ad-datur area trianguli NFM, quae eſt

$$= \tfrac{1}{2} ab \,.\, \sin 2c = ab \sin c \,.\, \cos c$$

Quare dicta area ſectoris NFMQ $= A$, erit

$$A = \tfrac{1}{3} \sqrt{ab} \,.\, \sin c \,.\, (a + b) + \tfrac{1}{3} ab \,.\, \sin c \,.\, \cos c$$

ſiue

$$A = \tfrac{1}{3} \sqrt{ab} \,.\, \sin c\, (a + b + \sqrt{ab} \,.\, \cos c)$$

LEMMA X. PROBLEMA IIII.

§. 30. *Datis lateribus trianguli NFM inuenire diſtantiam foci F a vertice A, & aream ſectoris parabolici NFM.*

SOLUTIO.

Per formulas trigonometricas eſt

$$4ab \sin c^2 = (k + a - b) \,.\, (k - a + b) = k^2 - (a - b)^2$$
$$4ab \cos c^2 = (k + a + b) \,.\, (a + b - k) = (a + b)^2 - k^2$$

Quare

Quare cum ſit (§. 28. 29.)

$$AF = ab . \sin c^2 : (a + b - 2 \cos c . \sqrt{ab})$$

$$A = \tfrac{1}{3} \sqrt{ab} . \sin c (a + b + \cos c . \sqrt{ab})$$

erit ſubſtitutione facta

$$AF = \frac{k^2 - (a-b)^2}{4[a + b - \sqrt{((a+b)^2 - k^2)}]}$$

$$A = \tfrac{1}{6} . \sqrt{(k^2 - (a-b)^2)} . [a + b + \tfrac{1}{2} \sqrt{((a+b)^2 - k^2)}]$$

COROLLARIVM I.

§. 31. Cum ſit

$$(a+b) - \sqrt{((a+b)^2 - k^2)} = \frac{k^2}{(a+b) + \sqrt{((a+b)^2 - k^2)}}$$

erit quoque

$$AF = (k^2 - (a-b)^2) . [a + b + \sqrt{((a+b)^2 - k^2)}] : 4k^2$$

COROLLARIVM II.

§. 32. Si angulus $c = \tfrac{1}{2}$ NFM fuerit 90°, erit $k = a + b$, quare hoc caſu erit

$$AF = \frac{ab}{a+b} = ab : k$$

$$A = \tfrac{1}{3} (a+b) \sqrt{ab} = \tfrac{1}{3} k \sqrt{ab}$$

SCHOLION.

§. 33. Literae a, b, c, k, quibus in utroque problemate praecedente uſi ſumus, conſtanter eundem retinebunt ſignificatum, quem hic ipſis tribuimus. Quod hic ideo notandum, quo ſuperflua reddatur eiuſdem denominationis continua repetitio.

LEM-

LEMMA XI. PROBLEMA V.

Fig. 2. § 34. *Datis lateribus trianguli NFM invenire angulum RMF vel SNF.*

SOLVTIO.

Cum sit (§. 28.)

$$\sin RMF^2 = b \sin c^2 : (a+b-2\cos c \sqrt{ab})$$

atque (§. 30.)

$$4ab \sin c^2 = k^2 - (a-b)^2$$

$$4ab \cos c^2 = (a+b)^2 - k^2$$

erit substitutione facta

$$\sin RMF^2 = \frac{k^2 - (a-b)^2}{4a[a+b-\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}$$

similique ratione (§. 14.)

$$\sin SNF^2 = \frac{k^2 - (a-b)^2}{4b[a+b-\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}$$

COROLLARIVM I.

§. 35. Cum sit (§. 1.)

$$MFB = 2RMF$$

erit

$$\cos MFB = 1 - 2\sin RMF^2$$

adeoque

$$\cos MFB = 1 - \frac{k^2 - (a-b)^2}{2a[a+b-\sqrt{(a+b)^2-k^2)}]}$$

COROLLARIVM II.

§. 36. Si angulus NFM euadat $= 180°$, erit $a+b=k$, adeoque

$$\cos MFB = 1 - \frac{2b}{a+b} = \frac{a-b}{a+b}$$

SCHO-

SCHOLION.

§. 37. Alio insuper modo exprimetur angulus RMF simulque & angulus RMN per a, b, c, si quaeratur utriusque cotangens. Est enim FRM $= 180^\circ - c -$ RMF. Quare

$$FR : FM = \sin FRM : (\sin FRM + c)$$

Sed est (§. 8.)

$$FR : FM = \surd b : \surd a$$

Dicto itaque angulo RMF $= v$, erit

$$\surd b : \surd a = \sin v : \sin(c+v)$$

siue ob

$$\sin(c+v) = \sin c . \cos v + \cos c . \sin v$$

$$\surd b : \surd a = \sin v : (\sin c . \cos v + \cos c . \sin v)$$

$$\surd b : \surd a = 1 : (\sin c . \cot v + \cos c)$$

Unde

$$\cot v = \surd \frac{a}{b} . \operatorname{cosec} c - \cot c.$$

Porro dicto angulo FMN $= \omega$, ob TRN $=$ RFM $= c$ (§. 7.) erit

$$MNR = c - \omega$$

quare

$$NR : RM = \sin \omega : \sin(c - \omega)$$

Est vero (§. 14.)

$$NR : RM = \surd b : \surd a$$

Quare

$$\surd b : \surd a = \sin \omega : \sin(c - \omega)$$

siue

$$\surd b : \surd a = \sin \omega : (\sin c . \cos \omega - \cos c . \sin \omega)$$

Unde erit

$$\cot \omega = \operatorname{cosec} c . \surd \frac{a}{b} + \cot c$$

Cum-

Cumque sit

$$\cot v = \operatorname{cosec} c . \sqrt{\frac{a}{b}} - \cot c$$

patet, mutato tantum signo, eandem formulam exhibere cotangentem utriusque anguli v, ω siue RMF, RMN.

LEMMA XII.

Fig. 6. §. 38. *Bisecta chorda NM in G, ducatur WGR axi AH parallela, ducantur porro tangentes NR, RM, atque insuper recta FQ e foco F, erit RQ = QG = QE.*

DEMONSTRATIO.

Producta tangente NR in P, agatur MP axi parallela, per naturam parabolae erit

$$RQ : PM = NR^2 : NP^2$$

At vero

$$NR : NP = NG : NM = 1 : 2$$

Quare

$$RQ : PM = 1 : 4$$

Sed

$$RG : PM = 1 : 2$$

Quare

$$RQ : RG = 1 : 2$$

adeoque

$$RQ = QG$$

Porro recta, quae parabolam in Q tangit, chordae NM est parallela, atque ad rectas FQ, QW sub eodem angulo inclinata, unde erit

$$QEG = QGE$$

adeoque

$$QE = QG = RQ.$$

SCHO-

SCHOLION.

§. 39. Cum QW ſit parabolae diameter, dabitur relatio inter FQ, QG, NM, eritque

$$NM^2 = 16.FQ.QG.$$

Similiter erit

$$NP^2 = 16.FN.QR = 16.FN.QG$$

adeoque

$$NP:NM = \sqrt{FN}:\sqrt{FQ}$$

ſiue

$$NR:NG = \sqrt{FN}:\sqrt{FQ}$$

LEMMA XIII.

§. 40. *Si per medium chordae G ducatur ordinata IGg ad axin normalis, atque iungatur gF, erit* $gF = (FN+FM):2$.

DEMONSTRATIO.

Eſt enim

$$Fg - FN = KN$$
$$FM - Fg = KV = KN$$

adeoque

$$Fg - FN = FM - Fg$$

ſiue

$$Fg = \frac{FN+FM}{2}$$

SCHOLION.

§. 41. Lemma hoc latius patet, atque ſingulis ſectionibus conicis adplicabile eſt.

LEMMA XIV.

§. 42. *Ductis rectis FQ, QG, Fg ut in utroque Lemmate praecedente, erit $Fg = FQ + QG$.*

DEMONSTRATIO.

Est enim
$$GW = IH = FM - Fg$$
$$QW = FM - FQ$$
Quare subtrahendo
$$QW - GW = Fg - FQ = QG$$
adeoque
$$Fg = FQ + QG.$$

COROLLARIUM.

§. 43. Ob $QE = QG$ (§. 38.) erit quoque
$$Fg = FQ + QE$$

LEMMA XV. PROBLEMA VI.

§. 44. *Datis lateribus trianguli FNM, invenire distantiam FQ sive initii diametri QW a foco F.*

SOLUTIO.

Cum sit (§. 42. 40.)
$$Fg = FQ + QG = \frac{FN + FM}{2}$$
atque porro (§. 39.)
$$NM^2 = 16.FQ.QG$$
erit
$$FQ + \frac{NM^2}{16.FQ} = \frac{FN + FM}{2}$$

Dicta

Dicta itaque $FQ = q$ erit

$$q = -\frac{a+b}{4} + \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2 - k^2]}$$

SCHOLION.

§. 45. Mutato signo eadem formula dabit QE, eritque

$$QE = QG = -\frac{a+b}{4} - \tfrac{1}{4}\sqrt{[(a+b)^2 - k^2]}$$

COROLLARIVM I.

§. 46. Hinc erit

$$FQ - QE = \tfrac{1}{2}\sqrt{[(a+b)^2 \quad k^2]} = FE$$

COROLLARIVM II.

§. 47. Est vero (§. 30.)

$$(a+b)^2 - k^2 = 4ab.\mathrm{cos}c^2$$

quare

$$FE = \sqrt{ab}.\mathrm{cos}c = FR.\mathrm{cos}RFM.$$

LEMMA XVI.

§. 48. *Ducta RL ad FM normali, erit FL=FE, & RL=GK.*

DEMONSTRATIO.

Est enim (§. 8.)

$$FR = \sqrt{ab}$$

$$RFM = c$$

adeoque

$$FL = \sqrt{ab}.\mathrm{cos}c$$

$$RL = \sqrt{ab}.\mathrm{sin}c$$

Sed (§. 30. 47.)

$$\sqrt{ab}.\,\text{ſin}\,c = \tfrac{1}{2}\sqrt{(k^2-(a-b)^2)} = \tfrac{1}{2}\text{MV} = \text{GK}$$
$$\sqrt{ab}.\,\text{coſ}\,c = \text{FE}$$

Quare

$$\text{RL} = \text{GK}$$
$$\text{FL} = \text{FE}$$

LEMMA XVII.

Fig. 7. §. 49. *Si tria puncta parabolae N, Q, M, una cum foco F nectantur rectis FN, FQ, FM, NM, NQ, QM, triangula NFQ, QFM erunt in ratione ſimplici abſciſſarum NE, EM, & ſegmenta NMQ, NQ, QM erunt in ratione triplicata rectarum NM, NG, GM, ſi QG ſit axi AF parallela.*

DEMONSTRATIO.

Etenim triangula NQE, QEM ſunt aeque alta, ob communem verticem Q, quare eorum areae ſunt ut baſes NE, EM. Similiter triangula NFE, EFM ſunt aeque alta ob communem verticem F, quare eorum areae itidem ſunt ut baſes NE, EM. erit ergo componendo

$$\triangle\text{NFQ} : \triangle\text{FQM} = \text{NE} : \text{EM}$$

Porro ducta NV axi parallela, demiſſaque ordinata MV erit (§. 28.) area ſegmenti

$$\text{NMQ} = \text{MV}^3 : 24\,\text{AF}$$
$$\text{NQ} = \text{VW}^3 : 24\,\text{AF}$$
$$\text{QM} = \text{MW}^3 : 24\,\text{AF}$$

Quare

$$\text{NMQ} : \text{MV}^3 = \text{NQ} : \text{VW}^3 = \text{QM} : \text{MW}^3$$

ſiue areae ſegmentorum NMQ, NQ, QM ſunt in ratione triplicata abſciſſarum MV, VW, MW.

MW. Sunt vero hae abſciſſae in ratione abſciſſarum NM, NG, GM. Conſtat ergo propoſitum.

SCHOLION.

§. 50. Quodſi angulus NFM 20 aut 30 gradus non excedat, ſegmenta NQ, QM ratione triangulorum NFQ, QFM, quibus adiacent ſunt paruitatis contemnendae, quare ſectores NFQ, QFM erunt proxime in ratione abſciſſarum NE, EM, chordae quae arcum integrum NM ſubtendit.

LEMMA XVIII. PROBLEMA VII.

§. 51. *Quatuor rectis BL, BI, DK, DH poſitione datis, ducere quintam LH talem, ut partes abſciſſae HI, IK, KL ſint in ratione data.* Fig. 8

SOLVTIO.

Sumto triangulo ABC, quod formant rectae puncta I, K, L ſecturae atque fiat KI : IH = AB : Be, porro KL : KH = BC : Cg ſiue LI : IH = AC : Cf; hinc dabuntur puncta e, f, g in eadem recta ſita. Producatur igitur efg in H. Porro fiat HD : DM = HK : KI, unde dabitur punctum M. Ducatur porro MI ipſi DK parallela, atque recta per HI ducta erit recta quaeſita.

Aliter.

Per trigonometriam erit

$$\sin CKI : AL = \sin BAD : KL$$
$$\sin CKI : DH = \sin ADE : HK$$
$$\sin CIK : EH = \sin DEB : HI$$
$$\sin CIK : BL = \sin ABE : IL$$

Unde fit

$$\frac{AL.\sin BAD}{KL} = \frac{DH.\sin ADE}{HK}$$
$$\frac{EH.\sin DEB}{HI} = \frac{BL.\sin ABE}{IL}$$

Fiat iam

$$KL : HK = 1 : m$$
$$HI : IL = 1 : n$$

erit

$$m(AB+BL)\sin BAD = DH.\sin ADE.$$
$$n(ED+DH)\sin DEB = BL.\sin ABE.$$

Unde porro

$$DH = \frac{m(AB+BL)\sin BAD}{\sin ADE}$$
$$DH = \frac{BL.\sin ABE - n.ED.\sin DEB}{n.\sin DEB}$$

adeoque

$$BL = n.\sin DEB[m AB \sin BAD + ED.\sin ADE] : [\sin ABE.\sin ADE - mn \sin BAD \sin DEB]$$

Data vero BL, facile dabitur DH, unde & situs rectae HL.

SCHO-

SCHOLION I.

§. 52. Demonſtratio ſolutionis prioris ex Lemmate ſexto & ſeptimo petitur. Sunt enim rectae AB, AC, BC, eg, LH tangentes parabolae. Ceterum ſi in formula, quam exhibet ſolutio poſterior, lateribus uti praeſtet, eam ſequenti ratione mutare licet. Primo enim abit in ſequentem

$$BL = \left(m.n.\frac{AB.\sin BAD}{\sin ADE} + n.ED\right) : \left(\frac{\sin ABE.}{\sin DEB.} - \frac{m.n \sin BAD}{\sin ADE}\right)$$

Ducatur BD ipſi ED parallela, eritque

$$AdB = ADE$$
$$AB.\sin BAD : \sin ADE = Bd.$$
$$\sin ABE : \sin DEB = Ee : eB$$
$$\sin BAD : \sin ADE = eD : Ae$$

adeoque

$$BL = (m.n.Bd + n.ED) : \left(\frac{Ee}{eB} - m.n.\frac{eD}{Ae}\right)$$

ſiue

$$BL = n.eB.Ae(m.Bd + ED) : (Ee.Ae - m.n.eD.eB)$$

SCHOLION II.

§. 53. Aliam huius problematis ſolutionem inuenias in *Arithmetica uniuerſali* ſummi NEWTONI, qui idem ad eruendam Cometae diſtantiam geocentricam adhibuit, ponendo exiguam orbitae partem inſtar rectae ſpectari poſſe, ſumitque puncta H, I, K, L eſſe quatuor cometae loca in planum Eccliptices proiecta.

LEMMA XIX. PROBLEMA VIII.

Fig. 9. §. 54. *Quatuor rectis positione datis AE, AG, BF, BH inscribere quadrilaterum datum EFGH.*

SOLVTIO.

Ob rectas positione datas dabuntur anguli CAD, CBD, CAB, CBA. Constructo itaque quadrilatero EFGH, per angulos oppositos EG, FH ducantur circuli ita ut arcus EG, FH sint angulis EAG, FBH duplo maiores, atque facile obuium est puncta A, B, in peripheriis horum circulorum esse sita. Fiat porro arcus Ea = 2 CAB, arcus FB = 2 ABD, atque per puncta b, a agatur recta baBA, quae in peripheria utriusque circuli situm punctorum B, A abscindet. Denique ducant HBC, FBD, eruntque EA, GA, FB, HB quatuor istae rectae quibus quadrilaterum EFGH erat inscribendum.

SCHOLION.

§. 55. Facile patet, haud opus esse ut latera quadrilateri EFGH data sint in eadem mensura, qua latera quadranguli ABCD, verum sufficit notos esse angulos E, F, G, H una cum ratione laterum inter se. Hac ratione usui esse poterit hoc problema, ubi cometae orbita iam proxime fuerit definita. Quod si enim proxime detur curuatura eius partis orbitae, quam cometa interuallo quatuor obseruationum percurrit, problema hoc voto magis satisfaciet ac praecedens, quod partem orbitae supponit esse rectam.

LEMMA XX.

§. 56. *Bisecta chorda NM parabolae in G, ducatur GQ axi AF parallela, nectantur Q & focus F recta QF, denique chorda NM transferatur in n m, ita ut FQ eam sub angulo recto bisecet, dico puncta n, m esse in parabola nQm, cuius vertex Q, axis QF, focus F, & areae sectorum nFm, NFM erunt in ratione subduplicata semilaterum rectorum.* Fig. 10.

DEMONSTRATIO.

Etenim ob NG = GM, & GQ axi AF parallelam, chorda NM erit parallela rectae, quae parabolam tangit in Q. adeoque NEF = $\frac{1}{2}$QEB, & QG = QE (§. 38. 1.) Porro per naturam parabolae est

$$NM^2 = 16 . FQ . QG$$

adeoque &

$$nm^2 = 16 . FQ . QE$$

Quae aequatio est ad parabolam, cuius axis & distantia foci a vertice est FQ. Similiter ob QG = QE, area segmenti NQM erit ad aream segmenti nQm ut sinus anguli QGE = QEG = NEF ad sinum totum. At in eadem quoque ratione sunt triangula FNM Fnm, ob bases NM, nm aequales; Unde & integri sectores NFM, nFm sunt in ratione sinus anguli NEF ad sinum totum. Est vero (§. 4.)

$$\sin NEF : 1 = \surd AF : \surd FQ = \surd 2AF : \surd 2FQ$$

adeoque

$$NFMN : nFmn = \surd 2 . AF : \surd 2 . FQ$$

Sunt vero 2AF, 2FQ semilatera recta, unde constat propositum.

SCHOLION.

§. 57. Lemma hoc, si debite limitetur, ad singulas sectiones conicas extendi poterit. Idem quoque ita posse inuerti, ut ex data parabola nQm, deducatur quaeuis alia NQM, quae per verticem prioris Q transeat, vel me tacente patet.

LEMMA XXI. PROBLEMA IX.

§. 58. *Data chorda NM & sagitta QG, inuenire aream segmenti NQM & sectoris NFM.*

SOLVTIO.

Area segmenti nQm est $= \frac{2}{3} QE.nm$, trianguli $nFm = \frac{1}{2} FE.nm$, quare erit area sectoris

$$nFmQ = \tfrac{2}{3} QE.nm + \tfrac{1}{2} FE.nm$$

siue

$$nFmQ = \tfrac{1}{6} QE.nm + \tfrac{1}{2} FQ.nm$$

Est vero (§. 56.)

$$nFmQ : NFMQ = nmQ : NMQ = \sqrt{FQ} : \sqrt{AF}$$

$$nm = NM$$

$$QE = QG$$

Quare erit area

$$\text{segmenti } NMQ = \tfrac{2}{3} NM.QG \sqrt{\frac{AF}{FQ}}$$

$$\text{sectoris } NFMQ = NM(\tfrac{1}{6} GQ = + \tfrac{1}{2} FQ) \sqrt{\frac{AF}{FQ}}$$

Cum vero sit

$$NM^2 = 16.QG.FQ$$

erit

erit area

segmenti $NMQ = \frac{8}{3}\sqrt{(QG^3.AF)}$

sectoris $NFMQ = (\frac{2}{3}QG^2 + \frac{1}{8}NM^2).\sqrt{\frac{AF}{QG}}$

COROLLARIVM.

§. 59. Similiter erit area sectoris

$$NFMQ = NM\left(\frac{NM^2}{96.FQ} + \frac{1}{2}FQ\right)\sqrt{\frac{AF}{FQ}}$$

LEMMA XXII. PROBLEMA X.

