I.

Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung. Durch J. H. Lambert. Mit Kupfern. Berlin 1765. im Verlage des Buchladens der Realschule, 488 Seiten in 8. nebst 5 Kupfertafeln.

Es sind vier Abhandlungen. Sie gehen sämtlich dahin, die mathematische Erkenntniß theils an sich zu erweitern, fürnemlich aber in dem gemeinen Leben, in der Naturlehre und bey Versuchen anwendbar zu machen. Die erste gehet auf die practische Geometrie; die zwote auf einen ganz besondern Theil derselben, nemlich das Visiren der Fässer; die dritte betrift die Trigonometrie; die vierte eine Theorie von der Zuverläßigkeit der Beobachtungen und Versuche.

Man kennet den erfinderischen Geist des Verf. schon aus seinen vorigen Schriften. Auch diese Abhandlungen zeigen viele neue Aussichten in mathematische Gegenden, die zum Theil noch unbearbeitet sind oder bisher nur solche Producte geliefert haben, die ohne besondere Mühe und Kunst darin wachsen. Hr. **Lambert** unternimmt es, sie mit Hülfe der Algebra zu veredeln, auch einige Felder die bisher Bodenlos geschienen, den dürresten Flugsand, tragbar zu machen. **I. Anmerkung und Zusaz, zur practischen Geometrie.** Der erste Mangel bey der Feldmeßkunst ist, daß man sie den Feldmessern überlassen hat. Und wem, wird man fragen, sollte man sie sonst überlassen haben? Allerdings diesen, wenn von der Anwendung etlicher Vorschriften auf die alltäglichste Fälle, von den Gränz-Streitigkeiten etlicher Bauern, die Rede ist; aber die Regeln selbst vorzuschreiben, neue Fälle aufzusuchen und Mittel anzugeben, wo man mit den bekannten nicht ausreicht, das ist eigentlich das Thun der Analysten und nicht derjenigen, deren Handwerk das Feldmessen ist. Diesem Mangel sucht der Verf. durch eine Menge neuer Aufgaben abzuhelfen.

Eine zwote Absicht ist, die practische Geometrie von Seiten der Grundsätze zu bereichern. Die theoretische betrachtet den Raum blos auf eine ideale Art; man ist auf diese abgezogene Begriffe eingeschränkt und darf auf das, was den Raum ausfüllet, auf die wirkliche Welt, nicht zugleich mit sehen. Dieses thut aber die practische; und es ist ihre Pflicht, die Data in der Natur selbst aufzusuchen, und sich derselben zu ihren Absichten mit Vortheil zu bedienen. Die dritte Absicht des Verf. gehet dahin, die Genauigkeit der Ausmessung mit deren Bequemlichkeit in Verbindung

zu

zu bringen. Man weis daß man bey unzähligen Gelegenheiten mit einem sehr entfernten beynahe zufrieden ist. Gemeiniglich ist es auch leichter zu erhalten als etwas zuverläßigeres. In andern Fällen sucht man die möglichste Genauigkeit und unterzieht sich gerne der grösern Mühe die sie fordert. Zwischen diesen niedrigsten und höchsten giebt es eine Menge Mittelstufen. Es ist eine Art Feldmesser-Oeconomie, diejenige Stuffe, so für eine gewisse Absicht hoch genug ist, zu bestimmen, und das Hinaufsteigen zu erleichtern. Die Bequemlichkeit wird fast immer auf Kosten der Richtigkeit und diese auf Kosten der Bequemlichkeit erhalten. Man hat sich bisher mit gutem Erfolge bemühet, den Grad von Genauigkeit zu berechnen, den man bey diesem oder jenem Verfahren in einzelnen Fällen zu erwarten hat; es fehlt aber allerdings noch an einer Theorie, wie man nach Maasgabe der Irrthümer, die man sich verstatten will, das allerbequemste, nach Maasgabe der Mühe die man anwenden will, das allersicherste, und in beyderley Betracht das aüervernünftigste Verfahren voraus bestimmen kann. Hr. L. hat die Ordnung seiner Abhandlung diesen Betrachtungen gemäß eingerichtet, und sich vorgesezt stufenweis von dem ungefähr bis zu der grössten Schärfe zu gehen.

Der erste Abschnitt handelt also von dem Augenmaaß, als dem leichtesten aber unsichersten Mittel die Grössen zu messen. Wie sich die Mahler und andere Künstler desselben bedienen, ist bekannt. Theoretische Betrachtungen und Versuche über das deutliche und undeutliche Sehen, über das Augenmaaß und den

Grad der Genauigkeit dessen es fähig ist, hat man bisher schon auf die Feldmeßkunst angewendet, doch mehrentheils nur in der Absicht, die daher entstehende Unrichtigkeiten der würklichen Ausmessungen zu schätzen. Hr L. aber betrachtet hier das Augenmaß, in so ferne es bey Aufnehmung der Felder, die Stelle der Winkelmesser vertreten kann. Kurz, er giebt uns hier eine perspectivische Geodäsie, so wie ehemals eine geodätische Perspectivkunst. Wir werden uns nicht irren, wenn wir glauben, daß ihm die Art, wie er damals die Perspectiv abhandelte, da er nicht nur wie gewöhnlich die Puncte der Gegenstände, sondern nach Art der Feldmesser, ihre Seiten und Winkel zu Bestimmung der Bilder in Betrachtung zog, zu der jetzigen Abhandlung vom Augenmaß die erste Gelegenheit gegeben habe. Es ist uns nicht bekannt, daß jemand vor ihm den Gedanken gehabt hätte, diesen Gebrauch von dem Augenmaß zu machen, und wir glauben, daß die fernere Bearbeitung der Theorie, davon Hr. L. hier die erste Anlage giebt, überaus brauchbar gemacht werden könne.

