Mitternacht an gerechnet, so kann es nicht 90° werden, es sey denn A > B, oder der Abstand der Sonne vom Pol grösser als der Abstand des Pols vom Scheitelpunct. Und in diesem Fall stellt Φ den Stundenbogen vor, wenn das Azimuth der Sonne 90 Grad ist.

Theorie der Zuverläßigkeit der Beobachtungen und Versuche.

§. 1.

Wenn es Witz und Scharfsinnigkeit erfordert, bey den Versuchen eine solche Auswahl der Umstände zu treffen, welche die Theorie, so dadurch bekräftigt oder angewandt werden soll, voraus setzt und nothwendig macht; so erfordert es nachher nicht wenig Beurtheilungskraft, den wahren Werth der angestellten Versuche zu bestimmen, und dabey fest zu setzen, wie ferne man der geometrischen Schärfe, die man in der Ausübung niemals genau erhalten kann, nahe gekommen sey, und wie viel man zum höchsten noch davon abweiche? Diese Abweichung bestimmt den Grad der Zuverläßigkeit der Beobachtungen und Versuche, und da man diese in der Naturlehre und angewandten Mathematik als eben so viele Grundsätze gebraucht, so

wird

wird die Theorie ihrer Zuverläßigkeit ungemein wichtig. Ich habe nicht gefunden, daß sie bißher auf Gründe wäre gebracht worden, weil man nur noch von dem einfachsten und leichtesten Fall Beyspiele hat. Es wird daher weder etwas altes noch unnützes seyn, wenn wir die Gründe dieser Theorie hier auseinander setzen, und ihre Anwendung in wirklichen und erheblichen Beyspielen zeigen.

§. 2.

Der erste Grundsatz ist dieser, daß sich in der Ausübung an keine geometrische Schärfe gedenken läßt, obgleich man sich allerdings Mühe geben solle, derselben so viel möglich ist, nahe zu kommen. Man will durch Versuche das wahre Maaß finden, welches die Natur wirklich gebraucht, z. E. die geographische Länge und Breite eines Ortes, das Gewicht oder die Schwere eines Körpers, den Grad der Wärme, die Länge einer Linie, die Größe eines Winkels, die Zeit einer Beobachtung ꝛc. Alle diese Bestimmungen hängen von der Genauigkeit der Instrumente, von der Sorgfalt des Beobachters, von der Schärfe der Sinnen, und von den Umständen der Beobachtung selbsten ab, und diese Stücke tragen immer mehr oder minder bey, daß wenn der Versuch mehrmalen wiederholt wird, der Erfolg immer mehr oder minder unterschieden ist, und daher von dem wahren nothwendig mehr oder minder abweicht. Jeder Versuch wird dadurch unzuverläßig, und man kann an keinem unmittelbar erkennen, ob er dem wahren am nächsten sey oder nicht?

§. 3.

Man hat daher längst schon angefangen aus solchen Versuchen das Mittel zu nehmen, und dieses ist auch alles, was man dabey thun kann. Dieses Verfahren gründet sich darauf, daß so oft bey dem Versuche kein Vorsatz ist, mit Vorbedacht der Sache zu viel zu thun, man annehmen könne, daß jeder derselben eben so leicht im zu vielen als im zu wenigen fehlen könne, und daß gleich große Abweichungen auf beyden Seiten gleich möglich sind. Setzt man dieses voraus so läßt sich leicht erweisen, daß das Mittel aus mehrern Versuchen dem wahren desto näher kommen müsse, je mehr der Versuch ist wiederholt worden. Denn unter allen Fällen, die man sich dabey gedenken kan, ist derjenige am möglichsten, wobey gleich große Abweichungen auf beyden Seiten gleich ofte vorkommen.

§. 4.

Ferner läßt sich beweisen, daß derjenige Versuch, so von dem wahren am meisten abweicht, auch von dem Mittel aus allen am meisten abweiche, u. hinwiederum. Deßgleichen

chen auch, daß wenn man diesen am meisten abweichenden Versuch wegläßt, das Mittel aus den übrigen dem wahren näher sey, als das Mittel, so man aus allen genommen, und daß der Unterschied dieser beyden Mittel den Grad der Zuverläßigkeit der sämtlichen Versuche bestimme.

§. 5.

Da ich den Beweis dieser Sätze nebst noch mehrern dahin gehörigen bereits in der Photometrie gegeben, so werde ich mich dabey hier nicht länger aufhalten. Unter allen Fällen, wo man aus mehrern Versuchen das Mittel zu nehmen hat, ist der hier betrachtete der einfachste und leichteste, und zugleich der einige, wo man bißher das Mittel genommen hat, weil sich die Methode dabey wie von selbsten anbeut, und alle zusammengenommene Versuche in einerley Absicht und Umständen angestellt werden, und einerley Erfolg angeben sollten, wenn sie mit geometrischer Schärfe könnten angestellt werden.

§. 6.

Die schwerern Fälle, so wir hier eigentlich auf Gründe zu bringen gedenken, sind diejenigen, wo mehrere Versuche, die in ganz verschiedenen Umständen angestellt werden müssen, dennoch zusammen gehören,

hören, und ein Mittel daraus soll genommen werden. Hiebey giebt jeder Versuch ein besonderes Product, welches sich nach den Umständen richtet, und wobey die Umstände mit den Versuchen nach einem durch die Theorie bestimmten Gesetze müssen verglichen werden. Z. E. man mißt unter verschiedenen Polhöhen die Länge des Secundenpendul. Sie ist nach den Polhöhen verschieden, und wächst vom Aequator gegen die Pole. Die Theorie giebt, daß der Ueberschuß mit dem Quadrat des Sinus der Breite in Verhältniß stehe. Jede Observation kann mehr oder minder vom wahren abweichen. Man muß zwo annehmen, wenn man eine Tabelle von der Länge des Penduls für jede Polhöhe berechnen will. Da aber jede Observation mehr oder minder unzuverläßig ist, so bleibt ungewiß, ob man zur Berechnung der Tabelle nicht die zwo schlechtesten annimmt. Die Tabelle sollte so heraus kommen, daß die sämtlichen Observationen am wenigsten davon abweichen. Sie sollte gleichsam das Mittel zwischen allen halten. Hier entsteht also natürlicher Weise die Frage, wie man dieses Mittel finden könne?

§. 7.

Wiederum man observirt ♀ oder ☿ in der Sonne, und bestimmt durch die Observation den Ort des Planeten in mehrern Augenbligenblicken durch eben so viele Puncte. Die Theorie giebt, daß man diese Puncte, nach Abzug der Parallaxe als in einer geraden Linie liegend ansehen könne. Allein da jede Observation von dem wahren mehr oder minder abweichen kann, so ist die Frage, diese gerade Linie zwischen den observirten Puncten so durchzuziehen, daß sie gleichsam unter allen Observationen das Mittel hält, und die Puncte auf beyden Seiten so wenig als möglich ist, davon abweichen? Man kann allerdings eine Methode verlangen, diese Linie dergestallt zu ziehen, um es nicht auf ein Gerathewohl ankommen zu lassen.

§. 8.

Eben so, wenn man aus vielen beobachteten Aequinoctien und Solstitien, das Fortrücken der Aequinoctialpuncte bestimmen soll, so wären zwo Observationen dazu hinreichend. Allein da jede Observation um mehrere Minuten unzuverläßig ist, so wird allerdings die Methode, dieses Fortrücken so zu bestimmen, daß alle Observationen gleichen Antheil daran haben, viel zuverläßiger seyn. Man kann aus diesen Beyspielen sehen, daß alle Elemente, worauf sich die Astronomischen Tabellen gründen, von einer solchen Methode eine merkliche Verbesserung zu erwarten haben, zumal da dadurch der Grad der Zuverläßigkeit bestimmt wird. Wir

werden

werden daher die verschiedene hiebey vorkommende Fälle der Ordnung nach durchgehen, und von dem leichtern zu dem schwerern fortschreiten.

§. 9.

Wir haben hiebey überhaupt zwo veränderliche Größen x, y, welche durch die Beobachtungen mit einander verglichen werden, so daß man für jedes x, so wir als eine Abscisse ansehen können, die dazu gehörende Ordinate y bestimmt. Diese Ordinaten würden eben so viele Puncte geben, wodurch eine gerade oder krumme Linie sollte gezogen werden, wenn die Versuche oder Beobachtungen sämtlich vollkommen genau wären. Da aber dieses nicht ist, so weicht die Linie mehr oder minder davon ab. Sie muß demnach so gezogen werden, daß sie ihrer wahren Lage am nächsten komme, und zwischen dem gegebenen Puncten gleichsam wie Mitten durch gehe.

§. 10.

Wir haben hiebey gleich Anfangs zween allgemeine Fälle zu unterscheiden. Denn entweder ist das Gesetz der zu ziehenden Linie durch die Theorie bestimmt, oder nicht. Im letzten Fall bleibt kein ander Mittel, als daß man die Linie von freyer Hand ziehe, und sie dient nur, um die zwischen die observirten

Ordi-

Ordinaten fallenden Ordinaten so genau als es durch eine Construction geschehen kann, zu bestimmen, und sie folglich für solche Umstände zu finden, die man nicht hat observiren können, und die man dessen unerachtet gebraucht.

§. 11.

Ist aber das Gesetz der Verhältniß der Ordinaten zu den Abscissen bekannt, so läßt sichs mehr methodisch verfahren. Der leichteste und einfachste Fall hiebey ist, wenn die Linie, so durch die Enden der Ordinaten gehen soll, eine gerade Linie ist. Und bey diesem werden wir den Anfang machen.

§. 12.

Es seyn demnach die Abscissen A, B, C, D, E, F die denselben entsprechenden Ordinaten, Fig. 1. Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, Ff, so wie sie aus den Versuchen gefunden worden. Die Endpuncte derselben A, b, c, d, e, f sollten vermöge der Voraussetzung in einer geraden Linie liegen. Da sie es aber nicht sind, so ist die Frage, eine gerade Linie HI dergestallt zu ziehen, welche, so viel möglich ist, der wahren am nächsten komme, oder von den Puncten A, b, c, d, e, f, am wenigsten abweiche.

§. 13.

§. 13.

Wir setzen hiebey voraus, daß ungeacht die Observationen keine geometrische Schärfe haben, ihre Abweichung von derselben so sey, daß man keiner vor der andern einen Vorzug geben könne, oder daß alle Versuche mit gleicher Sorgfalt und Auswahl der Umstände angestellt worden, folglich die Abweichung vom wahren schlechthin daher rühre, daß das Instrument an sich keine grössere Schärfe gebe, und das Auge nicht kleinere Unterschiede bemerken könne.

§. 14.

Da man also keinen Grund hat, einem der Puncte A, b, c, d, e, f einen Vorzug vor den andern zu geben, so ist offenbar, die Linie HI müsse so gezogen werden, daß diese Puncte auf der einen Seite so viel davon abweichen als auf der andern, oder daß die Summe der Abweichungen auf beyden Seiten einander gleich sey. Man sieht leicht, daß diese Bedingung das eigentliche und wahre Mittel aus allen Versuchen giebt, und keinem ein Vorzug vor den andern gegeben wird.

§. 15.

Hieraus folgt aber, daß diese Linie durch den Mittelpunct der Schwere aller Puncte A, b, c, d, e, f gehen müsse. Denn es ist

ist aus der Mechanic bekannt, daß der Mittelpunct der Schwere die Eigenschaft hat, daß wenn eine Linie dadurch gezogen wird, die Summe der Entfernung jeder Puncte auf beyden Seiten dieser Linie einander gleich sey, so bald jedem Punct ein gleiches Gewicht gegeben wird.