§. 60. *Data chorda $NM = k$ & summa laterum $FM + FN = a + b$, inuenire aream sectoris FNQM.*

SOLVTIO.

Cum sit (§. 58)

$$NFMQ = NM(\tfrac{1}{6}QG + \tfrac{1}{2}FQ)\sqrt{\frac{AF}{FQ}}$$

atque porro (§. 44. 45.)

$$FQ = \tfrac{1}{4}[a+b+\sqrt{((a+b)^2 - k^2)}]$$
$$QG = \tfrac{1}{4}[a+b-\sqrt{((a+b)^2 - k^2)}]$$

erit substitutione debitaque reductione facta

$$NFMQ = \frac{k[a+b+\frac{1}{2}\sqrt{((a+b)^2 - k^2)}]}{3\sqrt{[a+b+\sqrt{((a+b)^2 - k^2)}]}}.\sqrt{AF}$$

COROL-

COROLLARIVM I.

§. 61. Cum ſit

$$[a+b+\sqrt{((a+b)^2-k^2)}].[a+b-\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]=k^2$$

erit quoque

$$NFMQ=\sqrt{[a+b-\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}.[a+b+\tfrac{1}{2}\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]\frac{\sqrt{AF}}{3}$$

COROLLARIVM II.

§. 62. Huius formulae factor poſterior $a+b+\frac{1}{2}\sqrt{((a+b)^2-k^2)}$ leui mutatione abit in

$$\tfrac{1}{2}(a+b)+\tfrac{1}{2}[a+b+\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]$$

adeoque formula ipſa mutatur in ſequentem

$$\frac{3.NFMQ}{\sqrt{AF}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{[(a+b)-\sqrt{((a+b^2-k^2)}]}.(a+b)$$
$$+\tfrac{1}{2}k\sqrt{[a+b+\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}$$

fiat breuitatis ergo $a+b=g$, eritque

$$\frac{3NFMQ}{\sqrt{AF}}=\tfrac{1}{2}g\sqrt{(g-\sqrt{(g^2-k^2)})}+\tfrac{1}{2}k\sqrt{(g+\sqrt{(g^2\ k^2)})}$$

COROLLARIVM III.

§. 63. Hinc vero fit

$$\frac{3.NFMQ}{\sqrt{AF}}=\tfrac{1}{2}g\sqrt{\frac{g+k}{2}}-\tfrac{1}{2}g\sqrt{\frac{g-k}{2}}+\tfrac{1}{2}k\sqrt{\frac{g+k}{2}}$$
$$+\tfrac{1}{2}k\sqrt{\frac{g-k}{2}}$$

adeoque

$$\frac{3.NFMQ}{\sqrt{AF}}=\tfrac{1}{2}(g+k)\sqrt{\frac{g+k}{2}}-\tfrac{1}{2}(g-k)\sqrt{\frac{g-k}{2}}$$

ſiue

ſiue breuiſſime

$$\frac{3.NFMQ}{\sqrt{AF}} = \left(\frac{g+k}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{3:2}$$

atque proinde area ſectoris

$$FNMQ = A = \left[\left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{3:2}\right]. \; \tfrac{1}{3}\sqrt{AF}$$

SCHOLION I.

§. 64. Hanc formulam admodum concinnam prolixiori ratiocinio erutam, infra breuius demonſtratam dabimus, cum de inueniendo tempore, quo cometa datum quemlibet orbitae parabolicae arcum NM emetitur, ſermo erit. Ceterum hic notabimus ſimile quid obtineri poſſe, ſi orbita fuerit ſectio conica quaecunque, atque debitae fiant mutationes & limitationes.

SCHOLION II.

§. 65. En itaque Lemmata potiora, quae praeſtruenda eſſe duxi, quo concinnior euaderet theoria motus cometarum in orbitis parabolicis incedentium. Videbimus vero formulas hactenus erutas ſimpliciores fieri, ſi in vicem areae ſectoris NFMQ ſubſtituamus tempus quo cometa arcum NM percurrit.

PRO-

PROPRIETATES INSIGNIORES ORBITAE COMETARVM.

SECTIO II.

Exponuntur Symptomata notabiliora motus Cometarum parabolici.

LEX CAELI I.

§. 66. *Singula corpora caelestia, quae circa Solem gyrantur, Planetae nempe & Cometae, aguntur viribus centralibus, atque in Solem grauia sunt, ita ut grauitas decrescat reciproce ut quadratum distantiae.*

LEX II.

§. 67. *Proinde Tempora, quibus datum arcum orbitae percurrunt, areis sunt proportionalia, quas verrit radius vector, siue recta e centro Solis in centrum planetae vel cometae ducta.*

LEX III.

§. 68. *Ita ergo circa Solem aguntur, ut orbita, in qua incedunt, necessario sit Sectio conica, in cuius foco alterutro est centrum Solis.*

LEX IV.

§. 69. *Tempus quo cometa vel planeta arcum datum orbitae suae percurrit, est ut area, quam verrit radius vector, per radicem quadratam semilateris recti diuisa, si diuersi inter se comparentur cometae vel planetae.*

SCHOLION.

§. 70. Non est huius loci, ut exponamus, quaenam in demonstrandis his legibus experientiae, quaenam principiis mechanicis debeantur. Ansam dedit acutissimus KEPLERVS, cum tres posteriores ex operosissimis obseruationibus deduceret easque planetis adplicaret. Primam ex obseruationibus deduxit summus NEWTONVS, remque omnem ad principia Mechanices transtulit, cum theoriae virium centralium prima strueret fundamenta. Legem tertiam potissimum eius necessitatem solito suo ingenii acumine solitaque sagacitate in apricum produxit inter Geometras facile Princeps JO. BERNOVLLIVS. Singulae iam ita ubique sunt obuiae, atque velut in vulgus notae, ut actum agerem, si in iis denuo demonstrandis tempus terere vellem. Principiorum instar heic sunto, ex quibus specialiora deducentur motuum caelestium symptomata. Haec vero ut nexu magis naturali & continuo ex legibus istis manare queant, nouis iam nota praefigere atque immiscere propositum est, quatenus haec ad rem nostram quicquam facient.

THEO-

THEOREMA I.

§. 71. *Si duo pluresue Cometae in orbitis ellipticis incedant, quarum axes maiores sunt aequales, tempora periodica erunt aequalia.*

DEMONSTRATIO.

Fig. 11. Sit F centrum solis unaque focus ellipseos ADB, axis maior sit AB, minor EG, semilatus rectum FD, erit per naturam ellipseos

$$FD.AC = CE^2 = AF.FB$$

Denotet porro $1:\pi$ rationem diametri circuli ad peripheriam erit area ellipseos

$$A = \pi.AC.CE$$

At vero per legem quartam (§ 69.) tempus est ut area per radicem quadratam semilateris recti diuisa, quare dicto tempore periodico $= T$, erit

$$T = \frac{\pi.AC.CE}{m\sqrt{FD}}$$

Est vero

$$\sqrt{FD} = CE:\sqrt{AC}$$

adeoque erit

$$T = \frac{\pi}{m}.AC^{3:2}$$

Pendet ergo tempus periodicum unice ab axe maiore ellipseos. Unde liquet propositum, simulque & sequens

THEO-

THEOREMA II.

§. 72. *Tempora periodica cometarum & planetarum in ellipsibus incedentium sunt in ratione sesquiplicata semiaxium maiorum vel distantiae heliocentricae mediae.*

DEMONSTRATIO.

Est enim distantia media $FE = \frac{AF+FB}{2} = AC.$

Sed vi theorematis praecedentis est

$$T = \frac{\pi}{m} AC^{3:2}$$

Quare &

$$T = \frac{\pi}{m} . FE^{3:2}$$

PROBLEMA XII.

§. 73. *Exhibere distantias & tempora cometarum planetarumue in numeris absolutis, una cum ratione, quam tempus & distantia inter se seruant.*

SOLVTIO I.

Cum tellus moueatur in ellipsi, ponatur eius distantia media siue, quod vulgo aiunt, radius orbis magni = 100000, atque in his partibus definiantur distantiae quaelibet aliae. Porro efferatur tempus in diebus naturalibus, horumque partibus decimalibus. Est vero tempus periodicum telluris = 365,25659 dierum.

 Quare

Quare erit in formula theorematis praecedentis

$$AC = FE = 100000$$
$$T = 365{,}25659.$$

Hinc iam habebitur valor literae m, quae rationem quaesitam denotat. Est vero

$$m = \frac{\pi . AC^{3:2}}{T}$$

adeoque

$$\log. AC^{3:2} = 7{,}5000000$$
$$\log. \pi = 0{,}4971499$$
$$\overline{ 7{,}9971499}$$
$$\log. T = 2{,}5625980$$
$$\log. m = 5{,}4345519$$

unde

$$m = 271989{,}4.$$
$$T = \frac{\pi . AC^{3:2}}{271989{,}4.}$$

SOLVTIO II.

Inuentis fractionibus decimalibus, radius orbis magni commodius fit $= 1$. Ponatur itaque

$$T = n . \pi . AC^{3:2}$$

erit $AC = 1$, quare

$$n = T : \pi$$
$$\log. T = 2{,}5625980$$
$$\log. \pi = 0{,}4971499$$
$$\log. n = 2{,}0654481$$

unde

$$n = 116{,}2648. = \frac{1}{m}$$

Sit

Sit itaque area ſectoris cuiuslibet NFM $= A$, Fig. 5. ſemilatus rectum $= s$, tempus quo percurritur arcus NM, in diebus naturalibus exprimendum $= T$, erit

1° poſito radio orbis magni $= 100000$

$$T = \frac{A}{m\sqrt{s}} = \frac{nA}{\sqrt{s}} = \frac{A:\sqrt{s}}{271989{,}4}.$$

2° poſito radio orbis magni $= 1$, erit

$$T = \frac{A}{m\sqrt{s}} = \frac{n.A}{\sqrt{s}} = \frac{A.116{,}2648}{\sqrt{s}}$$

SCHOLION.

§. 74. In ſequentibus plerumque utemur literis π, m, n, A, T, quarum ergo ſignificatus conſtanter retinebitur idem, haud ſecus ac ille, quem ſupra (§. 33.) literis a, b, c, k tribuimus. Significatum literarum m, T, A eodem ſenſu iam adhibuit perilluſtris EVLERVS in *Theoria cometarum & planetarum.*

PROBLEMA XXIII.

§. 75. *Inuenire celeritatem cometae in circulo incedentis.*

SOLVTIO.

Sit ſemidiameter circuli $= r$, erit eius area $= \pi r^2$, adeoque tempus periodicum

$$T = \frac{\pi.rr}{m\sqrt{r}} = \frac{\pi}{m}.r^{3:2}$$

 Hoc

Hoc tempore absoluit peripheriam $=2\pi r$. Quare si celeritas exprimatur per arcum uno die naturali percurrendum, eaque dicatur $=K$, erit

$$K=2\pi r:T=2m:\surd r$$

THEOREMA III.

Fig. 12. §. 76. *Si cometa incedat in parabola AM celeritas in dato quouis loco M est ad celeritatem, qua incederet in circulo MP ad eandem a Sole F distantiam ut* $\surd 2$ *ad* 1.

DEMONSTRATIO.

Cum tempora sint ut areae per radicem quadratum semilateris recti diuisae (§. 69.) erit tempus quo percurritur arcus parabolicus infinite paruus MN

$$T=MFN:m\surd 2AF$$

tempus vero, quo percurritur arcus circularis MP

$$t=MFP:m\surd FM$$

At vero celeritates sunt ut arcus per tempus diuisi quare si dicantur C, K, erit

$$C=MN:T=MN.m\surd 2AF:MFN$$
$$K=MP:t=MP.m\surd MF:MFP$$

adeoque

$$C:K=\frac{MN.\surd 2AF}{MFN}:\frac{MP.\surd MF}{MFP}$$

Est vero (§. 4.)

$$AF=MF.\sin MNP^2=MF.MP^2:MN^2$$

Quare

Quare

$$MN\sqrt{AF} = MP\sqrt{MF}$$

Sed ob angulum MFN infinite paruum, areae ſunt aequales, adeoque ſubſtituendo erit

$$C : K = \sqrt{2} : 1$$

COROLLARIVM.

§. 77. Cum celeritas circularis ſit (§. 75.)

$$K = 2m : \sqrt{MF}$$

erit celeritas parabolica

$$C = 2m\sqrt{2} : \sqrt{MF}$$

Quae formula exprimit ſpatium, quod cometa uno die naturali iuxta directionem tangentialem percurreret (§. 75.) niſi vi grauitatis a recta deflecteretur.

SCHOLION.

§. 78. Hac proprietate motûs parabolici uti licet, ſi proxime definienda ſit longitudo arcus exiguo temporis interuallo percurſi, eaque, debita adhibita limitatione, haud difficulter orbitis ellipticis adplicatur. Propoſitionis concinnitas inde eſt, quod celeritas parabolica unice pendet a diſtantia cometae heliocentrica, atque perinde eſt, quanta ſit parabolae parameter. At vero cum celeritas ſingulis momentis mutetur, exiguus propoſitionis ceteroquin notiſſimae eſt uſus. En ergo alias uniuerſaliores.

PROBLEMA XIIII.

Fig. 5. §. 79. *Dato utroque radio vectore NF, MF & angulo NFM, inuenire tempus, quo cometa emetitur arcum parabolicum NM.*

SOLVTIO.

Area ſectoris NFMQ eſt (§. 29.)

$$A = \tfrac{1}{3}\sqrt{ab}.\,\text{ſin}\,c\,(a + b + \sqrt{ab}.\,\text{coſ}\,c)$$

Semilatus rectum (§. 28.)

$$s = 2\text{AF} = \frac{2ab\,\text{ſin}\,c^2}{a + b - 2\,\text{coſ}\,c.\sqrt{ab}}$$

At vero (§. 75.) tempus

$$T = \frac{n.A}{\sqrt{s}}$$

Quare ſubſtituendo, erit

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}.(a + b + \sqrt{ab}.\,\text{coſ}\,c)\sqrt{(a + b - 2\sqrt{ab}.\,\text{coſ}\,c)}$$

COROLLARIVM I.

§. 80. Hæc formula euoluta erit

$$18m^2T^2 = (a+b)^3 - 3(a+b)ab\,\text{coſ}\,c^2 - 2ab\sqrt{ab}.\,\text{coſ}\,c^3$$

ſiue

$$18m^2T^2 = a^3 + b^3 + 3(a+b)ab\,\text{ſin}\,c^2 - 2ab\sqrt{ab}.\,\text{coſ}\,c^3$$

ut adeo dato tempore T, ex quantitatibus *a*, *b*, *c* alterutra inueniatur ope aequationis tertii gradus.

COROLLARIVM II.

§ 81. Si fuerit $c = \frac{1}{2}\text{NFM} = 90^\circ$, erit NFM $= 180^\circ$, adeoque $\cos c = 0$, quare formula breuissima

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} \cdot (a+b)^{3:2}$$

exhibet tempus quo cometa e puncto quouis M peruenit ad punctum ipsi e diametro oppositum.

COROLLARIVM III.

§ 82. Quodsi ergo detur tempus, quo cometa ab uno nodorum ad alterum pertingit, dabitur longitudo lineae nodorum $a+b$, eritque

$$a+b = (18mT)^{2:3}$$

PROBLEMA XV.

§. 83. *Data summa radiorum vectorum FN, FM una cum chorda NM quae triangulum NFM claudit, inuenire tempus, quo percurritur arcus NQM.*

SOLVTIO I.

Cum sit (§. 30.)

$$2\text{AF} = s = \frac{k^2 - (a-b)^2}{2[a+b-\sqrt{((a+b)^2-k^2)}]}$$

$$A = \tfrac{1}{2}[a+b+\tfrac{1}{2}\sqrt{((a+b)^2-k^2)}] \cdot \sqrt{(k^2-(a-b)^2)}$$

atque in genere (§. 75.)

$$T = \frac{nA}{\sqrt{s}}$$

 erit

erit fubftitutione debitaque reductione facta

$$T=\frac{n[a+b+\frac{1}{2}\surd((a+b)^2-k^2)]\surd[a+b-\surd((a+b)^2-k^2)]}{3\surd 2}$$

SOLVTIO II.

Cum fit (§. 31.)

$$2AF=[k^2-(a-b)^2].[a+b+\surd((a+b)^2-k^2)]:2k^2$$

erit, hac formula utendo

$$T=\frac{kn[a+b+\frac{1}{2}\surd((a+b)^2-k^2)]}{3\surd 2[\surd(a+b+\surd((a+b)^2-k^2))]}$$

SOLVTIO III.

Eft (§. 63.)

$$\frac{3A}{\surd AF}=\left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{3:2}-\left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{3:2}$$

Sed (§. 75.)

$$T=nA:\surd s=A:m\surd 2AF$$

quare

$$T=\frac{\left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{3:2}-\left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{3:2}}{m.3\surd 2}$$

COROLLARIVM I.

§. 84. Dicta fumma rad[illegible] [illegible]i vectorum $a+b=g$, formula, quam fi[illegible] [illegible]tat folutio prima refoluitur in aequation[illegible] [illegible]equentem

$$0=k^6+6g^2k^4+9g^4k^2-144m^2T^2g^2$$
$$-432m^2T^2gk^2+72^2.m^2T^2$$

CORÖL-

COROLLARIVM II.

§. 85. Similiter formula Solutionis tertiae abit in feriem

$$4mT = k\sqrt{g} - \frac{k^3}{4.6.g^{3:2}} - \frac{1.3.5.k^5}{4.6.8.10.g^{7:2}} - \frac{1.3.5.7.9.k^7}{4.6.8.10.12.14.g^{11:2}} - \&c.$$

fiue reductis fractionibus

$$4mT = k\sqrt{g} - \frac{k^3}{24.g^{3:2}} - \frac{k^5}{128.g^{7:2}} - \frac{3.k^7}{1024.g^{11:2}} - \frac{143.k^9}{98304.g^{15:2}} - \&c.$$

Quae feries admodum eft conuergens, quoties angulus NFM fuerit paucorum graduum. Ceteris cafibus formula ipfa praeftat, cum abfoluta fit.

PROBLEMA XVI.

§. 86. *Data chorda NM & fagitta QG=QE, inuenire tempus quo cometa percurrit arcum NM.* Fig. 6.

SOLVTIO.

Cum fit (§. 58.)

$$A = (\tfrac{2}{3}.QG^2 + \tfrac{1}{8}NM^2).\sqrt{\frac{AF}{QG}}$$

atque porro (§. 75.)

$$T = nA : \sqrt{2AF}$$

erit

$$T = n\left(\tfrac{2}{3}.QG^2 + \tfrac{1}{8}NM^2\right) : \sqrt{2}QG$$

PROBLEMA XVII.

§. 87. *Data chorda NM & radio vectore FQ, inuenire tempus, quo cometa arcum NM emetitur.*

SOLVTIO.

Per formulam problematis praecedentis eſt

$$T = n\left(\tfrac{2}{3}QG^2 + \tfrac{1}{8}NM^2\right) : \sqrt{2}QG$$

Sed

$$\frac{NM^2}{16.FQ} = QG$$

Quare erit

$$T = \frac{n.NM}{\sqrt{2}}\left[\frac{NM^2}{96.FQ^{3:2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{FQ}\right]$$

COROLLARIVM.

§. 88. Hac formula euoluta habebitur aequatio

$$NM^3 + 48NM.FQ^2 = 96\sqrt{2}.mT.FQ^{3:2}$$

ex qua ea ratione quam in *Tom. III. Actorum Helueticorum* deſcriptam dedi, fit ſeries

$$NM = \frac{2\sqrt{2}.mT}{\sqrt{FQ}} - \frac{\sqrt{2}.m^3T^3}{3.FQ^{7:2}} + \frac{m.^5T.^5\sqrt{2}}{6.FQ^{13:2}}$$
$$- \frac{m^7T^7.\sqrt{2}}{9.FQ^{19:2}} + \&c.$$

ſiue

ſiue poſito radio orbis magni $=1$, atque ſubſtituto valore ipſius $m = \frac{1}{n}$, quem vidimus eſſe (§. 73.)

$$n = 116{,}2648$$

prodibit ſeries in numeris abſolutis

$$NM = \frac{0{,}0243747 . T}{\sqrt{FQ}} - 0{,}0000003006425 \frac{T^3}{FQ^{7:2}}$$

$$+ 0{,}000000000001109490 \frac{T^5}{FQ^{13:2}} - \&c.$$

Sunt vero logarithmi coefficientium

primi	$= 0{,}3860969 - 2$	
ſecundi	$= 0{,}4780495 - 7$	
tertii	$= 0{,}0451232 - 11$	
&c.		

SCHOLION I.

