SUR LA MÉTHODE DU CALCUL INTÉGRAL.

PAR M. LAMBERT. (*)

I.

Le Calcul intégral confidéré dans toute fon étendue eft de la Claffe des Queftions inverfes. Les Mathématiques nous en offrent plufieurs efpeces. Elles different de celles que l'on confidere comme directes, en ce que la marche qu'il faut prendre dans leur folution eft en quelque façon rétrograde, & que pour rétrograder il n'y a fouvent d'autres chemins, que ceux qui font en même tems directs. C'eft ainfi p. ex. que de chaque nombre on peut trouver fon quarré, fon cube &c. & que de ces dignités on peut revenir au nombre qui les a produites. Mais, comme outre les nombres qui font des quarrés, ou des cubes, il y en a une infinité d'autres qui n'en font pas, il eft clair qu'il n'y a point de chemin droit qui y conduife, & que celui qu'on veut faire eft pour ainfi dire raboteux & fans fin. Il en eft de même du Calcul intégral. Toute quantité peut être differentiée. Mais, outre les différentielles qui en naiffent, il y en a une infinité d'autres qui ne communiquent point avec leurs intégrales par quelque chemin droit & battu. Cependant, à cet égard, nous reftons encore bien plus en arriere qu'à l'égard des puiffances des nombres & de leurs racines. Et comme, fuivant toute apparence, c'eft par le défaut de méthode, il convient de nous y arrêter un moment.

§. 2.

(*) Lu le 15 de Décembre 1768.

§. 2. Il me paroit que, dans la plûpart des découvertes qu'on a faites dans le Calcul intégral, il y avoit un peu de précipitation. Et en effet, il femble qu'il n'y ait pas autrement moyen de parvenir à l'infini, qu'en s'y précipitant. C'eft toujours une efpece d'abime pour l'efprit humain. Mais ce n'eft pas de cette précipitation que je veux parler. Je prends le terme un peu moins au pied de la lettre, parce qu'on fe précipite auffi quand on fe hâte trop. Or, quoique ce ne foit pas là la coutume des Géometres, dont tous les pas font prémédités & mefurés, il femble néanmoins qu'ils ayent oublié d'en agir de même, lorfqu'il s'eft agi de l'infini. De là vient que les expreffions ont été plus ou moins inadéquates & choquantes. De là vient auffi qu'ils n'ont trouvé certaines reftrictions qu'après coup. Car en effet, ce ne fut qu'après coup qu'on s'avifa d'ajouter les conftantes aux intégrales qu'on avoit trouvées. Ce ne fut qu'après coup qu'on chercha la méthode d'en revenir aux différentielles lorfque l'intégrale ne donnoit point de valeur. Enfin, ce ne fut qu'après coup qu'on reprit les fecondes, troifiemes &c. différentielles, lorfque les premieres, fecondes &c. difparurent du calcul. Tout cela veut dire, qu'on ne favoit pas bien ce qu'on avoit trouvé, lorfqu'on trouva le Calcul intégral. Car c'étoient là des méprifes & des précipitations, qui ne devoient point avoir lieu. On voit aifément qu'il y eût fallu & plus de méthode & plus de patience. Avec tout cela, on eft toujours redevable aux grands génies, d'avoir fait les premiers pas. Car, tout précipités qu'ils peuvent avoir été, on les excufera en ce que la conquête de l'infini ne paroit pouvoir fe faire que par affaut.

§. 3. Les queftions inverfes ont des méthodes qui leur font communes, & qui enfuite fe déterminent d'avantage, lorfqu'elles s'appliquent à quelque queftion plus particuliere. Ces méthodes veulent qu'on fe familiarife avant toute chofe avec la queftion directe, qui eft toujours plus facile. Or les queftions directes, confidérées rélativement aux inverfes, ne fourniffent à celles-ci que des hypothefes. Mais il convient de claffifier ces hypothefes, d'en déduire des fymptômes & de de pourſuivre les conſéquences juſqu'à ce qu'on en trouve qui puiſſent être univerſellement converties. Car ce n'eſt qu'alors qu'on trouve le moyen de rétrograder. C'eſt ainſi qu'à l'égard des racines quarrées, on commença à élever un binome à la ſeconde dignité, & par là on vit comment un nombre doit être composé pour être nombre quarré, & comment il faut le décomposer pour en trouver la racine. C'eſt ainſi que, dans la Mécanique, on examina différentes hypotheſes du mouvement accéléré, des forces centrales &c. & les propoſitions convertibles qu'on en déduiſit, comparées aux phénomenes de la Nature, firent trouver les loix de la peſanteur & celles des mouvemens céleſtes.

§. 4. Mais procéda-t-on de la même maniere à l'égard du Calcul intégral? Je dirai que non. On étoit trop impatient de trouver des intégrales; afin d'y parvenir on tâtonna pour trouver des routines, & on ſe précipita quelquefois pour généraliſer des méthodes particulieres, dont on entrevoyoit à peine la poſſibilité. Ce n'eſt qu'un demi-ſiecle après la premiere idée de ce calcul, qu'on trouva incidemment les véritables marques de la ſéparabilité des variables. Mais la façon dont on la découvrit, étoit ſi conforme à la méthode que je viens d'indiquer, qu'on eût pu y parvenir depuis longtems. Car, en différentiant dans l'équation

$$P\mathrm{d}x = Q\mathrm{d}y$$

la fonction P ſuivant y, & la fonction Q ſuivant x, de ſorte qu'il ſoit

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} = p.$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x} = q.$$

c'étoit un ſymptôme qu'on trouva, lorſqu'il apparut qu'il étoit généralement

$$p = q,$$

toutes les fois que dans l'équation

$$P\mathrm{d}x = Q\mathrm{d}y$$

les variables peuvent être ſéparées. Il eût fallu dès le commencement rechercher ces ſortes de ſymptômes. Mais, au lieu de commencer par bien connoitre les différentielles, on ſe hâta de chercher les intégrales d'une façon quelconque.

§. 5. C'eſt par le défaut de cette méthode qu'on ſe trouve encore preſque tout à fait hors d'état de décider, ſi une différentielle, dont on ne peut pas encore parvenir à trouver l'intégrale, eſt intégrable ou non. De là vient auſſi, que ce n'eſt que peu à peu qu'on s'accoûtuma à regarder une formule comme ſuffiſamment intégrée, lorſqu'on l'avoit réduite à des quantités circulaires ou logarithmiques, ou à des arcs elliptiques; & on s'y accoûtuma, plutôt parce qu'on perdoit toute eſpérance d'aller plus loin, que parce qu'on étoit convaincu par une démonſtration rigide, qu'il falloit en reſter là. Mais n'étoit-ce pas à peu près comme ſi, après avoir trouvé que 4 & 9 ſont les quarrés de 2 & de 3, on reſtoit en doute, ſi les nombres intermédiaires 5, 6, 7, 8 ne pourroient peut-être pas avoir pour racine quelque nombre entier, qui ne fût point encore connu?

§. 6. En conſéquence de la méthode que j'ai rapportée, il eût fallu commencer par claſſifier, non les différentielles, comme on l'a fait, mais les intégrales. Il eût fallu en déduire des ſymptômes; & ce n'eſt que d'après ces ſymptômes, que les différentielles auroient du être claſſifiées, puiſque c'eſt par là qu'elles euſſent été reconnoiſſables. Enſuite la même méthode veut, qu'en claſſifiant les intégrales, on eſſaye du moins de commencer par les claſſes les plus générales. C'eſt d'abord pour avoir moins de claſſes; & enſuite, ſi on peut réuſſir à en trouver des ſymptômes tels qu'il les faut, leur uſage eſt d'autant plus étendu. Or les claſſes les plus générales qu'on puiſſe faire, c'eſt de diviſer les intégrales en algébriques & en tranſcendantes. Les tranſcendantes pourront enſuite être ſubdiviſées en circulaires, logarithmiques, arcs elliptiques &c. & il en reſtera toujours de plus compliquées.

§. 7. Conſidérons d'abord les intégrales algébriques. Le théoreme de la ſéparation des variables, que je viens de citer, fait que

nous

nous pourrons nous borner à une ſeule variable, de ſorte qu'il ſuffit de conſidérer une fonction algébrique quelconque de x. Et d'abord, il eſt clair que ſa différentielle, quelle qu'elle ſoit, eſt néceſſairement intégrable, & qu'il n'y a que ces ſortes de différentielles qui le ſoient. Mais pourra-t-on toujours les reconnoitre? Il eſt clair qu'il faut d'abord commencer à en chercher les ſymptômes. Et ſi elles peuvent ſe reconnoitre, peut-on trouver la méthode pour les intégrer? C'eſt ce que ces mêmes ſymptômes doivent faire voir.

§. 8. Claſſifions pour cet effet les fonctions algébriques d'une quantité variable. Elles ſeront

1°. ou *ſimplement rationelles*, & alors leur différentielle l'eſt auſſi.

2°. ou une *fraction rationelle*, & alors leur différentielle le ſera auſſi. Son diviſeur ſera le *quarré* du diviſeur de l'intégrale, à moins que par la réduction il n'en ait diſparu quelque partie.

3°. ou une *quantité radicale*, & alors leur différentielle ſera affectée de la même quantité radicale, multipliée ou diviſée par quelque facteur rationel. Car il eſt en général

$$\mathrm{d}\,(x^{m:n}) = \frac{m}{n}\, x^{m:n}\, x^{-1}\, \mathrm{d}x.$$

4°. ou plusieurs quantités radicales, additionées ou ſouſtraites, & alors il y aura autant de différentielles ſéparables, de la même forme.