Er stellet zuerst Betrachtungen an über die Art, wie wir uns von der Entlegenheit der Gegenstände Begriffe machen. Es ist bekannt, daß wir das Bild (den scheinbaren Ort) entfernter Gegenstände in der Luft, immer viel zu nahe setzen; der Verfasser giebt einen sinnreichen Beweis davon, und gebraucht dazu die bekannte Erscheinung, wenn die Sonne, wie wir sagen, Wasser ziehet. Aus eben diesen Gründen, nicht aus perspectivischen, leitet er das scheinbare Ueberhangen der Thürne her. Wir würden es lieber aus dem leztern erklären. Man stelle sich, in Gedanken zwi-

schen

schen zwey unendlich hohe parallele Thürne, so werden sie aus perspectivischen Gründen oben zusammen zu stossen, folglich vorwärts zu hängen scheinen, gerade so wie die parallele Reihen Bäume einer Allee sich gegen einander zu neigen scheinen. Es ist kein Grund, das was auf der senkrechten Ebene geschieht, anderst zu erklären, als wir bey der Wagrechten thun. Die falschen Urtheile über einzelne Gegenstände in der höhern Luft und über die Gestalt des scheinbaren Gewölbes rühren aus mehr als einem Grunde. Ob sich hierbey verschiedene Personen so gar gleichförmig irren können, wie Smith und der Verfasser beobachtet haben, daß sie einen gewissen Gegenstand am Himmel, einmüthig über einerley Punkt der Erde zu sehen glauben, wollen wir nicht entscheiden. Uns kam es allemal so vor, als wenn wir in Bestimmung dieses Punctes nicht einmal mit uns selbst einig werden könnten, sondern zwischen einer halben Meile mehr oder weniger ungewiß blieben.

Der Verf. kommt nun auf den Gebrauch des Augenmaßes in Nachahmung geometrischer Constructionen. Er sezt anfänglich dabey voraus, daß wir es mit einer horizontalen Ebene zu thun haben, die sich bis an den äussersten Horizont erstrekt, und über der das Auge hinreichlich erhaben ist, um den Theil, so man entwerfen will, zu übersehen. Daß man auf dieser Fläche von jedem Puncte zu jedem andern mit dem Auge eine gerade Linie ziehen, und dieselbe, wo es nöthig, auf jeder Seite bis an den Horizont verlängern könne, sind die Heischesätze dieser Feldmeßkunst der Augen. Sie lassen sich freylich am sichersten ins Werk setzen, wenn der Beobachter selbst auf dieser Linie steht; ausserdem müßte die Gegend sehr eben seyn, wenn man nicht merklich größere Fehler begehen sollte. Doch, es giebt Mittel eine Beobachtung durch die andere zu prüfen, und die Fehler, so weit man es nöthig findet, zu vermindern; und am Ende erwartet man auch nicht die Richtigkeit so gute Werkzeuge geben. Das übrige der Theorie beruhet auf folgenden Lehrsätzen: Wenn man parallele Linien bis an den Horizont (bis an einen, nach Maasgabe der Schärfe die man verlangt, mehr oder weniger entfernten Ort) verlängert, so scheinen sie daselbst in einen Punkt zusammen zu treffen. Eben so umgekehrt. Man kann also mit jeder gegebenen Linie, aus jedem gegebenen Punct, eine Parallellinie mit dem Auge ziehen. Hieraus ergiebt sich ein Mittel, die mit dem Auge gezogene Linien zu prüfen, ob sie gerade worden sind. Hierauf folgen einige Aufgaben. Damit man sich einen vorläufigen Begrif von dieser Feldmeßkunst machen könne, so wollen wir die Auflösung der ersten hieher setzen, aber nicht, wie der Verfasser, einen Meßtisch dabey gebrauchen, um einigen Lesern die Frage zu ersparen: Wozu soll der Meßtisch, wenn das Aug die Stelle der Instrumente vertritt? Es soll also ein gegebenes Dreyek ABC aufgenommen, oder auf dem Felde ein ihm ähnliches kleines abc abgesteckt werden: Auf der Stelle, wo man es abstecken will, erwählt man nach belieben einen Punkt a, verlängert AB und AC mit dem Auge bis an den Horizont, und zieht nach diesen Punkten des Horizonts auch Linien von a aus; so wird die eine mit AB, die andere mit AC parallel seyn. Auf jener nehme man einen beliebigen

bigen Punkt b, und ziehe durch ihn (auf die vorige Art) eine parallele mit BC; wo sie die mit AC parallel gezogene durchschneidet, da bestimmt sich die dritte Ecke c des zu construirenden Dreyeckes. Es versteht sich von selbst, daß man nun erst eine Seite messen müsse, um den Maßstab zur kleinen Figur zu bekommen. In den Anmerkungen zeigt Hr. L., wie man diese Figur prüfen und so viel man will verbessern kann. Es ist offenbar, daß sich eben so mehrere Punkte, folglich eine jede Figur, aufnehmen lassen. Will man sich nicht, wie vorhin, an einen Stand binden, so giebt es noch andere Mittel, den Abstand der Oerter, mit Hülfe des Augenmaßes auszumessen, davon einige angeführet werden.