§. 89. Haec ſeries maxime videtur conuergens, at eo tantum caſu citius conuergit, quo tempus T eſt paucorum dierum, atque radius vector FQ unitate parum ſit minor.

SCHOLION II.

§. 90. Alio inſuper caſu uſui eſſe poterit haec formula, cum computanda eſt longitudo ordinatae nm, dato tempore, quo arcus nQm percurritur. Fig. 10.

PROBLEMA XVIII.

§. 91. *Data ſagitta QG & radio vectore FQ, inuenire tempus, quo cometa percurrit arcum NQM.*

SOLV-

SOLVTIO.

Cum ſit (§. 86.)

$$T = n(\tfrac{2}{3}QG^2 + \tfrac{1}{8}NM^2) : \sqrt{2QG}$$

atque

$$NM^2 = 16\,FQ \,.\, QG$$

erit

$$T = n(\tfrac{2}{3}QG^2 + 2FQ.QG) : \sqrt{(2QG)}$$

COROLLARIVM.

§. 92. Hinc erit viciſſim

$$FQ = mT : \sqrt{8QG} - \tfrac{1}{3}.QG = \frac{a+b}{2} - QG$$

$$a+b = mT : \sqrt{2QG} + \tfrac{1}{3}QG$$

THEOREMA IV.

§. 93. *Sint omnia ut in lemmate vigeſimo* (§. 56.) *tempora, quibus percurruntur arcus NQM, nQm ſunt aequalia.*

DEMONSTRATIO.

Patet enim ex Problemate praecedente, tempus definitum eſſe per radium vectorem FQ & ſagittam QG. At vero in utraque parabola, vi Lemmatis citati idem eſt radius vector, & ſagittae QG, QE ſunt aequales. Unde quoque tempora quibus arcus nm, NM percurruntur aequalia ſunt.

Ali-

Aliter.

Tempora sunt ut areae per radicem semilateris recti diuisae (§. 69.) unde erunt ut (NFMN: $\sqrt{2AF}$) ad (nFmn: $\sqrt{2FQ}$) At vero (§. 57.)

$$\frac{NFMN}{\sqrt{2AF}} = \frac{nFmn}{\sqrt{2FQ}}$$

Quare & ipsa tempora sunt aequalia.

COROLLARIVM.

§. 94. Cum tempus definiatur per summam radiorum vectorum Fn+Fm, siue FN+FM, & chordam nm, siue NM, hoc vero casu sit nm=NM (§. 56.) atque tempus utrumque aequale, patet viciſſim, esse quoque nF+mF =NF+MF. siue summam radiorum vectorum esse aequalem.

SCHOLION.

§. 95. Insignis haec motus cometarum parabolici proprietas, si debite limitetur, ceteris quoque Sectionibus conicis adplicabilis est. Ceterum idem hic notandum, quod ad Lemma vigesimum (§. 56.) notauimus, parabolae NM, retento foco F substitui posse quamlibet aliam, quae transeat per punctum Q. Cumque tempus, quo absoluitur motus cometae per arcum quemuis NQM unice pendeat a longitudine chordae NM, & summa laterum NF+MF, hinc uniuersaliſſime euidens fit motus cometarum parabolici isochronismus, & quid sibi velit celeritas ad eandem a sole F distantiam in singu-

singulis quibusuis parabolis eadem. At vero accedamus ad ea, quae hinc sequuntur.

THEOREMA V.

§. 96. *Data summa radiorum vectorum FN, FM una cum chorda NM, tempus, quo traiicitur arcus NQM, quem chorda NM subtendit, plane idem eruetur, quacunque utaris parabola, dummodo summa laterum FN+FM semilatere recto sit maior.*

DEMONSTRATIO.

Primum inde euidens est, quod chorda NM & summa laterum FN+FM definiendo tempori, quo percurritur arcus NQM satisfaciunt. Cum vero quaecunque assumatur parabola, ea transire debeat per punctum Q, patet maximum semilatus rectum fore = 2FQ. Est vero (§. 94) FN+FM = Fn+Fm, & per naturam parabolae Fm = Fn = FQ+QE adeoque Fn > FQ, unde FN+FM > 2FQ.

SCHOLION.

§. 97. Eligenda itaque parabola talis, ut eius semilatus rectum minor sit quam 2FQ. Quodsi ergo construenda sit scala singulis quibusuis parabolis inseruitura, ea commodissime adhibebitur, cuius latus rectum = o, siue quod eodem redit, linea recta, a centro solis in infinitum producenda. Etsi vero vix cometa in huiuscemodi parabola rectilinea incedat, utiliter tamen assumi poterit, quippe pro definiendo motu cometarum in quibusuis aliis parabolis

rabolis instar moduli erit. Cumque haec parabola cum linea recta coincidat, cometa, qui in ea incedere ponitur, veluti in solem cadere videtur. Nascitur hinc vel sua sponte

DEFINITIO I.

§. 98. *Lapsus parabolicus cometae in solem est eiusdem in parabola incessus, cuius latus rectum $=0$, siue cuius vertex cum foco in centro solis coincidit.*

COROLLARIVM I.

§. 99. Quoniam parabola in infinitum excurrit, lapsus parabolici initium est nullum, adeoque in data quauis a sole distantia iam adest definitus celeritatis gradus.

COROLLARIVM II.

§. 100. Cum celeritas cometae in parabola incedentis unice pendeat ab ipsius a sole distantia (§. 78.) dicta hac distantia $=MF$, erit (§. 77.) Fig. 13

$$C = m\sqrt{2} : \sqrt{MF}$$

COROLLARIVM III.

§. 101. Cumque porro lapsus parabolici initium sit nullum (§. 99.) tempora commodius a centro solis retro numerantur, loco lapsus ascensum parabolicum assumendo.

PRO-

PROBLEMA XIX.

§. 102. *Definire temporum interualla in lapsu parabolico, siue tempus, quo cometa a data distantia ad datam quamuis aliam delabitur.*

SOLVTIO.

Sit F centrum solis, FM distantia altera, FN altera, atque quaeritur tempus, quo cometa labitur, per spatium MN. Spectentur FM, FN ut radii vectores, MN ut chorda arcus percurrendi, qui hoc casu omni curuedine caret, atque erit (§. 83.)

$$T = \frac{\left(\frac{FN+FM+MN}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{FM+FN-MN}{2}\right)^{3:2}}{m3\sqrt{2}}$$

Est vero hoc casu

$$MN = FM - FN$$

adeoque

$$\frac{FN+FM+MN}{2} = FM$$

$$\frac{FN+FM-MN}{2} = FN$$

Quare erit tempus quaesitum

$$T = \frac{FM^{3:2} - FN^{3:2}}{3m\sqrt{2}}$$

COROL-

COROLLARIVM I.

§. 103. Quodsi ergo quaeratur tempus, quo cometa ex M pertingit ad centrum solis F, erit $FN=0$, adeoque

$$T = FM^{3:2} : 3m\sqrt{2}$$

COROLLARIVM II.

§. 104. Hinc erit viciſſim

$$FM = (18\,T^2 : n^2)^{1:3}$$

ſiue ſubſtituto valore ipſius n pro radio orbis magni $=1$, (§. 73.)

$$\log FM = \tfrac{2}{3} \log T - 0{,}9585412.$$

Qua ergo formula in numeris abſolutis definietur diſtantia FM per tempus lapſus parabolici, & vice verſa.

SCHOLION.

§. 105. Si in formula corollarii primi pro FM ſucceſſiue ſubſtituantur diſtantiae planetarum mediae, inuenietur numerus dierum, quibus abſoluitur lapſus parabolicus cometae in ſolem

e ♄	diebus	807,50.
♃	- -	325,00.
♂	- - -	51,54.
♁	- -	27,40.
♀	- - -	16,85.
☿	- -	6,60.

Lapſus parabolicus cometae per radium orbis magni curatius definitus eſt $= 27^{d}, 9^{h}, 41', 34''$.

COROLLARIVM.

§. 106. Cum lapſus hic ſit dato quouis motu elliptico, parabolico & circulari celerior, numeri dierum, quos hic exhibuimus, denotant ſemimoram cometae breuiſſimam intra orbitam cuiuslibet planetae. Unde mora breuiſſima intra orbitam

♄	eſt dierum	1615,00
♃	- - -	650,00
♂	- - - -	103,08
♁	- - - -	54,80
♀	- - - - -	33,70
☿	- - - -	13,20

Ceterum ſi lapſus ponatur hyperbolicus, cogitari poterit mora dato quouis interuallo temporis minor. At cum lapſus parabolicus ſit ellipticorum limes, moram lapſus parabolici breuiſſimam adpellare maluimus. Patet vero hinc cometas, qui ſe nobis ſpectandos ſiſtunt, fere integrum quinquennium intra orbitam Saturni commorari, etſi nobis vix totidem menſes conſpicui ſint.

DEFINITIO II.

§. 107. *Scala celeritatum parabolicarum nobis hic eſt ea, quae ad datam quamuis a ſole diſtantiam celeritatem cometae in parabola incedentis exhibet.*

THEOREMA VI.

§. 108. *Si F denotet centrum ſolis, atque dato cuiuis puncto M adſcribatur numerus dierum vel tempus, quo abſoluitur lapſus parabolicus cometae ex M*

in

in F, recta FM hoc modo diuisa erit scala celeritatum parabolicarum.

DEMONSTRATIO.

Etenim quaelibet abscissa quantumuis exigua Mm exhibet spatiolum lapsus. Cum vero tempora adscripta sint, dabitur quoque tempusculum, quo absoluitur lapsus per Mm. At vero si spatiolum Mm per tempus diuidatur, habebitur celeritas. Unde recta FM exhibet celeritates lapsus parabolici. Cum vero celeritas cometae in parabola quacunque incedentis ad eandem a sole distantiam sit eadem (§. 78.) consequens est, scalam FM in uniuersum exhibere celeritatem motus cometarum parabolici.

SCHOLION.

§. 109. Dantur quoque & alii modi hujuscemodi scalas construendi, at hic, quem iam descripsimus ad scopum nostrum adcommodatior est.

PROBLEMA XX.

§. 110. *Scalam celeritatum parabolicarum construere.*

SOLVTIO.

Assumto radio orbis magni $FT = 1$, per formulam (§. 104.)

$$\log FM = \tfrac{1}{2} \log T - 0{,}9585412$$

pro quouis numero dierum T computetur distantia respondens FM, haec in rectam FM transferatur ex F in M, atque puncto M adscribatur numerus dierum pro ea definienda assumtus, & scala erit constructa.

SCHOLION.

Fig. 14. §. 111. Huiusmodi scalam sistit figura decima quarta, quam ad 100 dies extendi. F est centrum solis, FT radius orbis magni, atque punctum T cadit in $27^{d};9^{h};41';34''$ (§. 105.) Quodsi eiusmodi scala construatur, assumta distantia FT maiori, commode distinguentur horarum interualla. Et vel per se euidens est, in construenda orbita cometae retinendam esse distantiam FT, ad quam scala ipsa constructa est. Quod ergo, ne in sequentibus repetendum sit, hic monuisse sufficiat.

PROBLEMA XXI.

§. 112. *Constructa orbita cometae parabolica scalae adcommodata, definire tempus, quo datus quilibet ipsius arcus percurritur.*

SOLVTIO.

5. I. Sit parabola AM, eius focus F, radius orbis magni FT. quaeritur tempus, quo percurritur arcus MN. Transferatur FN in Fν, bisecetur νM in g, eritque $Fg = \frac{FN + FM.}{2}$ Similiter bisecetur chorda NM in G. Quo

Fig. 14. facto transferatur Fg in scalam, ex F in g, ubi

ubi cadit in $18^d ; 9^h$. Capiatur semilongitudo chordae, eaque in scala transferatur ex g in m & n, ubi cadit in 29^d & $6^d ; 4^h$. quae tempora si ab inuicem subtrahantur, remanet $22^d ; 20^h$. Hoc itaque temporis interualla percurritur arcus NM.

II. Quodsi arcus percursus MAn in foco F formet angulum MFn gibbum siue duobus rectis maiorem, eodem modo quaeritur semisumma radiorum vectorum $(FM+FN):2$, & dimidium chordae Mn. Illa cadit in diem 16, atque semilongitudo chordae ex 16^d antrorsum & retrorsum translata in $0^d ; 3^h$ & $43^d ; 5^h$. At ob angulum MFn gibbum, sumenda est horum temporum summa. Unde $0^d ; 3^h + 43^d ; 5^h = 43^d ; 8^h$ erit tempus quo percurritur arcus MAn.

III. Si quaeratur tempus, quo Cometa ex dato puncto M peruenit in punctum oppositum m, hoc casu radii vectores FM, Fm cum chorda Mm coincidunt, atque tempus breuissime inuenitur, si tota chorda Mm in scalam transferatur, ubi cadet in $39^d ; 10^h$. Hoc ergo temporis intervallo cometa percurrit arcum MAm.

DEMONSTRATIO.

Etenim tempus plane idem est, quoties summa radiorum vectorum & chorda arcus percursi fuerint eaedem, quacunque utaris parabola (§. 96.) Quare cum semisumma transferatur in Fg, & semilongitudo chordae ex g in m & n, erit mn longitudo chordae. Cum iam scalae adſcripta ſint tempora, quibus cometa datum ſpatium mn percurrit, patet, tempus, quo emetitur arcum MN hoc modo definitum iri.

SCHOLION I.

§. 113. Ex formula (§. 104. 110.)

$$\log FM = \tfrac{2}{3} \log T - 0{,}9585412$$

ſiue

$$FM = (18\, T^2 : n^2)^{1:3}$$

patet, *quadratum temporis quo cometa ex dato puncto g motu parabolico in ſolem f defertur eſſe in ratione cubi diſtantiae Fg.* Hinc conſequens eſt, *in ſcala celeritatum parabolicarum tempora octuplo maiora a ſole F eſſe quadruplo remotiora.* Quippe quadratum octenarii aequatur cubo quaternarii. Hinc ergo etſi ſcalae nonniſi dies integri adſcripti ſint, facile tamen definientur horae, ſingula certe ternarum horarum interualla ſiue dierum ſemiquadrantes; *Etenim quartae parti diſtantiae adſcribenda eſt pars temporis octaua.*

SCHOLION II.

Fig. 15. §. 114. *Quo in praxi ſuperflua reddatur chordae NM atque ſpatii v M biſectio, conſultum eſt, ſcalam conſtruere duplo maiorem.* Quo facto ipſa radiorum FM, FN ſumma, totaque chorda NM dicto modo in ſcalam erunt transferendae, ſimulque, quod vel per ſe euidens eſt, hac ratione diſcerni poterunt temporum minutiae duplo minores.

SCHO-

SCHOLION III.

§. 115. Quo breuius atque facilius absolui possit scalae constructio computari poterit tabella relationem inter tempus & spatium lapsus parabolici exhibens (§. 110.) Tabella haec simul usui erit, ubi calculo rem peragere volueris. Eam ideo ad calcem libri adiecimus, cum maxime uniuersalis sit ipsius usus. Ceterum idem de tabella notandum, quod de scala notauimus (§. 113.) si tempora minora quaerantur.

SCHOLION IV.

§. 116. Ex problemate praesenti patet, usum scalae esse facilem & maxime expeditum, ubi ex summa radiorum FM+FN & chorda NM eruendum est tempus, quo arcus NM percurritur. At si problema inuertatur, atque ex summa radiorum & tempore quaeratur chorda, vel ex chorda & tempore summa radiorum, vel, quod saepius occurrit ex alterutro radio FN, tempore & semilatere recto parabolae radius alter FM, & chorda NM, res nonnisi tentando absolui poterit. Unde quo usus scalae in eruenda orbita cuiusdam cometae euadat facilior, quaestionem ita immutare e re erit, ut ex summa radiorum FN+FM & chorda NM quaeratur tempus. Hoc enim cum tempore reapse obseruato congruere debet.

THEOREMA VII.

§. 117. *Si chorda Mm transeat per focum F, tempus quo percurritur arcus MAN, quem subtendit, unice pendet a longitudine chordae, atque perinde est foci F situs siue ab alterutra extremitate M, m distantia.*

DEMONSTRATIO.

Etenim hoc casu angulus c est $= 90°$, unde (§. 81.)

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} . (a+b)^{3:2}$$

Est vero $a+b = \mathrm{Mm}$, quare

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} . \mathrm{Mm}^{3:2}$$

COROLLARIVM I.

§. 118. Quodsi ergo focus F cum initio chordae coincidere ponatur, haec formula itidem exprimit tempus lapsus cometae parabolici in solem (§. 103.)

COROLLARIVM II.

§. 119. Hinc iam viciſſim deducetur formula (§. 83.)

$$mT = \left[\frac{(\mathrm{FN}+\mathrm{FM}+\mathrm{NM})^{3:2}}{2} - \frac{(\mathrm{FN}+\mathrm{FM}-\mathrm{NM})^{3:2}}{2}\right] : 3\sqrt{2}$$

Fig. 13. Labatur enim cometa ex M in N, tempus, quod impendit erit differentia temporum, quibus ex

ex M & N ad centrum solis delaberetur, adeoque (§. 118.)

$$mT = [FM^{3:2} - FN^{3:2}] : 3\sqrt{2}$$

Est vero

$$FM = \frac{FM + FN + MN}{2}$$

$$FN = \frac{FM + FN - MN}{2}$$

Quare substituendo prodibit

$$mT = \left[\frac{(FM + FN + MN)^{3:2}}{2} - \frac{(FM + FN - MN)^{3:2}}{2}\right]$$

$$: 3\sqrt{2}$$

Hanc vero formulam uniuersalem esse inde patet, quod tempus T unice a chorda MN & summa radiorum vectorum pendet.

PROBLEMA XXII.

§. 120. *Sint omnia ut in Lemmate duodecimo* Fig. 6. *(§. 38.), inuenire tempus quo percurritur arcus NQ vel MQ, si data sint latera trianguli NFM.*

SOLVTIO.

Ob chordam NM in G bisectam, & QG axi AF parallelam, recta QG bisecat segmentum NMQ, & recta FG triangulum FNM: Quare mixtilineum NQGF erit pars dimidia sectoris NFMQ. Subtracto itaque triangulo FQG vel idem addendo erit sector

$$NFQ = \tfrac{1}{2} NFMQ - FQG$$

$$MFQ = \tfrac{1}{2} NFMQ + FQG$$

Unde si tempora dicantur t, τ, erit (§. 73.)

$$t = (\tfrac{1}{2}\mathrm{NFMQ} - \mathrm{FQG}) : m\sqrt{2\mathrm{AF}}$$
$$\tau = (\tfrac{1}{2}\mathrm{NFMQ} + \mathrm{FQG}) : m\sqrt{2\mathrm{AF}}$$

siue dicto tempore, quo percurritur arcus NQM=T, erit

$$t = \tfrac{1}{2}T - \mathrm{FQG} : m\sqrt{2\mathrm{AF}}.$$
$$\tau = \tfrac{1}{2}T + \mathrm{FQG} : m\sqrt{2\mathrm{AF}}.$$

Est vero area trianguli

$$\mathrm{FQG} = \tfrac{1}{2}\mathrm{QG}.\mathrm{GI}$$

Sed per naturam parabolae

$$\mathrm{QI} = 2\sqrt{(\mathrm{QF} - \mathrm{AF})\mathrm{AF}}.$$

Unde

$$\frac{\mathrm{FQG}}{\sqrt{\mathrm{AF}}} = \mathrm{QG}\sqrt{(\mathrm{FQ} - \mathrm{AF})}$$

Hinc fit

$$\frac{\mathrm{FQG}}{\sqrt{\mathrm{AF}}} = \sqrt{\mathrm{FQ}}.\mathrm{QG}.\sqrt{\left(1 - \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FQ}}\right)}$$

Sed ob QW, NV axi AF parallelas, erit (§. 4. 38.)

$$\sqrt{\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FQ}}} = \sin \mathrm{MNV} = \mathrm{MV} : \mathrm{NM}$$

adeoque

$$\sqrt{\left(1 - \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FQ}}\right)} = \mathrm{NV} : \mathrm{NM} = (a - b) : k$$

Porro est

$$\mathrm{NM}^2 = 16\,\mathrm{FQ}.\mathrm{QG}$$

siue

$$\mathrm{QG}.\sqrt{\mathrm{FQ}} = \tfrac{1}{4}\mathrm{NM}\sqrt{\mathrm{QG}}$$

Unde

Unde (§. 45.)

$$\frac{FQG}{\sqrt{AF}} = \frac{a-b}{8}\left[\sqrt{\left(\frac{a+b+k}{2}\right)} - \sqrt{\left(\frac{a+b-k}{2}\right)}\right]$$

Dicta iam breuitatis ergo ſumma laterum $a+b=g$ erit

$$6\sqrt{2}.m.t = \left(\frac{g+k}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{3:2} - 3\left(\frac{a-b}{4}\right)$$
$$\left[\left(\frac{g+k}{2}\right)^{1:2} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{1:2}\right]$$

&

$$6\sqrt{2}.m.\tau = \left(\frac{g+k}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{3:2} + 3\left(\frac{a-b}{4}\right).$$
$$\left[\frac{g+k}{2}^{1:2} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{1:2}\right]$$

PROBLEMA XXIII.