5°. ou des quantités radicales qui ſe multiplient ou ſe diviſent, & alors il y aura autant de différentielles ſéparées qu'il y a de facteurs, & chaque différentielle ſera affectée de toutes ces quantités radicales & de facteurs rationels. Car il eſt

$$\mathrm{d}\,(x^{m:n} . X^{\mu:\nu}) = \frac{\mu}{\nu}\, x^{m:n}\, X^{\mu:\nu} . X^{-1}\, \mathrm{d}X$$
$$+ \frac{m}{n} . X^{\mu:\nu} . x^{m:n} . x^{-1}\, \mathrm{d}x.$$

Du reste j'entens que les facteurs soient des facteurs différens.

6°. ou des sommes de ces sortes de quantités, & alors il y aura autant de différentielles séparables, comme N°. 4.

7°. ou une quantité radicale, multipliée par une quantité rationelle, & encore en ce cas la différentielle toute entiere sera affectée de la quantité radicale. Car il est

$$d(P.Q^{m:n}) = Q^{m:n}(dP + \frac{m}{n} P.Q^{-1}dQ).$$

8°. ou des sommes de ces sortes de quantités, comme aussi des précédentes, & encore alors il y aura des différentielles séparables.

9°. ou des fractions de ces sortes de sommes, & encore alors le diviseur de la différentielle sera le quarré de celui de la fraction intégrale &c.

§. 9. Voilà donc l'énumération des différentes fonctions algébriques, avec quelques symptômes de leurs différentielles. Ces symptômes suffisent déjà pour exclure un grand nombre de différentielles, dont les intégrales ne sont point algébriques. Mais, comme je n'ai indiqué ces symptômes que fort briévement, il convient d'éclaircir ce que j'en ai dit, par l'usage qu'on peut en faire. Je rapporterai donc d'abord un théoreme très connu, qui est, *qu'une différentielle, dont l'intégrale est algébrique, étant donnée, on peut y ajoûter ou en soustraire autant d'autres différentielles intégrables que l'on voudra, & la somme ou le résidu sera encore algébriquement intégrable ;* & réciproquement, *cette somme ou ce résidu ne le sera pas, dès que la différentielle proposée ne l'est point ;* & enfin, *cette différentielle ne le sera point, dès que la somme ou le résidu ne le sera pas.* Ces théoremes sont connus. Il y a longtems qu'on en a fait usage, soit pour simplifier les formules, soit pour les réduire à d'autres, dont la forme étoit ou connue ou plus traitable.

§. 10

§. 10. Je ne m'arrêterai pas non plus aux fonctions qui sont simplement rationelles, ni à celles où il n'y a que des dignités simples, ou binomiales, ou enfin polynomiales de x, & où tous les termes sont rationels. Mais il convient d'éclaircir ce qui regarde les fractions rationelles. Car ici j'entens qu'elles ne soient pas simplement quelque dignité d'un polynome rationel, puisqu'alors il est très possible que le diviseur de la différentielle ne soit point quarré. Du reste, outre que ces sortes de différentielles sont très connoissables, il est facile de faire en sorte que le diviseur devienne un quarré, puisqu'encore qu'on ne pût pas le résoudre en ses facteurs, pour voir lesquels ne sont point des quarrés, il n'y auroit qu'à multiplier par le dénominateur aussi bien le numérateur que le dénominateur de la fraction différentielle proposée. Voici maintenant le procédé pour trouver l'intégrale toutes les fois qu'elle est algébrique.

§. 11. D'abord, on démontre aisément, que s'il y en a une, elle doit être une fraction rationelle. Car supposons qu'il y entre quelque quantité radicale ou irrationelle, il suit de N°. 3. §. 8. que cette quantité entre aussi dans la différentielle; ce qui seroit contre l'hypothese, puisque nous la supposons rationelle. Donc &c.

§. 12. Soit donc une fraction rationelle

$$dy = \frac{P}{QQ} \cdot dx,$$

où je mets QQ pour le dénominateur, parce qu'il doit être un quarré rationel (§. 10.). Que l'on fasse

$$y = \frac{z}{Q} + \text{const.}$$

on aura

$$dy = \frac{Qdz - zdQ}{QQ},$$

donc il sera

$$Pdx = Qdz - zdQ,$$

équa-

équation, qui doit être rationelle, toutes les fois que la fraction proposée est algébriquement intégrable. Car Pdx, Q & dQ sont rationelles, parce qu'elles sont supposées telles. Si donc il entroit dans la valeur de z quelque quantité radicale, elle entreroit aussi dans dz (§. 8.). Donc il y auroit une fonction de x affectée de quantités radicales, égale à une fonction de x rationelle. Ce qui étant absurde, il s'ensuit &c. On n'aura donc, dans chaque cas particulier, qu'à prendre de la série

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$$

autant de termes qu'il faut pour ramener l'équation

$$Pdx = Qdz - zdQ,$$

aux mêmes exposans, & en faisant $= 0$ les coëfficiens de tous les termes, on définira les coëfficiens A, B, C &c. Observons qu'il y aura toujours plus de termes à faire $= 0$, qu'il n'y a de coëfficiens A, B, C &c. à déterminer. Mais néanmoins ces coëfficiens doivent satisfaire à toutes les conditions, sans quoi la différentielle n'auroit point d'intégrale algébrique. Ensuite, il se peut que quelque coëfficient obtienne une valeur arbitraire, mais qui donnera toujours la constante, qu'il faut ensuite ajoûter, comme il faut l'ajoûter quand même tous les coëfficiens sont déterminés. Ce dernier énoncé est clair de soi-même. Quant au premier, on voit bien qu'il faut dans l'équation

$$Pdx = Qdz - zdQ,$$

multiplier une série finie

$$Q = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots \mu x^m,$$

par une série finie

$$dz = +(B + 2Cx + \cdots nNx^{n-1})\,dx,$$

& encore

$$dQ = \beta x + 2\gamma x + \cdots \mu m x^{m-1})\,dx,$$

par

$$z = A + Bx + Cx^2 + \&c. \cdots + Nx^n,$$

&

& qu'il n'y a que les coëfficiens A, B, C &c. qui ſoient à déterminer. Il y en a donc toujours moins, qu'il n'y a de termes à faire $= 0$. Donnons, pour mieux éclaircir cela, quelques exemples.

I. Exemple.

§. 13. Soit propoſée la fraction rationelle

$$dy = \frac{4 + 16x - 3xx}{(4 + 3xx)^2} \cdot dx;$$

il s'agit de voir ſi ſon intégrale eſt algébrique, & en ce cas, quelle elle eſt? Comme ici le diviſeur eſt déjà un quarré, on le poſera $= QQ$, ce qui donne

$$Q = 4 + 3xx:$$

on fera donc

$$y = \frac{z}{4 + 3xx} + \text{Conſt.}$$

ce qui donne

$$dy = \frac{(4 + 3xx)dz - 6zxdx}{(4 + 3xx)^2}.$$

On n'aura donc qu'à comparer les numérateurs, pour avoir l'équation

$$(4 + 16x - 3xx)\, dx = (4 + 3xx)\, dz - 6zxdx,$$

qui doit être rationelle. Or on voit que, pour ramener le ſecond membre de cette équation à la plus grande dimenſion de x dans le premier membre, il ſuffira de faire

$$z = A + Bx,$$

ce qui donne

$$dz = Bdx.$$

Ces valeurs étant ſubſtituées, & en arrangeant tout ſuivant les dimenſions de x, on obtient, en diviſant par dx,

$$\begin{aligned} 0 = &- 4 - 16x + 3xx \\ &+ 4B - 6Ax - 3Bxx. \end{aligned}$$

 Or

Or, posant $=$ o chaque terme de cette équation, on voit que le second donne

$$A = -\tfrac{8}{3},$$

le premier

$$B = 1.$$

Et comme cette valeur satisfait encore au troisieme terme, il s'ensuit que la différentielle proposée est algébriquement intégrable, & qu'il est

$$z = -\tfrac{8}{3} + x,$$

& partant

$$y = (x - \tfrac{8}{3}) : (4 + 3xx) + \text{Const.}$$

II. Exemple.

§. 14. Soit proposée la fraction rationelle

$$dy = \frac{15 - 3x^2 - 2x^4}{(5 + 2xx)^3} \cdot dx;$$

il faut voir si elle a une intégrale algébrique, & en ce cas quelle elle est? Comme ici le diviseur est un cube, on pourroit en faire un biquarré. Mais on peut s'en passer, parce que la théorie de la différentiation des puissances nous indique qu'il suffit de faire

$$y = \frac{z}{(5 + 2xx)^2},$$

afin d'avoir

$$dy = \frac{(5 + 2xx)\, dz - 8zx\,dx}{(5 + 2xx)^3}.$$

Et de là, en comparant les numérateurs, on a

$$15 + 9x^2 + 2x^4 = (5 + 2xx)\, dz - 8zx\,dx.$$

Or, pour ramener le second membre de cette équation à la plus haute puissance de z dans le premier membre, on voit qu'il faut faire

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$
$$dz = \quad (B + 2Cx + 3Dx^2)\, dx.$$

Ces

Ces valeurs étant ſubſtituées, & toute réduction faite, on a

$$\begin{aligned} 0 = &- 15 + 10Cx + 3x^2 \quad * \quad + 2x^4 \\ &+ 5B - 8Ax + 15Dx^2 - 4C - 2Dx^4 \\ &\qquad\qquad - 6Bx^2. \end{aligned}$$

Or, égalant tous les termes à o, le premier membre donne

$$B = 3,$$

le dernier $D = 1.$

Et ces deux valeurs ſatisfont encore au troiſieme membre.

