



SOLUTION GÉNÉRALE ET ABSOLUE
DU
PROBLEME DE TROIS CORPS
MOYENNANT DES SUITES INFINIES.

PAR M. LAMBERT.

§. I.

Le probleme dont il s'agit dans ce Mémoire seroit sans contredit tout aussi fameux que celui de la quadrature du cercle, s'il avoit été connu depuis le tems des anciens Géometres Grecs, & si ce qui en fait le sujet étoit autant à la portée de tout le monde que l'est la figure d'un cercle. Cette double différence diminue sa célébrité, mais elle fait en échange, que tandis que la quadrature du cercle fait l'objet des recherches des plus ignorans, le probleme des trois corps n'occupe que ceux qui sont le plus versés dans les calculs, & qui, sans se repaître, comme les premiers, de quelque solution fautive & illusoire, se bornent à accuser le calcul intégral du peu de succès de leurs recherches. Ils se désistent de la quadrature du cercle, & je crois qu'ils se désisteroient également du probleme des trois corps, si on pouvoit leur démontrer que ces deux problemes doivent, à cet égard, être rangés dans une même classe. Il me semble que c'est par cet examen qu'il faut commencer. Tâchons donc de parler raison sur ce qu'il faut trouver, avant qu'on puisse dire que le probleme de trois corps est résolu.

§. 2. D'abord je remarque qu'il ne s'agit pas des formules différentielles. Celles par où il faut commencer, & qui sont du second degré, se trouvent sans peine, non seulement pour trois corps



mais pour un système d'autant de corps qu'on voudra. Ensuite il ne suffit pas de tirer de ces formules quelques autres, qui ne donnent que la loi de la conservation des forces vives, ou celle des aires proportionnelles au tems, ou quelque autre loi semblable, qui, pour s'étendre sur tout le système, nous laisse absolument ignorer le mouvement de chaque corps en particulier. Enfin, quand même on parviendroit à déterminer séparément la vitesse de chaque corps par les distances, il y auroit encore plus d'un pas à faire pour parvenir à la solution complète, qui demande que *la position des corps, leurs vitesses & leurs directions étant données pour un certain moment, on puisse assigner la position, les vitesses & les directions pour un autre moment quelconque donné.* Cette question est la principale. Elle touche immédiatement à l'usage qu'on veut faire du problème, & toutes les autres questions s'y réduisent aisément.

§. 3. Mais cette question est-elle résoluble? On dira sans doute qu'elle l'est, parce que non seulement le problème est déterminé, mais parce que les formules différentielles, desquelles la solution dépend, sont trouvées, de sorte qu'il ne s'agit que d'en chercher les intégrales. Mais quelles intégrales? Veut-on que ce soient des formules finies? Je démontrerai qu'il n'y en a point, & que toutes celles qu'on pourra encore trouver ne suffisent pas pour rendre la solution complète. Tout ce qu'il y aura à faire, revient donc à ce qu'on a fait par rapport à la quadrature du cercle, c'est d'avoir recours à des suites infinies; & la question se réduit à en trouver qui soient convergentes & traitables. Voilà en quoi ces deux problèmes, quoique différemment fameux, se ressemblent parfaitement.

§. 4. Je le répète, *la solution n'est complète & absolue, que lorsque toutes les circonstances du système peuvent être déterminées directement pour un moment quelconque, en n'employant que le tems écoulé depuis le moment qu'on a fait servir de base dans le calcul, & qui par là tient lieu à l'époque.* Car, à considérer les formules différentielles & la façon dont elles semblent devoir être traitées, il paroît que, quand même



me elles seroient intégrables à tous égards, on trouveroit plus facilement les vitesses exprimées par les distances, qu'on ne trouveroit le tems exprimé par les vitesses ou par les distances, & qu'encore le tems se trouveroit plus facilement par les autres circonstances, que ces circonstances ne se trouveroient par le tems. C'est cependant ce dernier but qu'on doit se proposer, parce que c'est celui que l'usage du probleme demande. On sait qu'il en est de même dans le cas où on ne considere que deux corps. Depuis Kepler, la grande question étoit toujours de trouver *directement*, non l'anomalie moyenne par la vraie ou par les distances, mais *l'anomalie vraie par la moyenne, qui représente le tems*. Question, qui n'a été résolue & qui ne le sera que par des suites infinies, par des approximations, par des interpolations, ou par d'autres manieres indirectes.