§. 121. *Data ſumma radiorum vectorum $NF + FM = a+b = g$, una cum tempore T, quo percurritur arcus NM inuenire longitudinem chordae $NM = k$.* Fig. 6.

SOLVTIO.

Per ſolutionem primam Problematis XV. eſt

$$Tm.3\sqrt{2} = [g+\tfrac{1}{2}\sqrt{(g^2-k^2)}].\sqrt{[g-\sqrt{(g^2-k^2)}]}$$

Unde fit

$$6\sqrt{2}.mT = [2g+\sqrt{(g^2-k^2)}].\sqrt{[g-\sqrt{(g^2-k^2)}]}$$

Hinc porro

$$72m^2T^2 = [5g^2-k^2+4g\sqrt{(g^2-k^2)}].[g-\sqrt{(g^2-k^2)}]$$

atque porro

$$72m^2T^2-g^3-3gk^2 = -(g^2-k^2)^{3:2}$$

Fiat

Fiat iam

$$g^2 - k^2 = v^2$$

$$-72m^2 T^2 + 4g^3 = b$$

atque ſubſtitutione facta erit

$$v^3 + 3gv^2 = b$$

Qua ergo aequatione reſoluta dabitur v, atque proinde & k. Adhibita vero methodo ſupra (§. 88.) citata, aequatio haec abit in alterutram ſeriem ſequentem. Erit nempe

$$v^2 = g^2 - k^2 = \frac{b}{3g} - \frac{b^{3:2}}{(3g)^{5:2}} + \tfrac{3}{2} \cdot \frac{b^2}{(3g)^4}$$

$$- \frac{3.7.\,b^{5:2}}{2.4(3g)^{11:2}} + \frac{3.8.10.\,b^3}{2.4.6.(3g)^7} - \frac{3.9.11.13.\,b^{7:2}}{2.4.6.8.(3g)^{17:2}}$$

$$+ \frac{3.10.12.14.16\ b^4}{2.4.6.8.10(3g)^{10}} - \&c.$$

ſiue

$$v^3 = (g^2 - k^2)^{3:2} = b - 3g.b^{2:3} + \tfrac{2}{3}.3.^2 g^2 b^{1:3}$$

$$- \frac{2.3}{3.6}.3^3.g^3 + \frac{2.5.2.3^4.g^4}{3.6\,9\,b^{1:3}} - \frac{2.7.4.1.3^5.g^5}{3.6.9.12.b^{2:3}} + *$$

$$+ \frac{2.11.8.5.2.1.3^7.g^7}{3.6.9.12.15.18b^{4:3}} - \frac{2.13.10.7.4.1.2.3^8 g^8}{3.6.9.12.15.18.21.b^{5:3}}$$

$$+ \&c.$$

Alterutra harum ſerierum ſemper eſt plus minuſue conuergens, at nunquam utraque ſimul.

COROLLARIVM I.

§. 122. Quoniam

$$v^2 = g^2 - k^2$$
$$g = a + b$$

erit

$$v^2 = a^2 + b^2 - k^2 + 2ab$$

Sed per trigonometriam

$$a^2 + b^2 - k^2 = 2ab \cos 2c$$

Unde

$$v^2 = 2ab(1 + \cos 2c) = 4 \cos c^2 . ab$$

Quare (§. 48.)

$$v = 2\sqrt{ab} . \cos c = 2FE.$$

COROLLARIVM II.

§. 123. Cum ergo sit

$$v = 2FE$$
$$g = (a+b) = 2FG \ (\S. 40.)$$

erit

$$k^2 = g^2 - v^2 = 4(Fg^2 - FE^2)$$

COROLLARIVM III.

§. 124. Hinc porro

$$2.FE^3 + 3.Fg.FE^2 = 8.Fg^3 - 18.m^2.T^2$$

siue

$$2ab\sqrt{ab}.\cos c^3 + 3(a+b)ab \cos c^2 = (a+b)^3 - 18m^2 T^2$$

plane ut supra (§. 80.)

SCHOLION.

§. 125. Alia series, qua directe eruatur k per summam laterum $a+b=g$ deducetur ex ea, qua

qua ſupra inuenimus (§. 85.) ſi debite conuertatur. Eſt vero

$$4mT = k\sqrt{g} - \frac{k^3}{24.g^{3:2}} - \frac{k^5}{128.g^{7:2}} - \frac{3.k^7}{1024g^{11:2}} - \&c.$$

Diuidatur per $g\sqrt{g}$, atque fiat $4mT : g\sqrt{g} = z$, eritque

$$z = \frac{k}{g} - \frac{k^3}{24.g^3} - \frac{1}{128} . \frac{k^5}{g^5} - \frac{3}{1024} . \frac{k^7}{g^7} - \&c.$$

Ponatur iam

$$\frac{k}{g} = z + \alpha z^3 + \beta z^5 + \gamma z^7 + \&c.$$

atque erit

$$\begin{array}{llllll}
\frac{k^3}{24.g^3} = & \frac{1}{24}z^3 + \frac{1}{8}\alpha z^5 & + \frac{1}{8}\alpha^2 z^7 & + & \frac{1}{8}\gamma z^9 + \&c. & \\
 & & + \frac{1}{8}\beta .. & + & \frac{1}{4}\alpha\beta .. & \\
 & & & + & \frac{1}{24}\alpha\alpha .. & \\
\frac{k^5}{128.g^5} = & + \frac{1}{128}z^5 + \frac{5}{128}\alpha z^7 & & + & \frac{5}{64}\alpha^2 . z^9 + \&c. & \\
 & & & + & \frac{5}{128}\beta .. & \\
\frac{3.k^7}{1024.g^7} = & & + \frac{3}{1024}z^7 & + & \frac{21}{1024}\alpha z^9 + \&c. & \\
\frac{143k^9}{98308g^9} = & & & + & \frac{143}{98308}z^9 + \&c. & \\
 & \&c. & & & &
\end{array}$$

Hinc

Hinc erit

$$\alpha = \frac{1}{24}$$

$$\beta = \frac{1}{8}\alpha + \frac{1}{128} = \frac{1}{196} + \frac{1}{128} = \frac{5}{384}$$

$$\gamma = \frac{1}{8}\alpha^2 + \frac{1}{8}\beta + \frac{5}{128}\alpha + \frac{3}{1024} = \frac{59}{9216}$$

&c.

adeoque

$$\frac{k}{g} = z + \frac{1}{24} z^3 + \frac{5}{384} z^5 + \frac{59}{9216} z^7 + \&c.$$

siue substituto valore ipsius $z = 4mT : g\sqrt{g}$

$$k = \frac{4mT}{\sqrt{g}} + \frac{8m^3T^3}{3\, g^{7:2}} + \frac{40.m^5T^5}{3 \cdot g^{13:2}} + \frac{944.m^7T^7}{9 \cdot g^{19:2}} + \&c.$$

Cum sit $m = \frac{1}{n} = \frac{1}{116,2648}$ (§. 73.) patet hanc seriem tunc tantum esse conuergentem, cum tempus T fuerit paucorum dierum.

PROBLEMA XXIV.

§. 126. *Data sagitta QG & tempore, quo percurritur arcus NQM, inuenire summam radiorum FN+FM=g.*

SOLVTIO.

Cum sit (§. 79.)

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} . a+b+\sqrt{ab}.\cos c).\sqrt{(a+b-2\sqrt{ab}.\cos c)}$$

atque

atque

$$\sqrt{ab}.\mathrm{cosc} = FE = Fg - 2QG = \frac{a+b}{2} - 2QG$$

erit

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}\left(\tfrac{1}{2}(a+b) - 2QG\right).\sqrt{4QG}$$

Unde

$$a+b = g = \frac{mT\sqrt{2}}{\sqrt{QG}} + \tfrac{4}{3}QG$$

PROBLEMA XXV.

Fig. 5. §. 127. *Dato semilatere recto & ordinata NK inuenire tempus a peribelio, siue quo cometa percurrit arcum AN.*

SOLVTIO.

Sit semilatus rectum $= 2AF = s$, ordinata $NK = y$, erit area sectoris AFN

$$A = (y^3 + 3s^2y) : 12s$$

Dicto tempore $= T$, erit (§. 73.)

$$T = A : m\sqrt{s}$$

adeoque

$$T = \frac{y^3 + 3s^2y}{12ms^{3:2}}$$

COROLLARIVM I.

§. 128. Hinc erit

$$y^3 + 3s^2y = 12ms^{3:2}T$$

quae aequatio, ponendo breuitatis ergo

$$12ms^{3:2}T = q$$

abit

abit in ſeriem

$$y = \frac{q}{3s^2} - \frac{q^3}{3^4.s} + \frac{3q.^5}{3^7.s^{14}} - \frac{3.8.q^7}{2\,3^{10}.s^{20}} +$$
$$\frac{3.11.10.q^9}{2.3.3^{13}.s^{26}} - \frac{3.14.13.12.q^{11}}{2.\,3.\,4.3^{16}.s^{32}} + \text{\&c.}$$

COROLLARIVM II.

§. 129. Similiter erit per regulam CARDANI

$$\frac{y}{\sqrt{s}} = \sqrt[3]{[6mT + \sqrt{(36m^2T^2+s^3)}]} + \sqrt[3]{[6mT - \sqrt{(36m^2T^2+s^2)}]}$$

COROLLARIVM III.

§. 130. Cum ſit

$$AK = y^2 : 2s$$
$$NF = y^2 : 2s + \tfrac{1}{2}s$$

data ordinata y, facile dabitur abſciſſa AK, & radius vector ſiue diſtantia heliocentrica FN, atque hinc porro angulus NFH, cum ſit

$$\sin NFK = KN : FN$$

PROBLEMA XXVI.

§. 131. *Data diſtantia perihelii AF una cum radio vectore AN, inuenire tempus a perihelio.* Fig. 1.

SOLVTIO.

Cum ſit in genere (§. 79.)

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}(a+b+\sqrt{ab}.\cos c).\sqrt{(a+b-2\sqrt{ab}.\cos c)}$$

erit hoc caſu

$$a = FN$$
$$b = AF$$
$$\sqrt{ab} = FS$$
$$c = AFS$$

unde

$$\sqrt{ab}.\cos c = AF$$

Quare

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} (FN + 2AF).\sqrt{(FN - AF)}$$

COROLLARIVM I.

§. 132. Hinc iterum erit

$$18m^2 T^2 = FN^3 + 3FN^2.AF - 4AF^3$$

ſiue

$$FN^3 + 3AF.FN^2 = 18m^2 T^2 + 4AF^3$$

COROLLARIVM II.

§. 133. Cum per naturam parabolae ſit

$$FN = AF + AK$$

erit ſubſtitutione facta

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} (AK + 3AF)\sqrt{AK}$$

unde

$$AK^3 + 6AK^2.AF + 9AK.AF^2 = 18m^2 T^2$$

PROBLEMA XXVII.

Fig. 1. §. 134. *Data diſtantia perihelii AF atque angulo NFA, inuenire tempus a perihelio.*

SOLV-

SOLVTIO.

Dicatur $AF = f$, $AFS = SFN = c$, atque erit (§. 2.)

$$AS = f.\text{tang}\, c = \tfrac{1}{2}NK = \tfrac{1}{2}y$$

unde

$$y = 2f\,\text{tang}\, c$$

ſiue dicto ſemilatere recto s, erit

$$y = s.\,\text{tang}\, c$$

Eſt vero (§. 127.)

$$T = \frac{y^3 + 3s^2 y}{12 m s^{3:2}}$$

Quare ſubſtituendo

$$T = \frac{s\sqrt{s}}{12m}\,(\text{tang}\, c^3 + 3\,\text{tang}\, c)$$

COROLLARIVM.

§. 135. Hinc erit per regulam CARDANI

$$\text{tang}\, c\sqrt{s} = \sqrt[3]{[6mT + \sqrt{(36m^2T^2 + s^2)}]} + \sqrt[3]{[6mT - \sqrt{(36m^2T^2 + s^2)}]}$$

PROBLEMA XXVIII.

§. 136. *Inuenire diſtantiam peribelii ſiue ſemilatus rectum parabolae in qua cometa diutiſſime intra orbitam dati cuiusdam planetae commoretur.*

SOLVTIO.

Sit F centrum ſolis, AM orbita cometae, A eius perihelium, MP orbita cometae, tempus, Fig. 12.

quo percurritur arcus MA est semimora intra orbitam MP. Quare erit (§. 132.)

$$18m^2T^2 = FM^3 + 3FM^2.AF - 4AF^3$$

adeoque differentiando

$$0 = 36m^2 TdT = 3FM^2.dAF - 12AF^2.dAF$$

unde

$$4AF^2 = FM^2$$
$$FM = 2AF$$

Debet ergo distantia planetae helicentrica una esse semilatus rectum parabolae, quae moram cometae intra orbitam planetae reddat maximam.

PROBLEMA XXIX.

§. 137. *Inuenire tempus morae maximae cometae in parabola incedentis intra datam planetae orbitam.*

SOLVTIO.

Cum sit

$$18m^2T^2 = FM^3 + 3FM^2.AF - 4AF^3$$

atque pro mora maxima

$$\tfrac{1}{2}FM = AF$$

erit substitutione facta

$$18m^2T^2 = FM^3(1 + \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}) = 2FM^3$$

unde

$$T = \tfrac{1}{3}n.FM^{3:2}$$

Quae est semimora maxima, unde mora integra erit $\tfrac{2}{3}n.FM^{3:2}$

COROLLARIVM.

§. 138. Quoniam tempus morae breuissimae est (§. 103. 105.)

$$T = \tfrac{1}{3}n\sqrt{2}.FM^{3:2}$$

patet,

patet, *moram maximam ad minimam esse in ratione* $\sqrt{2}$ *ad* 1.

SCHOLION I.

§. 139. Quodsi pro distantia FM substituantur distantiae planetarum mediae, tempus morae maximae cometae in parabola incedentis erit intra orbitam

♄	dierum	2282,66.
♃	- -	919,28.
♂	- - -	145,80.
♁	- -	77,50.
♀	- - -	47,66.
☿	- -	18,67.

SCHOLION II.

§. 140. Utraque mora cum tempore planetae periodico conferri poterit hoc modo. Vidimus (§. 75.) tempus periodicum esse

$$= \frac{\pi}{m} . FM^{3:2}$$

Sed mora breuissima $= \frac{\sqrt{2}}{3m} . FM^{3:2}$

maxima $= \frac{2}{3m} . FM^{3:2}$

Unde tempus planetae periodicum erit ad moram cometae breuissimam $= 3\pi : \sqrt{2} = 20 : 3$, ad maximam vero $= 3\pi : 2 = 33 : 7$.

PROPRIETATES INSIGNIORES ORBITAE COMETARVM.

SECTIO III.

Perluſtrantur motus cometarum adparentiae, atque varii exponuntur modi orbitam veram ex obſeruationibus determinandi, ſi iſta ſit parabolica.

DEFINITIO III.

§. 141. *Notae characteriſticae orbitae cometarum ſiue differentiae ſpecificae ſunt illa capita, quibus orbita cuiuslibet cometae a cunctis ceteris diſcernitur.*

SCHOLION I.

§. 142. Duo ſunt capita, in quibus ſingulae orbitae congruunt. Primo enim oportet ſit ſectio conica, atque ſecundo haec ita poſita eſt, ut eius focus cum centro ſolis coincidat. Contra ea dantur ſex capita, quibus ſingulae orbitae ab inuicem ſunt diſtinguendae, ſuntque

1°. *Diſtantia perihelii a ſole.*

2°. *Ratio inter hanc diſtantiam & ſemilatus rectum*, ſiue quod eodem redit, *tempus periodicum*, ſi orbita ſit elliptica vel circularis.

3°. *Tem-*

3°. *Tempus, quo cometa fuit in perihelio, vel in dato orbitae suae puncto haesit.*

4°. *Inclinatio orbitae ad planum ecclipticės.*

5°. *Situs lineae nodorum siue longitudo nodi ascendentis heliocentrica.*

6°. *Elongatio axeos orbitae a linea nodorum, siue longitudo perihelii heliocentrica.*

Prima duo capita ipsam sectionis conicae speciem eiusque magnitudinem veram, caput tertium epocham, reliqua tria situm orbitae ratione ecclipticae suppeditant, ut adeo si singula adhibeantur, orbita cometae ab omnibus aliis distinguatur.

SCHOLION II.

§. 143. Ad definienda sex ista capita tres requiruntur obseruationes siue tria loca cometae geocentrica, longitudines puto & latitudines e tellure obseruandae. Constat vero partem orbitae quam cometa percurrit, dum se terricolis spectandum sistit, admodum esse exiguam. Hinc fit, ut caput secundum siue tempus periodicum ex tribus obseruationibus sibi admodum vicinis vix definiri possit. Quodsi vero redeat cometa iam pridem obseruatus, datur tempus periodicum, atque ex hoc curatius definitur longitudo axis maioris ellipseos. (§. 72.)

SCHOLION III.

§. 144. Porro obseruationibus constat, orbitas cometarum, si quidem ellipticae sint, admodum esse oblongas, ut adeo exigua illa pars,

 quam

quam tempore visibilitatis percurrunt, absque notabili errore cum parte orbitae parabolicae confundatur. Etenim cum tempus periodicum plerumque sit plurium saeculorum, aphelium non potest non a sole esse remotissimum. Contra ea perihelia eorum cometarum, qui nobis sunt visibiles, fere semper cadunt intra orbitam telluris, adeoque soli sunt maxime vicina, quo fit ut ratio inter distantiam perihelii a sole & semilatus rectum ab ea fere non differat, quae obtinet, si orbita fuerit parabolica.

THEOREMA VIII.

§.15. §. 145. *Si cometa in parabola incedens obseruetur in utroque nodo N, n, e tellure in E, e haerente, dabitur situs & longitudo lineae nodorum, distantia perihelii a sole & situs axeos parabolae, sed incognita remanet orbitae inclinatio.*

DEMONSTRATIO.

Etenim ob data puncta ecclipticae, quae cometa e tellure traiicere visus est, datur situs rectarum EN, en. Porro ob datum temporis interuallum, quo cometa ex N peruenit in n, dabitur longitudo lineae nodorum Nn (§. 117.) eritque

$$Nn^{3:2} = 3\sqrt{2}.m.T$$

Quare quaestio eo redit, ut per centrum solis F agatur recta cuius pars Nn a rectis EN, en positione datis abscissa sit datae longitudinis. Hac vero ducta dabitur situs axeos & distantia perihelii AF, adeoque tota parabola. Contra ea cum puncta obseruata N, n sint in plano eclipeccliptícae, ex iis solis angulus inclinationis definiri nequit, quare inclinatio remanet indefinita.

COROLLARIVM.

§. 146. Quodsi ergo accedat obseruatio tertia non modo dabitur inclinatio orbitae, verum & cum quadruplex sit problematis solutio, definiri poterit, quaenam reapse obtineat.

SCHOLION.

§. 147. Casus huius theorematis utique rarissimus est. Plerumque enim vel nodorum alteruter nimis est a tellure remotus, vel visibilitati cometae in ipso haerentis obstat solis vicinitas.

THEOREMA IX.

§. 148. *Si cometa e tellure bis obseruetur, atque in alterutra obseruatione versetur in perihelio orbitae parabolicae, dabitur tota orbita eiusque situs.*

DEMONSTRATIO.

Assumta enim distantia geocentrica pro ea obseruatione, quae tempore celebrati perihelii facta est, dabitur distantia heliocentrica adeoque distantia perihelii & situs axeos. Unde hoc ipso dabitur orbita atque elongatio cometae a perihelio tempore obseruationis alterius, siue punctum N. Quodsi ergo parabola circa axin rotetur, punctum N incidere debet in rectam e secundo loco telluris in secundum locum cometae ductam, cuiusque positio data est. Quod si fuerit, distantia geocentrica assumta vera est. Sin minus alia assumenda, donec huic conditioni satisfiat. Quod cum necessario alicubi fieri debeat, consequens est problema esse determinatum, atque duas obseruationes determinandae orbitae cometae sufficere, si iste tempore alterutrius obseruationis extiterit in perihelio.

SCHOLION.