§. 16.

Dadurch wird demnach ein Punct bestimmt, durch welchen die Linie HI nothwendig gehen muß, wenn sie anders zwischen allen Versuchen das wahre Mittel halten soll. Man darf nemlich nur zu den Puncten A, b, c, d, e, f den Mittelpunct der Schwere suchen. Dieser sey G. Demnach muß die Linie HI durch G gezogen werden. Und ungeacht ihre Lage dadurch noch nicht bestimmt ist, so weiß man doch nunmehr eine Ordinate GK zu der Abscisse AK, welche eben so genau und nach eben den Grundsätzen bestimmt ist, als wenn man in dem oben erwähnten einfachsten Fall (§. 3) das arithmetische Mittel aus allen Versuchen genommen hätte.

§. 17.

Die Abscisse AK und Ordinate GK lassen sich jede besonders finden. Denn GK ist das Mittel aus allen Abscissen, folglich da in der Figur die erste Abscisse und Ordinate = o ist, so hat man

$AK = (o + AB + AC + AD + AE + AF) : 6.$
$KG = (o + Bb + Cc + Dd + Ee + Ff) : 6.$

Es wird nemlich die Summe aller Ordinaten und Abscissen durch die Anzahl derselben getheilt, um das Mittel AK und GK zu haben. Dieses Verfahren bedarf hier keines langen Beweises, weil man auf eben die Art den Mittelpunct der Schwere sucht, dessen Stelle hier der Punct G vertritt.

§. 18.

Wenn man die Verhältniß der Ordinaten zu den Abscissen weiß, so ist die Neigung der Linie HI gegen AF gegeben. Da sie nun durch den Punct G soll gehen, so kann sie ohne weiters gezogen, und dadurch jede Ordinate und Abscisse bestimmt werden. So z. E. wenn HI mit AF parallel seyn soll, so wird die Bestimmung der mittlern Abscisse ganz überflüßig, weil es genug ist das Mittel GK aus allen Ordinaten zu wissen.

§. 19.

Weiß man hingegen die Verhältniß der Ordinaten zu den Abscissen nicht, so muß die Lage der Linie HI aus andern Gründen bestimmt werden. Der Punct G ist allein nicht hinreichend. Denn da er alle Eigenschaften des Mittelpuncts der Schwere hat, so wird jede Linie, so man durch denselben

zieht

zieht, die Summe der Entfernung jeder Puncte A, b, c, d, e, f auf beyden Seiten gleich groß machen.

§. 20.

Um demnach die Linie HI nach eben diesen Gründen ziehen zu können, so theile man die Versuche in zwo gleich große Classen, indem man die ersten A, b, c und die letzten d, e, f besonders nimmt. Man suche für beyde ihre Mittelpuncte der Schwere g, γ besonders, und ziehe die Linie HI durch dieselbe, so wird sie die verlangte Lage haben.

§. 21.

Denn einmal geht sie durch den gemeinsamen Mittelpunct der Schwere aller Puncte G. So dann sind die beyden Puncte g, γ so bestimmt, als wenn man bey dem erstern die Versuche d, e, f bey dem letztern die Versuche A, b, c nicht angestellt hätte, folglich habe jene ohne Rücksicht auf dieses und jede Classe besonders ihr eigenes Mittel.

§. 22.

Um nun den Grad der Zuverläßigkeit der sämmtlichen Versuche zu bestimmen, so lasse man den Punct, der von der gezogenen Linie HI am meisten abweicht, weg, und ziehe für die übrigen eine neue Linie. Der Unterschied zwischen beyden wird anzeigen, wie ferne in ihrer Lage noch eine Unzuverläßigkeit zurücke bleibt. Der Grund dieses Verfahrens ist demjenigen, so wir oben (§. 4.) für den einfachsten Fall gegeben haben ganz ähnlich.

§. 23.

Es wird selten zutreffen, daß die Linie HI durch den Anfang A gehe, von welchem wir in der Figur die Abscissen und Ordinaten zu zählen angefangen haben. Wenn man demnach die Abscissen und Ordinaten nach der Linie HI verbessern will, so kann man einen der Puncte g, G, γ zum Grunde legen, und nach diesen die Verbesserung vornehmen. Oder man findet die Verhältniß der Ordinaten zu den Abscissen, wenn man $\gamma\varkappa - gk$ durch $A\varkappa - Ak$ theilet.

§. 24.

Um nun diese Methode auf Analytische Ausdrücke zu bringen, so nenne man, nachdem die Versuche in die zwo Classen getheilt worden, für die

	erste Claß.	zweyte Claß.
die Anzahl der Versuche	n	N
die Summe der Abscissen	p	P
die Summe der Ordinaten	q	Q
die mittlern Abscissen	m	M
die mittlern Ordinaten	r	R.

so hat man

$m = p : n$

$m = p:n \qquad M = P:N.$
$r = q:n \qquad R = Q:N.$

Ferner setze man

$$\frac{(R-r)}{M-m}.m = k$$

so wird $r-k$ anzeigen, um wie viel die erste Ordinate müsse vergrössert oder verkleinert werden, damit sie mit der Linie HI übereintreffe. Endlich zeigt $\frac{R-r}{M-m}$ das Wachsthum der Ordinate für jede Absciße = 1 an.

§. 25.

Ich werde nun diese Methode durch wirkliche Beyspiele erläutern, bey welchen sie längst schon hätte angewandt werden sollen, wenn sie bekandt gewesen wäre. Der Herr Caßini hat in seine Elemens d' Astronomie die Zeit der Nachtgleichen und Sonnenwenden, wie sie über ein halbes Jahrhundert zu Paris sind beobachtet worden, in einer Tabelle vorgestellt. Man gebraucht dieselben um die wahre Länge des tropischen Jahres dadurch zu bestimmen. Da aber bey jeder eine Ungewißheit von einer halben Stunde vorkömmt, so wird es desto nothwendiger, wenn man aus allen das Mittel nimmt, und seine Zuverläßigkeit erörtert. Es wird daher weder an Beyspielen zu unserer Methode mangeln, noch an sich unnütz seyn, wenn wir dieses Mittel für alle vier Jahrszeiten aus diesen Beobachtungen zu bestimmen vornehmen.

§. 26.

I. Für die Nachtgleichen des Frühlings. Die erste so in der Caßinischen Tabelle vorkömmt, fällt, der Beobachtung zufolge, auf den 9 Merz, 7 St. 41 M. alten Calenders im Jahr 1672. Wir werden diese zum Grund legen, und in einer Tabelle hersetzen, wie viel die folgenden vorgerückt sind, wenn wir das Julianische Jahr von 365 Tagen 6 Stunden rechnen.

Jahr	St. M.	Jahr	St. M.	Jahr	St. M.
0	0: 0	30	5: 44	51	9: 2
8	1: 53	31	5: 37	52	9: 45
9	2: 23	32	6: 32	53	9: 8
11	2: 38	33	6: 37	54	9: 18
12	2: 31	35	6: 49	56	10: 30
14	3: 26	36	7: 16	57	10: 16
15	3: 7	38	6: 58	58	10: 6
16	3: 24	39	6: 58	59	11: 4
17	3: 45	40	7: 28	60	10: 40
18	3: 29	41	7: 39	61	11: 4
19	3: 55	43	7: 45	62	11: 30
20	3: 41	44	7: 55	63	11: 20
22	4: 0	45	8: 17	64	11: 40
23	4: 41	46	8: 43	65	11: 40
24	4: 58	47	8: 39	66	11: 37
25	5: 6	48	8: 33	67	11: 50
26	4: 56	49	8: 28		
27	5: 11	50	9: 5		

§. 27.

§. 27.

Hier haben wir in allem 53 Observationen und einen Zeitlauf von 67 Jahren. Wir werden die Jahre als Abscissen, die Vorrückung der Nachtgleiche als Ordinaten ansehen, und die ersten 24 Observationen von den 29 letztern absondern, um zwo Classen zu haben. Addirt man demnach die zu jeder Classe gehörenden Columnen zusammen, so findet man

1 Classe.	2 Classe.
$n = 24$	$N = 29$
$p = 503$	$P = 1520$
$q = 101^{St.} - 39'$	$Q = 274^{St.} - 36'$

folglich

$$m = \frac{p}{n} = \frac{503}{24} = 20{,}9583 \quad M = \frac{P}{M} = \frac{1520}{29} = 52{,}4138$$

$$r = \frac{q}{n} = \frac{101 - 39}{24} \quad 4^{St.} - 14' - 7\tfrac{1}{2}'' \quad R = \frac{Q}{N} = \frac{274 - 36}{29} = 9^{St.} - 28' - 8\tfrac{8}{29}''$$

folglich

$$R - r = 5^{St.} - 14' - 0''\tfrac{23}{29}$$

$$M - m = 31{,}4555.$$

und

$$k = \frac{R - r}{M - m} \cdot m = 3^{St.} - 29' - 13''$$

Es ist aber $\quad r = 4 - 14 - 7\tfrac{1}{2}$

folglich $\quad r - k = 0 - 44 - 54\tfrac{1}{2}$

Und um so viel ist die erste Ordinate, die wir $= 0$ genommen haben grösser, und folglich die Nachtgleiche 1672 früher, als sie Herr Caßini ansetzt. Wenn man demnach 44' 54½" von 1672 Mart. 9. St. 7. M. 41. abzieht, so bleibt die genauer bestimmte Zeit der Nachtgleiche des 1672 Jahres den 9 Merz, 6 St. 56 Min. 5½". Ferner ist $\frac{R-r}{M-m} = 10' 0''$. Und um so viel geht die Frühlingsnachtgleiche in den Jahren dieser Tabelle rückwerts.

§. 28.

Unter allen diesen Beobachtungen geht die erste am meisten von dem gefundenen Mittel ab, und der Unterschied beträgt beynahe ¾ Stund, um welche die beobachtete Zeit zu spät ist. Wenn wir dieselbe demnach weglassen, und die Rechnung mit den übrigen vornehmen, so haben wir $n = 23$, das übrige wie vorhin, folglich

$m = 21, 8696$
$r = 4$ St. 25 M. 10½ S.
$k = 3$ ' 37 ' 1⅓
$r - k = 0$ ' 48 ' 9⅙

und daher aus dieser Rechnung die Nachtgleiche 1672 um drey Minuten früher als aus der vorigen, und bis auf 3 Minuten ist demnach diese Nachtgleiche zuverläßig. Ferner finden wir nach dieser leztern Rechnung das Vorrücken der Nachtgleiche jährlich

R—r

$\frac{R-r}{M-m} = 9' \text{=} 55\frac{1}{8}''$. und folglich nur um $4\frac{3}{4}$ Secunden grösser als nach der erstern Rechnung, wodurch wiederum der Grad ihrer Zuverläßigkeit bestimmt wird. Die Nachtgleiche selbst fällt auf den 9 Merz 6 Stunde $52' \text{=} 51''$.

§. 29.

Wenn man für das Jahr 1712, welches ebenfalls ein Schaltjahr, und von 1672 um 40 Jahre entfernt ist, und überdiß fast in die Mitte aller observirten Jahre fällt, die Nachtgleiche nach beyden Rechnungen sucht, so muß man nach der ersten Rechnung 40mal $9' \text{=} 59\frac{9''}{10}$ vom 6 Merz 6 St. 56 M. nach der andern aber 40mal $9' \text{=} 55\frac{1}{8}''$ vom 6 Merz 6 St. $52' \text{=} 51''$ rückwerts zählen, und die Nachtgleiche 1712 wird

		T.	St.	'	"
nach der ersten Rechn. auf	Merz	9	0	16	$9\frac{1}{2}$
nach der andern auf	Merz	9	0	16	6

fallen, demnach sind hier beyde Rechnungen nur um $3\frac{1}{2}$ Secunden verschieden.