§. 5. En viendra-t-on mieux à bout, lorsqu'au lieu de deux corps on en suppose trois ou plusieurs? Je réponds d'abord ce que tout Géometre répondra, qu'il n'est gueres probable. Mais supposons, par exemple, pour le cas de trois corps, toutes les intégrations des formules différentielles faites. Que les intégrales ayent une forme quelconque, mais qu'elles soient réduites en sorte qu'elles expriment la position des corps par le tems. Que dans ces formules la masse d'un des trois corps soit faite $\equiv 0$, de même que les autres coefficients qui s'y rapportent. Il est clair que par là elles seront simplifiées de beaucoup; peut-être même que plusieurs termes & quantités transcendantes disparoîtront. Mais voyons ce qui reste. Les formules ainsi simplifiées seront pour le cas de deux corps. Elles exprimeront la position de ces deux corps par le tems, c'est à dire les distances & les anomalies vraies par les moyennes; c'est à dire, encore que ces formules seront des suites infinies, & qui plus est, des suites infinies simplifiées. Remettons maintenant le troisieme corps, & il est clair que tous les termes qu'on avoit anéantis, se remettront aussi, & que non seulement les formules qui expriment la position des trois corps par le tems, seront des suites, mais même des suites beaucoup



plus compliquées que celles qui dans le cas de deux corps expriment leur position par le tems, ou l'anomalie vraie par la moyenne. Il ne fera pas difficile d'appliquer ce même raisonnement à un système d'un nombre de corps quelconque. La position de ces corps ne pourra être exprimée par le tems, si ce n'est par des suites infinies, qui seront d'autant plus compliquées, que le nombre des corps fera plus grand.

§. 6. Tournons maintenant le cas du probleme, & sans avoir égard à ce qui en rend la solution complete & absolue, supposons une solution telle, qu'elle détermine les distances par les angles, ou les angles par les distances. Il est clair qu'une semblable solution aboutit uniquement à nous faire connoître la nature des courbes que les corps parcourent. C'est ainsi p. ex. qu'on fait, que lorsqu'il n'y a que deux corps dont le centre commun de gravité est en repos, ces corps parcourent des sections coniques. Mais quelles seront les courbes, ou les orbites, lorsqu'il y a trois ou plusieurs corps? On prévoit bien que ce pourront être des courbes à double courbure, & que le probleme, proposé dans sa plus grande universalité, doit s'étendre jusques sur les cas les plus compliqués. Or on ne sauroit disconvenir que les courbes à double courbure ne soient encore peu connues. Il n'en étoit pas de même des sections coniques pour le cas de deux corps. On en connoissoit un grand nombre des plus belles propriétés, bien longtems avant de savoir qu'on pouvoit en faire usage dans l'Astronomie théorique. Mais il s'en faut de beaucoup qu'on trouve les mêmes avantages par rapport au probleme de trois corps. Car, quand on pourroit parvenir à trouver des équations qui nous fassent connoître la nature des orbites, quelle apparence y a-t-il que ces orbites seront des courbes connues depuis long tems, tandis que ce que nous connoissons des courbes à double courbure se réduit à fort peu de chose, & qu'il n'y en a peut-être aucune, qui pour être mieux connue ou plus intéressante ait mérité un nom.