Enfin le quatrieme membre donne

$$C = 0,$$

ce qui dans le ſecond membre rend encore

$$A = 0.$$

Nous avons donc $z = 3x + x^3,$

& partant $y = \frac{3x + x^3}{(5 + 3xx)^2} + \text{Conſt.}$

III. Exemple.

§. 15. Traitons encore de la même façon la différentielle

$$dy = \frac{dx}{1 + xx}.$$

Ici il faut commencer à changer le diviſeur en ſorte qu'il ſoit un quarré, ce qui donne $dy = \frac{(1 + xx)\,dx}{(1 + xx)^2}.$

Poſant donc $y = \frac{z}{1 + xx},$

il ſera $dy = \frac{(1 + xx)\,dz - 2zx\,dx}{(1 + xx)^2}.$

Donc

Donc, en comparant les numérateurs, il ſera

$$(1 + xx)\,dx = (1 + xx)\,dz - 2zx\,dx.$$

Faiſant donc $\quad z = A + Bx$

$$dz = B\,dx,$$

il ſera $\quad 0 = -1 + * - xx$

$$+ B - 2Ax - Bxx.$$

Et en faiſant chaque terme égal à zéro, le ſecond donne

$$A = 0,$$

le premier $\quad B = 1.$

Mais cette valeur ne ſatisfaiſant pas au troiſieme terme, qui donne

$$B = -1,$$

il s'enſuit que la différentielle propoſée n'a point d'intégrale algébrique.

§. 16. Pour ces ſortes de cas, on pourra toujours trouver la valeur de y par une ſuite infinie, en poſant généralement

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$$

Et de cette maniere on obtiendra pour le cas préſent

$$A = C$$
$$B = 1,\ D = \tfrac{2}{3},\ F = -\tfrac{2}{15},\ H = +\tfrac{2}{35}\ \&c.$$
$$E = G = I = \&c. = 0,$$

ce qui donne

$$z = A\,(1 + xx) + x + \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 + \tfrac{2}{35}x^7 + \&c.$$

& partant

$$y = A + \frac{x + \frac{2}{3}x' - \frac{2}{15}x^2 + \frac{2}{35}x^7 + \&c.}{1 + xx},$$

ce qui par la diviſion actuelle donne

$$y = A + x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \&c.$$

la ſuite Leibnitienne, qui exprime l'arc par la tangente.

§. 17.

§. 17. Mais, si on vouloit traiter sur le même pied l'exemple premier, on trouveroit

$$B = 1,$$
$$C = 2 + \tfrac{3}{4}A,$$
$$D = E = F \text{ \&c.} = 0,$$

& partant $y = \frac{1}{4}A + \frac{x + 2xx}{4 + 3xx} + \text{const.}$

Formule finie, & qui revient à celle que nous avons trouvée.

§. 18. Ces exemples suffisent pour faire voir, que les différentielles, dont l'intégrale est une fraction rationelle, n'ont aucune difficulté. On peut toujours & les reconnoitre & les trouver. J'ajoute que, lorsque de semblables différentielles ont des coëfficiens indéterminés, cette même méthode indiquera les conditions de leur intégrabilité. Mais passons aux différentielles qui sont affectées de quantités radicales. Je me bornerai d'abord à considérer celles de la troisieme classe du §. 8, c'est à dire, celles où il n'entre qu'une seule quantité radicale, mais affectée de quantités rationelles d'une façon quelconque, puisque sans cela elle pourroit être traitée comme on traite généralement les puissances.

§. 19. Or j'ai déjà observé, qu'une semblable quantité radicale affecte encore l'intégrale, quoiqu'elle y ait un autre facteur rationel. Soit en général

$$y = P \cdot Q^{m:n},$$

où P, Q sont des fonctions rationelles de x, & nommément Q une fonction telle, qu'on n'en puisse point extraire la racine n moyennant une formule finie. Nous aurons donc

$$dy = Q^{m:n} \cdot dP + \frac{m}{n} P \cdot Q^{m:n} \cdot Q^{-1} dQ$$
$$= Q^{m:n} \left(\frac{QdP + \frac{m}{n} PdQ}{Q}\right).$$

Po-

Poſant donc $$dy = Q^{m:n-1} \,.\, dp,$$
on voit, que la quantité radicale peut être levée quand on augmente l'expoſant d'une unité & qu'on fait
$$y = Q^m z.$$
Et comme enſuite il ne reſte plus que des quantités rationelles, on procédera de la même façon que j'ai fait voir par rapport aux fractions rationelles. Voici quelques exemples, pour éclaircir cette méthode.

IV. Exemple.

§. 20. Soit propoſée la différentielle
$$dy = \frac{dx}{(1 + xx)^{3:2}};$$
il s'agit de voir ſi ſon intégrale eſt algébrique, & en ce cas quelle elle eſt? Pour cet effet on voit que l'expoſant de la quantité radicale étant $-3:2$, il devient $-1:2$ lorſqu'on l'augmente d'une unité, comme il faut le faire (§. 19.). Poſant donc
$$y = \frac{z}{\sqrt{(1 + xx)}},$$
on aura $$dy = \frac{dz\,(1 + xx) - zx\,dx}{(1 + xx)^{3:2}}.$$
Donc, en comparant les numérateurs, il eſt
$$dx = (1 + xx)\,dz - zx\,dx;$$
ce qui fait voir qu'il ſuffit de poſer
$$z = A + Bx$$
$$dz = B\,dx,$$
afin d'avoir
$$\begin{aligned} o = &-1 && * \\ &+B && * && +Bxx \\ & && -Ax && -Bxx, \end{aligned}$$

ou

ou bien $$0 = -1 - Ax + B,$$

ce qui donne $$A = 0$$ $$B = 1,$$

& partant $$z = x$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{(1 + xx)}} + \text{Conſt.}$$

§. 21. Si dans cet exemple on poſe pour z la ſuite

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$$

on trouve en procédant de la même maniere

$$z = A + x + \tfrac{1}{2}Ax^2 - \tfrac{1}{8}Ax^4 + \tfrac{1}{16}Ax^6 - \tfrac{5}{128}Ax^8 + \&c.$$

c'eſt à dire $$z = x + A\sqrt{(1 + xx)},$$

& partant $$y = \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}} + A = \frac{x}{\sqrt{(1+xx)}} + \text{conſt.}$$

V. Exemple.

§. 22. Soit propoſée la différentielle

$$dy = \frac{1 - x + 3x^2 + 2x^4 + 2x(1 + xx)^{3:2}}{(1 + xx)^{3:2}} \cdot dx.$$

Ici on voit d'abord qu'en diviſant, cette formule ſe change en

$$dy = dx \cdot \frac{1 - x + 3x^2 + 2x^4}{(1 + xx)^{3:2}} + 2x\,dx.$$

Or, la ſeconde partie étant intégrable par elle-même, on n'a qu'à examiner ſimplement la premiere (§. 9.). Faiſant donc

$$d\eta = \frac{1 - x + 3x^2 + 2x^4}{(1 + xx)^{3:2}} \cdot dx,$$

on

on poſera (§. 19.) $\eta = \frac{z}{\sqrt{(1 + xx)}}$,

ce qui donne $d\eta = \frac{(1 + xx)\,dz - zx\,dx}{(1 + xx)^{3:2}}$.

Et en égalant les numérateurs, on aura

$$(1 - x + 3x^2 + 2x^4)\,dx = (1 + xx)\,dz - zx\,dx,$$

d'où on voit qu'il faut faire

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$$
$$dz = \quad (B + 2Cx + 3Dx^2)\,dx,$$

ce qui donne

$$\begin{array}{rlllll} 0 = & -1 & + x & - 3x^2 & + * & - 2x^4 \\ & & & + Bx^2 & + 2Cx^3 & + 3Dx^4 \\ & + B & + 2Cx & + 3Dx^2 & & \\ & & - Ax & - Bx^2 & - Cx^3 & - Dx^4, \end{array}$$

& en poſant chaque terme $= 0$,

le premier donne $B = 1$
le dernier $D = 1$.

Et ces valeurs conviennent auſſi au troiſieme terme. Le quatrieme donne $C = 0$,

ce qui dans le ſecond donne $A = 1$,

& partant $z = 1 + x + x^3$

$$\eta = \frac{1 + x + x^3}{\sqrt{(1 + xx)}} = \frac{1}{\sqrt{(1+xx)}} + x\sqrt{(1+xx)}.$$

& enfin

$$y = \frac{1}{\sqrt{(1+xx)}} + x^2 + x\sqrt{(1 + xx)} + \text{Conſt.}$$

VI.