§. 30.

II.° Für die Nachtgleichen des Herbstes. Die erste, so in der Caßinischen Tabelle vorkömmt, fällt auf den 12 Sept. 6 St. 34'. des 1682 Jahrs. Das Fortrücken der folgenden stellt nachstehende Tabelle vor.

Jahr	St. M.	Jahr	St. M.	Jahr	St. M.
0	0 = 0	16	3 = 26	36	7 = 2
1	0 = 3	19	3 = 53	37	7 = 22
2	0 = 33	20	3 = 55	38	7 = 50
3	0 = 3	21	4 = 13	39	7 = 50
4	1 = 0	23	5 = 24	40	8 = 14
5	0 = 49	24	4 = 57	41	8 = 32
6	0 = 41	—	—	42	8 = 49
7	1 = 34	27	4 = 50	44	9 = 15
8	1 = 27	28	5 = 22	45	9 = 14
9	2 = 18	29	6 = 10	46	9 = 31
10	2 = 0	30	6 = 13	47	9 = 6
11	2 = 9	31	6 = 42	52	10 = 2
12	2 = 12	32	6 = 53	53	10 = 28
13	2 = 46	33	7 = 0	54	10 = 47
14	2 = 58	34	7 = 22	56	11 = 13
15	2 = 46	35	7 = 12		

§. 31.

Hier sind in allem 46 Beobachtungen, welche zu 22 und 24 in zwo Classen getheilt, wie vorhin geben

1 Classe	2 Classe
$n = 22$	$N = 24$
$p = 243$	$P = 949$
$q = 49^{St.} = 7'$	$Q = 192^{St.} = 95'$

folglich

$$m = \frac{p}{n} = 11,04545$$

$$M - m = 28,49621$$

$$M = \frac{P}{N} = 39,54166$$

$r =$

$r = \frac{q}{n} = 2^{\text{St.}} \text{-} 13' \text{-} 57\frac{3''}{11}$

$R = \frac{Q}{n} = 8 \text{-} 2 \text{-} 27\frac{1}{2}$ $R - r = 5^{\text{St.}} \text{-} 48' \text{-} 30\frac{5''}{22}$.

$k = \frac{R - r}{M - m} . m = 2 \text{-} 15 \text{-} 5$

$r - k = - 0 \text{-} 1 \text{-} 8$

Demnach muß die erste Ordinate um $1' \text{-} 8''$ vermindert werden, und um so viel ist also die Nachtgleiche 1682 später, und fällt folglich auf den 12 Sept. 6 St. 35' - 8." Es ist ferner das jährliche Fortrücken der Herbst Nachtgleichen

$$\frac{R - r}{M - m} = 12' \text{-} 14\frac{1''}{7}.$$

§. 32.

Sucht man nun nach diesen Sätzen die Zeiten der Nachtgleichen für die Jahre der Caßinischen Tabelle, so findet sich der größte Unterschied bey dem 23ten Jahr. In 23 Jahren ist das Fortrücken der Nachtgleiche 23mal $12' \text{-} 14\frac{1''}{7} = 4$ St. $41' \text{-} 25.''$ Die Tabelle giebt sie 5 St. 24' folglich $42\frac{1}{2}$ Minuten mehr. Läßt man demnach dieses Jahr aus der Rechnung weg, so findet man

$n = 21$

$p = 220$

$q = 43^{\text{St.}} \text{-} 43'$

N, P, Q wie vorhin, folglich $m = 10,47620$, $r = 2^{\text{St.}} \text{-} 4' \text{-} 54\frac{2''}{7}$

M — m

$$M - m = 29{,}03546$$
$$R - r = 5^{St.}\ 57'\ 33\tfrac{3}{14}''$$
$$k = 2 - 9 - 0\tfrac{1}{2}$$
$$r - k = -0 - 4 - 6\tfrac{3}{14}$$

demnach die Nachtgleiche 1682 den 12 Sept. 6 St. $38' - 6\tfrac{1}{5}''$. und folglich nur um 3 Minuten später als nach der ersten Rechnung. Ferner das Fortrücken der Nachtgleiche

$$\frac{R - r}{M - m} = 12' - 18\tfrac{6}{7}$$

und folglich nur um $4\tfrac{5}{7}$ Secunden grösser als vorhin. Endlich ist für 30 Jahre das Fortrücken nach der ersten Rechnung $6^{St.} - 7' - 4''$. folglich die Zeit der Nachtgleiche 1712, den 11 Sept. $12^{St.}\ 28' - 4''$. Nach der andern Rechnung den 11 Sept. 12 St. $28' - 40''$, folglich nur um 36 Secunden verschieden.

§. 33.

III.° Für die Sommer Sonnenwende. Hier fängt die Caßinische Tabelle wiederum bey dem Jahr 1672 an, und setzt die Zeit o ♋ den 10 Jun 7. St. 24 M. Das Fortrücken der folgenden Jahre stellt nachstehende Tabelle vor:

Jahr	St. M.	Jahr	St. M.	Jahr	St. M.
0	0 = 0	29	5 = 34	46	8 = 37
12	1 = 58	30	5 = 48	47	8 = 46
13	2 = 44	31	5 = 49	48	9 = 4
14	2 = 14	32	6 = 8	49	9 = 13
15	2 = 24	33	6 = 10	50	9 = 54
16	2 = 37	34	6 = 9	51	10 = 23
17	2 = 54	35	6 = 32	52	10 = 6
18	3 = 7	36	6 = 41	53	10 = 6
19	3 = 24	37	7 = 6	54	10 = 38
20	3 = 52	38	7 = 21	55	10 = 50
21	4 = 11	39	7 = 34	56	11 = 22
22	4 = 10	40	7 = 48	57	11 = 15
23	4 = 23	41	7 = 55	58	11 = 8
24	4 = 39	42	8 = 9	59	11 = 49
25	4 = 49	43	8 = 22	60	11 = 56
26	4 = 54	44	8 = 27	62	12 = 8
27	5 = 14	45	8 = 34	63	12 = 6
28	5 = 24			64	12 = 29
				65	12 = 43
				66	12 = 51

§. 34.

Der Herr Caßini sieht die Beobachtungen des 50 und 51 Jahrs als zweifelhaft an. Wir werden sie demnach weglassen, und die übrigen 53 in zwo Classen zu 29 und 24 getheilt geben

erste

erste Classe	zweyte Classe.
$n = 29$	$N = 24$
$p = 714$	$P = 1269$
$q = 133$ St. $50'$.	$Q = 246$ St. $22'$.

folglich

$$m = \frac{p}{n} = 24,6207 \qquad r = 4\text{ St. } 36'\ 53\tfrac{4}{5}''$$

$$M = \frac{P}{N} = 52,8750 \qquad R = 10 \text{ ,, } 15 \text{ ,, } 55$$

$$M - m = 28,2543 \quad R - r = \overset{\text{St.}}{5} \text{ ,, } \overset{\prime}{39} \text{ ,, } \overset{\prime\prime}{1\tfrac{1}{5}}$$

$$k = \frac{R - r}{M - m} = 4 \text{ ,, } 55 \text{ ,, } 27\tfrac{1}{3}$$

$$r = 4 \text{ ,, } 36 \text{ ,, } 53\tfrac{4}{5}$$

$$r - k = -0 \text{ ,, } 18 \text{ ,, } 33\tfrac{1}{2}$$

um so viel ist demnach die erste Ordinate kleiner, und die Sonnenwende 1672 später, als sie die Tafel giebt. Sie fällt demnach auf den 10 Jun. 7 St. 42′ 33½″. Ferner ist das jährliche Fortrücken dieser Sonnenwende

$$\frac{R - r}{M - m} = 12'\,0\tfrac{1}{15}''$$

folglich für 40 Jahr 8 St. 0′ 3″. Demnach war sie 1712 den 9 Jun. 23 St. 42′ 30½″.

§. 35.

Die Sonnenwenden lassen sich überhaupt genauer beobachten als die Nachtgleichen. Es

ist

ist daher auch hier der gröste Unterschied zwischen der Rechnung und der Tabelle, welcher auf das 56 Jahr fällt nur $27\frac{3}{5}$ Min. welches den Grad der Unzuverläßigkeit um die Helfte geringer macht, als wir ihn bey den Nachtgleichen gefunden.

§. 36.

IV.° **Für die Wintersonnenwende.** Die erste ist in der Tabelle des Hrn. Caßini 1684 den 10 Dec. 8 St. 21′. Das Fortrücken wie folgt.

Jahr	St. M.	Jahr	St. M.	Jahr	St. M.
0	0 : 0	18	2 : 47	36	6 : 13
1	0 : 14	19	3 : 5	37	6 : 44
2	0 : 17	20	3 : 21	38	6 : 43
3	0 : 38	21	3 : 31	39	6 : 28
4	0 : 39	22	3 : 49	40	6 : 32
5	0 : 45	23	4 : 1	41	6 : 49
6	0 : 56	24	3 : 50	42	6 : 54
7	1 : 5	25	4 : 24	43	7 : 27
8	1 : 25	26	4 : 47	44	7 : 45
9	1 : 47	27	4 : 52	45	8 : 9
10	1 : 41	28	5 : 10	46	8 : 11
11	2 : 9	29	4 : 42	47	8 : 14
12	2 : 5	30	4 : 56	48	8 : 30
13	2 : 25	31	5 : 8	49	8 : 35
14	2 : 31	32	5 : 16	50	8 : 24
15	2 : 41	33	5 : 25	51	8 : 39
16	2 : 35	34	5 : 49	52	9 : 9
17	2 : 41	35	6 : 23	53	9 : 6

§. 37.

§. 37.

Werden diese 54 Beobachtungen in zwo gleich große Classen getheilt, so haben wir

erste Classe.	zweyte Classe.
$n = 27$	$N = 27$
$p = 351$	$P = 1080$
$q = 60$ St. $9'$	$Q = 186$ St. $13.'$

Da hier $N = n$, so haben wir

$$n.k = \frac{Q - q}{P - p} . p = 60 \text{ St. } 41' \, 56''.$$

$$Q = 60 \,\text{"}\, 9 \,\text{"}\, 0$$
$$Q - p = -0 \,\text{"}\, 32 \,\text{"}\, 56$$
$$r - k = \frac{Q - p}{n} = -0 \,\text{"}\, 1 \,\text{"}\, 13$$

Um so viel muß die erste Ordinate kleiner werden, und die Sonnenwende 1684 fällt daher später auf den 10 Dec. 8 St. 22′ 13″. Ferner ist das jährliche Fortrücken, weil $n = N$,

$$\frac{Q - q}{P - p} = 10' \, 22\tfrac{5}{9}''.$$

Dieses giebt für 28 Jahre 4 St. 50′ 31½″, daher fällt die Sonnenwende 1712 auf den 10 Dec. 3 St. 31′ 41½″.

§. 38.