§. 7. A considérer les formules différentielles par où le calcul commence, la différentielle du tems, ou pour mieux dire, le quar-
ré



ré de cette différentielle se trouve dans toutes d'une même façon, & il est très facile de l'en faire disparoitre. Par là les formules sont réduites en sorte qu'elles ne renferment plus d'autres variables que celles qui servent à déterminer la nature des courbes. Par là encore le probleme cesse, pour ainsi dire, d'être mécanique ou astronomique, & devient un probleme de pure Géométrie. Mais ce n'est pas qu'il en devienne d'autant plus résoluble. Et il n'est pas difficile de prévoir combien la solution générale doit être compliquée. Car l'orbite de chaque corps se détermine par l'état initial de tout le système. Cet état étant donné ou pris dans la plus grande généralité, il s'agit de trouver pour l'orbite de chaque corps une équation qui exprime les ordonnées par les abscisses, ou les distances par les angles. Mais la même généralité de la solution demande qu'à chaque abscisse il réponde un nombre indéfini d'ordonnées, ou qu'à chaque angle il réponde un nombre indéfini de distances. La raison en est, que la solution générale doit comprendre encore ces cas où l'orbite de chaque corps tourne & s'entortille, pour ainsi dire, une infinité de fois autour du centre commun de gravité, sans jamais rentrer en elle-même & sans se perdre par une excursion à l'infini. Tel est à peu près le cas de la cycloïde à double courbure que les Satellites décrivent autour du Soleil, ou du centre commun de gravité du Système Solaire. Il est vrai qu'on peut imaginer des formules assez simples, qui satisfont à cette condition. Peut-être en trouvera-t-on aussi, qui satisfont en même tems à la loi de la gravitation, ou de l'attraction mutuelle des corps du système, mais qui, pour ne présenter que des cas particuliers, n'auront pas toute l'universalité que la solution du probleme demande.

§. 8. Si cependant on pouvoit parvenir à des formules véritablement universelles, & calculer ou construire les orbites pour un état initial du système quelconque donné, alors le probleme des trois corps seroit résolu à peu près autant que l'est celui de deux corps. Car supposons, ce qui peut toujours se faire, que le centre commun de gravité soit immobile, & soient les orbites construites. Je dis que, le lieu



d'un corps étant donné, on trouvera assez facilement celui des deux autres. Car, en tirant par le lieu du corps donné & par le centre commun de gravité une ligne droite, cette ligne passera par le centre commun de gravité des deux autres corps, & ce centre se trouvera moyennant le rapport des masses. Ensuite il ne s'agit que de tirer par ce centre une ligne droite, qui, en passant par les orbites des deux autres corps, soit coupée par ces orbites en raison réciproque des masses des corps, ce qui ne pouvant communément se faire que d'une seule façon, donnera les lieux des deux autres corps qu'il s'agissoit de chercher. Si donc on prend sur l'orbite du premier corps encore un autre point, on trouvera également les lieux répondans des deux autres corps; & la loi générale des aires proportionnelles au tems, donnera le tems que le système aura employé pour parvenir du premier état au second, du moins dans le cas où les trois orbites se trouvent dans un même plan. Mais, quand cette façon de procéder seroit universellement praticable, il s'en faut de beaucoup que nous connoissions assez les orbites pour pouvoir les construire; & d'ailleurs la question, *de déterminer la position des corps par le tems*, ne pourroit par là être résolue que fort indirectement. Voyons donc comment, en employant des suites infinies, nous pourrons parvenir à la solution directe qu'il s'agit de trouver.

§. 9. Comme à cet égard je ne me propose dans ce Mémoire que de faire voir la méthode qui conduit à ce but, je me bornerai d'abord à l'appliquer à un cas moins compliqué. Mais je l'appliquerai de façon qu'on voie que cette méthode est généralement applicable, non seulement à un système d'un nombre de corps quelconque mais encore sous une loi de gravitation quelconque. Le cas que j'examinerai est celui où les trois corps qui s'attirent mutuellement, se trouvent & se meuvent en un même ligne droite. Je choisis ce cas, afin de débarrasser le calcul de la pluralité des dimensions, qui, sans rendre le calcul plus difficile, le rendroient plus prolix, au préjudice de la clarté que demande l'explication d'une méthode. J'ajoute que ce
même

même cas, tout simple qu'il est, pourra selon toute apparence être celui auquel les autres plus composés se réduisent, du moins à l'égard de tout ce qui regarde la loi de la conservation des forces vives; & je suis d'autant plus porté à croire une semblable réduction possible qu'elle a également & très généralement lieu dans le cas de deux corps, comme je l'ai fait voir dans un Traité intitulé: *Insigniores orbitæ cometarum proprietates*.