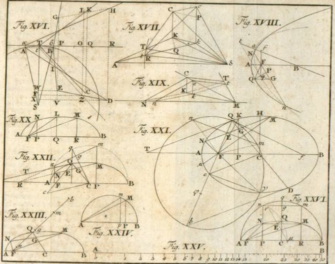
Fig. 6. §. 149. Theorema hoc ad quaelibet duo alia cometae loca N, M extenditur, si detur alteruter angulorum RMF, RNF, sub quibus orbita radios vectores FM, FN secat.

THEOREMA X.

§. 150. *Si in globo caelesti per locum solis & cometae geocentricum ducatur circulus sphaerae maximus, hic simul transibit per locum telluris & cometae heliocentricum.*

DEMONSTRATIO.

Etenim circulus iste refert sectionem sphaerae caelestis a plano factam, quod transit per centra solis, telluris atque cometae. Unde cum rectae, quae iungunt ista centra sint in hoc plano, atque ad fixas usque productae ibidem referant loca telluris & cometae e sole, nec non loca solis & cometae e tellure visa, constat propositum.



Orbit. Comet. Tab. II.

COROLLARIVM.

§. 151. Eandem ob caussam, cum cometa moueatur in plano, quod per centrum solis transit, loca singula cometae heliocentrica erunt in circulo sphaerae maximo.

SCHOLION.

§. 152. Usui esse poterit hoc theorema, si inueniatur formula concinna rationem inter angulos NFQ, QFM & tempora exhibens quibus percurruntur arcus NQ, QM. Etenim hi anguli sunt arcus circuli, qui loca cometae heliocentrica refert, a circulis e locis solis per loca cometae geocentrica ductis intercepti. Fig. 7.

PROBLEMA XXX.

§. 153. *Si dentur quatuor obseruationes cometae exiguo interuallo temporis ab inuicem remotae, orbitae situm & magnitudinem approximando definire, si haec fuerit parabolica.*

SOLVTIO.

Quoniam ob exigua temporum interualla arcus a cometa a prima obseruatione ad quartam percursus instar rectae haberi potest, aequabili celeritate percursa, orbita cometae siue quatuor eius loca obseruata concipiantur in planum eccliptices proiecta, sintque H, I, K, L. Porro rectae e locis telluris in loca cometae ductae sint EH, EI, AK, AL; quae cum referant cometae longitudines geocentricas, positione sunt datae. Unde ergo delabimur ad Fig. 8.

Lem-

Lemma XVIII, (§. 51.) cum ducenda sit recta HL talis, quae a rectis AL, AK, EI, EH positione datis in tres partes LK, KI, IH temporibus proportionales secetur.

Hac recta constructa retineantur puncta extrema H, L, atque in subsidium vocatis latitudinibus cometae geocentricis, erectis e punctis H, L perpendicularibus, definientur duo puncta orbitae cometae a veris haud ita multum abhorrentia. Unde per Lemma V. dabitur tota orbita (§. 26.). Cumque itidem hinc detur tempus per Problema XV. (§. 83.) experiri datur, an cum tempore obseruato congruat, siue plus minusue ab eo differat. Posterius si fuerit, ut vel necessario esse solet, retenta orbita hoc modo constructa quaerantur in ea loca cometae, in quibus iste esse debuisset tempore utriusque obseruationis intermediae, si tempora obseruata in computata
g. 9. mutentur. Quo facto dabitur quadrilaterum EFGH, ab eo quod vera cometae loca efformant longe minus discrepans ac recta primo assumta. Hoc vero in ecclipticam est proiiciendum, atque retentis angulis & ratione laterum quaestio eo reducitur, ut quadrilaterum simile quatuor rectis AE, AG, BF, BH positione datis inscribatur. Quod fiet ope Lemmatis IX. (§. 54.). Retentis iterum duobus punctis extremis EH eodem modo quaeratur situs orbitae, quae a vera longe minus aberrabit. Hac ratione cum ulterius progredi liceat, orbita approximando definietur qualis reipsa est.

SCHO-

SCHOLION.

§. 154. Quod in hoc problemate assumitur, cometam nempe percurrere rectam aequali celeritate, idem alio modo assumere licet. Sint duo cometae loca extrema N, M ducatur Fig. 7. chorda NM, atque haec ponatur a cometa percursa, ita ut dum fuerit in dato quouis loco orbitae intermedio Q, ducta FQ, locus iste transferatur in E. At vero duo hinc enascuntur incommoda. Primo enim punctum E aliam habet longitudinem & latitudinem geocentricam ac locus cometae reapse obseruatus Q. Porro tempora quibus percurruntur arcus MQ, QN partibus chordae abscissis ME, EN haud perfecte sunt proportionalia. Patet tamen ex Lemmate XVII. (§. 49. 50.) rationem inter areas sectorum NFQ, QFM & abscissas NE, EM perparum differre, quoties angulus NFM 20 aut 30 gradus non excedat. Quare posteriori incommodo ita obuiam ire datur, ut primo abscissae NE, EM sumantur esse temporibus proportionales. Quo ipso proxime definietur orbita, atque ratio inter abscissas NE, EM curatius definiri poterit, quo calculus instaurari queat. Priori incommodo variae adferri possunt medelae. Aut enim, quod fecit summus EVLERVS ex distantia inter utramque extremam NF, MF media atque tentando definienda, atque ex temporibus quibus percurruntur arcus MQ, QN proxime determinabitur sagitta QE, ex lapsu corporum in solem. Quodsi tempora ista fere sint aequalia, dabitur sagitta maxima QG = QE per formu-

Fig. 6. lam §. 92. qua ceu proxime vera uti licet. At
Fig. 7. cum puncto E eatenus tantum opus sit, quatenus recta ex eo in centrum telluris ducta in planum eccliptices proiicienda est, exactius voto satisfiet, si in vicem plani eccliptices eligatur aliud planum scopo adcommodandum. Facile vero patet utramque rectam e centro telluris in puncta Q & E ductam atque in planum istud proiectam coincidere debere. Huic vero fini satisfaciet quodlibet planum, quod normaliter transeat per planum in quo eodem tempore versantur sol, cometa & tellus. Quod ut fiat euidentius, unaque exponatur methodus orbitam cometae definiendi, sequens adponemus

PROBLEMA XXXI.

§. 155. *Datis tribus cometae in parabola incedentis locis geocentricis una cum interuallo temporum, inuenire orbitae situm & magnitudinem.*

SOLVTIO.

Fig. 16. Sint E, C, D tria cometae loca, perpendicularium ope in planum eccliptices proiecta. Tellus eodem tempore sit in A, T, B. In locum telluris medium T e sole S agatur recta ST, atque ad hanc normalis TR. Ad hanc ex utroque loco telluris extremo A, B demittantur normales $A\alpha$, $B\beta$, similiterque e locis cometae E, C, D normales EPG, CQK, DRH. Sint porro PG, QK, RH aequales eleuationi cometae in E, C, D supra planum ecclipticae, atque agantur rectae αH, TK, βG.

Hac

Hac ratione planum αRHG spectari poterit ceu ad planum eccliptices αRDS, & in specie ad rectam TS normale, atque referet locorum telluris & cometae α, T, ϵ, G, K, H proiectionem orthographicam. Patetque rectam TK non modo esse proiectionem rectae e loco telluris medio T in locum cometae puncto C normaliter imminentis, verum & lineae e centro solis S in eundem hunc cometae locum ductae, adeoque totius plani, in quo eodem tempore commorantur sol, cometa, tellus.

Quoniam rectae AD, TC, BE sunt longitudines cometae geocentricae, TS longitudo solis vel telluris tempore obseruationis mediae, BS, AS longitudines solis tempore obseruationum extremarum, hinc dabuntur

$$\alpha T = AS . \sin TSA$$
$$\epsilon T = BS . \sin TSB$$

Porro anguli ADR, TCQ, BEP sunt differentiae inter longitudines cometae & longitudinem solis tempore obseruationis mediae, quare sunt dati, eritque

$$\epsilon P = BE . \sin BEP$$
$$TQ = TC . \sin TCQ$$
$$\alpha R = AD . \sin ADR$$

Sint porro latitudines cometae geocentricae in B, T, A $= \lambda, \lambda', \lambda''$, erit

$$PG = BE . \operatorname{tang}\lambda$$
$$QK = TC . \operatorname{tang}\lambda'$$
$$RH = AD . \operatorname{tang}\lambda''$$

Unde iam habetur

$$\operatorname{tang} G\epsilon P = \operatorname{tang}\lambda : \sin BEP$$
$$\operatorname{tang} KTQ = \operatorname{tang}\lambda' : \sin TCQ$$
$$\operatorname{tang} H\alpha R = \operatorname{tang}\lambda'' : \sin ADR$$

Dantur itaque in plano normali assumto

rectae αT, $T\beta$, $\alpha\beta$

anguli $G\beta P$, KTQ, $H\alpha R$

Vocetur ergo

$$\alpha T = g \quad G\beta P = \beta$$
$$\beta T = b \quad KTQ = \tau$$
$$H\alpha R = \alpha$$

Nectantur puncta G, H, eritque recta GH proiectio chordae, cuius arcum percurrit cometa interuallo temporis utriusque obseruationis extremae. Cumque TK sit proiectio radii vectoris medii, erit KL proiectio sagittae, & tempora proxime sunt in ratione

$$GL : LH = PO : OR = p : q.$$

Quodsi peracto calculo eundem instaurare operae pretium sit, haec ratio facile curatius definietur.

Fiat iam

$$TO = x$$
$$PO = y$$

erit

$$OR = yq : p$$

Porro

$$OL = x \, . \, \mathrm{tang}\, \tau$$
$$\alpha R = g + x + qy : p$$
$$\beta P = x - b - y$$
$$HR = (g + x + qy : p) \, \mathrm{tang}\, \alpha$$
$$PG = (x - b - y) \, \mathrm{tang}\, \beta$$

Sed

$$(OL - GP) : (RH - OL) = p : q$$

Quare

Quare

$$qx\,\text{tang}\,\tau+q(x-b-y)\,\text{tang}\,\beta=p\left(g+x+\frac{qy}{p}\right).$$
$$\text{tang}\,\alpha-px\,\text{tang}\,\tau.$$

siue debita reductione facta

$$y=\frac{(q+p)\,\text{tang}\,\tau-q\,\text{tang}\,\beta-p\,\text{tang}\,\alpha}{q(\text{tang}\,\alpha-\text{tang}\,\beta)}.x+$$
$$\frac{qb\,\text{tang}\,\beta-pq\,\text{tang}\,\alpha}{q(\text{tang}\,\alpha-\text{tang}\,\beta)}$$

Haec formula in numeris est computanda, unde faciemus breuissime

$$y=\gamma x+\delta$$

Datur ergo $y=\text{PO}$ per $x=\text{TO}$. Unde porro erit

$$\beta\text{P}=x-\gamma x-\delta-b$$
$$\alpha\text{R}=x+\frac{q\gamma x}{p}+\frac{q\delta}{p}+g$$

Quare

$$\text{PE}=\text{TW}=(x-\gamma x-\delta-b)\cot\text{BEP}+\beta\text{B}$$
$$\text{RD}=\text{TX}=\left(x+\frac{q\gamma x}{p}+\frac{q\delta}{p}+g\right)\cot\text{ADR}+\text{A}\alpha$$

Cum vero & hae formulae computandae sint in numeris, ita faciemus

$$\frac{\text{TW}+\text{TX}}{2}=\text{TF}=\varkappa x+\mu$$
$$\text{TX}-\text{TW}=\text{WX}=\nu x+\varrho=\text{EV}$$
$$\text{FS}=\text{TS}-\text{TF}=\varphi x+\omega$$

Porro eſt

$$WE = TP = x - \gamma x - \delta$$

$$XD = TR = x + \frac{q\gamma x}{p} + \frac{q\delta}{p}$$

Hinc

$$VD = \frac{q+p}{p}(\gamma x + \delta) = \varepsilon x + \eta \text{ breuitatis ergo}$$

Sed

$$VE = \nu x + \varrho$$

Unde

$$ED^2 = (\varepsilon^2 + \nu^2)x^2 + (2\varepsilon\eta + 2\nu\varrho)x + \eta^2 + \varrho^2$$

Porro

$$GP = (x - \gamma x - \delta - b)\,\mathrm{tang}\,\beta$$

$$RH = \left(x + \frac{\gamma q x}{p} + \frac{\delta q}{p} + g\right)\mathrm{tang}\,\alpha$$

Unde differentia altitudinum cometae extremarum RH—GP efferri poterit per

$$rx + s$$

Dabitur ergo hinc quadratum longitudinis chordae, quam cometa in orbita ſua percurrit

$$ED^2 + (RH - GP)^2 = Ax^2 + Bx + C$$

Cumque ſit

$$WE = x - \gamma x - \delta$$

$$XD = x + \frac{q\gamma x}{p} + \frac{q\delta}{p}$$

erit

$$\frac{WE + XD}{2} = FZ = Dx + E$$

Sed

$$FS = \varphi x + \omega$$

Quare

Quare dimidium summae distantiarum cometae extremarum a sole erit

$$=\surd[(\varphi x+\omega)^2+(Dx+E)^2+LO^2]$$

Ex hac distantia & longitudine chordae & tempore quo ab inuicem distant obseruationes extremae dabitur x per problema XV. (§. 83.)

Quodsi chorda haud fuerit magna erit proxime

$$Ax^2+Bx+C=\frac{8m^2T^2}{\surd[(\varphi x+\omega)^2+(Dx+E)^2+LO^2]}$$

Quae est aequatio sexti gradus.

Inuenta iam $x=TO$, facile dabitur $y=PO$, atque proinde OR, & cunctae quantitates, quae ad definiendum situm chordae ED in eclipticam proiectae adeoque & chordae verae quicquam faciunt. Cumque radii vectores extremi sint

$$b=\surd(SW^2+WE^2+PG^2)$$
$$a=\surd(SX^2+XD^2+RH^2)$$

tota orbita determinabitur per Lemmata VIII, X, XI. huiusque Corollarium I, &c.

Aliter, constructione.

Quoniam prolixiori hoc calculo orbita cometae tantummodo proxime determinatur, nisi eum instaurare volueris, constructione rem omnem breuius atque commodius absoluere licet.

Sit ergo S centrum solis, T locus telluris tempore obseruationis mediae, B, A eiusdem loca tempore obseruationis primae & tertiae. Ex datis cometae longitudinibus geocentricis

 ducen-

ducentur rectae TC, AD, BE. Porro ductâ TR ad TS normali, demittantur $A\alpha$, $B\epsilon$ ut in solutione prima, similiterque vel calculo vel constructione definientur anguli $G\epsilon P$, KTQ, $H\alpha R$, eritque ut antea TK proiectio rectarum e centro solis & telluris in locum cometae medium ductarum.

Assumatur iam in recta TK punctum quodlibet L, quod referat punctum intersectionis chordae a cometa percursae & radii vectoris medii in ipsa cometae orbita. Quodsi hoc punctum L forte fortuna rite fuerit assumtum, vera quoque determinabitur cometae orbita, sin minus innotescet aberratio, atque aliud tentando erit eligendum. Ipsa vero constructio pro singulis est eadem, quare ne figura nimium quantum oneretur rectis, situm puncti L assumimus verum, eundemque ceu incertum tractabimus.

Per punctum L agatur recta GLH talis, ut partes GL, LH sint in ratione temporum, atque e punctis G, H demittantur GPE, HRD ad rectam αR normales. Quo facto triangula ϵGP, αHR in planum eccliptices erunt translata, eruntque ϵEP, αDR, atque ducta ED erit chorda a cometa percursa in planum eccliptices proiecta.

E puncto assumto L agatur LZ ad αR normalis, eritque

$$GL : LH = EZ : ZD$$

atque puncta S, Z, C erunt in una eademque recta, quae radium vectorem medium refert in eccliptcam proiectum, si punctum L rite

fuerit

fuerit aſſumtum. At cum hoc incertum ſit, nectantur loca telluris A, B, atque e puncto interſectionis t agatur recta tZ per punctum Z. Haec recta talis erit, ut quicunque fuerit ſitus chordae a cometae percurſae atque in ecclipticam proiectae, recta tZ eam ſecet in eadem ratione in qua ſecta eſt recta EZD, adeoque proxime in ratione temporum.

Aſſumtis itaque in recta tZ punctis quibusuis Z facile ducentur totidem rectae EZD a rectis AD, BE, tZ in data ratione temporum ſectae.

Eiuſmodi recta cum ſit ED, ope latitudinum geocentricarum facile e punctis E, D erigentur normales, quae erunt = GP, HR, atque harum ſummitates longitudine chordae a cometa percurſae inter ſe diſtare debent, ſimulque ſummitatum iſtarum a centro ſolis S diſtantia referet radios vectores extremos. His vero diſtantiis inuentis ope formularum Problematis XV. (§. 83.) vel ope ſcalae celeritatum parabolicarum (§. 112. ſeqq.) definietur tempus, quo cometa percurrere debuiſſet chordam ope puncti aſſumti Z erutam. Quodſi ergo hoc tempus cum tempore inter primam & tertiam obſeruationem elapſum congruat, punctum Z rite fuit aſſumtum, ſin minus, notetur differentia, atque in recta tZ ſucceſſiue aſſumantur alia puncta vicem ipſius Z ſubitura. Unde totidem dabuntur temporis obſeruati & conſtructione eruti differentiae. Quo facto diſtantiae tZ ſpectentur ut abſciſſae, atque differentiae temporum ipſis inſtar ordinatarum adplicentur, quo duci poſſit curua, quae rectam tZ in eo loco secabit, cui verum punctum Z respondet. Per se vero patet puncta Z ita esse assumenda ut differentiae temporum erutae sint & positiuae & negatiuae.

Inuento iam vero puncto Z, constructionem instaurando ducetur vera chorda proiecta ED, qua data facillime absoluetur constructio totius orbitae.

Hac vero constructa facile examini subiicietur ratio inter partes rectae GL, LH, an temporibus sint proportionales, vel an notabilius differant. Quodsi differant, vera ratio curatius definietur, atque constructio vel calculus instaurari poterit, quo exactius eruatur orbitae magnitudo & situs.

SCHOLION I.

§. 156. Quod constructionem hanc reddit prolixiorem est orbitae cometae ad eccliptricam inclinatio. Hoc enim fit, ut altitudines cometae supra puncta E, D duplici modo in planum eccliptricae sint transferendae, quo determinari possit chordae a cometa percursae longitudo, atque a sole S distantia siue radii vectores extremi. Ceterum prolixitas ista compendio, quod in computanda temporum differentia suppeditat scala celeritatum parabolicarum, magna ex parte compensatur.

SCHOLION II.

§. 157. Quoniam in solutione posteriori punctum Z tentando est quaerendum, eius quaedam criteria in medium proferre haud in-

utile

utile erit. Huc facit Theorema III. (§ 76. seqq.) quo ex distantia cometae heliocentrica definitur ipsius celeritas, atque cum celeritate planetae ad eandem distantiam in circulo gyrantis confertur. Quoniam arcus vel chordae a prima obseruatione ad tertiam percursae plerumque sunt exiguae, chorda a cometa percursa cum ea quam eodem tempore percurrit tellus, quaeque est AB quodammodo conferri poterit. Ponamus v. gr. cometam esse in T, atque facile patet, chordam ab eo percursam debere esse proxime $= AB . \sqrt{2}$. (§. cit.) quod esse nequit, quia cadere debet intra rectas AD, BE. Quodsi punctum Z assumatur intra rectam tI, cometae a sole distantia minuitur, adeoque augetur longitudo chordae, quam percurrere debuisset. Cum vero rectae AD, BI in I coincidant, spatium longe fit angustius, eo ergo minus cometa intra tI erit locandus, atque facile patet punctum Z debere esse puncto I longe remotius. Assumto puncto Z situs chordae proiectae ED oculo solo iudice plerumque proxime colligitur, eiusque longitudo cum AB & distantia a sole confertur. Similiter rectae AD, ϬE, tZ in I ita sunt positae, ut quae media esse deberet extrema sit, quo ipso situs puncti K ibidem necessario euadit impossibilis.

PROBLEMA XXXII.

§. 158. *Si orbita cometae parabolica iam proxime fuerit definita, eandem curatius definire.*

 SOLV-

SOLVTIO.

Quoniam proxime in numeris dantur diſtantiae cometae geocentricae curtatae AD, TC, BE, ponemus ſingulas eſſe debito minores, atque differentiam qua augendae ſunt, ut in veras abeant, ita eſſe exiguam, ut dignitates earum prima ſuperiores abiici tuto poſſint. Hac ratione inſtar differentialium eas tractare licet, computo in numeris abſoluendo debite adiiciendarum. Ipſe vero computus ita erit inſtituendus, ut ex aſſumtis diſtantiis eruantur tempora intra primam & ſecundam, ſecundam & tertiam, tertiam denique & primam obſeruationem elapſa. Quo facto tempora computata cum obſeruatis conferri poterunt, atque hac ratione deueniemus ad tres aequationes, quibus eruentur differentiae diſtantiarum aſſumtarum & verarum AD, TC, BE, aſſumtis addendae vel ab iis ſubtrahendae, prout poſitiuae vel negatiuae fuerint.