Bißher haben wir die Bestimmung der Zeit und des Fortrückens der beyden Nachtgleichen und Sonnenwenden als Beyspiele zu Erläu-

Erläuterung unserer Methode vorgenommen, welche immer der Hauptgegenstand dieser Abhandlung ist. Man könnte es daher leicht als eine Ausschweifung ansehen, wenn wir uns nun bey diesen Beyspielen besonders noch länger aufhalten, und sie mit einander vergleichen. Allein es ist keine bloße Ausschweifung, weil die genauere Vergleichung dieser Beyspiele gar leicht einen Zweifel wider die Richtigkeit der Methode erregen, oder wenn diese richtig ist, uns eine neue Anomalie in dem Fortrücken der Puncte des Thierkreyßes entdecken wird.

§. 39.

Wir haben das jährliche Fortrücken der 4 Jahrszeiten folgendergestallt gefunden:

	St.	M.	S.
0 ♈	0	10	0
0 ♋	0	12	$0\frac{1}{13}$
0 ♎	0	12	$14\frac{1}{7}$
0 ♑	0	10	$22\frac{1}{2}$

und dabey angemerkt, daß dieses Fortrücken bey den Nachtgleichen bis auf 4 oder 5 Secunden, bey den Sonnenwenden noch fast doppelt mehr zuverläßig sey. Vergleichen wir sie aber unter einander, so finden wir Unterschiede nicht von etlichen wenigen Secunden, sondern von mehr als 2 Minuten. Dieses ist viel zu merklich, als daß es so un-

untersucht hingehen, und nicht einen Zweifel wider die Methode oder wider die Beobachtungen selbst erregen sollte.

§. 40.

Nun weiß man zwar schon, daß bey dem Fortrücken dieser Puncte eine Ungleichheit statt findet, welche theils von der ungleichen Geschwindigkeit des Laufes der Sonne, theils von der Neigung der Bahn des Mondes gegen die Ecclyptic herrührt. Die letztere Ursache kehrt ungefehr in 182 Jahren wieder, und da sie, so viel man weiß, alle 4 Puncte gleich betrift, so kann hieraus keine bemerkbare Ungleichheit entstehen, zumal, da wir hier aus mehr als dreymal so vielen Jahren das Mittel haben. Hingegen verursacht die erste Ursache in der That eine Ungleichheit. Denn ist das Fortrücken dieser 4 Hauptpuncte des Thierkreyses in Theilen des Circuls gerechnet bey jedem gleich groß, z. E. jährlich 51 Secunden eines Grades, so wird dieser Bogen von der Sonne im Winter in kürzerer Zeit durchlaufen als im Sommer, im Frühling und Herbst aber hält sie ungefehr das Mittel. Der Unterschied von dem wahren Mittel findet sich, wenn man nachrechnet, für

0 ♈	— 0′	$6\frac{1}{2}''$ Zeit
0 ♋	+ 0 „	$41\frac{2}{3}$
0 ♎	+ 0 „	$5\frac{2}{3}$
0 ♑	— 0 „	$40\frac{5}{6}$

§. 41.

§. 41.

Hingegen ist das Mittel aus den Zahlen des §. 39. = $11' \, 9\frac{1}{6}''$. Zieht man von diesem Mittel jede Zahl ab, so bleiben die Unterschiede für

0 ♈ $-1' \, 9\frac{1}{6}''$.
0 ♋ $+0$ » $50\frac{9}{10}$.
0 ♎ $+1$ » 5.
0 ♑ -0 » $46\frac{2}{3}$.

§. 42.

Diese Unterschiede sollten den erst angegebenen (§. 40.) ganz oder doch bis auf wenige Secunden gleich seyn. So aber gehen sie merklich davon ab, und zwar für

0 ♈ um $+1' \, 2\frac{2}{3}''$
0 ♋ -0 » $9\frac{1}{4}$
0 ♎ -1 » $0\frac{2}{3}$
0 ♑ $+0$ » $5\frac{5}{6}$

§. 43.

Diese neuen Unterschiede sind noch grösser, als die so wir aus der Theorie des Sonnenlaufes (§. 40.) gefunden haben. Sie sind überdiß in einer gewissen Ordnung, bey den Nachtgleichen am grösten, und bey den Sonnenwenden am kleinsten. Es scheint daher, daß in der jährlichen Präceßion der Puncte des Thierkreyses noch eine Ungleichheit sey, die man noch nicht erörtert hat. Denn das mittlere Fortrücken dieser Puncte, sowie (§. 41.) von 11′ 9½″ gefunden haben, und welches aus 206 Observationen das wahre und eigentliche Mittel ist, giebt die mittlere Länge des tropischen Sonnenjahres 365 T. 5 St. 48′ 51″. so wie es die Vergleichung der ältesten Observationen mit den neuen giebt. Aus denen für das Jahr 1712 bestimmten Zeiten des Eintritts der Sonne in 0 ♈, ♋, ♎, ♑ findet sich die Eccentricität der Erdbahn 0, 01683, und der Ort der Sonnennähe zur Zeit der Herbstnachtgleiche 1712 in ♋ 7° 51′ 55″. Die gröste Gleichung 1° 55′ 43″. Auch diese Bestimmungen halten zwischen den besten astronomischen Tabellen das Mittel, ungeacht diese aus einer ungleich längern Reyhe von Jahren hergeleitet sind, da wir hingegen nur ungefehr ein halbes Jahrhundert dazu gebraucht haben. Man sieht demnach, wie diese Methode dienet, den Mangel mehrerer Beobachtungen von ältern Zeiten zu ersetzen. Uebrigens ist zu bemerken, daß man hingegen die Schlüsse, so man daraus zieht, nicht unbedingt weiter ausdehnen kann, als auf die Jahre, welche man in die Rechnung gezogen. Denn so könnte es gar wohl seyn, daß während den Jahren der Caßinischen Tabelle die daraus gefolgerte ungleiche Fortrückung der Puncte des Thierkreyses (§. 39. u. f.) besondern Umständen zuzuschreiben wäre, welche entweder nicht immer oder wenigstens nicht allzeit auf einerley Art statt hätten. Wir werden uns aber hier nicht länger dabey aufhalten.

§. 44

Bißher haben wir den Fall betrachtet, wo die Linie HI welche das Mittel zwischen allen Beobachtungen oder Versuchen geben soll, gerade ist, oder als gerade angesehen werden kann. Es giebt aber unzählige Fälle, wo sie nicht gerade ist, und wo man folglich die Gleichung haben muß, so die Verhältniß der Ordinaten zu den Abscissen ausdrückt. Wir können alle diese Fälle in zwo Classen theilen. Denn entweder man weiß den Anfang der Abscissen genau, oder derselbe ist ebenfalls noch unbekannt. Im ersten Fall lassen sich mehrentheils die Abscissen so verwandeln, daß man statt der krummen Linie, welche gezogen werden sollte, eine gerade gebrauchen kann. Da die Rechnung dadurch sehr erleichtert wird, so wollen wir diese Reduction in einigen Beyspielen zeigen.

§. 45.

Man weiß, daß die Länge des Penduls sich mit der Polhöhe ändert. Man hat auch bereits eine ziemliche Anzahl von Beobachtungen seiner Länge in sehr verschiedenen Polhöhen, vom Gleichstriche an, biß zum Polarcircul. Setzt man nun, diese Längen werden durch die Ordinaten vorgestellt, so kann man die Abscissen auf mehrerley Arten aus- drücken. Wollte man dadurch schlechthin die Grade der Polhöhe selbst vorstellen, so würde eine krumme Linie herauskommen, deren Bestimmung von der Rectification der Circulbögen abhängt, und die folglich transcendent wäre. Man weiß aber, daß das Pendul unter dem Aequator am kürzesten ist, und die Theorie giebt, daß sich seine Verlängerung oder der Ueberschuß seiner Länge nach den Quadraten der Sinus der Breiten richtet. Würde man nun die Abscissen nur durch die Sinus der Breiten ausdrücken, so würde man statt der geraden Linie A I eine Parabel bekommen, und die Rechnung würde wiederum weitläuftiger. Es ist demnach viel natürlicher, daß man statt der Sinus ihre Quadrate nimmt. Denn da die Verlängerung des Penduls diesen Quadraten proportional ist, so bekömmt man eine gerade Linie, und die Rechnung ist auf den leichtern Fall reducirt. Es ist klar, daß man dieses thun könne, weil man den Anfang der Abscissen weiß, und jede Breiten durch ihre Sinus ausdrücken kann.

§. 46.

Aus den wirklichen Beobachtungen, so mir zu Gesichte gekommen, werde ich nun diejenigen herausnehmen, die theils neuer, theils von solchen Beobachtern gemacht sind, von welchen man annehmen kann, daß sie alle Um-

stände

stände gewußt, und in Acht genommen haben.

Ort	Beobachter	Länge	Mittel	Ueberschuß.	Breite.	Quadrat d. Sinus.
		'''	'''		°	
Pello	Maupertuis -	441, 171	441, 171	+ 2,071	66-48	0, 84431
London	Graham -	440, 602	440, 602	+ 1, 502	51-31	0, 61276
Paris	Godin mit Grahams Instrum.	440, 466				
	aus 2 and. Obs.	440, 555				
	Picard - -	440, 500				
	Des hayes, var.	440, 555	440, 540	+ 1,440	48-51	0, 56699
	Hagen, Richer	440, 600				
	Mairan aus 12 Observationen.	440, 567				
Rome	Seur Jaquier	440, 189	440, 189	+ 1,089	41-54.	0,44600
Cap.B.sp	La Caille -	440,050	440,050	+0,950	33-55	0,31135
St.Goa	Godin -	439,335				
		- , 421				
	Bouguer -	- , 350	439,332	+ 0,232	18-27	0,10016
		- , 320				
	Condamine	- , 233				
Iamaica	Campbell -	439,398	439,358	+0,258	18- 0	0,09549
Port.bel.	Godin Boug.	439,078	439,078	-0, 022	9-33	0,02752
Panama	G. B. Condam	439,200	439,200	+0, 100	8-35	0,02227
Cayenne	Richer - -	439, 100	439, 100	+ 0, 000	4-56	0,00739
Perou	God. Bouguer, Condamine	439, 100	439, 100	+ 0, 000	0- 0	0,00000

§. 47.

Die letzte dieser Beobachtungen ist die, so die Academiker auf der bey Quito aufgerichteten Pyramide angezeichnet haben. Wir werden nun diese 11 Beobachtungen in zwo Classen theilen, und die 5 ersten und die 6 letzten besonders nehmen. Der Ueberschuß in der fünften Columne giebt die Ordinaten und die Quadrate der Sinus der Breiten geben die Abscis-

Abscissen. Wenden wir demnach die obigen Formeln (§. 24.) hier an, so haben wir

erste Classe.	zweyte Classe.
$N = 5.$	$n = 6$
$P = 2,78141$	$p = 0,25283.$
$Q = 7, 052$	$q = 0,568.$

folglich

$$R = \frac{Q}{N} = 1,4104 \quad M = \frac{P}{N} = 0,55628$$

$$r = \frac{q}{n} = 0,0947 \quad m = \frac{p}{n} = 0,04214$$

$$R - r = 1,3157 \quad M - m = 0,51414$$

$$k = \frac{R-r}{M-m} \cdot m = 0,108$$

$$r - k = -0,013$$

Es muß demnach die erste Ordinate um 0,013 kleiner gemacht werden, folglich ist die Länge des Penduls unter dem Aequator $= 439,100 - 0,013 = 439,087$ Linie. Ferner haben wir für die Abscisse $= 1$, folglich für den Unterschied der Länge des Penduls unter dem Pol und Aequator

$$\frac{R-r}{M-m} = 2,559 \text{ Linien.}$$

Demnach ist die Länge des Penduls unter dem Pol $= 439,087 + 2,559 = 441,647$ Linien. Hieraus findet sich die Länge desselben für jede Polhöhe λ, $= 439,087 + 2,559 \cdot \sin \lambda^2$.