§. 10. Soient donc



les trois corps placés en ligne droite, & en même tems leurs masses A, B, C. Qu'on prenne sur la même ligne un point quelconque G, afin d'y rapporter les distances. Le point G pourra, si l'on veut, être le centre commun de gravité, & en ce cas chaque distance se détermine par les deux autres. Soient les distances

$$AG = z$$

$$CG = y$$

$$BG = x$$

& en désignant par g la gravité absolue, on aura pour un tems τ quelconque les trois formules différentielles

$$- ddz = \left(\frac{C}{(y+z)^2} + \frac{B}{(x+z)^2} \right) g d\tau^2$$

$$- ddy = \left(\frac{A}{(y+z)^2} - \frac{B}{(x-y)^2} \right) g d\tau^2$$

$$- ddx = \left(\frac{A}{(x+z)^2} + \frac{C}{(x-y)^2} \right) g d\tau^2.$$

§. 11. Comme dans ces formules il y a trois sortes d'unités, qui sont celle du tems, celle des masses & celle des distances, on voit bien que deux de ces unités peuvent toujours être prises à volonté, & que la troisième se détermine en ce que ces formules doivent être des équations. Posons donc

gC

$$\begin{aligned} g^C &= M \\ g^B &= N \\ g^A &= P \end{aligned}$$

& il fera

$$\begin{aligned} - \quad ddz : d\tau^2 &= \frac{M}{(y+z)^2} + \frac{N}{(x+z)^2} \\ - \quad ddy : d\tau^2 &= \frac{P}{(y+z)^2} - \frac{N}{(x-y)^2} \\ - \quad ddx : d\tau^2 &= \frac{P}{(x+z)^2} + \frac{M}{(x-y)^2} \end{aligned}$$

§. 12. Ces formules ainsi trouvées, il s'agit d'exprimer chacune des distances x, y, z par le tems τ . J'ai fait voir ci-dessus, que cela ne pourra se faire que par des suites infinies. Il est donc clair que la façon la plus courte qui y conduise fera la meilleure. Commençons donc par déterminer quelle sera la forme de ces suites. Comme elles doivent exprimer les distances par le tems τ , il est clair qu'elles procéderont suivant quelques dimensions de τ . Or je dis

I°. Que le premier terme doit être une quantité constante, qui dénote la distance initiale qui a lieu pour le tems $\tau = 0$.

II°. Que le second terme doit être le tems τ multiplié par un coefficient qui dénote la vitesse initiale de chaque corps, & qui sera positif quand le corps s'éloigne du point G, lorsqu'il est $\tau = 0$.

III°. Que le troisième terme doit être le carré de τ multiplié par un coefficient qui exprime l'effet de la gravité ou de la chute initiale de chaque corps vers les deux autres corps.

On voit par là, que les suites qu'il s'agit de trouver procedent suivant toutes les dimensions du tems τ , que les coefficients de deux premiers termes de chaque suite sont donnés par l'état initial du système, que les coefficients des troisiemes termes se définissent par la gravitation mutuelle des trois corps, & partant, comme ceux de tous les termes suivans, par les formules différentielles.

§. 13. Faisant donc

$$z = a + b\tau + c\tau^2 + d\tau^3 + e\tau^4 + \text{etc.}$$

$$y = \alpha + \xi\tau + \gamma\tau^2 + \delta\tau^3 + \epsilon\tau^4 + \text{etc.}$$

$$x = \Lambda + B\tau + C\tau^2 + D\tau^3 + E\tau^4 + \text{etc.}$$

& par ce que je viens de dire

a, α, A seront les distances initiales,

b, ξ, B les vitesses initiales,

c, γ, C les chutes initiales.