VI. Exemple.

§. 23. Soit proposé

$$dy = (3ax^3 + 4x^4)\, \sqrt{(ax + xx)}\ .\ dx.$$

Ici on voit aisément que cette formule revient à

$$dy = (3ax^2 + 4x^3)\, dx \sqrt{(ax^3 + x^4)},$$

ce qui veut dire à

$$dy = \tfrac{2}{3} d(ax^3 + x^4)^{3:2}$$

$$y = \tfrac{2}{3}\, (ax + x^4)^{3:2} + \text{Const.}$$

Mais retenons-la telle que je l'ai proposée

$$dy = (3ax^3 + x^4)\, dx\ \sqrt{(ax + xx)};$$

& comme l'exposant du radical, qui est $= \frac{1}{2}$, devient $= + \frac{3}{2}$ lorsqu'on l'augmente d'une unité (§. 19.), on fera

$$y = z\, (ax + xx)^{3:2},$$

ce qui donne

$$dy = dz\, (ax + xx)^{3:2} + \tfrac{3}{2} z\, (a + 2x) \sqrt{(ax + xx)}\, dx,$$

ou bien

$$dy = \sqrt{(ax + xx)}\ .\ [dz\, (ax + xx) + \tfrac{3}{2}\, (a + 2x)\, z dx].$$

Comme donc l'une & l'autre valeur de dy peut être divisée par la quantité radicale, on voit qu'il sera

$$(3ax^3 + x^4)\, dx = (ax + xx)\, dz + \tfrac{3}{2}\, (a + 2x)\, z dx,$$

& qu'en posant $z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$

$$dz = (B + 2Cx + 3Dx^2)\, dx,$$

il sera, en substituant ces valeurs,

$$\begin{array}{lccccc}
o = & * & * & * & - 3ax^3 & - 4x^4 \\
 & & + aBx & + 2aCx^2 & + 3aDx^3 & \\
 & & & + Bx^2 & + 2Cx^3 & + 3Dx^4 \\
 & + \frac{3}{2}Aa & + \frac{3}{2}Bax & + \frac{3}{2}Cax^2 & + \frac{3}{2}Dax^3 & \\
 & & + 3Ax & + 3Bx^2 & + 3Cx^3 & + 3Dx^4.
\end{array}$$

Egalant donc chaque terme à zéro, on obtient des trois premiers termes

$$A = B = C = 0,$$

du dernier

$$D = \tfrac{2}{3}.$$

Et comme ces valeurs ſatisfont encore au quatrieme terme, la formule ſe trouve être intégrable, & il eſt

$$z = \tfrac{2}{3} x^3$$

$$y = \tfrac{2}{3} x^3 (ax + xx)^{3:2} + \text{Conſt.}$$

VII. Exemple.

§. 24. Soit propoſé

$$dy = \frac{a^2 + b^2 + 2x^2}{V(a^2 + x)^2 \,.\, V(b^2 + x^2)} x\,dx.$$

Quoique dans cette formule il y ait deux quantités radicales, il eſt clair néanmoins qu'elles peuvent être conſidérées comme une ſeule; car pour cet effet il n'y auroit qu'à multiplier l'une par l'autre. On voit auſſi que la formule auroit pu être propoſée de la façon ſuivante:

$$dy = \frac{V(a^2 + x^2)}{V(b^2 + x^2)} \,.\, x\,dx + \frac{V(b^2 + x^2)}{V(a^2 + x^2)} \,.\, x\,dx;$$

car celle-ci ſe réduit à la précédente, dès qu'on la réduit à un même dénominateur. Or ici les expoſans des radicaux ſont $= - \frac{1}{2}$, & en les augmentant d'une unité (§. 19.) ils ſe changent en $+ \frac{1}{2}$, de ſorte qu'en faiſant

$$y = z \,.\, V(a^2 + x^2) \,.\, V(b^2 + y^2),$$

& en procédant comme dans les exemples précédens, on trouve

$$z = 1$$

$$y = V(a^2 + x^2) \,.\, V(b^2 + x^2).$$

VIII. Exemple.

§. 25. Il en ſera de même de la formule

dy

$$\mathrm{d}y = \frac{(a^2 + b^2 + 2x^2)\,x\,\mathrm{d}x}{V(a^2 + x^2)\,.\,(b^2 + x^2)^{3:2}};$$

car encore ici les radicaux ſe multiplient, & le reſte eſt rationel, de ſorte qu'en faiſant (§. 19.)

$$y = \frac{z\,V(a^2 + x^2)}{V(b^2 + x^2)},$$

on trouve $z = 1$.

IX. Exemple.

§. 26. Soit propoſé

$$\mathrm{d}y = 2acx\,\mathrm{d}x + \frac{ae^2 + 2ax^2}{V(e^2 + x^2)}\,.\,\mathrm{d}x + \frac{cb^2 + 2cx^2}{V(b^2 + x^2)}\,\mathrm{d}x$$
$$+ \frac{e^2 + b^2 + 2x^2}{V(e^2 + x^2)\,.\,(b^2 + x^2)}\,.\,x\,\mathrm{d}x.$$

Ici on voit d'abord que le premier terme eſt intégrable de ſoi-même; ainſi on pourra en faire abſtraction (§. 9.). Dans le quatrieme terme il y a deux radicaux avec l'expoſant $-\frac{1}{2}$, qui ſe multiplient; il faut donc qu'ils ſe multiplient encore dans l'intégrale, mais avec l'expoſant $+\frac{1}{2}$ (§. 19.). Mais comme une ſemblable intégrale, telle que feroit

$$\eta = z\,.\,V(e^2 + x^2)\,.\,V(b^2 + x^2),$$

donne la différentielle

$$\mathrm{d}\eta = \frac{(e^2b^2 + e^2x^2 + b^2x^2 + x^4)\,\mathrm{d}z + z\,(e^2 + b^2 + 2x^2)\,x\,\mathrm{d}x}{V(e^2 + x^2)\,.\,V(b^2 + x^2)},$$

on voit qu'elle ne peut être comparée qu'au quatrieme terme. Car encore qu'on voulût réduire le ſecond & le troiſieme terme au même dénominateur, ce qui dans cet exemple ſeroit faiſable, le numérateur ſeroit

$$(ae^2 + 2ax^2)\,V(b^2 + x^2) + (cb^2 + 2cx^2)\,V(e^2 + x^2),$$

affecté d'une double irrationalité, & par conſéquent incommenſurable avec la différentielle $\mathrm{d}\eta$. J'en conclus que, ſi la formule propoſée eſt

 algé-

algébrique, chaque terme doit être séparément intégrable. Aussi, en procédant comme dans les exemples précédens, on trouve

$$y = acx^2 + ax\,V(e^2 + x^2) + cx\,V(b^2 + x^2) + V(e^2 + x^2)\,.\,V(b^2 + x^2) + \text{Const.}$$

ou bien

$$y = (ax + V(b^2 + x^2))\,.\,(cx + V(e^2 + x^2)) + \text{Const.}$$

X. Exemple.

§. 27. Soit proposé

$$dy = \frac{(3a + 5xx)\,dx}{(a + xx)^{2:3}}.$$

Comme ici l'exposant de la quantité radicale est $-\frac{2}{3}$, en l'augmentant d'une unité il se change en $+\frac{1}{3}$. Faisant donc

$$y = z\,(a + xx)^{1:3}$$

$$dy = \frac{dz\,.\,(a + xx) + \frac{2}{3}zx\,dx}{(a + xx)^{2:3}},$$

on aura, en comparant les numérateurs,

$$(3a + 5xx)\,dx = (a + xx)\,dz + \frac{2}{3}zx\,dx,$$

& en faisant

$$z = A + Bx$$

$$dz = B\,dx,$$

on obtiendra

$$\begin{array}{rccc} o = & -3a & * & -5xx \\ & +Ba & * & +Bxx \\ & & +\frac{2}{3}Ax & +\frac{2}{3}Bxx. \end{array}$$

Faisant donc chaque terme $= o$, il sera

$$A = o.$$

Et le premier terme donne $B = 3$, valeur qui satisfait encore au troisieme. Il sera donc

$$z = 3x$$

$$y = 3x\,(a + xx)^{1:3}$$

§. 28. Ces exemples peuvent ſuffire pour faire voir, comment il faudra s'y prendre dans une infinité d'autres cas. On voit que cette méthode ſert tout à la fois, & à examiner ſi une différentielle eſt algébriquement intégrable, & à en trouver l'intégrale. On voit auſſi que cette méthode s'étend indifféremment à tous les cas où la différentielle eſt une ou pluſieurs fractions rationelles, & qu'elle y eſt applicable ſans qu'on ait beſoin de décompoſer les numérateurs en leurs facteurs ſimples, comme on eſt plus ou moins obligé de le faire, lorſque l'intégrale n'eſt point algébrique. Mais, quant aux cas où une différentielle propoſée eſt affectée de quantités irrationelles, on conçoit aiſément que ces ſortes de quantités peuvent être extrèmement compliquées & prolixes, quoique ſans contredit l'intégrale doive pouvoir être trouvée toutes les fois qu'elle eſt algébrique. Et la différentielle dans tous ces cas ſera toujours compoſée d'une façon qui ne convient qu'aux différentielles algébriquement intégrables. Ajoutons encore qu'il y a fort ſouvent moyen d'affranchir ces ſortes de formules de l'irrationalité des quantités radicales, ou du moins de les rendre beaucoup moins compliquées. Comme c'eſt à l'Algebre à trouver ces ſortes de moyens, on peut les préſuppoſer dans le calcul intégral. Je me bornerai donc ici à quelque exemple.

XI. Exemple.

§. 29. Soit propoſé

$$dy = \frac{a\,dx\,\sqrt{(c^2 + x^2)} + bx\,dx}{\sqrt{[(c^2 + x^2)\,(ax + b\sqrt{(c^2 + x^2)})]}}.$$

Comme ici la quantité radicale $\sqrt{(c^2 + x^2)}$ entre dans le radical qui conſtitue le dénominateur, ou pourra commencer à la faire diſparoitre, ce qui arrivera en poſant

$$x = \frac{v^4 - c^2}{2vv}$$

$$dx = \frac{v^4 + c^2}{v^3} \,.\, dv$$

$$\sqrt{(c^2 + x^2)} = \frac{v^4 + c^2}{2vv}$$

$$x\,\mathrm{d}x = \frac{v^8 - c^4}{2v^5}\,.\,\mathrm{d}x.$$

Ces valeurs étant ſubſtituées, & toute réduction faite, on aura

$$\mathrm{d}y = \frac{a\,(v^4 + c^2) + b\,(v^4 - c^2)}{\sqrt{\left[v^8\,.\,\frac{a+b}{2} + c^2v^4\,.\,\frac{a-b}{2}\right]}}\,.\,\mathrm{d}v.$$

Voilà donc la formule ſimplifiée au point, qu'il n'y a plus qu'une ſeule quantité radicale. Poſons donc (§. 19.)