In dem folgenden S. 36. betrachtet Hr. L. den Nutzen, den man von Verlängerung solcher Linien haben könnte, die auf dem Horizont einen Winkel machen. Was er darüber gefunden, hält er selbst noch für allzu unreif; es würde aber eine solche Theorie sehr wichtig seyn, und uns in Stand setzen, den Abstand aller Oerter, die man auf dem Felde vor sich siehet, an den Himmel abzumessen, ohne sich von der Stelle zu bewegen. Das wäre freylich mehr als man verlangen kan; ein kleiner Umstand aber, daß die Theorie wahrscheinlicher Weise auf eine unmögliche Forderung gegründet ist, verdirbt die ganze Freude. Es kommt nemlich darauf an, ob wir von jeden Punct des Himmels, mit dem Auge eine senkrechte Linie bis zur Erdfläche, und hinwiederum aus jedem Punct der Erdfläche eine Verticallinie bis an den Himmel ziehen können? Hr. L. trägt dieses als einen Heischesatz vor und rechtfertigt sich mit dem Beyspiel Euclids, der auch fordert, daß man seine Postulata verrichten könne, ohne daß er zeigt wie es geschehen müsse. Unsers erachtens war es nicht nöthig den Euclid hier zu bemühen; es ist nicht die Frage ob Euclid Heischesätze gemacht habe, sondern ob er obigen Satz zum Heischesatz würde gemacht haben? Hr. L. versichert aus seiner Erfahrung, wenn man von einen Punct der Erde mit dem Auge gerade aufwärts fährt, so scheine es, als wenn das Aug an den Punct des Himmels, der unsrer Meynung nach gerade über jenen liegt, anstosse, und sich weigere die Linie noch mehr zu verlängern; die Sache sey also möglich, wie sie aber geschehen solle, das müsse jeder für sich wissen. Wir wissen es, aufrichtig zu reden, nicht; doch der Fehler kan an uns liegen. Weil also, schliesst Hr. L. weiter, einem jeden Abstande auf der Erdfläche ein ihm eigener Punct und eine ihm zugehörige Erhöhung entspricht; so darf man nur eine Tabelle über die Elev. Winkel der Puncte am Himmel, und die ihnen zukommende Punkte auf der Erde, nach den Datis einer würklich vorgenommenen Messung, ein für allemal verfertigen, und sie alsdenn bey jedem andern Fall zu rathe ziehen. Sie wird uns folglich sagen: Dieses oder jenes Dorf, das du vor dir liegen siehest, muß so und so weit von dir entfernt seyn, weil der Punct am Himmel, der dir über dem Dorfe zu liegen scheint, nach Aussage deines Winkelmessers, diese oder jene Elevation hat. Wir funden hierbey diese Bedenklichkeit: Der Zuschauer bestimt den Punct am Himmel, nach dem Begriff den er von der Lage des Punctes auf der Erde hat; warum soll er sich nicht lieber an diesen Begriff unmittelbar hal-

halten, sondern seine Land-Charte erst an den Himmel mahlen, um sie von dort wieder abzucopiren? Warum mißt er nicht lieber die inclinat. Winkel, unter denen er die Punkte auf der Erde siehet, und schließt daraus gerade zu auf ihre Entlegenheit? Am Ende folgt eine kurze Tabelle von dem Abstand einiger Oerter in der Erhöhung der ihnen am Himmel zugehörigen Puncte. Für 1000 Fuße kommen 28 ½ Grad, für 12000 Fuße 8 ½ Grad.

Der 2te Abschnitt S. 52. handelt von dem, was man in der Figur als bekannt annehmen kan. Die Data der practischen Geometrie fliessen aus drey Quellen, aus den Gesetzen der Natur, den Werken der Kunst, und der Geometrie. Der Verf. geht sie in den folgenden Abschnitten mehrentheils einzeln durch. Wir wollen ihm hierin folgen und von dem was uns vorzüglich merkwürdig scheinen wird, eine kurze Nachricht geben.

Der 3te Abschnitt S. 61. betrifft die Mittagslinie. Der Verf. bedient sich ihrer ohngefähr so, wie man die Bussole zum Feldmessen gebraucht. Bey Fällen, die keine gar grosse Schärfe erfordern, schlägt er zu Bestimmung der Mittagslinie eine oder andere darzu eingerichtete Sonnenuhr vor. Es rührt aber der Nutzen dieser Linien nicht daher, weil sie eben Mittagslinien sind, sondern weil sie einander parallel sind; Man kan also von jeden andern Linien, die nach einen hinreichlichen entfernten Punct zusammen lauffen eben den Gebrauch machen. Ueberhaupt erspart die Mittagslinie die würkliche Ausmessung eines Winkels an entfernten Orten, folglich die Mühe dahin zu gehen.