Afin donc de déterminer les coefficients suivans, il ne s'agira que de substituer ces suites, comme étant la valeur des distances x, y, z dans les formules différentielles, en posant $d\tau$ constante. Pour cet effet nous aurons d'abord

$$ddz = d\tau^2 (2c + 6d\tau + 12e\tau^2 + \text{etc.})$$

$$ddy = d\tau^2 (2\gamma + 6\delta\tau + 12\epsilon\tau^2 + \text{etc.})$$

$$ddx = d\tau^2 (2C + 6D\tau + 12E\tau^2 + \text{etc.})$$

Faisons encore pour abrégier

$$\frac{1}{\alpha + a} = m \qquad \xi + b = q$$

$$\frac{1}{a + \Lambda} = n \qquad b + B = r$$

$$\frac{1}{\Lambda - a} = p \qquad B - \xi = s$$

& il fera

$$(z + y) = \frac{1}{m} (1 + mq\tau + m(c + \gamma)\tau^2 + m(d + \delta)\tau^3 + m(e + \epsilon)\tau^4 + \text{etc.})$$

$$(x + z) = \frac{1}{n} (1 + nr\tau + n(C + c)\tau^2 + n(D + d)\tau^3 + n(E + \epsilon)\tau^4 + \text{etc.})$$

$$(x - y) = \frac{1}{p} (1 + ps\tau + p(C - \gamma)\tau^2 + p(D - \delta)\tau^3 + p(E - \epsilon)\tau^4 + \text{etc.})$$



d'où l'on tire

$$\frac{1}{(z+y)^2} = m^2 - 2m^3 q \tau - 2m^3 (c+\gamma) \tau^2 - 2m^3 (d+\delta) \tau^3 - 2m^3 (e+\epsilon) \tau^4 - \text{etc.}$$

$$+ 3m^4 q^2 \tau^2 + 6m^4 q (c+\gamma) \tau^3 + 6m^4 q (d+\delta) \tau^4$$

$$- 4m^5 q^3 \tau^3 + 3m^4 (c+\gamma)^2 \tau^4$$

$$- 12m^5 (c+\gamma) \tau^4$$

$$+ 5m^6 q^4 \tau^4$$

$$\frac{1}{(z+x)^2} = n^2 - 2n^3 r \tau - 2n^3 (C+c) \tau^2 - 2n^3 (D+d) \tau^3 - 2n^3 (E+e) \tau^4 - \text{etc.}$$

$$+ 3n^4 r^2 \tau^2 + 6n^4 r (C+c) \tau^3 + 6n^4 r (D+d) \tau^4$$

$$- 4n^5 r^3 \tau^3 + 3n^4 (C+c)^2 \tau^4$$

$$- 12n^5 (C+c) \tau^4$$

$$+ 5n^6 r^4 \tau^4$$

$$\frac{1}{(x-y)^2} = p^2 - 2p^3 s \tau - 2p^3 (C-\gamma) \tau^2 - 2p^3 (D-\delta) \tau^3 - 2p^3 (E-\epsilon) \tau^4 - \text{etc.}$$

$$+ 3p^4 s^2 \tau^2 + 6p^4 s (C-\gamma) \tau^3 + 6p^4 s (D-\delta) \tau^4$$

$$- 4p^5 s^3 \tau^3 + 3p^4 (C-\gamma)^2 \tau^4$$

$$- 12p^5 (C-\gamma) \tau^4$$

$$+ 5p^6 s^4 \tau^4.$$

§. 14. Substituant donc ces valeurs dans les formules différentielles, & égalant les termes, on aura les équations suivantes pour les coefficients

$$\begin{array}{l} -2c = Mm^2 + Nn^2 \\ -2\gamma = Pm^2 - Np^2 \\ -2C = Pn^2 - Mp^2 \end{array} \left| \begin{array}{l} +6d = 2Mm^3q + 2Nn^3r \\ +6\delta = 2Pm^3q - 2Np^3s \\ +6D = 2Pn^3r + 2Mp^3s \end{array} \right.$$

$$-12e = 3Mm^4q^2 - 2m^3(c+\gamma)M + 3Nn^4r^2 - 2Nn^3(C+c)$$

$$-12\epsilon = 3Pm^4q^2 - 2m^3(c+\gamma)P - 3Np^4s^2 - 2Np^3(C-\gamma)$$

$$-12E = 3Pn^4r^2 - 2n^3(C+c)P + 3Mp^4s^2 - 2Mp^3(C-\gamma)$$

etc.