$$y = z\sqrt{\left[\frac{a+b}{2}\,.\,v^8 - \frac{a-b}{2}\,.\,c^2v^4\right]},$$

& il ſera

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}z\,.\left[\frac{a+b}{2}.v^8 - \frac{a-b}{2}.v^4c^2\right] + 2z(a+b)v^7\mathrm{d}v - (a-b)c^2v^3\mathrm{d}v\,.\,z}{\sqrt{\left[\frac{a+b}{2}\,.\,v^8 - \frac{a-b}{2}\,.\,v^4c^2\right]}}.$$

Donc, en comparant les numérateurs,

$$v^4(a+b)\mathrm{d}v + c^2(a-b)\mathrm{d}v = \mathrm{d}z\left[\frac{a+b}{2}.v^8 - \frac{a-b}{2}\,.\,v^4c^2\right]$$
$$+ 2z(a+b)v^7\mathrm{d}v - z(a-b)c^2v^3\mathrm{d}v.$$

Or on voit qu'ici il faut rabaiſſer les expoſans du ſecond membre de cette équation, pour les ramener aux mêmes dimenſions que ceux du premier membre, ce qui ſe fera en poſant

$$z = \frac{m}{x^3}$$

$$\mathrm{d}z = \frac{-3m\mathrm{d}x}{x^4}.$$

Car

Car ce ſeul terme ſuffit, puiſqu'il n'y aura que deux comparaiſons à faire. Subſtituant donc ces valeurs, on aura l'équation

$$0 = - c^2 (a - b) - (a + b) v^4$$
$$+ 3mc^2 \frac{(a - b)}{2} - 3m \frac{(a + b)}{2} v^4$$
$$- mc^2 (a - b) + 2m (a + b) v^4.$$

Or, en faiſant chaque terme $= 0$, le premier donne

$$m = 2.$$

Et cette valeur ſatisfait encore au ſecond terme, & partant l'intégrale eſt algébrique. Nous aurons donc

$$z = \frac{2}{v^3}$$

$$y = \frac{2}{v^3} \sqrt{} \left[\frac{a + b}{2} v^8 - \frac{a - b}{2} v^4 c^2\right] + \text{Conſt.}$$

ou bien

$$y = 2 \sqrt{} \left[a . \frac{v^4 - c^2}{2vv} + b . \frac{v^4 + c^2}{2vv}\right] + \text{Conſt.}$$

ce qui, en ſubſtituant les valeurs répondantes, donne

$$y = 2 \sqrt{} [ax + b \sqrt{} (c^2 + x^2)] + \text{Conſt.}$$

§. 30. Quant aux différentielles, dont l'intégrale n'eſt point algébrique, il eſt clair qu'elles ne ſe trouvent pas par la ſimple différentiation. Et à cet égard on ne ſauroit en trouver des ſymptômes, qui non ſeulement les rendent connoiſſables, mais qui en indiquent les intégrales. C'eſt ſurtout de ce dernier point dont il s'agit ici. Car on vient de voir qu'en les traitant ſuivant la méthode que je viens de propoſer, on reconnoitra toujours qu'elles ſont tranſcendantes, puiſqu'en ce cas les coëfficiens A, B, C &c. de la ſuite

$$z = A + Bx + Cx^2 + \&c.$$

ne

ne ſatisfont point à toutes les conditions. Or, comme ces ſortes de différentielles peuvent toujours être rapportées à la quadrature ou à la rectification de quelque ligne courbe, c'eſt auſſi de là qu'elles tirent leur origine. Du reſte, on peut en trouver ſans penſer à quelque ligne courbe, ſoit qu'on en compoſe à ſa fantaiſie, ſoit qu'elles ſe préſentent dans quelque recherche analytique ou phyſique. La procédure qu'on a tenue à cet égard, me paroit telle qu'elle doit être. Entre ces différentielles on en a choiſi ſurtout deux eſpeces, qui ſont des plus ſimples, & pour leſquelles on a des tables calculées. On comprend que je parle des fonctions circulaires & logarithmiques. C'eſt à ces deux eſpeces qu'on tâche de réduire toutes celles qui en dépendent. Mais, comme il y en a bien d'autres, il faudroit avoir plus de tables. Or ces ſortes de tables ne ſont pas fort commodes, quand elles doivent être faites à double entrée, comme le ſeroient p. ex. celles qu'on pourroit en tout cas conſtruire pour les arcs elliptiques, auxquels une infinité de formules différentielles peuvent être réduites. Les tables à ſimple entrée ſuppoſent des formules, qui ne varient que d'une façon proportionelle, lorſqu'on varie les coëfficiens, comme p. ex. la formule

$$a\,dy = dx : \surd(b^4 + x^4),$$

qui ſe réduit à $c\,dy = dx : \surd(1 + x^4)$.

Mais ces ſortes de formules ne ſont pas d'un uſage fréquent, puiſque la plus grande partie des quantités radicales dérive de l'uſage du théoreme de Pythagore, & les formules les plus ſimples qui en dérivent, ſont déjà redigées en tables. Celles qui les ſuivent ſont de la forme

$$dy\,\surd\left(\frac{y^2 + a^2}{y^2 + b^2}\right),$$

qui, eu égard au changement des ſignes, comprend 16 eſpeces, dont il y en a 7 d'une forme imaginaire, & 4 qui reviennent immédiatement à la rectification de l'ellipſe & de l'hyperbole. Et comme on peut regarder y comme une fonction quelconque d'une autre variable, il eſt clair qu'il y a une infinité d'autres formules différentielles qui en dépendent.

§. 31. Comme donc, à l'égard de ces formules, tout ce qu'on peut d'abord faire revient à réduire celles qui ſont plus compliquées à celles qui le ſont le moins qu'il eſt poſſible, il eſt clair qu'il faudroit avoir une eſpece de liſte de celles qui ſont les plus ſimples, & qui ne dépendent pas les unes des autres. Enſuite, en en dérivant d'autres plus compliquées, il faudroit avoir égard aux ſymptômes qui s'y préſentent, & qui rendent connoiſſables & la réductibilité & la méthode pour la réduction. Mais, comme c'eſt là un travail infini, on voit bien qu'on peut ſe borner du moins à ces formules qui ſont d'un uſage plus fréquent. Et c'eſt auſſi ce qu'on a fait, du moins en partie, à l'égard des fonctions circulaires, logarithmiques & elliptiques, quoique la façon de procéder n'ait pas toujours été fort méthodique. Dans des cas particuliers, on s'eſt mis auſſi à examiner des intégrales qui promettoient des différentielles, ſinon identiques, du moins analogues à celles dont on vouloit avoir l'intégrale.

§. 32. Les différentielles dont les intégrales ſont tranſcendantes, c'eſt à dire, non algébriques, peuvent être diſtribuées en quelques claſſes générales.

1°. Il y en a où la variable elle-même eſt tranſcendante, mais qui du reſte ſont algébriquement intégrables. Telle eſt p. ex. la formule
$$dy = 2 \log x . d(\log x),$$
dont l'intégrale eſt
$$y = (\log x)^2 + \text{Conſt.}$$
Il eſt clair que ces ſortes de différentielles ſe traitent comme celles qui ſont algébriques.

2°. Il y en a qui ne renferment que la quantité tranſcendante, avec ſa différentielle exprimée par la variable à l'egard de laquelle la quantité eſt tranſcendante. Car il eſt clair que ce qu'on nomme tranſcendant, ne l'eſt que rélativement à une autre quantité qu'on a en vue dans le calcul qu'on fait. Telles ſont p. ex. les différentielles

$$dy = 2 \,.\, \log x \,.\, \frac{dx}{x}$$

$$dy = \frac{dz\, \sqrt{(1 + zz)}}{a + \int dz\, \sqrt{(1 + zz)}}.$$

Encore ces formules peuvent être traitées comme celles qui sont algébriques. Mais, dans celles de la premiere espece, on suppose qu'on sache que $dx : x$ est la différentielle de $\log x$, ou qu'on puisse faire $\log x = \int dx : x$. On voit qu'il en est de même à l'égard de tous les cas où la quantité transcendante a un nom particulier.

3°. Il y en a où la différentielle de la quantité transcendante est affectée d'une fonction qu'on considere comme non transcendante; & dans ces cas il arrive souvent que l'intégrale n'est pas non plus transcendante. Telle est p. ex. la formule

$$\cos \omega \,.\, d\omega,$$

où le $\cos \omega$ est regardé comme non transcendant. Or on sait que l'intégrale en est

$$\int \cos \omega \,.\, d\omega = \sin \omega + \text{const.}$$

& que par conséquent elle n'est pas transcendante.

4°. Il y en a où la quantité transcendante n'entre point elle-même; et ce sont précisément les formules qui, du premier abord, paroissent être algébriques. C'est ainsi p. ex. que la différentielle

$$dy = \frac{dx}{(1 + xx)^{3:2}}$$

est algébrique, tandis que la différentielle

$$dz = \frac{dx}{\sqrt{(1 + xx)}},$$

quoique plus simple, ne l'est pas. Ces sortes de différentielles

veu-

veulent être subdivisées. Car il y en a dont l'intégrale est une quantité transcendante simplement telle, comme p. ex.

$$dv = \frac{dt}{1 + tt}$$

est simplement un arc de cercle.

5°. Il y en a d'autres où l'intégrale est pareillement une quantité transcendante mais affectée de quantités non transcendantes. Telle est p. ex. la formule

$$dz = \frac{dx + xdx}{\sqrt{(1 - xx)}},$$

dont l'intégrale est

$$z = \text{Arc. sin}\, x - \sqrt{(1 - xx)} + \text{const.}$$

Observons que c'est par l'addition ou la soustraction que ces sortes de quantités doivent se trouver dans l'intégrale. Car, si elles s'y trouvoient par la multiplication ou la division, la quantité transcendante entreroit elle-même dans la différentielle.