§. 48.

Vergleicht man die durch diese Formel gefundenen Längen des Penduls mit den Beobachtungen, so findet sich der gröste Unterschied bey dem Vorgebürge der guten Hoffnung, weil er $\frac{1}{2}$ Linie ist, da die übrigen nicht auf die Helfte desselben reichen. Läßt man demnach diese Beobachtung weg, so hat man

$$N = 4$$
$$P = 2,\ 47006$$
$$Q = 6,\ 102$$

n, p, q, wie vorhin, folglich

$$R = \frac{Q}{N} = 1,5255$$

$$M = \frac{P}{N} = 0,617511$$

$$R - r = 1,\ 4308$$
$$M - m = 0,57537.$$

$$k = \frac{R-r}{M-m}.m = 0,105$$

$$r - k = -0,010.$$

Welches von dem vorigen nur um 0,003 verschieden ist. Hingegen findet man die Verlängerung des Penduls vom Aequator zum Pol

$$\frac{R-r}{M-m} = 2,\ 487$$

und folglich um 0, 072 oder $\frac{1}{14}$ Linie kleiner, als nach der vorigen Rechnung, und diß bestimmt

stimmt demnach den Grad der Zuverläßigkeit. Da nun 2,500 zwischen diese beyden Schranken fällt, so können wir eine runde Zahl genommen, festsetzen, daß sich das Secunden Pendul vom Aequator bis zum Pole um $2\frac{1}{2}$ Linien verlängere, und es wird dabey höchstens ein Irrthum von $\frac{1}{16}$ Linien zu besorgen seyn, zumal, da wir die letztere Rechnung als zuverläßiger ansehen können, als die erstere (§. 4.) Es ist demnach die Länge des Penduls

unter dem Aequator $= 439,1$
unter dem Pol $= 441,6$
und in jeder Polhöhe $= 439,100 + 2,5 . \sin \lambda^2$.

§. 49.

So ferne man annehmen kann, daß der Ueberschuß der Grade der Breite ebenfalls im Verhältniß der Quadrate der Sinus der Polhöhe sind, so läßt sich die erstgebrauchte Methode gleichfalls dabey anwenden, um aus allen wirklich angestellten Ausmessungen das Mittel zu nehmen. Ungeacht wir hier so viele einzele Beobachtungen nicht haben, wie bey dem Pendul, so werden wir doch die Rechnung hersetzen. Es sind aber nach Herrn Bouguer gemachten Verbesserungen folgende

Polhöhe.	Grade.	Ueberschuß.	Quadr. d. Sin. dop.
0° 0′	56753	0	0,00000
43 = 32	57048	295	0,94883
45 = 45	57045	287	1,02618
48 = 0	57071	318	1,10453
50 = 0	57084	331	1,17365
66 30	57422	669	1,68200

§. 50.

Diese Beobachtungen in zwo gleiche Classen getheilt, geben

$n = 3 \qquad N = 3$

$p = 1,97501 \qquad P = 3,96018$

$q = 582 \qquad Q = 1318$

folglich

$$m = \frac{p}{n} = 0,65834 \quad r = \frac{q}{n} = 194$$

und weil $N = n$, so hat man

$$k = \frac{Q - q}{P - p} \cdot m = 244$$

$$r - k = -50$$

Um so viel muß die erste Ordinate und folglich der Grad unter dem Aequator vermindert werden, demnach ist er $= 56703$. Ferner ist der Ueberschuß vom Aequator zum Pol

$$= 2 \cdot \frac{Q - q}{P - p} = 742.$$

Demnach

Demnach der Grad unter dem Pol $= 57445$, und überhaupt der Grad in jeder Breite $= 56703 + 742 . \sin \lambda^2$.

§. 51.

Ungeacht diese Formel zwischen den Observationen das Mittel hält, so geht sie von denselben sehr merklich ab. Sie giebt den Grad bey dem Polarcircul fast um 100 Toisen, den unter dem Aequator um 50 Toisen kleiner, und die in Frankreich bey 50 Toisen grösser als die Ausmessungen. Den bey dem Vorgebürge der guten Hofnung gemessenen Grad, den wir hier in der Rechnung nicht mit genommen, giebt die Formel um 100 Toisen kleiner. Man hat bereits gezweifelt, ob so große Abweichungen von einer einfachen und durch die Theorie bestimmten Regel der Ausmessungen oder einer wirklichen Ungleichheit der Figur der Erde zuzuschreiben sey? Nach der Theorie wäre die Erdaxe zum Diameter des Aequators in Verhältniß der Cubicwurzeln der Grade unter dem Aequator und Pole, folglich nach dieser Rechnung wie $\sqrt[3]{56703}$ zu $\sqrt[3]{57445} = 230 : 231$, und also genau, wie Newton sie angegeben. Hingegen sollte eben diese Verhältniß umgekehrt wie die Länge der Pendul seyn, und dieses wäre nach dem vorhin gefundenen Mittel aus den Beobachtungen wie 439, 1 zu 441, 6 $= 176 : 177$. Welche Verhältniß von der so so aus der Länge der Grade erfolgt gar zu sehr verschieden ist, und anzuzeigen scheint, als wenn die Erde inwendig merklich dichter wäre, als bey der Oberfläche.

§. 52.

Wir wollen noch ein Beyspiel von der hier gebrauchten Reduction anbringen. Man hat auf verschiedenen Bergen in Languedoc, Auvergne und Provence, deren Höhe über der Meeresfläche gemessen worden, die Höhe des Barometers beobachtet. Wenn der Zustand der Luft durch die Wärme und Dünste nicht verändert würde, so würden die Logarithmen der Barometerhöhe den Höhen der Berge proportional seyn. Wir wollen dessen unerachtet diese Regel annehmen, und die Verhältniß so bestimmen, daß sie zwischen den Beobachtungen das Mittel hält, wie es unsere Methode angiebt. Die Vergleichung dieses Mittels mit den Beobachtungen wird sodann zeigen, wie ferne man diese einfache Regel beybehalten kann. Folgende Tabelle stellt die Höhen der Berge über das Meer in Toisen, die Höhe des Barometers in Linien, und ihre Logarithmen nebst deren Unterschiede vor.

Ort	Höhe	Barom.	Logarithm.	Unterschied
Meersfläche	0	336,0	2,5263	0,0000
Clairet	277	314,5	2,4976	0,0287
Rodez	362	308,0	2,4885	0,0378
Maſſanne	408	304,7	2,4829	0,0434
Rupeyroux	446	301,5	2,4793	0,0470
Bugarac	628	289,5	2,4616	0,0647
Puy de Dome	789	278,5	2,4448	0,0815
La Coſte	807	278,0	2,4440	0,0823
La Courlande	801	278,0	2,4440	0,0823
Mont d'or	1001	264,5	2,4224	0,1039
St. Bartelemy	1225	252,5	2,4023	0,1240
Mouſſet	1228	250,7	2,3992	0,1271
Canigou	1424	240,5	2,3811	0,1452

§. 53.

Da nun die Unterschiede der Logarithmen den Höhen der Berge sollen proportional seyn, so werden wir erstere durch die Abscissen, letztere durch die Ordinaten vorstellen, und diese 13 Beobachtungen zu 7 und 6 in zwo Classen theilen. Demnach ist

$n = 7 \qquad N = 6$

$p = 0{,}3031 \qquad P = 0{,}6648.$

$q = .2910 \qquad Q = 6486.$

folglich

$m = p:n = 0{,}0433 \quad M = P:N = 0{,}1108$

$r = q:n = 415{,}7 \quad R = Q:N = 1081{,}0$

$R - r = 665{,}3$

$M - m = 0{,}0675$

k =

$$k = \frac{R-r}{M-m} \cdot m = 426,7$$

$$r = 415,7$$

$$r-k = -11$$

Demnach muß die erste Ordinate, so wir $=0$ gesetzt haben, um 11 Toisen vermindert werden, und hieraus würde folgen daß nicht an der Meeresfläche, sondern 11 Toisen tiefer die mittlere Barometerhöhe $=336$ Linien oder 28 Zoll wäre. Wir haben ferner für die Absciße $=1$.

$$\frac{R-r}{M-m} = 9856.$$

Es ist aber in dieser Rechnung die Absciße $=1$ der Logarithmus von 10, und folglich der Unterschied der Logarithmen zwoer in Linien ausgedruckten Barometerhöhen, deren eine 10mal so groß ist als die andere. Da wir hiebey die Briggischen Logarithmen gebrauchen, so sey nun die mittlere Barometerhöhe an einem jeden fürgegebenen Orte $=z$, so wird seine Höhe über das Meer durch die Formel

$$9856. \log \frac{336}{z} - 11$$

Toisen gefunden, wenn man z in Linien ausdrückt. Nach dieser Regel findet sich

Ort	gemessen	berechnet	Unterschied
Clairet	277	272	+ 5
Rodez	363	362	+ 1
Massanne	408	417	— 9
Rapegroux	446	452	— 6
Bugarac	628	627	+ 1
Puy de Dome	789	792	— 3
La Coste	807	800	+ 7
La Courl.	801	800	+ 1
m. d'or	1001	1013	—12
Bartelemy	1225	1211	+14
Mousset	1228	1242	—14
Canigou	1424	1420	+ 4

Die Unterschiede betragen nirgends eine Linie Barometerhöhe, die 2 größten sind 14 Toisen, um welchen St. Barthelemy nach der Ausmessung grösser, der Mousset aber kleiner ist. Es sind aber die Ausmessungen selbsten nicht viel zuverläßiger. Da die Subtangente der Tabellarlogarithmen $= 0,4342945$ ist, so wird sie für die Luft gefunden, wenn man diese Zahl mit 9856 multiplicirt. Das Product ist 4281 Toisen, und dieses wäre demnach die Höhe der Luft, wenn sie gleich dichte, wie bey der Meeresfläche wäre. Da endlich die Barometerhöhe von 28 Zollen um 11 Toisen tiefer als die Meeresfläche ist, welches nach obiger Formel genau eine Linie beträgt, so muß bey dem Gebrauch dieser Formel die mittlere Höhe am am Meere 27″ 11‴ oder 335 Linien genommen werden, und die Höhe eines jeden Ortes wird schlechthin

$$=9856.\log\frac{335}{z}$$

oder

$$=(1-\tfrac{1}{89}).\,10000.\log\frac{335}{z}$$

seyn. Man sieht aus allen diesen, daß Mariottens Regel von der Erfahrung lange nicht so viel abweicht, als man sie beschuldigt hatte, und daß er nur in ihrer Anwendung fehlte, weil er für die erste Linie Fall des ☿ 63 Schuhe annahm, welches fast um $\frac{1}{21}$ zu klein ist.

§. 53.

In diesem letzten Beyspiele haben wir die Ordinaten ganz, und den Unterschied zwischen den Abscissen gehabt, und dadurch ließe sich die Berechnung auf die oben gegebene Formeln (§. 24.) bringen, und merklich in die Kürze ziehen. Wir werden nun den Fall betrachten, wo weder die Ordinaten noch die Abscissen selbst, sondern nur ihre Unterschiede durch die Beobachtungen oder Versuche bestimmt werden, dabey aber dennoch die Verhältniß zwischen den Ordinaten und Abscissen durch die Theorie bekannt ist. Die Rechnung für diese Fälle wird ungleich weitläuftiger,

 weil

weil sie nicht mehr, wie die vorhergehenden mit bloßen Zahlen vorgenommen werden kann. Wir wollen die allgemeine Regel, nach welcher man in allen diesen Fällen zu verfahren hat, folgender maaßen erklären.