Dieses wird in einigen Aufgaben gezeigt; hauptsächlich wie man sich der bekandten Abweichung einiger entfernten Gebürge bedienen kann, ein ganzes Land, wo man sie aller Orten sieht, in Grund zu legen, wenn man nur dadurch reiset. Die bekannte schöne Aufgabe, aus der gegebenen Lage dreyer Gegenstände die Lage eines vierten zu finden, aus dem man die Winkel, unter denen jene erscheinen, gemessen hat, ist hier nicht vergessen. Es werden Geometrische, Trigonometrische und Analytische Auflösungen davon gegeben. Wir wollen noch eine mechanische hinzufügen, die wir, weil sie einfacher ist als die Geometrische, eben deswegen auch schärfer befunden haben: Man zieht auf den Meßtisch aus einem Punct die 3 Linien nach den bekannten Gegenständen; alsdenn fasset man das beliebig verkleinerte Dreyek so diese Gegenstände machen, (und die Aufgabe als gegeben voraus setzet) in einen dreyschenkeligen Zirkel, und setzet ihn so auf den Meßtisch, daß jede Spitze auf der ihr zugehörige Linie zustehen kommt. Der Versuch wird keine Minute dauren. Hierdurch bekommt der anfänglich auf den Tisch erwählte Punct eben die Lage zu den 3 übrigen, wie der Standpunct zu den 3 bekannten Objecten hat. Hr. L. schlägt ein besonderes Werkzeug zu der Aufgabe vor; welches aber bey beschwerlicherem Gebrauch, doch lange nicht die Richtigkeit haben wird, wie der Meßtisch und dreyspitzige Zirkel. Die lezte Aufgabe ist eine Anwendung der vorigen auf 6 Puncten, sie kann ohne Figur nicht wohl verstanden werden.

Der 4te Abschnitt S. 83. lehret, wie man sich eines und des andern entfernten Gegenstandes und der dahin ge-

gezogenen Linien, statt der Mittagslinien, zu Aufnehmung der Felder bedienen kann. Es sind dabey 5 Fälle in Betrachtung gezogen auf die wir uns nicht einlassen können. In der Einleitung dazu wird die Ungewißheit berechnet, die daher entstehet, daß man dabey Linien für parallel ansieht, die doch nach einen mehr oder weniger entfernten Punkt zusammen lauffen.

Fünfter Abschnitt S. 112. Die verticale Linien und Flächen haben den Vorzug vor der Mittagslinie, daß sie sich leichter bestimmen lassen; ihr Gebrauch ist aber eingeschränkter und findet mehr Hindernisse. Wie senkrechte Höhen aus andern ebenfalls senkrechten oder wagrechten Linien die man würklich misset, mit Hülfe eines oder mehrer Dreyecke gefunden werden, ist bekannt. Man kan aber auch umgekehrt, vermittelst der Vertical-Linien, horizontale messen und mit einander vergleichen. Es entstehen dabey viele Aufgaben, je nachdem man andere Umstände zusammen paaret. Verschiedene davon sind hier analytisch aufgelöset, mit Beyfügung der geometrischen Constructionen. Zum Beyspiel: Man befindet sich zwischen zwey Thürnen oder andern senkrechten Gegenständen, entweder in einerley Fläche mit ihnen, oder in verschiedenen; so kann man mit Hülfe etlicher, aus zwey Standpunkten gemessener Winkel, die Lage dieser Standpunkte in Absicht auf die senkrechten Gegenstände und ihrer Punkte, so man bey den Winkeln gebraucht hat, bestimmen.

Sechster Abschnitt, S. 144. Die Sonne ist so weit von uns entfernt, daß wir ihre (unsre Messung bescheinende) Strahlen, als parallel ansehen, und uns des Schattens zu verschiedenen Aufgaben bedienen können. Noch ein besonderer Gebrauch läßt sich von den Sonnenstrahlen machen, wenn man genau auf die Zeit Achtung giebt, da sie die Wände eines Gebäudes anfangen zu bescheinen. Dadurch läßt sich die Richtung des Gebäudes bestimmen, und ein großer Theil einer ganzen Stadt ziemlich genau in Grund legen, wenn man einen Tag lang auf einen hohen Thurn zubringen will. Man kann sich auch bekannter Sterne dazu bedienen, wenn man mit Hülfe eines Senkbleyes beobachtet, um welche Zeit sie über diesen und jenen Gegenstand senkrecht zu stehen scheinen. Daß man den Mond dabey nöthig hat, bedarf wohl keiner Erinnerung.