Computum vero, quo eruentur iſtae aequationes, exemplo illuſtrabimus ſequentem in modum.

Fig. 17. Sit S ſol, T, t loca telluris, punctis K, k immineant loca cometae C, c, rectae TK, tk erunt eiusdem longitudines & anguli CTK, ctk erunt latitudines geocentricae. Producantur KT, kt in A, atque agatur AS, & CP ipſi Kk parallela. Fiat iam

AT $= \alpha$	AK $= K$	CTK $= C$	TS $= T$
At $= \beta$	Ak $= k$	ctk $= \gamma$	tS $= \tau$
TAt $= \omega$	TK $= K'$	CTS $= e$	
	tk $= k'$	ctS $= f$	

atque

atque erit

$$Cc^2 = K^2 + k^2 - 2Kk\cos\omega + K'^2 \mathrm{tang}\, C^2 + k'^2 \mathrm{tang}\, c^2$$
$$- 2k'K'.tc.tC$$

Porro eſt

$$CS^2 = T^2 + K'^2 \sec C^2 - 2TK'.\sec C.\cos e$$
$$cS^2 = \tau^2 + k' \sec c^2 - 2\tau k' \sec c.\cos f$$

Hae formulae computandae ſunt in numeris. At vero cum ipſis adiicienda ſint differentialia, notabimus, quantitates K, K', k, k' ſpectandas eſſe ceu variabiles, atque facile patet, ob

$$K = K' + \alpha$$
$$k = k' + \beta$$

differentialia dK, dK', nec non dk, dk' eſſe eadem, quare differentiando erit

$$d(Cc) = (K + K'tC^2 - k\cos\omega - k'tc.tC)dK : Cc +$$
$$(k - K\cos\omega + k'tc^2 - K'tc.tC)dk : Cc$$
$$d(CS) = (K' \sec C^2 - T.\sec C.\cos c)dK : CS$$
$$d(cS) = (k' \sec c - \tau \sec c.\cos f)dk : cS$$

His iterum in numeris computatis, contractiores euadunt, eritque

$$d(Cc) = mdK + ndk$$
$$d(CS) = pdK$$
$$d(cS) = q.dk.$$

At iam per CS, cS, cC dabitur tempus per formulam (§. 83.) eritque

$$3\sqrt{2}.m7 = \left(\frac{CS + cS + cC}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{CS + cS - cC}{2}\right)^{3:2}$$

Sed cum diſtantiae geocentricae curtatae TK, tk aſſumtae a veris differant, tempus 7, quod dat haec formula ab obſeruato differet. Quare, re, ut τ ſit tempus obſeruatum, formulae adiiciendum erit differentiale, eritque

$$12m\tau = \left(\frac{CS+cS+cC}{2}\right)^{3:2} - \left(\frac{CS+cS-cC}{2}\right)^{3:2}$$

$$+\tfrac{3}{2}(CS+cS+cC)^{1:2}.(dCS+d.cS+dcC)$$

$$-\tfrac{3}{2}(CS+cS-cC)^{1:2}.(dCS+dcS-dcC)$$

Dantur vero CS, cS, cC in numeris, pariterque & earum differentialia per dK, dk. Quare hac ratione dabitur aequatio inter dK, dk.

Aſſumto porro tertio loco cometae, combinando dabuntur inſuper duae aequationes inter dk, $d\mathfrak{k}$, & dK, $d\mathfrak{k}$. quibus ergo differentiae hae definientur. Quodſi peracto calculo deprehendantur notabiles, calculus eodem mo-
Fig. 16. do inſtaurabitur, aſſumendo diſtantias AD, TC, BE prima hac operatione correctas.

PROBLEMA XXXIV.

§. 159. *Datis duobus cometae locis geocentricis ſibi admodum vicinis, atque diſtantia cometae geocentrica tempore alterutrius obſeruationis, inuenire ſitum orbitae eiusque magnitudinem.*

SOLVTIO.

Fig. 17. Sit S centrum ſolis, T, t loca telluris, C, c loca cometae, K, k eadem in eclipticam proiecta, erunt TK, tk eius longitudines, CTK, ctk latitudines obſeruatae. Detur iam diſtantia TC, adeoque & TK = TC. coſCTK. E punctis K, T in rectam tk demittantur normales KQ,

KQ, TR atque ducantur AS, CP ut in problemate praecedente. Porro fiat

$$TK = x \quad CTK = \lambda$$
$$Qk = y \quad ctk = \Lambda$$
$$tR = \alpha \quad TAt = \omega$$
$$AT = p \quad CTS = b$$
$$TS = r$$

Quoniam latitudines geocentricae λ, Λ parum inter se differunt, ponatur

$$\text{tang}\Lambda = \text{tang}\lambda + q$$

eruntque y, α, q, ω, quantitates admodum exiguae, ob assumtam locorum T, t vel C, c vicinitatem.

Hinc iam erit

$$AK = x + p$$
$$KQ = (x+p)\,\text{sin}\,\omega$$
$$Kk^2 = y^2 + (x+p)^2\text{sin}\,\omega^2$$

Porro habebitur

$$AR = p\,\text{cosin}\,\omega$$
$$AQ = (x+p)\,\text{cos}\,\omega$$
$$Ak = (x+p)\,\text{cos}\,\omega + y$$
$$Rk = (x+p)\,\text{cos}\,\omega - p\,\text{cos}\,\omega + y = x\,\text{cos}\,\omega + y$$
$$tk = x\,\text{cos}\,\omega + y - \alpha$$

adeoque

$$ck = [x\,\text{cos}\,\omega + y - \alpha].(\text{tang}\lambda + q)$$
$$CK = x\,\text{tang}\,\lambda$$

Quare

$$cP = x(\text{cos}\,\omega - 1)\,\text{tang}\,\lambda + (y-\alpha).\,\text{tang}\,\lambda + x\,\text{cos}\,\omega.q + (y-\alpha)q$$

siue

$$cP = y(\text{tang}\,\lambda + q) - \alpha(\text{tang}\,\lambda + q) - x(1 - \text{cos}\,\omega)\,\text{tang}\,\lambda + xq$$

Pro

Pro qua formula ſubſtituemus breuitatis ergo

$$cP = Ay + Bx - C$$

Eſt vero

$$Cc^2 = cP^2 + Kk^2$$

Quare erit

$$\begin{aligned} Cc^2 = {} & y^2 + (x+p)^2 \sin\omega^2 \\ & + A^2y^2 + 2ABy x + C^2 \\ & + 2ACy - 2BCx. \\ & + B^2x^2 \end{aligned} \quad = Dy^2 + Ey + F$$

Porro erit

$$CS^2 = r^2 + x^2 \sec\lambda^2 - 2rx \sec\lambda . \cos b$$

At iam per ſolutionem ſecundam Problematis XV. (§. 83.) eſt

$$3\sqrt{2}.mT = \frac{k[a+b+\frac{1}{2}\sqrt{[(a+b)^2 - k^2]}}{\sqrt{[a+b+\sqrt{((a+b)^2 - k^2)}]}}$$

ſiue cum chorda k ſit admodum exigua, atque proxime $a = b$, erit abſque notabili errore

$$3\sqrt{2}.mT = \frac{3k\sqrt{a}}{2}$$

$$k = \sqrt{8}.mT : \sqrt{a}$$

ſiue

$$cC = \frac{\sqrt{8}.mT}{\sqrt{CS}}$$

adeoque ſubſtitutis valoribus

$$Dy^2 + Ey + F = \frac{8m^2T^2}{\sqrt{(r^2 + x^2 \sec\lambda^2 - 2rx \sec\lambda . \cos b)}}$$

Qua ergo aequatione, data diſtantia x, dabitur y, adeoque & ſitus chordae proiectae Kk. Hac vero data facile dabitur tota orbita.

SCHO-

SCHOLION.

§. 160. Cum aequatio, ad quam tandem deuenimus, quadratica sit, dabuntur duo ipsius y valores, adeoque tertia obseruatio erit adhibenda, quo definiri queat, quali reapse sit utendum. Porro assumsimus distantiam x esse datam. Quodsi vero indeterminata sit, successiue alia atque alia assumi poterit, usque dum valor ipsius y euadat imaginarius. Dantur ergo limites quos distantia x excedere nequit, atque inueniuntur, si in ultima aequatione ponatur $y=o$. Quo facto aequatio abit in aliam, in qua distantia x ad sextam dimensionem assurgit.

PROBLEMA XXXV.

§. 161. *Dato situ orbitae cometae parabolicae, inuenire situm & proprietates in planum eccliptices proiectae.*

SOLVTIO.

Sit F centrum solis atque proinde focus orbitae, Nn linea nodorum, NQD orbita ipsa ad planum eccliptices sub angulo quocunque inclinata, A perihelium, AFB axis. Assumto puncto quolibet Q, ducatur QP ad Nn normalis, atque fiat QP ad qP in ratione sinus totius ad cosinum anguli eleuationis, punctum q erit in orbita proiecta, ipsique punctum Q normaliter imminet. Fig. 18.

Quodsi

Quodsi iam Q sit culmen orbitae, directio utriusque parabolae in Q, q erit lineae nodorum parallela. Bifariam secetur Nn in G, ducantur FQ, Fq, GQ, Gq, erit GQ axi AB, & Gq axi orbitae proiectae aB parallela, atque $FQ = QG$, $Fq = qG$, $FP = PG$.

Porro erit FQ ad Fq ut sinus totus ad cosinum latitudinis heliocentricae ipsius culminis Q.

Similiter ob $NG = Gn$, & Gq axi aB parallelam, recta qF transit per focum orbitae proiectae f, atque est

$$Nn^2 = 16 . FQ^2 = 16 . Fq . fq$$

unde

$$Fq : FQ = FQ : fq.$$

Cumque utraque parabola in Q & q sit lineae nodorum Nn parallela, anguli, quos faciunt cum rectis FQ, Fq erunt angulis QGF, qGF aequales, adeoque

$$AF = FQ . \sin QGF^2 = PQ^2 : FQ$$
$$af = fq . \sin qGF^2 = fq . Pq^2 : Fq^2$$

Dicto angulo inclinationis $= \eta$ erit

$$Pq = PQ . \cos\eta$$

adeoque

$$af = fq . PQ^2 . \cos\eta^2 : Fq^2$$

unde porro

$$AF : af = Fq^2 : FQ . \cos\eta^2 . fq$$

Est vero

$$fq = FQ^2 : Fq$$

Quare

$$AF : af = Fq^3 : FQ^3 . \cos\eta^2$$

Cum-

Cumque Fq:FQ sit cosinus latitudinis heliocentricae puncti Q dicta hac latitudine $=\lambda$, erit

$$AF:af = \cos\lambda^3 : \cos\eta^2$$

$$\surd af = \frac{\surd AF \cdot \cos\eta}{\cos\lambda^{3:2}}$$

Quodsi iam a radio vectore describatur area quaedam, quam dicemus $=A$, atque tempus elapsum sit $=T$, erit

$$T = \frac{A}{m\surd 2AF}$$

At vero eaedem haec area in orbita proiecta minor est in ratione $1:\cos\eta$, quare erit $=A.\cos\eta.=D$. Cumque sit

$$T = \frac{A}{m\surd 2AF} = \frac{A.\cos\eta}{m\surd(2af).\cos\lambda^{3:2}}$$

erit

$$T = \frac{D}{m.\cos\lambda^{3:2}.\surd(2af)}$$

Ut adeo tempus detur per aream in eccliptícam proiectam D, per semilatus rectum orbitae proiectae 2af, & cosinum latitudinis heliocentricae culminis Q.

PROBLEMA XXXVI.

§. 162. *Data orbita proiecta aqn, inuenire orbitam veram NQn, eiusque inclinationem & lineam nodorum Nn.*

SOLV-

SOLVTIO.

Sit orbita proiecta aNqn, eius axis af, focus f, centrum solis F. Quod cum sit focus orbitae verae, agatur recta fFq per utrumque focum, atque ducta tangente tq, ipsique parallela NFn per centrum solis F, haec erit linea nodorum. Porro ad hanc demittatur normalis QqP, fiatque $FQ = \frac{1}{4}Nn$, punctum Q erit culmen orbitae verae, & qP:QP erit cosinus inclinationis. Denique fiat $QG = QF$, vel $NG = Gn$, ducatur QG ipsique parallela AF, haec erit axis orbitae verae. Cumque sit $AF = PQ^2 : FQ$ (§. 161.) hinc dabitur distantia verticis vel perihelii A a centro solis F.

THEOREMA XI.

§. 163. *Orbita proiecta datur per meras longitudines geocentricas cometae, at quinque obseruationes ad eam definiendam requiruntur.*

DEMONSTRATIO.

Determinatur orbita proiecta, si detur vertex a, & focus f, siue situs utriusque huius puncti ratione rectae e dato loco telluris in centrum solis ductae. Pendet itaque iste situs a quatuor incognitis hunc in finem assumendis. His vero assumtis dabitur (§. 162.) linea nodorum nN, distantia af, & utraque recta FQ, Fq, atque proinde $Fq : FQ = \cos\lambda$ (§. 161.) Quoniam itaque quatuor istae incognitae assumtae determinandae sunt per longitudines cometae geocentricas & spatia in orbita proiecta percursa,

cursa, dabuntur haec spatia, quae cum temporibus elapsis comparari poterunt (§. 161.) [& quoduis spatium ad aequationem deducit. Quoniam vero opus est quatuor aequationibus, opus quoque erit quatuor spatiis proiectis, adeoque quinque longitudinibus geocentricis obseruatis.

THEOREMA XII.

§. 164. *Si cometa tempore cuiusdam obseruationis versetur in polo eccliptices, additis insuper tribus longitudinibus geocentricis, orbita proiecta determinabitur.*

DEMONSTRATIO.

Etenim si locus cometae in polo eccliptices in eam proiiciatur, cadet in locum, in quo eodem tempore versatur tellus. Qualiscunque ergo sit orbitae proiectae situs & magnitudo, oportet per hunc telluris locum transeat; adeoque datur definitum quoddam istius orbitae punctum. Hoc vero fit, ut ex quatuor incognitis assumendis altera euadat superflua, quo ipso minuetur numerus spatiorum, adeoque & longitudinum obseruatarum.

SCHOLION I.

§. 165. Per se patet, si cometa in polo eccliptices fuerit stationarius, orbitam proiectam definitum iri, duabus his obseruationibus tertiam adiiciendo. Ceterum calculus, quo definienda est orbita, mirum in modum est complexus, ut adeo utique praestet latitudines geocentricas una cum longitudinibus ad definiendam orbitam veram adhibere.

SCHOLION II.

§. 166. Quae hactenus de orbita cometae in planum eccliptices proiecta diximus, uniuersaliora sunt, quippe proiectio in planum eccliptcae mere est arbitraria, atque eligi potest planum quodlibet, cuius situs ratione eccliptcae sit datus. Eiusmodi vero planum eccliptices vicem sustinet, atque in istud simul proiicienda sunt loca telluris, & rectae ex his in loca cometae ductae, uti iam exemplo rem illustratam dedimus in Problemate XXXI. (§. 155.) Plura dantur huiuscemodi plana, quae ad compendium calculi quicquam facere possunt. Sic v. gr. planum quod transit per centra solis telluris & cometae idem nobis sistit compendium, quod sisteret eccliptica, si cometae versaretur in alterutro nodorum. Similiter planum, quod ad rectam e centro telluris in centrum cometae ductam normale est, casum nobis suppeditat casui Theorematis XII. (§. 164.) analogum.

THEOREMA XIII.

§. 167. *Si cometa ita sit stationarius, ut quater in eodem caeli puncto baerere videatur, ipsius orbita absque ullo computo construetur.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Cum enim ſit ſtationarius, rectae e locis telluris in loca cometae ductae erunt parallelae. Concipiatur itaque planum per centrum ſolis tranſiens atque ad rectas iſtas normale, in hoc plano dabuntur quatuor puncta orbitae in iſtud proiiciendae. Haec vero cum ſit parabolica, patet eam conſtrui poſſe. Unde per Problema XXXVI. (§. 162.) dabitur ſitus orbitae verae.

SCHOLION.

§. 168. Vix equidem unquam cometa quater in eodem caeli puncto haerere obſeruabitur, ſi temporum interualla fuerint notabiliora. At ſi breuiora fuerint, exactiſſimis obſeruationibus opus erit, ſiquidem hac ratione orbitam veram eruere volueris. Dari tamen poterit, quae a vera parum aberrat, ſi motus cometae adparens fuerit lentiſſimus.

THEOREMA XIV.

§. 169. *Si cometa bis obſeruetur in eodem caeli puncto, rectae, quae aguntur per utrumque locum telluris, & per utrumque locum cometae in linea nodorum coincidunt.*

DEMONSTRATIO.

Sint loca telluris T, t, cometae C, c. Ex his in planum demittantur normales CK, ck, & CN, cn normales ad lineam nodorum Nn. Porro agantur rectae NK, nk, TK, tk, CcM, Fig. 19.

 TtM.

TtM. Quoniam cometa est stationarius, rectae TC, tc itemque rectae TK, tk sunt parallelae, & insuper anguli latitudinum CTK, ctk aequales. Unde erit

CK:ck=CT:ct=KT:kt=CM:cM=TM:tM =KM:kM

Quare rectae Tt, Cc, Kk in M coincidunt. Porro est

CK:ck=CN:cn=KN:kn=CM:cM=KM:kM =NM:nM

quare recta Nn in idem punctum M incidit, in quod incidunt rectae Cc, Kk, Tt. Est vero Nn linea nodorum, unde constat propositum.

THEOREMA XV.

§. 170. *Si cometa incedat in plano eccliptices, eiusque orbita sit parabolica, tres obseruationes siue longitudines geocentricae sufficiunt ad eam determinandam; contra ea quarta insuper opus est, si incedat in ellipsi nisi detur huius axis maior.*

DEMONSTRATIO.

Tres longitudines determinandae orbitae parabolicae sufficere, patet ex problemate XXXI. (§. 158.) ipsaque orbitae constructio longe est facilior. Contra ea cum tres istae longitudines pro determinanda parabola necessario requirantur, in ellipsi vero accedat ratio inter distantiam periheliam & semilatus rectum, haec indeterminata maneret, nisi vel accederet obseruatio quarta, vel data esset longitudo axeos maioris, siue quod idem est, tempus periodicum.

SCHO-

SCHOLION.

§. 171. Eadem ratione ſi orbita fuerit ad ecclipticam inclinata ſed parabolica, tres equidem obſeruationes requiruntur, at non complete. Carere enim poſſumus vel tempore quo fit altera obſeruatio, vel longitudine vel latitudine geocentrica. At ſi nilominus ſingulae tres obſeruationes complete adhibeantur, plura data adſunt quam opus eſt, unde ad compendium calculi adhiberi poterunt ſuperfluae, ſaltem ad eius correctionem.

PROPRIETATES INSIGNIORES ORBITAE COMETARVM.

SECTIO IV.

Demonſtrantur proprietates concinniores orbitae Cometarum, ſimulque & Planetarum ellipticae.

LEMMA XXIII. THEOREMA.

g.20. §. 172. *Si in ellipſi ſumantur tres ordinatae aequidiſtantes* PN, QL, RM, *atque e foco* F *ducantur radii vectores* FN, FL, FM, *erit* $2FL = FN + FM$.

DEMONSTRATIO.

Etenim per naturam ellipſeos eſt

$$FN = AF + \left(\frac{AB - 2AF}{AB}\right) . AP$$

$$FM = AF + \left(\frac{AB - 2AF}{AB}\right) . AR$$

adeoque

$$FN + FM = 2AF + \left(\frac{AB - 2AF}{AB}\right) . (AP + AR)$$

Eſt

Est vero per hypothesin

$$(AP+AR)=2AQ$$

adeoque

$$FN+FM=2\left[AF+\left(\frac{AB-2AF}{AB}\right).AQ\right]=2FL.$$

LEMMA XXIV. THEOREMA.

§. 173. *Si in ellipsi AQBD sumatur punctum quoduis Q, atque ducatur diameter QCD, tangens QT, ipsique parallela quaelibet NGM, nectantur focus F & punctum assumtum Q recta QFb, atque ordinata NM orthogonaliter transferatur in nEm, ut sit nE = mE, puncta n, m itidem erunt in ellipsi Qnbm, cuius focus pariter est F, & axis maior Qb, axi maiori AB ellipseos prioris aequalis.* Fig. 21.