Voilà donc de quelle manière les coefficients des suites proposées se déterminent très directement & comme d'eux-mêmes.

§. 15.

§. 15. Mais, comme j'ai rapporté ce cas particulier du problème de trois corps, afin de le faire servir d'exemple pour tous les autres cas, il conviendra de faire encore là-dessus quelques remarques générales. La première qui s'offre assez naturellement, c'est que le tems τ pouvant être pris aussi grand que l'on voudra, les suites trouvées ne seront pas convergentes pour une quantité τ quelconque. On ne pourra donc calculer les distances x, y, z , que pour des tems τ assez petits pour que les suites trouvées soient encore suffisamment convergentes. Ce n'est pas cependant que par-là ces suites cessent d'être d'usage. Car toute la différence qu'il y a, c'est qu'il faut calculer par intervalles. Qu'on prenne p. ex. un tems t suffisamment petit, & on trouvera les distances x, y, z répondantes. On trouvera de plus les vitesses moyennant les mêmes suites différenciées,

$$dz : dt = b + 2ct + 3dt^2 + 4et^3 + \text{etc.}$$

$$dy : dt = \mathcal{C} + 2\gamma t + 3\delta t^2 + 4\epsilon t^3 + \text{etc.}$$

$$dx : dt = B + 2Ct + 3Dt^2 + 4Et^3 + \text{etc.}$$

Ces nouvelles distances & vitesses étant trouvées, on les substituera aux précédentes $a, \alpha, A; b, \mathcal{C}, B$, & par-là on déterminera de nouveau les coefficients, afin de pouvoir ensuite déterminer l'état du système tel qu'il sera après un second intervalle du tems. C'est ainsi qu'on pourra continuer autant qu'il sera nécessaire pour parvenir jusqu'au moment qu'on s'étoit proposé de calculer.

§. 16. La seconde remarque qui s'offre à faire, c'est que lorsqu'un des trois corps est assez petit pour n'avoir point d'action sensible sur les deux autres, sa masse pourra être faite $= 0$, ce qui abrégera de beaucoup la détermination des coefficients. Elle sera pareillement fort abrégée, lorsque dans l'état initial du système les trois corps sont en repos; car alors les vitesses initiales b, \mathcal{C}, B , de même que leurs sommes ou différences q, r, s , sont $= 0$, ce qui fera encore disparoître les coefficients d, δ, D , & généralement tous ceux des dimensions impaires de τ .



§. 17. Tout que je viens de dire aura encore lieu dans les cas où les trois corps ne sont ni dans une même ligne droite ni dans un même plan. Le calcul n'en sera ni plus difficile ni plus compliqué, mais bien plus prolix. Car dans ce dernier cas le mouvement des trois corps doit être décomposé suivant les trois dimensions de l'espace. Par là au lieu des trois suites que nous avons introduites dans le calcul, on y en introduira neuf, ce qui naturellement triplera tout au moins la prolixité du calcul.

§. 18. Il y a cependant des cas où on pourra l'abrégé considérablement, & ce sont précisément ceux qui ont tant fait souhaiter la solution du problème de trois corps. Supposons, par exemple, les masses des trois corps assez disproportionnées pour qu'il n'y ait que le plus petit qui soit altéré par le moyen dans le mouvement qu'il auroit autour du grand, si le corps mitoyen étoit sans action. C'est le cas d'une Comète troublée dans son orbite par l'action de Jupiter. Dans ce cas, le plan de l'orbite de Jupiter sera mis pour base, & le nombre des neuf suites que la solution générale demande, se réduit à cinq. Car il n'en faudra aucune pour le Soleil. Il n'en faudra que deux pour Jupiter, & ces deux suites & leurs coefficients se déterminent indépendamment de la Comète. de sorte qu'il ne s'agit que de déterminer les coefficients des trois suites, qui doivent exprimer les abscisses & les ordonnées de l'orbite de la Comète. De cette manière le calcul ne sera gueres plus long que celui que je viens de donner pour trois corps qui se meuvent dans une même ligne droite.