Siebenter Abschnitt, S. 153. Die Reflexion des Lichts giebt zween gleiche Winkel. Dieses hat zu einigen bekannten Aufgaben Gelegenheit gegeben. Es wäre zu wünschen, daß man auch bey horizontalen Winkeln Gebrauch davon machen könnte. Der Verf. giebt, bloß die Möglichkeit zu zeigen, zur Belustigung ein paar Mittel an die Hand, gedenket aber nichts von einem sehr schäzbaren Gebrauch, den man von den Spiegeln bey Schiffs-Astrolabiis schon würklich machet, und der bey Messung eines Winkels, zwey Beobachtungen, die wegen Bewegung des Schiffes oft unmöglich werden, in eine einzige verwandelt.

Achter Abschnitt, S. 159. Die Brechung des Lichts hat ebenfalls ihre genaue Gesetze, die man aber noch nicht unmittelbar zu Bestimmung der Entfernungen angewendet hat. Denn der Einfall, den Gebrauch der Cameræ obscuræ und der Fernröhren umzukehren

ren, ist mehr sinnreich als nüzlich, doch liesse sich erstere zu Bestimmung der Winkel anwenden, deren Tangenten die Bilder der Gegenstände andeuten.

Neunter Abschnitt S. 165. Weil wir wenig irrdische Dinge haben, deren Bewegung gleichförmig genug wäre, so kann man ausser dem Echo, dem Knall des Donners und der Geschütze, schwerlich andere Data von dieser Art finden. Der Verf. zeigt umständlich wie man sich der Donnerwetter zu Verbesserung der Geographie bedienen kann. Wenn man an zween Orten (die bis auf 40 Meilen von einander liegen können) einerley Bliz und dazu gehörigen Donner beobachtet, so kann man aus der verschiedenen Länge der dazwischen verflossenen Zeit, ihre Lage bestimmen. Da es in einer Nacht unzähligemal blitzen kann, so lassen sich diese Beobachtungen desto besser mit einander vergleichen. Man muß dabey auch die Zeit anmerken, die von einem Bliz zum andern verflossen ist, damit beede Beobachter aus Zusammenhaltung dieser Reihe von Intervallen sehen können, welche von ihren Beobachtungen einerley Bliz betreffen, und also zusammen gehören. Am Ende giebt der Verf. noch ein paar Anlässe zu Belustigungen von einer ruhigern Art, indem er zeigt, wie man zu seinem Fenster hinaus, den Weg eines im Felde herumgehenden Menschen oder Wagens, oder auch zweyer Schiffe, nach der Art wie die Laufbahn der Cometen bestimmt wird, aufnehmen könne.

Zehnter Abschnitt S. 180. Eines rechtwinkeligen Vierecks kann man sich, ohne die Verhältniß seiner Seiten zu wissen, zu einer überaus artigen Aufgabe bedienen: Aus einem beliebigen Standpunkte visire

man

man nach den vier Ecken, und messe die Winkel, unter denen man die Seiten siehet; so läßt sich durch eine leichte trigonometrische Rechnung, noch ein gewisser Winkel finden, mit dessen Hülfe man alles übrige in der Figur, nemlich die Verhältniß aller acht Linien, die zwischen den fünf Punkten liegen, und die noch fehlende Winkel, bestimmen kann. Herr L. begnügt sich aber nicht mit diesem besondern Fall, sondern giebt nachher die Aufgabe in ihrer größten Allgemeinheit, indem er zeigt, wie man sich eines jeden auch irregulairen Viereckes, von dem gar nichts gegeben ist, zu ihrer Auflösung bedienen kann. Man braucht dabey vier Stände, aus denen man die Winkel messen muß; allein das merkwürdige dabey ist, daß diese Stände von einander unabhängig sind, und man aus jedem die andern nicht zu sehen braucht. Die analytische Auflösung führte den Verf. anfänglich auf Gleichungen vom 8ten oder 16ten Grad; er fand aber auch eine vom zweeten, die er hier mittheilet und durch ein Beyspiel erläutert. Diese sehr sinnreiche Aufgabe kann man unter andern gebrauchen von einem längs der Küste hinseegelnden Schiffe aus, die merkwürdige Gegenstände auf dem Land, und zugleich den Weg des Schiffes in Grund zu legen. Noch eine Aufgabe, auf vier Linien von gegebener Lage ein gegebenes Quadrangel zu beschreiben, wird auf die Beobachtung der Cometen angewendet.

Der 11te Abschnitt, S. 199. handelt von 3 und 4 Punkten, die auf einer geraden Linie liegen, und untersucht, in wie ferne die verschiedene Stände, aus denen man sie (in ähnlichen Absichten mit den vorher-

ge-

gehenden) beobachtet, von einander unabhängig seyn können oder nicht. Manche Fälle geben so weitläuftige Gleichungen, daß die Aufgabe, wie Hr. L. selbst erinnert, dadurch unbrauchbar wird.

Die übrige 5 Abschnitte untersuchen die Schärfe, die man in jeden Ausmessungen erreichen kann.

Der 12te Abschnitt betrachtet die Fehler im observiren überhaupt. Sie theilen sich in folgende Classen: Fehler so man vorsezlich zuläßt, Fehler die von dem Instrumente, von dessen unrichtiger Stellung, von dem Auge, von der Inflexion des Lichtes herrühren.