6°. Enfin il y en a d'autres dont l'intégrale est affectée de quantités transcendantes. C'est ainsi p. ex. qu'il est

$$\int \frac{4dy}{1 - y^4} = \log \frac{1 + y}{1 - y} + 2\,\text{Arc. tang}\, y + \text{const.}$$

7°. Outre ces especes, il y a encore une qui peut avoir des cas extrèmement compliqués. C'est celle où une ou plusieurs especes de quantités transcendantes, avec leurs différentielles affectées de quantités algébriques, ou exprimées & mêlées de ces sortes de quantités, composent la différentielle. Telle est p. ex. la formule

$$dy = \frac{zdz}{a + \int dz \,.\, \sqrt{(1 + zz)}}.$$

§. 32. Voilà donc, ou peu s'en faut, l'énumération des principales classes des formules différentielles transcendantes. Ce que j'ai

 dit

dit à l'égard des deux premieres, me dispense de les examiner plus au long. La troisieme classe suppose que la différentielle de la quantité transcendante puisse être exprimée par la quantité non transcendante qui l'affecte; & alors cette classe se réduit à une des suivantes, qui méritent un examen plus particulier.

§. 33. Pour cet effet, j'observe que chaque espece de quantités transcendantes se réduit à une formule, qui lui sert de base & qui peut être considérée comme la plus simple en son espece. Telle est p. ex. la formule

$$dy = \frac{dx}{x},$$

qui est la base de toutes les différentielles logarithmiques. Toutes les autres en dérivent par la voie des substitutions.

§. 34. Supposons donc qu'une espece quelconque de quantités transcendantes ait pour base la différentielle

$$dz = P\,dx,$$

où P est une fonction de x, que je considere ici comme algébrique. Supposons de plus, que dans cette différentielle on substitue à x une fonction algébrique quelconque de z, que je nommerai Q, de sorte qu'il soit

$$x = Q.$$

Faisons encore

$$dx = R\,dz.$$

Il est clair que la valeur Q doit être substituée dans P, & que pour dx on posera $R\,dz$. Or, comme Q est supposé être une fonction algébrique de z, il est clair que sa différentielle $R\,dz$ présentera les symptômes que j'ai rapportés ci-dessus (§. 8.). Il est clair aussi, que ces symptômes doivent en emporter d'autres, par la substitution qu'on fait de $Q = x$ dans P, & par la multiplication qui se fait ensuite avec $R\,dz = dx$. Si p. ex. Q est une quantité rationelle, $R\,dz$ le sera aussi; & partant il n'y aura, dans la formule qu'on trouve, d'autre irrationalité que celles dont P pourra être affectée. Mais, si P est rationelle

nelle & Q irrationelle, R le ſera auſſi, & alors il n'arrive qu'en certains cas, que la multiplication dont je viens de parler, faſſe entierement diſparoitre cette irrationalité. Mais je me borne ici à faire au moins entrevoir, qu'il y a moyen de rendre plus connoiſſable la réductibilité des formules tranſcendantes compliquées, à d'autres qui le ſont moins, ou à celles qui leur ſervent de baſe. Du reſte, il eſt bien vrai, que chaque eſpece de quantités tranſcendantes demande des recherches plus particulieres, & que par cette raiſon il faudra ſe contenter de les entreprendre à l'égard de celles qui ont le plus d'uſage. C'eſt ainſi p. ex. que ſi, au lieu de différentier chacune des eſpeces de fonctions algébriques rapportées au §. 8, on prend les différentielles de leurs logarithmes, on trouvera des ſymptômes qui les rendent plus connoiſſables. Le logarithme d'une fraction étant la différence des logarithmes du numérateur & du dénominateur, ſa différentielle peut toujours être ſéparée en deux autres, qui ſont indépendantes l'une de l'autre. De même, le logarithme d'une quantité radicale eſt un multiple du logarithme de la quantité compriſe ſous le radical; & toutes les fois que cette quantité eſt rationelle, la différentielle du logarithme de la quantité radicale le ſera auſſi. Et comme, en général, le logarithme de tout ce qui ſe multiplie ou ſe diviſe, ſe décompoſe, il en eſt de même de ſa différentielle; & il eſt clair que par-là elle ſe ſimplifie conſidérablement. Mais il arrive tout le contraire lorſqu'il s'agit du logarithme de la ſomme de deux ou de pluſieurs quantités. Chacune auroit ſa différentielle ſéparée des autres (§. 8. N°. 4. 6.). Mais, pour avoir celle du logarithme, il faut les diviſer toutes par la quantité dont le logarithme doit être différentié. Car il eſt

$$d \log (P + Q + R + \&c.) = \frac{dP + dQ + dR + \&c.}{P + Q + R + \&c.}.$$

Si donc P, Q, R étoient des fractions ou des racines, leurs différentielles le ſeroient auſſi; & en ce cas il eſt clair, qu'en réduiſant toute la différentielle à une même dénominateur, ce dénominateur ſera réſoluble en facteurs, & qu'entre ces facteurs il y en aura un, dont le logarithme ſera l'intégrale. Ainſi le moyen de trouver ſi une différentielle eſt celle d'un logarithme, n'a d'autres difficultés que celles qui naiſſent de la recherche de ces facteurs. Car il arrive auſſi, que par de ſimples réductions le principal facteur diſparoit. C'eſt ainſi p. ex. que la différentielle

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}},$$

n'a plus dans ſon dénominateur le facteur $x \pm \sqrt{(1+xx)}$. Pour le lui rendre, il faut la transformer en

$$dy = \frac{dx}{\sqrt{(1+xx)}} \cdot \frac{x \pm \sqrt{(1+xx)}}{x \pm \sqrt{(1+xx)}},$$

ce qui donne

$$dy = \frac{dx \pm xdx : \sqrt{(1+xx)}}{x \pm \sqrt{(1+xx)}},$$

& partant

$$y = \log (x \pm \sqrt{(1+xx)}) + \text{Conſt.}$$

Quant aux arcs de cercle, on a

$$\text{Arc tang } (PQ) = \int \frac{PdQ + QdP}{1 + P^2Q^2}$$

$$\text{Arc tang } (P+Q) = \int \frac{dP + dQ}{1 + (P+Q)^2},$$

Si donc P, Q ſont des fractions ou des racines, on voit qu'en ramenant la différentielle à un même dénominateur, ce dénominateur ſera réſoluble en facteurs, & qu'entre ces facteurs il y en aura un de la forme $1 + X^2$, de ſorte que X ſera la tangente de l'arc qu'on cherche. On trouvera de la même maniere, qu'il eſt

$$\text{Arc tang } P + \log (Q + R) = \int \frac{dP}{1 + PP} + \int \frac{dQ + dR}{Q + R},$$

& que cette différentielle étant réduite à une même dénominateur, ce dénominateur ſera réſoluble en facteurs, & qu'entre ces facteurs il y en en aura un de la forme $1 + PP$, & un autre de la forme $Q + R +$ &c. qui indiqueront l'intégrale qu'il s'agit de trouver. Cependant il arrive encore dans ces sortes de cas, que les principaux facteurs disparoissent par la réduction. Cela arrive p. ex. dans la formule

$$dy = \frac{dx}{\sqrt[4]{(1 + x^4)}},$$

qui veut être proposée de la sorte:

$$dy = \frac{dx\,(1 + x^4)^{3:4}}{(1 + x^4)\,.\,[\sqrt{(1 + x^4)} + x^2]\,.\,[\sqrt{(1 + x^4)} - x^2]}.$$

Mais, comme je ne rapporte tout cela qu'en forme d'exemples, pour éclaircir ce que j'ai dit sur la méthode du Calcul intégral, je passerai maintenant à considérer la cinquieme classe.

§. 35. J'ai rapporté à cette Classe les différentielles dont les intégrales sont partie transcendantes, partie algébriques. C'est ici où les symptômes dont je viens de parler, seroient plus compliqués. Cependant ce que j'ai dit à l'égard des dénominateurs peut y être également appliqué. Mais le grand point est de séparer la partie transcendante d'avec celle qui est algébrique. Il est clair que par *séparer*, je n'entens pas soustraire d'une formule transcendante une algébrique quelconque, mais en soustraire ce qu'il y a d'algébrique, de façon que la partie transcendante, qui reste, soit purement transcendante. J'ai déjà remarqué que, dans l'intégrale, ces quantités se trouvent séparées par les signes $+$ & $-$. (§. 32. N°. 5.) Et par cette raison la séparation peut nécessairement avoir lieu. Or elle est assez facile, toutes les fois que ces parties se trouvent déjà séparées dans la différentielle, & qu'elles sont connoissables d'elles-mêmes. C'est ainsi p. ex. que dans la formule

$$\int\left(dx + \frac{dx}{x}\right) = x + \log x + \text{const.}$$

il

il n'y a plus rien à ſéparer, tout comme réciproquement dans la formule

$$z = \int (xe^x dx + e^x dx) = xe^x + \text{conſt.}$$

on ne ſauroit rien ſéparer, à moins qu'on ne faſſe

$$\log (z - \text{conſt.}) = x + \log x.$$

§. 36. Il s'agit donc ici des cas où la ſéparation peut avoir lieu, mais où elle n'eſt pas ſi facilement connoiſſable. Or la méthode employée ci-deſſus pour les intégrales algébriques, peut encore ici être employée avec ſuccès. C'eſt ce que quelque exemple fera voir.