§. 54.

Man nehme aus der Linie AF die Abscissen von der ersten Beobachtung A an gerechnet.
Fig. 2. Die beobachteten Ordinaten seyn A, Bb, Cc, Dd, Ee, Ff, deren Endpuncte auf der krummen Linie MKH liegen sollten, wenn die Beobachtungen alle eine geometrische Schärfe hätten. Da dieses aber nicht ist, so ist die Frage die Linie MKH zwischen den Puncten A, b, c, d, e, f &c. so durchzuziehen, daß sie zwischen allen Observationen das wahre Mittel halte. Der Anfang derselben sey M, und die Gleichung für dieselbe drücke die Verhältniß zwischen den Abscissen MP und den Ordinaten HP aus, so daß MP mit KF parallel sey.

§. 55.

Hier ist für sich klar, daß man die beobachteten Abscissen und Ordinaten in solche verwandeln müsse, welche die Gleichung für die krumme Linie erfordert. Daher muß man zu jenen die noch unbekannte Linie MN, zu diesen aber AN addiren. Diese zwey unbekannte Stücke, welche noch nebst den Coefficienten

so

so die Gleichung hat, müssen bestimmt werden, geben zusammen genommen an, wie viel Puncte A, b, c &c. man annehmen müsse, um eben so viele einzele Gleichungen zu bekommen, als Stücke zu bestimmen sind. Diese Anzahl von Puncten ist nothwendig, und läßt keine Auswahl, weil die Aufgabe unaufgelößt bleibt, so bald auch nur ein Stück noch mangelt. Wir setzen aber hier voraus, daß man deren vielmal mehr habe, weil sich der Grad der Zuverläßigkeit des Mittels, so wir aus allen zu suchen haben, mit dieser Anzahl vergrössert. Je mehr demnach solcher beobachteten Puncte sind, desto näher kommen wir zum wahren (§. 3.) welches eigentlich zu suchen wäre.

§. 56.

Durch die erstgedachte Verwandlung der Abscissen und Ordinaten ist nun jede die Summe eines bekannten und unbekannten Stückes, z. E. die Abscisse AF verwandelt sich in $MP = MN + NP = MN + AF$, und die Ordinate Ff wird in $PF = Ff + PF = Ff + AN$ verwandelt. Nun läßt sich vermittelst der Gleichung für jede Abscisse MP die dazu gehörige Ordinate PF finden, und mit der angenommenen $Ff + NA$ vergleichen. Man suche auf diese Art alle Ordinaten, so ist klar, daß weil wir mehr Puncte A, b, c, d &c. angenommen haben, als nöthig wären, wenn alle eine geometrische Schärfe hätten, wir auch eine größere Anzahl von Gleichungen bekommen werden, und demnach willkührliche Bestimmungen damit vorgenommen werden können. Um demnach dieses willkührliche zu unserer Absicht zu gebrauchen, so merke man sich die nothwendige Anzahl von Gleichungen an, und theile den sämtlichen Vorrath derselben in eben so viele Classen. Für jede Classe addire man die aus der Gleichung und aus den Beobachtungen gefundenen Ordinaten besonders zusammen, so werden die Summen diejenigen Gleichungen geben, durch deren Auflösung die Linien MN, NA, und die Coefficienten der Gleichung so bestimmt werden, daß sie aus allen Beobachtungen das wahre Mittel geben.

§. 57.

Wenn in diesen Gleichungen die zwo gesuchten Linien MN, NA höhere Dignitäten bekommen, so wird die Rechnung merklich weitläuftig. In diesen Fällen ist es kürzer, wenn man sich der Näherung bedient, welches folgendermaaßen geschehen kann. Man lasse anfangs nur die nothwendige Zahl der Gleichungen, und wähle dazu diejenigen Puncte A, b, c &c. aus, welche an sich schon die Rechnung abkürzen können. Man bestimme dadurch die Linien MN, AN, und die Coefficienten der Gleichung, wenn letzteres zugleich seyn muß. Diese Bestimmungen würden richtig seyn, wenn man sich auf die Richtigkeit der angenommenen Puncte A, b, c &c. verlassen könnte. Da aber dieses ungewiß bleibt, so hat man durch diese erste Rechnung doch so viel gewonnen, daß man die Linie AF der Linie MP näher rücken kann, und die Theile MN, NA, dadurch so klein werden, daß ihre höhern Dignitäten wegbleiben können. Eben dieses ist auch von den Coefficienten zu merken, wenn man sie durch diese erste Rechnung bey nahe bestimmt.

§. 58.

Wir wollen diese letztere Methode, wobey nemlich die Näherung gebraucht wird, durch ein Beyspiel erläutern. Es ist die Frage die Geschwindigkeit der Erkältung eines mit Weingeist gefüllten Thermometers in freyer Luft zu finden, dessen Kugel einen Diameter von gegebener Größe hat. In dem hierüber angestellten Versuche war der Diameter $14\frac{1}{2}$ Linie Parisermaaß, das Thermometer nach Reaumurs Art getheilt. Bey Anfang der Erkältung stund es bey dem 24 Grad über dem Frierpunct und die Luft, in welcher es erkältete, hatte eine Temperatur von ungefehr 9 Graden. Jede Minute wurde aufgezeichnet, wie viel es gefallen war, und der Versuch 20 Minuten fortgesetzt. Das Thermometer war oben offen, damit nicht die eingeschlossene Luft die Einförmigkeit der Erkältung hinderte, und aus gleichem Grunde war die Kugel desselben ganz frey in der Luft, in welcher es erkälten sollte. Der Versuch ist in dem 2ten Bande der Actorum Helveticorum beschrieben, und den Erfolg stellt folgende Tabelle vor:

Zeit	Grade	Zeit	Grade	Zeit	Grade
0	0,00	7	4,40	14	7,60
1	0,80	8	4,90	15	8,00
2	1,50	9	5,40	16	8,30
3	2,15	10	5,90	17	8,60
4	2,80	11	6,35	18	8,90
5	3,40	12	6,80	19	9,20
6	3,90	13	7,20	20	9,50

§. 59.

Nun giebt Theorie und Erfahrung, daß die Erkältung nach den Ordinaten einer logarithmischen Linie geschehe. Es sey nemlich der anfängliche Grad der Wärme A, der ganze Raum der Erkältung AB, man ziehe CB auf BA senkrecht, so ist BC die Asymtote der Logarithmischen Linie AME, nach welcher die Erkältung fortgeht, und nach jeder Zeit BP sind die verlohrne Grade der Wärme QM, und die so noch weggehen sollen MP. Die Tabelle giebt nur die Ordinaten QM an, und AB soll erst noch gefunden werden.

Fig. 3.

Um

Um dieses auf die kürzeste Art zu finden, so nehmen wir aus der Tabelle 3 gleich entfernte Abscissen P, B, C an, denn so wird AB : PM = PM : CE seyn. Nun sey

$$B = 0' \qquad A = 0{,}00 \qquad AB = x$$
$$BP = 10 \qquad QM = 5{,}90 \qquad PM = x - 5{,}90.$$
$$BC = 20 \qquad DE = 9{,}50 \qquad CE = x - 9{,}50.$$

so hat man

$$x : (x - 5{,}90) = (x - 5{,}90) : (x - 9{,}50)$$

folglich $x = 15{,}12.$

und diese Bestimmung würde vollkommen richtig seyn, wenn die drey angenommene Puncte A, M, E nach geometrischer Schärfe zuverläßig wären. Da aber dieses ungewiß bleibt, so wollen wir

$$AB = x = 15{,}12 + z$$

setzen, und es ist klar, daß z höchstens einige Decimaltheile eines Grades vorstellen wird. Werden nun alle Ordinaten der vorigen Tabelle von 15, 12 + z abgezogen, so haben wir die Ordinaten zwischen der Asymtote BC, welche zur Rechnung tauglicher sind.

Zeit	Ordinate	Zeit	Ordinate	Zeit	Ordinate
0	15,12 + z	7	10,72 + z	14	7,52 + z
1	14,32 + z	8	10,22 + z	15	7,12 + z
2	13,62 + z	9	9,72 + z	16	6,82 + z
3	12,97 + z	10	9,22 + z	17	6,52 + z
4	12,32 + z	11	8,77 + z	18	6,32 + z
5	11,72 + z	12	8,32 + z	19	6,02 + z
6	11,22 + z	13	7,92 + z	20	5,72 + z

§. 60.

Da nun die Differenz der Logarithmen von jeden zwoen Ordinaten der Differenz der Zeit soll proportional seyn, so werden wir die Logarithmen derselben von dem Logarithmo der ersten abziehen. Es ist aber überhaupt, wenn man die hyperbolischen Logarithmen nimmt,

$$\log(a+z) = \log a + \frac{z}{a} - \frac{zz}{2aa} + \frac{z^3}{3a^3} - \&c.$$

Oder wenn man $m = 0,4342945$ setzt, so hat man die Briggischen Logarithmen

$$\log(a+z) = \log a + m\left(\frac{z}{a} - \frac{zz}{2aa} + \&c.\right)$$

wofür man, weil z sehr klein ist, setzen kann

$$\log(a+z) = \log a + \frac{mz}{a}$$

Hieraus, wenn man für a jede Zahlen der letzten Tabelle setzt, finden sich folgende Logarithmen, und ihre Unterschiede von dem ersten

Zeit	Logarithmen	Unterschiede
0	$1,1795 + 0,0287.z$	$0,0000 - 0,0000.z$
1	$1,1559 + 0,0303.z$	$0,0236 - 0,0016.z$
2	$1,1342 + 0,0319.z$	$0,0453 - 0,0032.z$
3	$1,1129 + 0,0335.z$	$0,0666 - 0,0048.z$
4	$1,0906 + 0,0352.z$	$0,0889 - 0,0065.z$
5	$1,0689 + 0,0370.z$	$0,1106 - 0,0083.z$
6	$1,0499 + 0,0387.z$	$0,1296 - 0,0100.z$

Zeit

Zeit	Logrrithmen	Unterschiede
7	1,0302 + 0,0405. z	0,1493 — 0,0118. z
8	1,0094 + 0,0424. z	0,1701 — 0,0137. z
9	0,9877 + 0,0447. z	0,1918 — 0,0160. z
10	0,9647 + 0,0471. z	0,2148 — 0,0184. z
11	0,9430 + 0,0495. z	0,2365 — 0,0208. z
12	0,9209 + 0,0522. z	0,2586 — 0,0235. z
13	0,8987 + 0,0548. z	0,2808 — 0,0261. z
14	0,8762 + 0,0577. z	0,3033 — 0,0290. z
15	0,8525 + 0,0610. z	0,3270 — 0,0323. z
16	0,8338 + 0,0637. z	0,3457 — 0,0350. z
17	0,8142 + 0,0666. z	0,3653 — 0,0379. z
18	0,8007 + 0,0687. z	0,3788 — 0,0400. z
19	0,7796 + 0,0721. z	0,3999 — 0,0434. z
20	0,7574 + 0,0759. z	0,4221 — 0,0472. z

§. 61.

Werden nun die Zeiten und Unterschiede in drey Classen getheilt, und jede Classe besonders addirt, so haben wir

Zahl der Observ.	Sum. der Zeiten	Summe der Untersch.
7	21	0,4646 — 0,0344. z.
6	70	1,5019 — 0,1303. z.
7	119	2,5421 — 0,2648. z.