Der 13te Abschnitt S. 228. giebt eine Theorie von den Folgen der Fehler. Ihre Absichten sind, den Grad der Zuverläsigkeit des Grundrisses, die Auswahl der Umstände, welche die Theorie des Feldmessens willkührlich läßt, die Vorsichtigkeit im vor- und nachgeben zu bestimmen. Die Fehler können in Vergleichung der ganzen Winkel und Seiten, als unendlich klein angesehen werden; Man darf also die höhern Dignitäten in der Rechnung weglassen, und das macht sie der Differential-Rechnung vollkommen ähnlich. Der Verf. giebt zu erst 3 allgemeine Formeln von den Folgen der Fehler im Dreyeck.

Im 14ten Abschnitt S. 356 betrachtet er die Folgen in zusammengesezten Umständen. Weil hier die Differential-Gleichungen, nur immer von ersten Grad sind, so lassen sich die Differential-Größen der Linien und Winkel, die man nur als Hülfsmittel angenommen, auf eine nothwendig mögliche Art wegschaffen. Gesezt also, die Gleichungen für die Linien und Winkel

selbst

selbst wären nicht aufzulösen, so können doch die von ihren Fehlern aufgelöset werden, und das macht die Berechnung der Fehler leichter und weit ausgedehnter, als die Berechnung der Größen selbst zu denen sie gehören. Hr. L. zeigt dieses in der Anwendung auf verschiedene seiner vorhin gegebenen Aufgaben.

Funfzehnter Abschnitt S. 274. Die Auswahl der Standlinien, in Absicht des möglichst kleinsten zu besorgenden Fehlers. Hr. L. hat nicht finden können, daß sie sich auf eine allgemeine Art bestimmen liessen. Die Weitläuftigkeit der Rechnungen würde sie vollend unbrauchbar machen; daher hat er lieber Constructionen vorgenommen. Ueber dieses kann man nicht einmal die zuverläßigste Standlinie wählen, ehe man die Figur schon vorläufig, mit einer auf gerathe wohl angenommenen Standlinie, ziemlich genau entworfen hat.

Sechzehnter Abschnitt S. 296. Das Mittel zwischen den Fehlern. Diese Betrachtungen sind überaus scharfsinnig und dabey brauchbar. Es wird aus der Art, wie die Fehler in die Messung kommen, durch Schlüsse und angestellte Versuche gezeigt, in welcher Verhältnis die kleinen öfter vorkommen als die grössern. Man kann sich eine krumme Linie gedenken, derren abscissen (vom Mittelpunct der Achse an) die Fehler, und deren Ordinaten die Möglichkeit oder Wahrscheinlichkeit dieser Fehler vorstellen. Wenn man eine Messung wiederholt, um das Mittel aus dem Gefundenen zu nehmen, so kommt es dabey schlechterdings auf den Grad der grösten Wahrscheinlichkeit an. Diejenige Beobachtungen sind der wahren Größe am nächsten, die am häufigsten vorkommen u. s. f.

II. Ab-

II. Abhandlung, die Visierkunst der Fässer. S. 314.

Die veränderliche und unrichtige Gestalt der Fässer leidet unstreitig keine große geometrische Schärfe, und ist also auch aus diesem Grunde kein Gegenstand, der es verdient oder genugsam belohnt, daß sich die höhere Meßkunst und Analysis gar sehr um ihn bemühe. Der Verf. giebt für volle Fässer zwey Methoden, davon die eine zu viel und die andere zu wenig giebt. Aus beyden entstehet durch Vereinigung die dritte. Bey der ersten addirt man den äussersten Cylinder doppelt genommen zu dem innern; von der Summe nimmt man den dritten Theil. Bey der zwoten nehme man die Spunttiefe vierfach, addire dazu die Durchmesser der Böden, der sechste Theil der Summe giebt beynahe den Diameter eines Cylinders von gleicher Länge und gleichem Inhalte mit dem Faß. Bey einem nicht vollen, liegenden Faß, gedenket man noch einen dritten parallelen Boden durch das Spuntloch. Was an diesem benezt würde, nimmt man vierfach, und addirt dazu die Abschnitte, so an den äussern (würklichen) Böden benezt werden. Der sechste Theil der Summe mit der Faßlänge multiplicirt, giebt den Inhalt, so weit es angefüllet ist. Es werden aus Messungen und Rechnungen entstandene Tabellen dazu gegeben, und mit einander vergleichen. Ihr größter Unterschied ist bey 1200. Maßen nur $9\frac{1}{2}$. Endlich wird auch die Einrichtung der Visierstäbe gezeigt.