DEMONSTRATIO.

Cum QCD sit diameter ellipseos, atque ordinata NM tangenti QT parallela, per notissimam sectionum conicarum proprietatem, aequatio inter abscissam QG & ordinatam NM prorsus analoga est illi, quae exprimit relationem inter abscissas in axe maiore sumtas & adplicatas ad axin normales. Quoniam porro per constructionem est NM = nm, & QG ∽ QE, atque NM ad FQ normalis, aequatio inter QE & nm itidem erit ad ellipsin, cuius axis maior est Qb. Ducta porro Cc ipsi QT parallela, atque erecta cγ ad axin Qb normali = cC, erit cγ semiaxis minor. Dicatur iam

$AB = \alpha$
$AF = f$
$FQ = z$

Ducta recta Qf in alterum focum f, angulus TQF per naturam ellipsium erit $= 90^\circ - \frac{1}{2}FQf$, eritque

$$FQ + Qf = a$$
$$Qf = a - z$$
$$Ff = a - 2f$$

hinc per formulas trigonometricas

$$\operatorname{cosin}\tfrac{1}{2}FQf = \sin TQF = \sin QcC = \frac{\sqrt{(af-ff)}}{\sqrt{(az-zz)}}$$

$$\operatorname{cos} TQF = \operatorname{cos} QcC = \frac{\sqrt{[az-zz-(af-ff)]}}{\sqrt{(az-zz)}}$$

$$\operatorname{cos} QFC = \frac{az-(2af-ff)}{z(a-2f)}$$

$$\sin QFC = \frac{2\sqrt{(af-ff)}}{z(a-2f)} \cdot \sqrt{[az-zz-(af-ff)]}$$

Unde ob $QTC = QFC - TQF = FCc$, erit

$$\sin FCc = \frac{(a-2z)\sqrt{(af-ff)}}{(a-2f)\sqrt{(az-zz)}}$$

Eſt vero

$$Fc : \sin FCc = FC : \sin QcC$$

adeoque ſubſtitutis valoribus repertis debitaque reductione facta

$$FC = \tfrac{1}{2}a - z$$
$$Fc + z = Qc = \tfrac{1}{2}a$$
$$Qb = a = AB.$$

Eſt porro ſemidiater coniugata $Cc = c\gamma = \sqrt{(az-zz)}$, adeoque cum ſit

$$F\gamma^2 = Fc^2 + c\gamma^2$$

erit

$$F\gamma^2 = (\tfrac{1}{2}a - z)^2 + (az-zz) = \tfrac{1}{4}a^2$$
$$F\gamma = \tfrac{1}{2}a = Qc$$

Unde patet F eſſe focum utriuſque ellipſeos.

COROL-

COROLLARIVM I.

§. 174. Similiter erit ſemidiameter

$$QC = \sqrt{[\tfrac{1}{4}(a-2z)^2 + af - ff]} = \sqrt{(Fc^2 + CH^2)}$$

Hinc porro

$$\text{ſin}\, QCc = \frac{a\sqrt{(af-ff)}}{\sqrt{(az-zz)}\,.\,\sqrt{[\tfrac{1}{4}(a-z)^2 + af - ff]}}$$

COROLLARIVM II.

§. 175. Cum ſit per naturam ellipſeos

$$GM^2 = \frac{QG.GD.Cc^2}{QC^2}$$

atque

$$\frac{QG.GD}{QC^2} = \frac{QE.Eb}{Qc^2}$$

erit

$$GM^2 = Em^2 = \frac{QE.Eb.Cc^2}{Qc^2}$$

COROLLARIVM III.

§. 176. Dicta itaque $FE = \xi$, erit

$$Em^2 = \frac{(az - a\xi - (z-\xi)^2).(az-zz)}{\tfrac{1}{4}a^2}$$

$$Fm = \frac{2(az-zz)}{a} - \frac{(a-2z)\xi}{a}$$

LEMMA XXV. THEOREMA.

§. 177. *Sint omnia ut in lemmate praecedente, ductis radiis vectoribus Fn, Fm, FN, FM, ſumma priorum Fn + Fm erit aequalis ſummae poſteriorum.*

DEMONSTRATIO.

Per punctum G ducatur adplicata PGK, atque e foco F recta FK. Quoniam NG = GM, erit per Lemm. XXIII. (§. 172.) 2FK = FN + FM. Cumque sit Fn = Fm, demonstrandum est, esse Fn = FK.

Quoniam TQ, EG, cC sunt parallelae, erit

$$cQ : QC = cE : GC$$

$$CG = \frac{QC \cdot cE}{cQ}$$

siue substitutis valoribus

$$CG = \frac{(\xi + \frac{1}{2}a - z)\sqrt{[\frac{1}{4}(a-2z)^2 + af - ff]}}{\frac{1}{2}a}$$

Porro per trigonometriam est

$$\cos QCF = \frac{QC^2 + CF^2 - QF^2}{2QC \cdot CF}$$

$$CP = CG \cdot \cos QCF$$

unde valoribus substitutis, erit

$$\cos QCF = \frac{\frac{1}{2}a(a-2z}{(a-2f)\sqrt{[\frac{1}{4}(a-2z)^2 + af - ff]}}$$

$$CP = \frac{(a-2z) \cdot (2\xi + a - 2z)}{2(a-2f)}$$

Hinc

$$PF = FC - CP = \frac{(a-2f)^2 - (a-2z)^2 - 2(a-2z)\xi}{2(a-2f)}$$

Est vero per naturam ellipseos

$$FK = \frac{2(af-ff)}{a} + \frac{a-2f}{a} \cdot FP$$

adeo-

adeoque fubftitutione debitaque reductione facta

$$FK = \frac{2(az - zz)}{a} - \frac{(a - 2z)\xi}{a}$$

Eundem vero valorem habuimus pro radio Fm (§. 176.) erit itaque

$$FK = Fm$$
$$2FK = 2Fm = Fn + Fm = FN + FM.$$

LEMMA XXVI. THEOREMA.

§. 178. *Sint omnia ut in utroque Lemmate praecedente, areae fectorum NQMF, nQmF erunt in ratione fubduplicata femilaterum rectorum ellipfium AB, Qb.*

DEMONSTRATIO.

Etenim fi ordinatae NM ad diametrum QD effent normales, area fegmenti NMQ maior foret in ratione reciproca finus inclinationis QGN. Unde cum in nm translatae ad axin Qb fint normales, fegmentum nQm utique in hac ratione maius effe debet. At vero cum abfciffae QE maiores fint abfciffis QG, fegmentum nmQ in hac quoque ratione maius eft; Ut adeo fit

$$nmQ = \frac{NMQ \cdot QE}{\text{fin}\, QEG \cdot QG}$$

Eft vero per trigonometriam

$$\frac{QE}{QG \cdot \text{fin}\, QEG} = \frac{1}{\text{fin}\, QEG} = \frac{1}{\text{fin}\, TQF}$$

adeo-

adeoque ſegmentum

$$nmQ = \frac{NMQ}{\sin TQF}$$

Eſt vero (§. 173.)

$$\sin TQF = \frac{\sqrt{(af-ff)}}{\sqrt{(az-zz)}}$$

Quare

$$nmQ = \frac{NMQ \cdot \sqrt{(az-zz)}}{\sqrt{(af-ff)}}$$

$$nmQ : NMQ = \sqrt{(az-zz)} : \sqrt{(af-ff)}$$

Porro cum triangula nFm, NFM habeant baſes nm, NM aequales, eorum areae erunt ut perpendicula e foco ſiue vertice communi F in eas demiſſa adeoque ut ſinus totus ad ſinum anguli NEF = TQF. Unde ſimiliter erit

$$nFm : NFM = \sqrt{(az-zz)} : \sqrt{(af-ff)}$$

Quare & toti ſectores

$$nQmF : NQMF = \sqrt{(az-zz)} : \sqrt{(af-ff)}$$

Sunt vero ſemilatera recta ellipſium

$$AHB = \frac{2(af-ff)}{a} = s$$

$$Q\gamma b = \frac{2(az-zz)}{a} = S$$

adeoque ſectores

$$nQmF : NQMF = \sqrt{\frac{aS}{2}} : \sqrt{\frac{as}{2}} = \sqrt{S} : \sqrt{s}$$

Conſtat ergo propoſitum.

COROL-

COROLLARIUM.

§. 179. Erit itaque

$$\frac{nQmF}{\sqrt{S}} = \frac{NQMF}{\sqrt{s}}$$

LEMMA XXVII. THEOREMA.

§. 180. *Axi maiori ellipseos AB insistat semicirculus AnmB, sumta chorda quacunque NM eaque in G bisecta, e centro C agatur recta CGQ, e puncto Q recta Qc per focum F, denique recta Cc chordae NM vel tangenti TQ parallela. Porro per puncta N, Q, M ducantur nN, qQ, mM ad axin AB normales, nectantur n, m, q, C rectis mn, qC, dico, arcum nm esse in q bisectum, atque sagittam qg=QE.* Fig. 22.

DEMONSTRATIO.

Etenim per naturam ellipseos ordinatae Pm, PM sunt in ratione axeos maioris ad minorem, quare chordae mn, MN productae in R cum axe maiori coincident, unde porro erit ng=gm, cum sit NG=GM. Hinc porro

$$CQ : QG = Cq : qg$$

Sed ob parallelas NM, cC erit

$$CQ : QG = Qc : QE$$

adeoque

$$Cq : qg = Qc : QE$$

Est vero (§. 173.)

$$cq = AC = Qc$$

Quare &

$$qg = QE$$

COROL-

COROLLARIVM.

§. 181. Cum Qc sit semiaxis maior alterius ellipseos Qb (Fig. 21.) atque semiaxi maiori AC aequalis, patet (Fig. 22.) sagittam QE similiter esse sinum versum arcus circularis arcui nq aequalis. Unde non modo chordae ellipticae nm, NM (Fig. 21.) verum & chordae arcuum circularium, ad quos referuntur aequales sunt.

SCHOLION.

Fig. 22. §. 182. Quod ut clarius explicetur, ponamus ellipsin ANMB esse proiectionem orthographicam circuli AnmB, obliquius ad eam inclinati, ita ut axis AB sit linea intersectionis siue linea nodorum, & PM : Pm cosinus inclinationis. Quo posito chorda NM erit proiectio chordae circularis nm, similiterque (Fig. 21.) chorda elliptica nEm erit proiectio chordae circuli, cuius diameter & linea intersectionis est axis maior Qb, & cosinus inclinationis $= c\gamma : Qc$. At per Corollarium praesentis Lemmatis non modo chordae circulares aequales sunt, verum & ellipticae, quae sunt illarum proiectio.

THEOREMA XV.

Fig. 21. §. 183. *Sint omnia ut in Lemmate vigesimo quarto* (§. 173.) *utraque ellipsis Qmb, AQB poterit esse orbita cometae, atque utraque eodem tempore percurritur.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Etenim F est focus utrique communis, unde per legem tertiam (§. 68.) erit centrum solis, quod necessario focus esse debet sectionis conicae, quam cometa percurrit. Quoniam porro vi Lemmatis citati uterque axis maior AB, Qb est aequalis, tempus periodicum quoque idem sit oportet (§. 71.)

THEOREMA XVI.

§. 184. *Iisdem positis, arcus nQm, NQM eodem tempore percurruntur.*

DEMONSTRATIO.

Per legem quartam (§. 69.) tempora sunt ut areae, quas verrit radius vector per radicem quadratam semilaterum rectorum diuisae, adeoque (§. 178.) tempus quo percurritur arcus NM erit ad tempus, quo percurritur nQm, ut (NQMF: $\sqrt{s}$) ad (nQmF: $\sqrt{S}$) Sed est (§. 179.)

$$\frac{NQMF}{\sqrt{s}} = \frac{nQmF}{\sqrt{S}}$$

adeoque & tempora aequalia sint necesse est.

PROBLEMA XXXVII.

§. 185. *Si cometa in orbita elliptica percurrat arcum quemlibet NQM, inuenire infinitas alias ellipses, in quibus eodem tempore percurrisset arcus, quos subtendant chordae ipsi NM aequales, & summa radiorum vectorum extremorum summae extremorum FN+FM aequalis fuisset.*

SOLV-

SOLVTIO.

Bisecta chorda NM in G, e centro C agatur recta CQG. atque quaelibet ellipsis datae ANMB isochrona siue aeque periodica voto satisfaciet, si ita ponatur, ut transeat per punctum Q, & focus cum foco F ellipseos datae coincidat.

Aliter.

Fig. 22. Spectetur ellipsis AQB ut proiectio orthographica circuli AqB, atque chorda NM erit proiectio chordae nm. Arcus nm in circulo AqB transferatur ad lubitum, atque mutata inclinatione quaeratur chorda proiecta datae NM aequalis. Quo facto dabuntur duo puncta ellipseos construendae, atque insuper uterque vertex A, B. Ea itaque constructa, ita erit ponenda ut focus cum foco F coincidat.

SCHOLION.

§. 186. Ponamus breuitatis ergo nm esse ipsam chordam translatam, demittantur nN, mP ad axin normales, & chorda mn producatur in R, ubi axin decussat. Fiat ut chorda mn ad mR, ita chorda ellipseos datae ad quartam proportionalem. Haec ponatur ex R in M, eruntque N, M duo illa puncta quaesita ellipseos ANMB, & arcus NM voto satisfaciet.

DEFINITIO IV.

§. 187. *Lapsus ellipticus cometae in solem est eiusdem in ellipsi incessus, cuius axis minor vel semi-latus*

Tabula lapsus parabolici cometarum in solem.

Tempus d. h.	Distant. a centro solis	Tempus d. h.	Distant. a centro solis	Tempus d. h.	Distant. a centro solis
0, 0	0,00000	3, 3	0,23516	8,12	0,45822
0, 3	0,02750	3, 6	0,24139	8,18	0,46712
0, 6	0,04366	3, 9	0,24754	9, 0	0,47601
0, 9	0,05721	3,12	0,25360	9, 6	0,48479
0,12	00,6930	3,15	0,25961	9,12	0,49348
0,15	0,08042	3,18	0,26055	9,18	0,50211
0,18	0,09082	3,21	0,27142	10, 0	0,51065
0,21	0,10064	4, 0	0,27722	10,12	0,52753
1, 0	0,11002	4, 6	0,28866	11, 0	0,54415
1, 3	0,11900	4,12	0,29987	11,12	0,56052
1, 6	0,12766	4,18	0,31088	12, 0	0,57665
1, 9	0,13604	5, 0	0,32169	12,12	0,59256
1,12	0,14416	5, 6	0,33233	13 -	0,60826
1,15	0,15206	5,12	0,34279	14 -	0,63906
1,18	0,15976	5,18	0,35311	15 -	0,66914
1,21	0,16728	6, 0	0,36327	16 -	0,69856
2, 0	0,17464	6, 6	0,37326	17 -	0,72737
2, 3	0,18184	6,12	0,38318	18 -	0,75563
2, 6	0,18891	6,18	0,39294	19 -	0,78336
2, 9	0,19584	7, 0	0,40258	20 -	0,81061
2,12	0,20265	7, 6	0,41211	21 -	0,83741
2,15	0,20935	7,12	0,42153	22 -	0,86379
2,18	0,21595	7,18	0,43085	23 -	0,88977
2,21	0,22244	8, 0	0,44006	24 -	0,91538
3, 0	0,22884	8, 6	0,44919	25 -	0,94063
3, 3	0,23516	8,12	0,45822	26 -	0,96555

Tabula lapſus cometarum parabolici in ſolem.

Tempus dies	Diſtant. a centro ſolis	Tempus dies	Diſtant. a centro ſolis	Tempus dies	Diſtant. a centro ſolis
26	0,96555	51	1,51300	76	1,97394
27	0,99015	52	1,53272	77	1,99122
28	1,01442	53	1,55230	78	2,00843
29	1,03846	54	1,57176	79	2,02555
30	1,06220	55	1,59111	80	2,04261
31	1,08567	56	1,61034	81	2,05960
32	1,10890	57	1,62945	82	2,07651
33	1,13188	58	1,64845	83	2,09336
34	1,15463	59	1,66735	84	2,11014
35	1,17717	60	1,68614	85	2,12685
36	1,19948	61	1,70482	86	2,14350
37	1,22159	62	1,72340	87	2,16009
38	1,24351	63	1,74188	88	2,17661
39	1,26523	64	1,76026	89	2,19307
40	1,28676	65	1,77855	90	2,20946
41	1,30812	66	1,79675	91	2,22580
42	1,32931	67	1,81485	92	2,24208
43	1,35032	68	1,83287	93	2,25829
44	1,37118	69	1,85080	94	2,27445
45	1,39188	70	1,86863	95	2,29056
46	1,41243	71	1,88639	96	2,30660
47	1,43282	72	1,90406	97	2,32260
48	1,45307	73	1,92165	98	2,33853
49	1,47318	74	1,93916	99	2,35441
50	1,49315	75	1,95659	100	2,37024
51	1,51300	76	1,97394	- -	- - -

latus rectum $=0$, *siue cuius vertex cum foco in centro solis coincidit.*

COROLLARIVM I.

§. 188. Quoniam axis maior ellipseos est finitus, lapsus elliptici datur initium, atque cometa hac ratione in solem delabens, a quiete inchoat, totumque axin maiorem emetitur.

COROLLARIVM II.

§. 189. Quoniam porro tempus periodicum cometae in ellipsi incedentis unice pendet a longitudine axeos maioris (§. 71.) patet, hoc dato, una dari tempus, quo cometa a quiete inchoans in solem delabitur.

PROBLEMA XXXVIII.

§. 190. *Data distantia cometae vel corporis quiescentis a sole inuenire tempus, quo in solem delabitur.*

SOLVTIO.

Sit distantia ista $=D$, erit haec longitudo axeos maioris ellipseos, cuius tempus periodicum duplo maius est tempore quaesito. Unde cum tempus periodicum sit (§. 71.)

$$=\frac{\pi}{m}\cdot(\tfrac{1}{2}D)^{3:2}$$

erit tempus lapsus elliptici in solem

$$t=\frac{\pi}{m}\cdot D^{3:2}:4\sqrt{2}$$

COROLLARIVM.

§. 191. Quoniam tempus lapſus parabolici eſt (§. 103.)

$$= D^{3:2} : 3m\sqrt{2}$$

erit tempus parabolicum ad ellipticum ut 4 ad 3π ſiue proxime $= 14 : 33 = 73 : 172$.

SCHOLION.

§. 192. Si pro D ſucceſſiue ſubſtituantur diſtantiae planetarum mediae, erit tempus lapſus elliptici in ſolem

♄	dierum	1902,60.
♃	- -	764,38.
♂	- - -	121,42.
♁	- -	64,57.
♀	- - -	39,70.
☿	- -	15,55.

PROBLEMA XXXIX.

§. 193. *Inuenire celeritatem cometae in ellipſi incedentis.*

SOLVTIO.

Fig. 12. Sit AM arcus ellipticus, A vertex, AF eius diſtantia a foco vel centro ſolis $= f$, axis maior ſit α, diſtantia FM$= z$, arcus MN infinite paruus, MP arcus circularis ſoli concentricus. Tempus quo percurritur MN ſit $= T$, quo vero percurritur MP$= t$, erit ſemilatus rectum ellip-

ellipseos $= 2(af-ff):a$, adeoque vi legis quartae (§. 69.)

$$T = \frac{MFN.\sqrt{a}}{m\sqrt{(2af-2ff)}}$$

$$t = \frac{MFP}{m\sqrt{z}}$$

Dicantur celeritates per $MN = C$, per $MP = c$, erit

$$C = MN:T$$
$$c = MP:t$$

adeoque

$$C:c = \frac{m.MN.\sqrt{2(af-ff)}}{MFN\sqrt{a}} : \frac{MP.m\sqrt{z}}{MFP}$$

siue

$$C:c = MN\sqrt{2(af-ff)}:(MP.\sqrt{za})$$

Est vero

$$\frac{MP}{MN} = \text{fin} MNP = \frac{\sqrt{(af-ff)}}{\sqrt{(az-zz)}} \text{ (§. 173.)}$$

Quare substitutione facta

$$C:c = \sqrt{2(az-zz)}:\sqrt{za}$$

Est vero (§. 75.) celeritas circularis

$$c = 2m:\sqrt{z}$$

adeoque

$$C = \frac{2m\sqrt{2(az-zz)}}{z\sqrt{a}}$$

Quod est spatium iuxta directionem tangentialem uno die naturali percurrendum.

COROLLARIUM.

§. 194. Cum formulam erutam nonnisi axis maior & distantia FM ingrediatur, patet celeritatem a situ foci in axe esse independentem.