Um demnach aus diesen Summen das Mittel zu haben, so muß jede durch die Anzahl der Beobachtungen getheilt werden, so haben wir

Zeit

Zeit	Unterschiede
3′	0,0664 — 0,0049. z
$11\frac{2}{3}$	0,2503 — 0,0217. z
17	0,3631 — 0,0378. z

Hieraus wird sich nun z finden. Denn werden diese Zahlen von einander abgezogen, so müssen die Ueberreste der Zeiten denen von den Unterschieden proportional seyn. Demnach haben wir

$$8\frac{2}{3}:5\frac{1}{3} = (0,1839 - 0,0168.z):(0,1128 - 0,0161.z)$$

folglich

$$-z = 0,06.$$

Um so viel muß demnach die erste Ordinate AB, welche wir = 15, 12 gefunden, vermindert werden. Sie ist demnach 15, 06 Gr. und so viel ist das Thermometer in allen erkältet, oder welches einerley ist, es war Anfangs des Versuches 15, 06 Grad wärmer als die Luft, in welcher es erkältete. Um nun die Geschwindigkeit der Erkältung zu finden, so merken wir an, daß die Subtangente der Logarithmischen Linie AE, nach welcher das Thermometer seine Wärme verlohr, das Maaß derselben ist, indem sich die Geschwindigkeit der Erkältung umgekehrt, wie diese Subtangente verhält. Nun ist die Subtangente der Tabellarlogarithmen = 0, 4343. Die letzte Analogie giebt uns die Verhältniß (0, 1839 — 0, 0168. z) : $8\frac{2}{3}$ Minuten, oder, wenn man den Werth von z setzt

setzt, 0, 1849 : $8\frac{2}{7}$, nach welcher man für 0,4343 die Zeit von 20 Minuten 21 Secunden für die gesuchte Subtangente findet. In den Actis helveticis woraus dieser Versuch genommen ist, haben wir nach der ersten Rechnung 20 Minuten $12\frac{1}{2}$ Secunden. Der Unterschied, wie auch der von z ist demnach sehr geringe.

§. 62.

Dieses Beyspiel ist das einige, wozu ich wirkliche angestellte Versuche gefunden habe, ungeacht es eine große Menge giebt, bey welchen sich die (§. 53. u. f.) angegebene Methode das Mittel zu nehmen, anbringen läßt. Ueberhaupt haben wir bey allen bißher betrachteten Fällen angenommen, daß die Gleichung für die Linie MKN durch die Theorie bekant sey. Es gibt aber unzählige Fälle, wobey man noch keine solche Gleichung hat, und wo folglich diese Linie gleichsam von freyer Hand dergestallt muß gezogen werden, daß sie, so bald die Lage der Puncte A, a, b, c, d, e, f &c. offenbar etwas unordentlich ist, und sich nach keiner Regel richtet, zwischen denselben durchgehe, und die einförmigste Krümmung behalte. Die hiebey vorkommenden Regeln und Vorsichtigkeiten habe ich in der Photometrie (§. 396. seqq. 478.) angegeben, wo ich sie in zweyen Fällen gebrauchen mußte. Ich werde sie daher nicht wiederholen, Fig. 2.

holen, sondern statt dessen andere Betrachtungen anbringen.

§. 63.

Das merkwürdigste Beyspiel, so sich hier darbeut, ist die Aenderung in der Abweichung der Magnetnadel. Es ist damit, wie mit allen Erscheinungen ergangen. Man nahm die jährliche Veränderung als gleichförmig an, und suchte ihre Größe zu bestimmen und zu finden, nach wie vielen Jahren sie im Circul herum kommen würde. Der Herr von Muschenbroek setzt diese Periode auf 1542 Jahre, wiewohl er sie für sehr unzuverläßig ansieht, weil er bey andern andere Bestimmungen findet. Man kann hierüber seine Abhandlung vom Magneten nachlesen. Solche Perioden wurden aus Vergleichung zweyer Jahre geschlossen, ungeacht man eine ganze Reyhe von Beobachtungen hatte, die man hätte dazu anwenden können. Allein eine Figur thut dabey ungleich bessere Dienste, als eine Tabelle. Wir haben demnach die zu Paris von 1550 bis 1760 gemachten Beobachtungen zusammen genommen, und die Numern, so viel man finden konnte von 5 zu 5 Jahren, die ältesten aber sämtlich in der 4ten Figur vorgestellt. Die gerade Linie AB stellt die Jahre vor, C fällt auf das Jahr 1666 wo die Abweichung zu Paris = o war. Die Linie GCH enthält den Maaßstab zu

den

den Graden der Abweichung, welche die Ordinaten für jede angezeichnete Jahre vorstellen. Zwischen AC gehen diese unterwerts, weil die Abweichung gegen Osten war, zwischen CB aber aufwerts, weil die Abweichungen anfiengen westlich zu werden. Wenn nun die Abänderungen in der Abweichung nach einem einförmigen Gesetze erfolgten, so ist klar, daß die Endpuncte der Ordinaten sämtlich in einer sehr einförmigen krummen Linie liegen sollten. Man weiß aber, daß sich diese Abweichung täglich, ja fast stündlich ändert, und grösser und kleiner wird. Bey den Beobachtungen ist darauf nicht so genau Achtung gegeben worden. Daher hat man sich auch nicht zu verwundern, wenn die Linie DECF, welche wir so einfach als ohne vorsetzlichen Fehler möglich war, gezogen haben, eben nicht genau durch jede Endpuncten der Ordinaten, sondern zwischen einigen durchgeht. Am meisten bleibt die Ordinate des 1640 Jahres zurücke. Ich glaubte besser zu thun, diese Beobachtung für ungewiß anzusehen, als daß ich derselben zu gefallen der Linie EC daselbst eine anomalistische Wendung hätte geben sollen, um so mehr, da die um diese Zeit zu Londen gemachten Beobachtungen, welche immer um ein Grad oder mehr westlicher waren, und eine mit der Linie EC parallele krumme Linie geben, die Parisische Beobachtung von 1640 ebenfalls zweifelhaft machen.

§. 64.

§. 64.

Die Linie DECF zeigt demnach auf einen Anblick die mittlere Veränderung der Magnetnadel zu Paris in einem Zeitraum von 210 Jahren an. Sie hat in E ein Maximum, und bey C einen Wendpunct, und scheint sich nunmehr dem zweyten Maximo zu nähern, weil ihre Richtung bey F der parallelen Lage mit AB näher kömmt, als sie es in C war. Es ist demnach vermuthlich, daß die Magnetnadel sich nun bald wiederum werde gegen Osten zurück wenden, und in ihrer Abweichung anfangen abzunehmen. Ihre Bewegung würde daher im geringsten nicht einförmig seyn, oder im Circul herum kommen, sondern einer Art von Schwenkung gleichen, deren Periode, wenn ja etwas periodisches dabey ist, von etwan 200 Jahren wäre.

§. 66.

Wir haben angegeben, daß man in denen Fällen, wo die Gleichung für die Linie MKH nicht bekannt ist, dieselbe von freyer Hand ziehen soll, damit sie zwischen den nicht genau bestimmten Puncten A, b, c &c. mitten durchgehe, und so viel möglich ist, einförmig bleibe. Es fehlt zwar an Methoden nicht, krumme Linien durch jede beliebige Anzahl Puncte von gegebener Lage zu ziehen. Newton hat dergleichen angegeben, wo es die

Fig. 2.

Frage

Frage ist, zu den Abscissen, welche zwischen die gegebenen fallen, die Ordinaten zu finden. Diese Methoden thun unstreitig gute Dienste, wenn die Puncte A, b, c, d &c. genau gegeben sind. Man kann eine Gleichung annehmen, welche so viele Glieder und Coefficienten hat, als Puncte gegeben sind, und dadurch alle Coefficienten bestimmen. Allein, so bald man durch die Construction findet, daß die Puncte A, b, c, d &c. eben nicht so genau bestimmt sind, so ist unstreitig, daß eine solche Linie alle kleine Abweichungen der Versuche an sich nehmen, und folglich eben so unzuverläßig seyn würde. Es ist daher ungleich besser, wenn man eine Gleichung von wenigern Gliedern und Coefficienten annimmt, und damit eben so verfährt, wie wir oben (§. 54. seqq.) gewiesen haben. Auf diese Art wird die dadurch gefundene krumme Linie nicht nur an sich einfacher seyn, sondern auch dem wahren Mittel aus allen Versuchen näher kommen.

§. 67

Um noch ein Beyspiel anzubringen, wobey die krumme Linie von freyer Hand muß gezogen werden, so werde ich die Sterbregister von London vornehmen. Es sind daselbst in 6 Jahren von 1753 bis 1758 gestorben:

Unter

	Unter	2	Jahr	alt	44342.
Von	2 biß	5	Jahr	=	11487.
Von	5 biß	10	Jahr	=	3940.
Von	10 biß	20	Jahr	=	3498.
Von	20 biß	30	Jahr	=	9254.
Von	30 biß	40	Jahr	=	11566.
Von	40 biß	50	Jahr	=	11769.
Von	50 biß	60	Jahr	=	10296.
Von	60 biß	70	Jahr	=	8299.
Von	70 biß	80	Jahr	=	5986.
Von	80 biß	90	Jahr	=	2777.
Von	90 biß	100	Jahr	=	413.
	Ueber	100	Jahr	=	16.

Setzt man nun, daß Londen im Beharrungsstand bleibe, und folglich die Anzahl der Menschen von jedem Alter daselbst weder zu noch abnehme, so lassen sich aus dieser Tabelle ohne Mühe vielerley Schlüsse ziehen. Denn sollen z. E. jährlich daselbst 16 Personen sterben können, die über hundert Jahr alt sind, so müssen daselbst jährlich 16 Personen 100 Jahre alt werden. Sollen 16 + 413 Personen sterben, die über 90 Jahr alt sind, so müssen jährlich 16 + 413 = 429 Personen 90 Jahr alt werden. Auf gleiche Art müssen 16 + 413 + 2777 Personen jährlich 80 Jahr alt werden rc. Man sieht hieraus, daß man die Zahlen dieser Liste rückwerts der Ordnung nach addirt, man findet, wie viele Personen in Zeit von 6 Jahren, 2, 5, 10,

15

15, 20 ꝛc. Jahre alt werden. Und diß giebt demnach folgende Tabelle:

Jahre		Personen				
0	=	123643	reducirt			100000.
2	=	79301	=	=		64136.
5	=	67814	=	=		54846.
10	=	63874	=	=		51659.
20	=	60376	=	=		48831.
30	=	51122	=	=		41246
40	=	39556	=	=		31992.
50	=	27787	=	=		22474.
60	=	17491	=	=		14146.
70	=	9192	=	=		7435.
80	=	3206	=	=		2593.
90	=	429	=	=		347.
100	=	16	=	=		13.

In dieser Tabelle enthält demnach die erste Columne das complete Alter, die zweyte Columne die Anzahl der in solchem Alter lebenden Personen. Die dritte enthält eben diese Anzahl dergestallt reducirt, daß dabey gerade hin 100000 von 0 Jahr, das will sagen neugebohren angenommen sind.

§. 68.

Hiebey ist nun die Frage: 1.° zu sehen, ob sich in diesen Zahlen keine merkliche Irregularität befinde, die etwan von besondern Zufällen herrührt. 2.° Die Anzahl der Personen Fig. V.