III. Abhandlung, Anmerkungen und Zusätze zur Trigonometrie, S. 369.

Die Trigonometrie kann wegen ihrer Vollständigkeit andern Wissenschaften zum Muster dienen. Sie erschöpft alle mögliche Fälle. Es lassen sich keine neue mehr erdenken; aber wohl die Auflösungen der Aufgaben schöner und kürzer machen. Bey dem rechtwinkeligen sphärischen Dreyek kommen in allem 30. Fälle vor. Sie lassen sich aber auf 10. oder auch auf 6. bringen. Man erweiset die zur Auflösung gebrauchte Verhältniß von jedem besonders. Nepper kam auf den Einfall diese 10. Auflösungen untereinander zu vergleichen und brachte sie auf zwo Regeln. Den Beweis für jede mußte man in 5 Theile zerfällen, und je einen Theil aus dem andern darthun. Der allgemeine Beweis sezt die Verwandlung der Seiten in Winkel und dieser in jene voraus. Es entstehen daher 5 Dreyecke, da von jedem die Seiten und Winkel in die Seiten und Winkel vom folgenden verwandelt werden. Ein Versuch hat dem Verf. gelehrt, daß diese 5 Dreyecke auf der Kugelfläche hintereinander liegen, und um die Kugel einen Kreyß schliessen. Jede Linie und Winkel des ersten Dreyeckes hat in jedem der übrigen eine besondere Stelle; folglich stellen sie alle mögliche Verwandlungen vor. Sie werden durch 5 Zirkel bestimmt. Die 5 Hypotenusen machen ein Fünfek so innerhalb der Dreyecke liegt. Die Fläche der 5 Dreyecke und die gedoppelte Fläche dieses Fünfeckes, zusammen genommen, machen allemal $\frac{1}{2}$ von der ganzen Kugelfläche u. s. f. Hr. L. vermuthet, daß unter so vielen Uebereinstimmungen noch verschie-

dene

dene allgemeine Gesetze verborgen liegen, hat aber, ausser dem Beweis der nepperischen Regel, noch kein anderes entdecken können. Die schiefwinkelichen Dreyecke kann man nicht auf so einfache Regeln bringen. Der Verf. sezt 38. bereits bekannte Formeln oder trigonometrische Lehrsätze voraus; und zeigt alsdenn, daß in allem 60. Fälle von Aufgaben möglich sind, die sich aber dadurch sehr in die Kürze ziehen lassen, wenn man theils den Unterschied zwischen dem bekannten und unbekannten wegläßt, theils nur auf die Ordnung siehet, wie diese vier Theile auf einander folgen, und den Unterschied zwischen Seiten und Winkeln beybehält. Denn auf diese Art bleiben nur 4 Fälle. S. 397. werden die vier allgemeine Formeln zu allen schiefwinkelichen sphärischen Dreyecken gegeben, wo man weiter nichts sucht, als das Verhältniß zwischen jeden vier gegebenen Stücken eines Dreyeckes. Die drey ersten sind irrational; es wird aber S. 399. gezeigt, wie man das irrationale ausdrücken kann. Wenn man (S. 411.) in einem vorkommenden Fall mit Zahlen zu rechnen hat, so finden sich unter den bisher gegebenen Formeln wenige, bey denen man füglich Logarithmen gebrauchen konnte. Dieser Unterschied macht, daß man sich nicht mehr mit vier Fällen begnügen kann, sondern deren zwölf machen muß; bey achten davon sind ein Perpendicul und zwo Analogien nöthig. Hat man (S. 418.) Tabellen zu berechnen, so kann durch eine schickliche Vorbereitung in verschiedenen Fällen eine davon erspart werden, wie der Verf. in einigen Anwendungen zeigt.

IV. Abhandlung. Theorie der Zuverläßigkeit der Beobachtungen und Versuche S. 424.

Da sich bey der Ausübung an keine geometrische Schärfe gedenken läßt; so hat man schon längst angefangen sich der Wahrheit dadurch zu nähern, daß man aus vielen Beobachtungen das Mittel nimmt. Die allgemeine Grundsätze dabey hat der V. schon in seiner Photometrie vorgetragen; er sezt sie hier voraus und hat gegenwärtig nur zur Absicht, diejenige schwerern Fälle, bey denen zusammengehörende Versuche in ganz verschiedenen Umständen angestellet sind, auf Gründe zu bringen. Man hat dabey immer zwo veränderliche Größen, die man als Ordinaten und Abscissen ansehen kann. Wären die Beobachtungen völlig genau; So würden sie, als Ordinaten betrachtet, eben so viele Punkte zu Bestimmung einer geraden oder krummen Linie geben. Da sie es aber nicht sind; so kommt es darauf an, diese Linie so zu ziehen, daß sie von der wahren so wenig als möglich abweicht. Ist die wahre Linie durch keine Theorie bestimmt, so bleibt nichts übrig, als sie durch die Punkte von freyer Hand zu ziehen, und die zwischen den observirten Ordinaten fallende übrige Ordinaten, so genau als man kann, durch Construction zu bestimmen; ist aber ihr Gesez bekannt, so läßt sich methodischer dabey verfahren. Der leichteste Fall ist, wenn sie gerade ist, und dabey fängt Hr. L. an. Er ziehet sie so, daß sie von der observirten auf beyden Seiten gleiche Summen von Abweichungen giebt; folglich durch den Mittelpuukt der Schwere aller observirten (gleich-schweren) Punkte gehet; es muß aber hierbey die Neigung dieser Linie ent-