XII. Exemple.

§. 37. Soit propoſé

$$dy = \frac{1 + 2x + 4xx}{\sqrt{(1 + xx)}} \cdot dx;$$

il s'agit de voir ſi cette formule a quelque partie tranſcendante, & quelle elle eſt? Pour cet effet poſons (§. 19.)

$$y = z \cdot \sqrt{(1 + xx)}$$

$$dy = \frac{dz(1 + xx) + zxdx}{\sqrt{(1 + xx)}},$$

& nous aurons

$$1 + 2x + 4xx = dz(1 + xx) + zxdx,$$

ce qui fait voir qu'il faut faire

$$z = A + Bx$$

$$dz = Bdx.$$

Et en ſubſtituant ces valeurs, il en réſulte, toute réduction faite,

$$\begin{aligned} o = &- 1 - 2x - 4xx \\ &+ B + Ax + 2Bxx: \end{aligned}$$

or, en poſant chaque terme $= o$, le ſecond terme donne

$$A = 2,$$

ce

ce qui fait voir que dans la différentielle proposée le second terme

$$\frac{2x\,dx}{\sqrt{(1 + xx)}}$$

est une des parties algébriques. Voyons s'il en est de même des deux autres termes. Or le premier donne

$$B = 1,$$

mais le troisieme donne $\quad B = 2;$

& ces deux valeurs n'étant pas les mêmes, il s'ensuit qu'en effet il y a dans la formule proposée une partie transcendante. On voit encore qu'elle dérive du coëfficient, soit du premier, soit du dernier terme. Car, en changeant ces coëfficiens en sorte qu'ils satisfassent à l'une ou à l'autre valeur de B, que nous venons de trouver, on obtient les deux formules

$$dv = \frac{1 + 2x + 2xx}{\sqrt{(1 + xx)}} \,.\, dx$$

&

$$dw = \frac{2 + 2x + 4xx}{\sqrt{(1 + xx)}} \,.\, dx,$$

qui sont algébriquement intégrables, en ce qu'il est

pour $B = 1, \quad v = (2 + x)\ \sqrt{(1 + xx)} + \text{const.}$

pour $B = 2, \quad w = (2 + 2x)\ \sqrt{(1 + xx)} + \text{const.}$

Mais, comme il est

$$dv = dy - \frac{2xx\,dx}{\sqrt{(1 + xx)}},$$

$$dw = dy + \frac{dx}{\sqrt{(1 + xx)}},$$

il est clair qu'il sera

$$y = (2 + x)\ \sqrt{(1 + xx)} + 2\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1 + xx)}} + \text{const.}$$

& $y = (2 + 2x)\sqrt{(1 + xx)} - \int \frac{dx}{\sqrt{(1 + xx)}} + \text{conſt.}$

Il eſt clair auſſi que, tandis qu'on cherche l'intégrale qui ait la partie tranſcendante la plus ſimple, il faudra s'en tenir à la derniere. Du reſte la différence ne conſiſte qu'en ce que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1 + xx)}} \quad \text{eſt un ſecteur,}$$

$$\& \ 2\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1 + xx)}} \quad \text{un ſegment}$$

de l'hyperbole équilatérale. On voit donc par cette façon de procéder que, dans la formule propoſée

$$dy = \frac{1 + 2x + 4xx}{\sqrt{(1 + xx)}} \cdot dx,$$

le ſecond terme $\frac{2x\,dx}{\sqrt{(1+xx)}}$,

eſt tout à fait indépendant des deux autres, & qu'il ne les rend ni plus ni moins tranſcendans. Cela ſuit de ce que le coëfficient A a une valeur décidée. Mais les deux autres termes ſont mêlés de quelque quantité algébrique, de ſorte que, quand on ſépare cette partie, la partie tranſcendante ſe réduit à un ſeul terme. Et c'eſt tout ce qu'on peut faire, à moins qu'on ne ſubſtitue à x quelque fonction d'une autre variable, qui réduiſe la partie tranſcendante à une forme encore plus ſimple, ce qui ne ſauroit ſe faire qu'en la ramenant à une forme rationelle.

XIII. Exemple.

§. 38. Soit propoſé

$$dy = \frac{x^6\,dx}{\sqrt{(1 + xx)}};$$

il

il s'agit de séparer de cette formule la partie transcendante qu'elle pourra avoir. Pour cet effet faisons

$$\eta = z\sqrt{(1 - xx)},$$

$$d\eta = \frac{(1 - xx)\,dz - zx\,dx}{\sqrt{(1 - xx)}},$$

& nous aurons

$$x^6 dx = (1 - xx)\,dz - zx\,dx,$$

ce qui fait voir qu'il faut poser

$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5,$$

$$dz = \quad (B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4)\,dx.$$

Et comme, au lieu de la formule proposée, nous pourrons d'abord prendre

$$d\eta = \frac{Q\,dx + x^2\,dx}{\sqrt{(1 - xx)}} = \frac{(1 - xx)\,dz - zx\,dx}{\sqrt{(1 - xx)}},$$

où Q est une fonction rationelle de x lorsqu'en effet il y a dans la formule proposée quelque partie transcendante, mais qui devient $= 0$ lorsqu'il n'y en a pas, nous aurons l'équation

$$(Q + x^6)\,dx = (1 - xx)\,dz - zx\,dx,$$

qui, en substituant les valeurs de z & de dz, donne

$$\begin{aligned} Q = &+ B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 \\ &- Ax - 2Bx^2 - 3Cx^3 - 4Dx^4 - \\ &5Ex^5 - 6Fx^6 - x^6; \end{aligned}$$

& il s'agit de voir si, chaque terme étant posé $= 0$, les coëfficiens A, B - - - F se déterminent en sorte que Q devienne également $= 0$. Car on voit qu'il y a 7 termes à faire $= 0$, au lieu qu'il n'y a que 6 coëfficiens A, B - - - - F à déterminer, & que par conséquent la fonction Q doit fournir le septieme, lorsque les six ne satisfont pas à toutes les conditions. Or le ſecond, le troiſieme & le cinquieme termes donnent les trois équations

$$5E = 0$$
$$4E - 3C = 0$$
$$2C - A = 0.$$

Et comme dans ces trois équations il n'y a que les trois inconnues E, C, A, on voit que leur valeur eſt déterminée en ce qu'il eſt

$$E = C = A = 0.$$

Il n'en eſt pas de même des quatre autres termes, qui fourniſſent les 4 équations

$$B = 0$$
$$3D - 2B = 0$$
$$5F - 4D = 0$$
$$1 + 6F = 0,$$

où il n'y a que trois inconnues. Or, comme les trois premieres de ces équations donnent $B = D = F = 0$, & que cette valeur de F ne ſatisfait pas à la quatrieme, il eſt clair qu'on ne ſauroit faire $Q = 0$, mais qu'il faut donner à Q une des quatre valeurs ſuivantes:

$$Q = \alpha$$
$$Q = \beta x^2$$
$$Q = \gamma x^4$$
$$Q = \delta x^6,$$

ce qui en même tems déterminera la partie tranſcendante, dont la différentielle dy eſt affectée. Or, comme il s'agit d'en trouver la plus ſimple, il eſt clair qu'il faut retenir la premiere de ces valeurs. De là nous aurons les quatre équations

$$B - \alpha = 0$$
$$3D - 2B = 0$$

5F

$$5F - 4D = 0$$
$$1 + 6F = 0,$$

qui donnent

$$F = -\tfrac{1}{6},\quad D = -\tfrac{5}{24}F,\quad B = -\tfrac{15}{48} = a,$$

& partant

$$z = -(\tfrac{15}{8}x + \tfrac{5}{4}x^3 + x^5)$$
$$\eta = -(\tfrac{15}{48}x + \tfrac{5}{24}x^3 + \frac{x^5}{6})\sqrt{(1 - xx)}.$$

Mais il eſt

$$\eta = y + a\int\frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}},$$

donc il ſera

$$-y = \tfrac{15}{48}\int\frac{dx}{\sqrt{(1 - xx)}}$$
$$+ (\tfrac{15}{48}x + \tfrac{5}{24}x^3 + \tfrac{1}{6}x^5)\sqrt{(1 - xx)} + \text{conſt.}$$

ou bien

$$-y = \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\text{Arc. ſin.}\,x +$$
$$\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}x + \frac{1.5}{4.6}x^3 + \frac{1}{6}x^5\right)\sqrt{(1 + xx)} + \text{conſt.}$$

§. 39. Si la différentielle tranſcendante qu'on voudra traiter de cette maniere, eſt en elle-même la plus ſimple, alors il eſt clair qu'il n'y a rien à ſéparer, & en employant cette méthode on trouveroit, ou la formule elle-même, ou une autre plus composée. Enſuite, il convient auſſi d'obſerver que dans cette méthode il ne ſe fait point de ſubſtitution, parce que le réſultat qu'elle donne eſt exprimé par la même variable x, qui entre dans la différentielle dont on veut ſéparer les quantités algébriques & tranſcendantes. Cela fait auſſi, que la partie tranſcendante qu'on trouve, peut quelquefois être partagée en d'autres qui ſont beaucoup plus ſimples, ou du moins d'une origine plus ſimple. Mais, ordinairement, il faut alors employer des ſubſtitu-

 tions,

tions, ce qui arrive ſurtout lorſque dans la différentielle propoſée il entre des quantités radicales.