Hh

sonen von jedem Alter zu bestimmen, welches zwischen die hier gegebene Anzahl fällt? Zu diesem Ende theile man die Abscissenlinie AB = 100 Theile als so viele Jahre ein, und richte aus den Jahren 0, 2, 5, 10, 20 ꝛc. Perpendicularen auf, denen man die Länge giebt, welche die Zahlen der dritten Columne erfordern, so soll sich durch die Endpunete der Ordinaten eine sehr einförmige krumme Linie ziehen lassen. Ich habe dieses auf einem grossen Bogen gethan, und nicht gefunden, daß an der erstgegebenen Tabelle etwas merklich zu ändern wäre. Denn ungeacht die Linie CDEB bey D einige Erhöhung hat, so ist diese Erhöhung an sich einförmig, und man kann sie nicht ändern, ohne die Linie bey F allzumerklich zu erhöhen. Ich merke demnach nur an, daß die fünfte Figur die erstgegebene Tabelle sehr genau vorstellt. AC ist die Anzahl neugebohrner Kinder, und jede Ordinate stellt vor, wie viele davon nach einer beliebigen Anzahl von Jahren noch bey Leben sind. Sodann stellt jede Ordinate auch vor, wie viel Menschen von jedem Alter in einem fürgegebenen Augenblick leben. Wenn man demnach die Anzahl aller zu London lebenden Menschen durch den Flächenraum ACFDEBA vorstellt, so leben z. E. zwischen 30 und 40 Jahren so viel als der Raum angiebt, den die Ordinaten des 30 und 40ten Jahres einschliessen, und auf diese Art werden die von jedem Alter lebende bestimmt.

§. 69.

§. 69.

Die Natur dieser krummen Linie ist unbekannt. So wie wir sie aber a posteriori gefunden und gezeichnet haben, zeigt es sich, daß sie bey D und E zween Wendungspuncte hat, bey C die Ordinate berührt, und bey B asymtotisch wird. Die Wendungspuncte bey D, E zeigen an, daß sich die Linie vor und nach langsamer gegen die Absciſſenlinie AB neigt, und folglich bey D und E die Grade der Sterblichkeit grösser als vor und nach sind. In C, das will sagen gleich beym Eintritt ins Leben ist der Grad der Sterblichkeit am grösten und absolut, doch da er sich augenblicklich stark verringert, so macht dieses, daß von den neugebohrnen Kindern dennoch die meisten bey Leben bleiben, wiewohl in dem ersten Jahre über $\frac{1}{5}$ davon stirbt. Nach dem 5ten bis ins 20ste Jahr ändert sich die Lebenskraft sehr merklich, von dem 30 Jahr an, nimmt sie, jedoch immer langsamer ab. Man kann nicht wohl angeben, ob oder wenn sie ganz aufhört, denn man setze AC=100000, und die Ordinate bey dem 130sten Jahre, sey nur noch $\frac{1}{1000}$, so will dieses sagen, daß von 1000mal 10000, das ist von 100 Millionen Menschen etwan einer 130 Jahr alt wird. Und da es zuweilen noch Fälle von einem 150jährigen Alter giebt, so sieht man, daß auch noch die Ordinate des 150sten Jahres

einen,

einen, wiewohl fast unendlich kleinen Bruch haben müsse.

§. 70.

Ich habe über der Linie CFDEB noch eine andere punctirte gezeichnet, welche ich aus der Keerseboomschen Tabelle genommen. Diese Tabelle hat Hr. Keerseboom nicht von allen Sterbenden, sondern nur von denen genommen, welche Gelder auf Leibrenten haben. Da dieses alles ausgesuchte Leute sind, weil kränkliche Personen eben kein Geld auf Leibrenten geben, so ist für sich klar, daß alle Ordinaten grösser werden. Indessen hat diese punctirte Linie einige Irregularitäten, besonders beym 30 und 40 Jahre, welche merklicher werden, wenn man die Figur etwas grösser zeichnet, und welche Hr. Keerseboom vermieden haben würde, wenn derselbe an statt des Interpolirens diese Art zu construiren gebraucht hätte.

§. 71.

Da man an die Linie CFDEB ohne Fig. VI Schwürigkeit Tangenten ziehen kann, so viel man will, so kann man sie dergestalt ziehen, daß die zwischen jede zwo Tangenten fallende Stücke der Linie CFDEB mit Stücken von osculirenden Parabeln verwechselt werden können, ohne daß der Fehler im geringsten merklich werde. Denn es sey AMB ein

Stück

Stück einer krummen Linie, AT, BT zwo Tangenten. Man theile die Chorde AB in C in zwey gleiche Theile, und ziehe CT in den Durchschnittspunct der beyden Tangenten. Findet sich nun TM=MC, so kann das ganze Stück AMB als ein Stück einer Parabel angesehen werden, und TC wird der Axe derselben parallel seyn. Man wird eben so den Raum des Segmentes AMBA leicht finden, wenn man die Basin AB mit $\frac{2}{3}$ von der Höhe MP multiplicirt. Denn ist AMB wirklich ein Stück einer Parabel, so ist alles dieses nach aller Schärfe richtig, und wird daher genauer zutreffen, je näher die Krümmung AMB einer parabolischen kömmt. Da sodann $AT^2 : TM = At^2 : tm$ ist, so kann die Lage eines jeden Puncts t leicht gefunden werden. Ich merke dieses hier an, weil es die richtigste Art ist, bey der krummen Linie CFDEB die sämtlichen Ordinaten dergestallt Fig. V. zu interpoliren, daß sie auf eine ordentliche und der Krümmung der Linie CFDEB angemessene Art zu und abnehmen.

§. 72.

Man kann aber auch einzelne Stücke dieser Linie durch eine Gleichung ausdrücken, welche sowohl die Länge der Ordinaten angiebt, als auch die erste und letzte so bestimmt, daß solche Stücke mit den vor und nachgehenden zusammengehängt werden können, wenn man auch für dieselben solche Gleichungen sucht. Die Formel für solche Gleichungen ist folgende:

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + \&c.$$

wo y die Ordinaten, x aber die Absciſſen vorstellt. Alles kömmt nun auf die Bestimmung der Coefficienten a, b, c &c. an. Wir wollen, um dieses Verfahren durch ein Beyspiel zu erläutern, dasjenige Stück der Linie nehmen, welches zwischen dem 45sten und 90 Jahr liegt. Dieses sey HGFE, so ist AD eine Absciſſe von 45 Jahren, A das 45ste, D das 90ste Jahr, AH, DE die diesen Jahren entsprechende Ordinaten. Nun haben wir wenn die Absciſſen x von A gegen D genommen werden, bey dem Punct A, $x = 0$, folglich wird für diesen Punct $y = a$, welches den ersten Coefficienten $a = AH = 26950$ giebt. Denn dieses ist ungefehr die Anzahl der in diesem Alter lebenden, wenn die anfängliche Zahl 100000 ist. Ferner müssen wir, damit das Stück der Linie HE mit den vorhergehenden zusammengehängt werden kann, die Lage der Tangente HT wissen. Wird die Figur im Großen construirt, so findet sich, daß diese Tangente der Absciſſenlinie jedes Jahr um 985, 7 näher kömmt. Dieses bestimmt nun den Coefficient b, weil derselbe eigentlich die Lage dieser Tangente ausdrückt. Demnach haben wir $b = - 985, 7$. Damit ferner das vorgenommene Stück der Linie

Fig. VII.

in E mit den folgenden zusammengehängt werden könne, müssen wir ebenfalls die Länge der Tangente in E wissen. Diese findet sich nun wiederum dergestallt, daß sie jährlich der Abscissenlinie um 64 näher kommt. Nun ist die Lage der Tangenten überhaupt

$$\frac{dy}{dx} = b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 + \&c.$$

Setzt man demnach

$x = AD = 45, b = -985,7, dy : dx = 64$:

so haben wir

$$64 = -985,7 + 2.45.c + 3.45.^2d + 4.45^3e + 5.45.^4f + \&c.$$

Und durch diese Gleichung kann ebenfals einer der Coefficienten c, d, e, f, &c. bestimmt werden. Nun werden alle Ordinaten y genauer gefunden, jemehr man solcher Coefficienten beybehält. Um aber dieselben zu bestimmen, müssen noch eben so viele Ordinaten angenommen werden. Wir wollen Kürze halber nur drey annehmen, und zwar die vom 60sten 70sten und 90sten Jahr, und so ist

$x = 15 \quad y = 14146.$

$x = 25 \quad y = 7435.$

$x = 45 \quad y = 347.$

Dadurch erhalten wir drey Gleichungen, und demnach drey Coefficienten. Da nun die vorige Gleichung ebenfalls einen Coefficienten bestimmt, so werden wir die Coefficienten c, d, e, f, allein beybehalten. Demnach haben wir in allen folgende 4 Gleichungen

$$14146 = 26950 - 985,7.15 + 15^2.c + 15^3.d + 15^4.e + 15^5.f$$

$$7435 = 26950 - 985,7.25 + 25^2.c + 25^3.d + 25^4.e + 25^5.f$$

$$347 = 26950 - 985,7.45 + 45^2.e + 45^3.d + 45^4.e + 45^5.f$$

$$64 = \quad -985,7 \quad + 2.45.c + 3.45^2.d + 4.45^3.e + 5.45^4.f$$

Werden diese Gleichungen aufgelößt, so findet sich

c =

$c = +9{,}709150$
$d = -0{,}0342700$
$e = -0{,}0027017$
$f = +0{,}000066635$

demnach die gesuchte Gleichung

$$y = 16950 - 985{,}7 \cdot x + 9{,}709150 \cdot x^2 - 0{,}03427 \cdot x^3 - 0{,}0027017 x^4 + 0{,}000066635 \cdot x^5$$

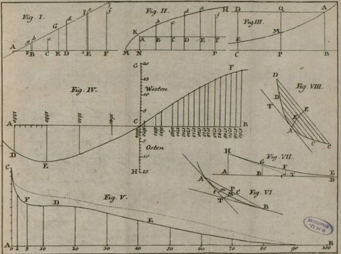
Setzt man nun z. E.

für das 55ste Jahr $x = 10$, so ist $y = 18001$.
65 " " $x = 20$ " $y = 10625$.
85 " " $x = 40$ " $y = 763$.

Und so giebt diese Gleichung die zwischen das 45 und 90ste Jahr fallende Ordinaten noch ziemlich genau, und dergestallt, daß dieses Stück der Linien mit der vorgehenden und folgenden kann zusammengehängt werden.

§. 73.

Ich führe dieses Beyspiel nur zur Erläuterung der Methode an, welche in sehr vielen Fällen mit Vortheil kann gebraucht werden. Daher werde ich nur noch beyfügen, wie in einer construirten krummen Linie die Tangenten können gezogen, und bestimmt werden, wo sie die Linie berühren. Man habe an die Fig. VIII. Linie DAC eine Tangente TA gezogen, und es soll der Berührungspunct A gefunden werden. Zu diesem Ende ziehe man mit der Tangente TA so viele parallele Chorden CD als man will, nahe beysammen, und theile jede in den Puncten E in zween gleiche Theile, so wird die durch EE gezogene Linie in den gesuchten Punct A treffen, und zwar wird sie gerade seyn, so oft DAC ein Stück einer conischen Section oder einer solchen Linie ist, deren Diameter in A fällt. In den übrigen Fällen hat sie eine solche Krümmung, daß man statt des kleinen Stückes AE den Krümmungskreys derselben gebrauchen kann, so oft nemlich A nicht der Wendungspunct der Linie DAC ist, sondern einen Krümmungskreys von einer endlichen Größe hat.



Mathes. Adplicat. Tab. V.