we-

weder aus der Verhältniß der Abscissen und Ordinaten bekannt seyn, oder dadurch gefunden werden, daß man die Versuche in zwo gleich-grosse Classen theilt, von jeder den Schwerpunkt besonders suchet, und alsdenn die Linie durch diese zween Schwerpunkte legt. Diese Methode wird auf analytische Ausdrücke gebracht, und alsdenn durch Beyspiele erläutert. Hr. L hat dazu die Zeit der Nachtgleichen und Sonnenwenden erwählt, wie sie aus denen vom Hrn. Cassini mitgetheilten Beobachtungen fliessen. Er findet die Frühlingsnachtgleiche von 1672. um 48 Min. 9 Sec. früher als sie Cassini ansezt, und das jährliche Fortrücken 9 Min. $55\frac{1}{8}$ Sec.; die Herbstnachtgleiche von 1682 um 4 Min. 6 Sec. später, und das Fortrücken 12 Min. $18\frac{3}{4}$ Sec. Die Sonnenwende im Sommer 1672 findet er um 18 Min. $33\frac{1}{2}$ Sec. später als die beobachtete, und ihr jährlichs Fortrücken 12 Min. Die Winter-Sonnenwende von 1684 um 1 Min. 13 Sec. später, und ihr Fortrücken 10 Min. $22\frac{1}{3}$ Sec. u. s. f.

S. 453. betrachtet Hr. L. die Fälle, wo die Linie krumm ist, die das Mittel zwischen allen Beobachtungen geben soll. Sie theilen sich in zwo Classen, nach dem der Anfang der Abscissen bekannt oder unbekannt ist. Bey jener lassen sich mehrentheils die Abscissen so verwandeln, daß man statt der krummen Linie eine gerade gebrauchen kann. Zum Beyspiel wird die veränderliche Länge des Penduls genommen und mit Hülfe der besten neuern Beobachtungen eine gerade Linie construirt, deren Gleichung die Länge des Penduls für jede Polhöhe giebt. Vergleicht man damit die Beobachtungen und lässet diejenige, so allzusehr davon abweicht hinweg, (wie Hr. L. auch bey den vorhin angeführten Rechnungen immer gethan hat) so ergiebt sich die wahrscheinlichere Formel für die Länge des Penduls auf jede Polhöhe $\lambda = 439,100 + 2,5$ Sin. λ^2. Ein zweytes Beyspiel ist von den veränderlichen Graden der Breite hergenommen. Hr. L. findet den Grad unter dem Pol $= 57445$, und überhaupt den Grad einer gegebenen Breite $\lambda = 56703 + 742$. Sin. λ^2. Das dritte Beyspiel betrift die Messung der Höhen mit Hülfe des Barometers. Wenn die mitlere Barometer Höhe eines Ortes Z ist (nach Linien ausgedrukt) so ist seine Höhe über der Meeresflache $= 9856$. log. $\frac{335}{Z}$, in Toisen.

Ferner komint Hr. L. S. 465. auf den Fall, wo weder die Ordinaten noch Absciſſen selbst, sondern nur ihre Unterschiede durch die Beobachtungen gegeben sind. Die Rechnung wird hier ungleich weitlauftiger. Die beobachtete Absciſſen und Ordinaten müſſen in solche verwandelt werden, welche die Gleichung für die krumme Linie erfordert; es ist eine gewisse Anzahl von Punkten nothwendig, sonst bleibt die Aufgabe unaufgelöst, u. s. f.

Zum Beyspiel gebraucht der Verf. die Geschwindigkeit der Erkältung eines mit Weingeist gefüllten Thermometers in freyer Luft zu finden, dessen Kugel einen Durchmesser von gegebener Größe hat. Es ist das einzige, wozu er angestellte Versuche gefunden hat.

Endlich (S. 475.) giebt es noch unzählige Fälle, wo man gar keine Gleichung für die krumme Linie hat und sie gleichsam aus freyer Hand zeichnen muß. Das merk-

merkwürdigste Beyspiel davon ist die Aenderung in der Abweichung der Magnetnadel. Ein anderes Beyspiel geben die Sterberegister. Die Natur dieser ultimæ lineæ rerum ist unbekannt. Hr. L. hat sie auf einen grossen Bogen Papier gezeichnet und gefunden, daß sie zween Wendungspunkte hat, bey denen also die Sterblichkeit grösser ist als vor und nach. An dem einen Ende, welches für den Eintritt in das Leben gehört, berührt sie die Ordinate, da ist also der Grad der Sterblichkeit absolut; doch bleiben die meisten Kinder am Leben, weil sich die krumme Linie zu gutem Glük, augenbliklich sehr stark wendet. An dem andern Ende wird sie asymptotisch, und man kann nicht angeben, ob und wo sie ganz aufhört; doch die Ordinate für ein Alter von 150 Jahren ist schon fast ein unendlicher kleiner Bruch, und dieses macht die Hofnung einer gänzlichen Unsterblichkeit ziemlich unwahrscheinlich. Uebrigens lassen sich an dieser Linie ohne Schwierigkeit Tangenten ziehen, so viel man will, und die dazwischen liegende Stücke können mit Stücken von osculirenden Parabeln verwechselt, und so ohne merklichen Irrthum, durch Gleichungen ausgedrükt werden.

Y.