XIV. Exemple.

§. 40. Soit propoſée la formule

$$dy = \frac{dx}{\sqrt[n]{(1 \pm x^n)}}.$$

Cette formule paroit être la plus ſimple en ſon eſpece. Elle ne l'eſt cependant que dans un petit nombre de cas, où elle donne ſimplement un arc de cercle, ou un logarithme, ou enfin, dans le cas de $n = 0$, la quantité rationelle x. Dans tous les autres cas, elle peut-être décompoſée dans ces trois ſortes de quantités, & par là elle n'eſt ni ſimple, ni d'une eſpece tranſcendante particuliere ou primitive. Cela demande des ſubſtitutions. Faiſons pour cet effet

$$x = \frac{1}{z},$$

$$dx = -\frac{dz}{zz},$$

& il ſera

$$-dy = \frac{dz}{zz \,.\, \sqrt[n]{(1 \pm \frac{1}{z^n})}},$$

ou bien

$$-dy = \frac{dz}{z \,.\, \sqrt[n]{(z^n \pm 1)}},$$

ou enfin

$$-dy = \frac{z^{n-1}\, dz}{z^n \,.\, \sqrt[n]{(z^n \pm 1)}}.$$

Faiſons encore

$$z^n \pm 1 = v^n$$
$$z^{n-1} dz = v^{n-1} dv$$
$$z^n = v^n \mp 1,$$

& il ſera

$$-dy = \frac{v^{n-2} dv}{v^n \mp 1},$$

fraction rationelle, qui peut être décompoſée en quantités circulaires & logarithmiques, encore lorſque n eſt un nombre rompu.

§. 41. Voilà à peu près ce que j'avois à dire pour indiquer l'uſage de la méthode que je viens d'expoſer. Je me ſuis borné à l'appliquer à des exemples faciles, parce que mon but n'étoit pas de donner une liſte de formules intégrales que chacun pourra trouver en employant la méthode elle-même. C'eſt à cela que les préceptes du Calcul intégral doivent aboutir; & c'eſt auſſi à quoi aboutiſſent les réflexions générales que j'ai rapportées. Je ne laiſſerai pas cependant de faire encore mention d'une autre méthode, qui me paroit mériter l'attention des Géometres. Voici à quoi elle revient.

§. 42. Suppoſons une formule intégrale, p. ex.

$$z = x \sqrt{(a^2 + x^2)};$$

il eſt clair qu'on peut lui donner la forme de deux variables, en faiſant p. ex.

$$z = y \sqrt{(a^2 + x^2)}$$
$$z = x \sqrt{(a^2 + xy)}$$
&c.

Car, en ſubſtituant dans ces expreſſions la valeur $y = x$, il eſt clair qu'elles ſeront la même que la formule propoſée. Différentions maintenant ces trois formules, & nous aurons

$$dz = \frac{(a^2 + 2x^2)\, dx}{\sqrt{(a^2 + 2x^2)}}$$

dz

$$\mathrm{d}z = \frac{(a^2 + x^2)\,\mathrm{d}y + yx\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

$$\mathrm{d}z = \frac{aa\mathrm{d}x + \frac{3}{2}xy\mathrm{d}x + \frac{1}{2}xx\mathrm{d}y}{\sqrt{(a^2 + xy)}}.$$

Il eſt clair que ces formules ſont les mêmes en faiſant $y = x$. Mais il eſt clair auſſi que les deux dernieres auroient pu être dérivées de la premiere, indépendamment de l'intégrale. Or je dis qu'en faiſant ces ſortes de ſubſtitutions d'une certaine façon, on peut rendre l'intégration plus facile. C'eſt ainſi p. ex. qu'en ne regardant, dans la premiere partie de la ſeconde formule, que l'y variable, ſon intégrale eſt

$$y\sqrt{(a^2 + x^2)} + \text{conſt. X.}$$

Et cette intégrale étant différentiée en ne regardant que l'x variable, donne

$$\frac{yx\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} + \mathrm{dX},$$

c'eſt à dire, en faiſant $\mathrm{dX} = 0$, la ſeconde partie de la même formule. Il eſt donc clair qu'il eſt

$$z = y\sqrt{(a^2 + x^2)} + \text{conſt.}$$

ou bien à cauſe de $y = x$,

$$z = x\sqrt{(a^2 + x^2)} + \text{conſt.}$$

§. 43. Dans cette façon de procéder il n'eſt pas néceſſaire de poſer préciſément $x = y$; on pourra faire x égal à une fonction quelconque de y. C'eſt ainſi p. ex. qu'en faiſant

$$x^2 = y,$$

la formule différentielle

$$\mathrm{d}z = \frac{(a^2 + 2xx)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$$

peut

peut être changée en

$$dz = \frac{(a^2 + y)\,dx + \frac{1}{2}x\,dy}{\sqrt{(a^2 + y)}},$$

dont l'intégrale ſe trouve, comme du premier coup d'œil,

$$z = x\sqrt{(a^2 + y)} + \text{conſt.}$$

ou, en remettant la valeur de y,

$$z = x\sqrt{(a^2 + x^2)} + \text{conſt.}$$

§. 44. Mais j'ai dit que ces ſortes de ſubſtitutions veulent être faites *d'une certaine façon.* Ce n'eſt pas qu'elles ne ſoient faiſables ſuivant toutes les combinaiſons poſſibles. Mais la grande condition eſt de les faire en ſorte que la formule à deux variables qui en réſulte, ſoit une différentielle complette. Cela n'eſt gueres, ou point du tout faiſable, toutes les fois que la formule n'a point d'intégrale algébrique. Mais, quand elle en a une, on peut le faire en une infinité de manieres, de ſorte qu'alors il ne s'agit que de trouver une ſubſtitution telle, qu'elle rende non ſeulement la différentielle à deux variables complette, mais la ſimplifie encore pour ce qui regarde l'intégration.

§. 45. Or on ſait qu'une différentielle à deux variables, comme p. ex. celle du §. 42.

$$dz = dx\sqrt{(a^2 + y)} + \frac{x\,dy}{2\sqrt{(a^2 + y)}}$$

eſt complette, lorſqu'en différentiant le facteur de dx ſuivant y, & le facteur de dy ſuivant x, on obtient le même réſultat

$$\frac{dx\,.\,dy}{2\sqrt{(a^2 + y)}}, \quad \frac{dy\,dx}{2\sqrt{(a^2 + y)}},$$

de ſorte que par ce moyen on peut toujours reconnoitre, ſi, par la ſubſtitution qu'on a faite, on parvient à une différentielle complette ou non. Il eſt clair auſſi que pour y réuſſir, on peut poſer au lieu de x, une fonction de y, & même de y & x, dont les coëfficiens & les exposans soient indéterminés, & qui se déterminent ensuite par cette seconde différentiation. Mais il faut nécessairement laisser du moins un x, sans substitution, parce que sans cela on n'auroit ni plus ni moins que la même formule, & qui seroit encore plus compliquée.

§. 46. Cette méthode peut encore être envisagée d'une autre façon. Car, en considérant p. ex. la formule

$$dz = \frac{(a^2 + 2xx)\, dx}{\sqrt{(aa + xx)}},$$

comme l'élément de l'espace d'une ligne courbe, on peut considérer celles qui s'en déduisent par l'introduction de y, comme autant de différens élémens d'un solide. C'est ainsi p. ex. que dans la formule transformée (§. 45.)

$$dz = dx \sqrt{(a^2 + y)} + \frac{x\, dy}{2\sqrt{(a^2 + y)}},$$

le facteur ou multiplicateur de la premiere partie exprime l'aire de la section du solide qui se fait le long de la droite y. Le produit $dx \sqrt{(a^2 + y)}$ donne donc l'élément du solide le long de cette droite. De la même maniere, l'autre partie

$$\frac{x\, dy}{2\sqrt{(a^2 + y)}}$$

donne l'élément du solide le long de la droite x, parce que l'aire de la section, qui se fait le long de cette droite, y est multipliée par l'épaisseur infiniment petite dy. Enfin, si la différentielle est complette, on aura (§. 45.)

$$ddz = \frac{dy\, .\, dx}{2\sqrt{(a^2 + y)}},$$

l'élément de ces deux élémens, c'est à dire, un parallélipipede dont la base est $= dx\, .\, dy$ & la hauteur $= 1 : 2\sqrt{(a^2 + y)}$. Mais, si la ſi la différentielle n'eſt pas complette, alors au lieu de cuber un même ſolide, on en cube deux, qui n'ont point l'élément ddz commun, puiſque la hauteur du parallélipipede eſt différente. Et il eſt clair qu'alors il faudroit retrancher ou ajouter la différence de la hauteur des deux parallélipipedes.

§. 46. Suppoſons p. ex. qu'en faiſant $x = y$, on change la formule

$$dz = \frac{(aa + 2xx)\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}},$$

dans la ſuivante

$$dz = \frac{(a^2 + xx)\,dy + yy\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}.$$

La premiere partie différentiée ſuivant x, donne le parallélipipede

$$ddz = \frac{x\,dx\,dy}{\sqrt{(a^2 + x^2)}},$$

& la ſeconde partie différentiée ſuivant y, donne le parallélepipede

$$ddz' = \frac{2y\,dy\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}.$$

Or ces deux parallélipipedes n'étant pas le même, cela fait voir que la différentielle transformée n'eſt point complette. Intégrons néanmoins ddz ſuivant y, & ddz' ſuivant x, & nous aurons les parties qu'il faut ajouter à la différentielle dz pour la rendre complette. Il ſera donc

$$d\zeta = dy\sqrt{(a^2 + x^2)} + \frac{yy\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$$
$$+ \frac{yx\,dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} + 2y\,dy \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + x^2)}},$$

ce qui donne

$$\zeta = y\sqrt{(aa + xx)} + yy\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} + \text{conſt.}$$

Or la partie que nous avons ajoutée à dz eſt

$$\frac{yx\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} + 2y\,\mathrm{d}y\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}.$$

Et comme nous avons le choix d'y placer y au lieu de x, nous le changerons en

$$\frac{yy\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} + 2y\,\mathrm{d}y\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2 + x^2)}},$$

dont l'intégrale eſt

$$yy\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2 + x^2)}},$$

c'eſt à dire, celle qu'il faut retrancher de ζ pour avoir

$$z = y\sqrt{(a^2 + x^2)} + \text{conſt.} = x\sqrt{(a^2 + x^2)} + \text{conſt.}$$

Mé-