THEOREMA XVI.

§. 195. *Si tempora periodica duorum pluriumue cometarum in ellipsibus incidentium sint aequalia, celeritas singulorum ad eandem a sole distantiam est eadem.*

DEMONSTRATIO.

Etenim si tempora periodica sint aequalia, axes maiores quoque sunt aequales (§. 71.) Unde cum in genere celeritas elliptica sit

$$C = \frac{2\sqrt{2}.m.\sqrt{(az-zz)}}{z\sqrt{a}}$$

erit axis maior a pro singulis idem. Cumque ex hypothesi & distantia z ponatur eadem, patet celeritatem quoque eandem esse.

THEOREMA XVII.

Fig. 23. §. 196. *Si cometa in ellipsi incedens percurrat arcum quemlibet NM, ducta chorda NM eaque bisecta in G, e centro C agatur semidiameter CGQ, atque e foco F recta FB axi maiori AB aequalis. Facta porro $Fg = \frac{1}{2}(FN+FM)$ & $Gn = gm = GN$, dico, si cometa e puncto b a quiete incboans labatur in solem, tempus quo emetitur partem abscissam mn esse aequale tempori, quo percurritur arcus NM.*

DEMONSTRATIO.

Recta Fb spectari poterit ceu ellipsis, cuius focus cum vertice in F coincidit, atque ob Fb

$Fb = AB$ tempus quo percurritur idem eſt ac tempus periodicum ellipſeos AQB (§. 71.). Erit porro $Fn + Fm$ ſumma radiorum vectorum $= FN + FM$, & nm chorda percurſa $= NM$, quare vi Problematis XXXVII. (§. 185.) utraque chorda eodem tempore percurritur.

COROLLARIVM.

§. 157. Tempus itaque, quo percurritur arcus ellipticus quicunque per lapſum cometae ellipticum in ſolem definiri poterit.

DEFINITIO V.

§. 198. *Scala celeritatum ellipticarum eſt recta ita diuiſa, ut ad datam quamuis a ſole diſtantiam celeritatem cometae in ellipſi incedentis exhibeat.*

COROLLARIVM.

§. 199. Cum celeritas elliptica pendeat ab axe maiori (§. 194.) conſequens eſt, ſcalam hanc eandem manere, quoties axis maior retineatur idem, hoc vero mutato ſcalam quoque mutatum iri.

THEOREMA XVIII.

§. 200. *Si F denotet centrum ſolis, in quod cometa a quiete incohoans ex A delabatur, atque dato cuiuis puncto M adſcribatur tempus, quo vel ex A peruenit in M, vel etiam ex M in F, recta AF hac ratione diuiſa erit ſcala celeritatum pro eltipſibus, quarum axis maior eſt $= AF$.* Fig. 13.

DEMONSTRATIO.

Datur enim tempusculum, quo percurritur spatiolum quodlibet Mm. Hoc vero per illud diuisum celeritatem in M exhibet. Cum vero quilibet axis maior aliam requirat celeritatum scalam (§. 199.) atque recta AF referat ellipsin cuius vertex & focus est F, axis maior $=$ AF (§. 197.) consequens est scalam his tantum ellipsibus inseruire, quarum axis maior est $=$ AF.

THEOREMA XIX.

§. 201. *Sit A centrum solis, cometa a quiete inchoans ex B labatur in A, diametro AB describatur semicirculus, assumta abscissa qualibet AP, normaliter ducatur ordinata PM, atque porro AM, dico, tempus lapsus integri per BA esse ad tempus lapsus per BP, ut area semicirculi AMB ad aream segmenti AMB.*

DEMONSTRATIO.

Etenim recta AB refert ellipsin omni latitudine carentem, unde spatia, quae verrit radius vector, quibusque tempora sunt aequalia per notissimum Astronomiae theorema commodius & vel necessario per spatia semicirculi axi maiori AB insistentis exhibentur. Est vero focus in A, unde recta AM radii vectoris vicem sustinet, & tempora erunt ut areae, quas verrit. Quare tempus lapsus integri erit ad tempus lapsus per BP, ut area semicirculi ad aream sectoris MAB.

Aliter.

Sit $AB = a$, $AP = z$, $Pp = -dz$, tempusculum, quo labendo percurritur Pp sit $= d\tau$, erit celeritas in $P = dz : d\tau$. Vidimus vero, hanc esse (§. 193.)

$$= \frac{2\sqrt{2}.m.\sqrt{(az-zz)}}{z\sqrt{a}}$$

Quare erit

$$-\frac{dz}{d\tau} = \frac{2\sqrt{2}.m.\sqrt{(az-zz)}}{z\sqrt{a}}$$

unde

$$-\frac{2\sqrt{2}.md\tau}{\sqrt{a}} = \frac{zdz}{\sqrt{(az-zz)}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}.m}{\sqrt{a}}.\tau = \int\frac{zdz}{\sqrt{(az-zz)}}$$

Est vero $\frac{1}{4}azdz : \sqrt{(az-zz)} =$ spatiolo mAM, unde erit $\frac{1}{2}\tau.m.\sqrt{2a} = MAB$

$$\tau = \frac{2MAB}{m\sqrt{(2a)}} = \frac{2n.MAB}{\sqrt{2a}}$$

SCHOLION I.

§. 202. Haec formula exhibet tempus in diebus naturalibus, atque eatenus pendet a definita longitudine axeos maioris AB. Quodsi vero in genere tempus peridiocum ellipseos diuidatur in 100 partes aequales, atque axis maior AB in partes 10000, computabitur tabella lapsuum ellipticorum, qualis est ea, quam ad calcem huius opusculi adiecimus, ipsius usus erit uniuersalior. Eadem quoque vi theo-

 rema-

rematis XVIII. (§. 200.) usui erit in construendis *scalis celeritatum ellipticarum*, qualem sistit
Fig.25. Fig. 25. Numeri adscripti sunt tempora, quibus cometa lapsu elliptico a dato quouis loco in solem A defertur, si lapsus in B initium sumat, totumque tempus in 50 partes aequales diuidatur.

SCHOLION II.

Fig.23. §. 203. Quodsi recta FB = AB (§. 196.) hac ratione diuidatur, differentia temporum punctis n, m adscriptorum erit tempus, quo percurritur pars nm adeoque & arcus NM. Usus enim scalae ellipticae idem est ac parabolicae, quem in superioribus fusius explicauimus. Simulac enim datus sit axis maior, dabitur scala celeritatum, & chorda arcus cuiuscunque percursi una cum summa radiorum extremorum FN + FM determinando tempori sufficiunt.

LEMMA XXV. PROBLEMA XL.

Fig.21. §. 204. *Data longitudine axis maioris & situ foci F nec non situ punctorum N, M, construere ellipsin.*

SOLVTIO.

Uterque radius vector FM, FN ab axe maiori subtrahatur, atque differentiae vel residua per naturam ellipseos erunt distantiae foci alterius f ab utroque puncto M, N. Cum vero haec puncta sint positione data, situs foci f absque difficultate determinabitur. Quo facto recta Ff in C bifariam fecetur, atque femilongitudo axis maioris ponetur ex C in A & B, eritque AB fitus & longitudo axeos maioris. Hoc vero dato conftructio ellipfeos facillime abfoluetur.

SCHOLION.

§. 205. Vel me tacente patet, fitum foci alterius f duplicem effe, quare aliunde conftare debet, quinam fit eligendus.

THEOREMA XX.

§. 206. *Si cometa, cuius tempus periodicum notum fit, e tellure obferuetur in utroque nodo, dabitur fitus & longitudo lineae nodorum, & fitus axeos maioris, totaque orbita, fed indefinita remanet huius inclinatio.*

DEMONSTRATIO.

Sit NAn pars ellipfeos, F focus vel centrum folis, eE orbita telluris fimulque eius loca tempore utriufque obferuationis. Rectae en, EN fint longitudines cometae geocentricae obferuatae, adeoque pofitione datae, erit NFn linea nodorum. Quoniam datur tempus periodicum datur quoque longitudo axeos maioris, unde conftruetur fcala celeritatum. In hac a centro folis numeretur tempus a prima obferuatione ad alteram praeterlapfum, atque capiatur diftantia, haec erit longitudo lineae nodorum Nn, quae cum neceffario tranfeat per F, atque cadat intra rectas NE, ne pofitionedatas, hac ratione duci poterit. Datur ergo fitus utriufque puncti N, n & foci F, quare constructio orbitae absoluetur per Lemma praecedens (§. 204.) Cum vero puncta n, N sint in plano eccliptices, orbitae inclinato his solis datis definiri nequit.

SCHOLION.

§. 207. Probe vero notandum, octuplicem esse huius casus solutionem. Primo enim recta Nn quadruplici modo intra rectas NE, ne cadere potest, ita ut per F transeat. Porro quilibet rectae Nn situs duplicem iterum admittit situm orbitae. (§. 205.) unde prodit solutio octuplex. At vero haud difficulter ad duplicem reuocatur. Etenim recta Nn etsi quadruplici modo construi possit, attamen duobus tantum casibus ipsa transit per F, quod esse debet, quia centrum solis necessario est intra utrumque nodum N, n. Ceteris vero duobus casibus F cadit extra nodos N, n, unde vel necessario excluduntur. Porro duplex orbitae situs (§. 205.) hic nullam facessit difficultatem, quippe, tertia obseruatione in subsidium vocata, una cum angulo inclinationis verus orbitae situs determinatur.

THEOREMA XXI.

§. 208. *Si notum sit tempus periodicum cometae in ellipsi incedentis, atque insuper dentur tria ipsius loca geocentrica una cum interuallo temporis, quo factae sunt obseruationes, tota orbita eiusque situs definietur.*

DEMON-

DEMONSTRATIO.

Etenim dato tempore periodico datur axis maior adeoque & ſcala celeritatum (§. 71. 200. ſeqq.) Huius vero uſus cum plane idem ſit ac ſcalae celeritatum parabolicarum, conſtructio orbitae eodem modo abſoluetur, quo in ſolutione ſecunda Problematis XXXI. (§. 155.) orbitam parabolicam conſtruendam eſſe docuimus. Definietur nempe ſitus verus duorum locorum cometae, unde tertia obſeruatione adhibita, tota orbita conſtruetur per Lemma XXV. (§. 204.)

SCHOLION.

§. 209. Tempus periodicum cometae, quod in hoc theoremate ceu datum aſſumitur, utique abeſſe poſſe non me fugit, quippe tria loca cometae geocentrica ſufficiunt. Ne itaque abſque ulla ratione vel neceſſitate datorum vel requiſitorum numerum auxiſſe videar, haec notare conueniet. Primo conſtat eam eſſe orbitarum cometarum indolem eumque ſitum, ut arcus ille, quem tempore viſibilitatis percurrunt totius ellipſeos pars ſit admodum exigua. Unde ex ſex illis capitibus, quae ſimul ſumta ſunt orbitae veluti notae characteriſticae (§. 141. 142.) longitudo axeos maioris ex obſeruationibus ſibi tantopere vicinis tuto colligi nequit, cum vel minimus error in obſeruationibus vix euitandus differentiam notabilem pariat. Huc quoque referas *aberrationem luminis*, quae obſeruationes plus minuſue incertas reddere valet, cuiuſque effectus, niſi iam

iam proxime nota ſit cometae orbita, definiri nequit. Quodſi vero orbita iam proxime ſit definita, accidet quandoque, ut ex ceteris notis characteriſticis cometa cognoſcatur eſſe idem, qui iam olim obſeruatus eſt, unde tempus periodicum colligi poterit, praeſertim ſi iam pluries fuerit obſeruatus. Dato vero tempore periodico, determinatio orbitae utique maxime facilitatur, quippe datur ſcala celeritum, vel ſi calculo rem curatius abſoluere conducat, computari poterit tabella lapſus elliptici. Denique dato tempore periodico, eadem hic notanda veniunt, quae circa parabolam notauimus (§. 170. 171.)

PROBLEMA XLI.

3. §. 210. *Data longitudine axis maioris AB, ſumma radiorum vectorum FN+FM & chorda NM, inuenire tempus, quo percurritur arcus NQM.*

SOLVTIO.

Sint omnia ut in theoremate XVII. (§. 196.) cometa ex b in F decidens eodem tempore percurrit partem abſciſſam mn, quo percurritur arcus NQM, atque eſt

$$Fm = \frac{FN+FM+NM}{2}$$

$$Fn = \frac{FN+FM-NM}{2}$$

Pona.

Ponatur

$$Fb = AB = a$$
$$Fm = z$$
$$Fn = \zeta$$

tempora, quibus percurruntur Fm, Fn ſint t, τ, differentia $t - \tau = T$ ſit tempus quaeſitum, erit (§. 201.)

$$\frac{2\sqrt{2}.m.t}{\sqrt{a}} = \int \frac{z\,dz}{\sqrt{(az - zz)}}$$

$$\frac{2\sqrt{2}.m.\tau}{\sqrt{a}} = \int \frac{\zeta\,d\zeta}{\sqrt{(a\zeta - \zeta\zeta)}}$$

Quibus formulis in ſeriem reſolutis debiteque integratis, erit

$$2\sqrt{2}.mt = \frac{2}{3} z^{3:2} + \frac{1.2}{2.5.a}.z^{5:2} + \frac{1.3.2.z^{7:2}}{2.4.7.a^2}$$
$$+ \frac{1.3.5.2.z^{9:2}}{2.4.6.9.a^3} + \&c.$$

$$2\sqrt{2}.m\tau = \frac{2}{3} \zeta^{3:2} + \frac{1.2.\zeta^{5:2}}{2.5.a} + \frac{1.3.2.\zeta^{7:2}}{2.4.7.a^2}.$$
$$+ \frac{1.3.5.2.\zeta^{9:2}}{2.4.6.9a^3} +, \&c.$$

adeoque

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} (z^{3:2} - \zeta^{3:2}) + \frac{n}{10.a\sqrt{2}} (z^{5:2} - \zeta^{5:2})$$
$$+ \frac{3.n}{56.a^2.\sqrt{2}} (z^{7:} - \zeta^{7:2}) + \frac{5.n}{144.a^3\sqrt{2}} (z^{9:2} - \zeta^{9:2})$$
$$+ \&c.$$

COROL-

COROLLARIVM I.

§. 211. Si axis maior ſit infinitus, ellipſis abit in parabolam, atque erit breuiſſime

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}\left(z^{3:2} - \zeta^{3:2}\right)$$

prorſus ut in ſolutione tertia problematis XV. (§. 83.)

COROLLARIVM II.

§. 212. Patet itaque, quid tempori ex hypotheſi parabolae computato addendum ſit, quo habeatur tempus, quo cometa arcum NQM ellipticum percurrit. Primus enim ſeriei erutae terminus ab axe maiore ellipſeos non pendet, unde ſi ſolus retineatur, parabolae inſeruit

COROLLARIVM III.

§. 213. Similiter ſi FB ſit hyperbolae axis tranſuerſus, tempus lapſus hyderbolici cometae ex m in ſolem F, erit (§. 210.)

$$t = \frac{n}{2\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}z^{3:2} - \frac{1.2.z^{5:2}}{2.5.a} + \frac{1.3.2.z^{7:2}}{2.4.7.a^2} - \frac{1.3.5.2.z^{9:2}}{2.4.6.9.a^3} + \&c.\right)$$

Unde facile conſtruetur *ſcala celeritatum hyperbolicarum*, ſcalae ellipticarum & parabolicarum ſimilis.

THEO-

THEOREMA XXII.

§. 214. *Axi maiori ellipseos AB insistat semicirculus AqB, ducta chorda NM axi AB parallela, erigantur ordinatae PNn, RMm, dico, si pro ellipsi sol sit in foco F, pro circulo vero in centro C, arcus NQM, nqm eodem tempore percursum iri.* Fig. 26.

DEMONSTRATIO.

E centro C erigatur normalis CQq, haec utramque chordam NM, nm bisecat, ducta itaque FQ, erit QE = qg (§. 180.) & ellipsis iuxta praecepta Lemmatis XXIV. (§. 173.) per Q ducenda hoc casu, ob FQ = AC, abit in circulum $\nu Q\mu$, circulo AqB aequalem. Ducta itaque $\nu E\mu$ ad FQ normali, arcus $\nu Q\mu$ eodem tempore percurritur, quo arcus NQM (§. 183) At vero ob FQ = Cq, QE = qg, arcus nqm arcui $\nu Q\mu$, & chorda nm chordae $\nu\mu$ est aequalis. Unde si centrum solis pro circulo AqB statuatur in C, arcus nqm eodem tempore percurritur, quo arcus ellipticus NQM.

COROLLARIVM I.

§. 215. Quodsi ergo detur tempus, quo cometa peruenit ex A in N, haud difficulter dabitur tempus, quo peruenit ex A in M, & vicissim. Addendum enim vel demendum erit tempus, quo percurritur arcus circularis nm. Huius vero computus longe est facillimus. Erit enim tempus istud ad tempus cometae periodicum ut arcus nqm ad peripheriam circuli AqB integram.

COROL-

COROLLARIVM II.

Fig. 21. §. 216. Similiter, cum hoc theorema a situ foci F non pendeat, si ponatur centrum solis in A, ut sit $AF=0$, cometa motu elliptico ex B in A delabens eodem tempore percurrit partem abscissam RP, quo percurritur arcus circularis nqm. ut adeo iterum dato tempore, quo cadit ex B in R facillime reperiatur tempus quo cadit ex B in P, siue etiam dato tempore quo peruenit ex P in A, reperiatur tempus, quo decidit ex R in A.

THEOREMA XXIII.

§. 217. *Dato axe maiori AB, motus cometae per arcum quemlibet NM reduci poterit ad motum in alia ellipsi aeque periodica NQM, ita ut in hac eodem tempore percurrat arcus nQ, Qm ab utraque verticis parte aequales.*

DEMONSTRATIO.

Bisecta chorda NM in G, sumtaque semisumma radiorum vectorum $(FN+FM):z$, construatur triangulum rectangulum FEm, ita ut si

$$Fm=\frac{FN+FM}{2}$$

$$Em=\tfrac{1}{2}NM$$

Quo facto sumatur differentia inter Fm & axin AB, atque haec transferatur ex m in φ, eritque φ focus alter ellipseos quaesitae. Bisecta itaque φF in c, fiat $cQ=cb=AC$, eritque Qb axis maior. Dato vero foco F & axe maiori Qb ellipsis construi poterit, eritque nQm arcus quaesitus (§. 183.)

Tabu-

Tabula lapsus cometarum elliptici in solem.

Tem-pus	Distant. a sole	Tem-pus	Distant. a sole	Tem-pus	Distant. a sole
0	0	17	7008	34	9355
1	1270	18	7209	35	9434
2	1984	19	7399	36	9508
3	2562	20	7580	37	9577
4	3062	21	7753	38	9642
5	3513	22	7918	39	9699
6	3921	23	8075	40	9751
7	4298	24	8226	41	9799
8	4647	25	8368	42	9842
9	4973	26	8503	43	9880
10	5279	27	8631	44	9912
11	5567	28	8753	45	9939
12	5840	29	8869	46	9961
13	6100	30	8978	47	9978
14	6343	31	9081	48	9990
15	6575	32	9178	49	9998
16	6797	33	9269	50	10000
17	7008	34	9355	- -	- - -

Errata.

p. 7. §. 23. lin. 2. pro PMF lege QMF
p. 10. - - - lin. 7. pro FM—FH l. FM—FN
p. 15. §. 37. lin. 5. pro ſin FRM : (ſFRM+c) lege ſFMR : (ſFMR+c)
p. 15. §. 37. lin. 16. pro angulo FMN lege angulo RMN
p. 23. §. 52. lin. 10. pro Ducatur BD lege Ducatur Bd
p. 25. §. 56. lin. 11. pro $NEF = \frac{1}{2} QEB$ lege $NEF = \frac{1}{2} QFB$
p. 26. - - lin. antipen. pro $\frac{1}{6} GQ = + \frac{1}{2} FQ$ lege $\frac{1}{6} GQ + \frac{1}{2} FQ$
p. 44. - - - lin. 11. pro $\sqrt{2}\, QG + \frac{1}{3} QG$ lege $\sqrt{2}\, QG + \frac{4}{3} QG$
p. 47. §. 100. l. 5. pro $m\sqrt{2} : \sqrt{MF}$ l. $2m\sqrt{2} : \sqrt{MF}$
p. 53. - - - l. 3. pro 29 lege 34
p. 53. - - - l. 5. pro 22 lege 27
p. 58. - - - l. 11. pro QI lege GI
p. 65. §. 130. lin. 7. pro ſin NFK lege ſin NFH
p. 81. - - - l. 6. pro qh tangβ — pq tangα lege qh tangβ — pg tα

260