



I.

Theilung und Theiler
der Zahlen.

§. I.



Es ist nicht zu zweifeln, daß die Aufgabe von Erfindung der Theiler der Zahlen von den ältesten Zeiten an die Geometer beschäftigt habe. Die Theorie der Primzahlen kommt bereits in den Euclidischen Anfangsgründen vor, und eben so findet sich in denselben die Aufgabe von dem größten gemeinsamen Theiler zweier Zahlen. Daß aber Euclid von der Aufgabe, die Theiler einer fürgegebenen Zahl zu finden, nicht Erwähnung thut, rührt schlechthin nur daher, weil er alles wegläßt, was er nicht auf eine ganz determinirte Art erweisen

II. Th. Lamb. Beytr. A. 4. 100.

2 I. Theilung und Theiler

konnte. Diese Aufgabe gehört einigermaßen unter die Diophantischen; sie ist aber auch zum Theil davon verschieden. Denn ungeachtet die Bedingung, daß die Theiler ganze Zahlen seyn müssen, dabey vorkommt, so bleibt die Frage: wie viele Theile eine jede Zahl habe, schlechtlin unbestimmt; weil man Zahlen findet, die so viele und so wenig Theiler haben, als man immer will. Dieser Umstand aber verursacht, daß man in der Algebra die Frage von Erfindung der Theiler einer Zahl, schwerlich oder gar nicht auf eine Gleichung bringen kann. Man hat dabey kein ander Datum als die Zahl, deren Theiler zu suchen sind. Von dieser weiß man nicht voraus, ob sie Theiler hat, oder nicht. Wolte man demnach die Theiler, oder wenigstens die Factoren der fürgegebenen Zahl als Wurzeln einer Gleichung ansehen; so würde diese Zahl zwar das letzte Glied der Gleichung seyn, als welches allemal das Product der Wurzeln ist. Hingegen bleibt die Anzahl der Glieder dieser Gleichung, die Coefficienten derselben und der Grad der Gleichung ganz unerörtert, bevor nicht die Factoren der fürgegebenen Zahl gefunden sind. Man reicht eben so nicht aus, wenn man sich mit einer quadratischen Gleichung begnügen, und nur zween Factores finden will.

§. 2.

Die Auflösung, die man für diese Aufgabe angiebt, ist, daß man die Zahl, deren Theiler man

man suchen will, durch jede kleinere Zahl wirklich theile, um dadurch, der Ordnung nach, zu finden, ob sie Theiler habe oder nicht? Ich sage, durch jede kleinere Zahl. Denn ungeachtet seit Euclids Zeiten an schon bewiesen ist, daß man hiebey alle die Zahlen vorbeý gehen kann, die nicht Primzahlen sind, so setze dieses dennoch voraus, daß man die Primzahlen kenne. Es ist aber die Erfindung der Primzahlen eben so schwer, als die Erfindung der Theiler einer Zahl, und man muß eben die Theilungen, die wir vorschlagen, vornehmen, es sey daß man eine Zahl als Primzahl erkennen, oder ihre Theiler finden will. Indessen läßt sich die Arbeit auf eine gedoppelte Art abkürzen. Denn wenn die Theilung mit einer Zahl nicht angeht, so geht sie auch mit jedem vielfachen dieser Zahl nicht an, und eben so viele Theilungen können demnach erspart werden. Verfahret man auf diese Art von 1 an gerechnet; so behält man allerdings nur jede Primzahlen, womit die Theilung vorgenommen werden muß. Sodann läßt sich ohne Mühe erweisen, daß, wenn eine Zahl Theiler hat, von diesen Theilern eben so viele kleiner sind als ihre Quadratwurzeln, als es deren giebt, die grösser sind, und daß letztere gefunden sind, sobald man erstere gefunden hat, weil jene die Quotienten von diesen sind. Dieser Umstand macht, daß man sich begnügen kann, die Theilung nur mit denen Primzahlen vorzu-

4 I. Theilung und Theiler

nehmen, welche kleiner sind, als die Quadratwurzel der Zahl, deren Theiler man suchen will.

§. 3.

Indessen wenn leicht diese Zahl sich auf 100000, oder ein Million beläuft; so hat man so viele Theilungen vorzunehmen, daß man es gewiß nicht für die langeweile unternimmt, und ansetzt, ob man die Zahl nicht eben so gut ungetheilt lasse, oder aufgebe; zumal da man nicht voraus wissen kann, ob es nicht eine Primzahl ist, und daher gar keine Zersällung in Factoren zuläßt. Ich habe demnach auf Mittel gedacht, alle diese Theilungen dergestalt unnöthig zu machen, daß man ohne eine einige davon vorzunehmen, dennoch jede Quotienten und jede Ueberreste finden, und gleichsam in einer Reihe hinschreiben kann. Man sieht leicht, daß dieses in einer gewissen Ordnung, oder nach einem allgemeinen Gesetze geschehen müsse. Und da die Ordnung, wie die Primzahlen auf einander folgen, noch ganz unbekannt ist; so sieht man auch leicht, daß es besser angehen werde, wenn man die Theiler entweder nach der natürlichen Ordnung der Zahlen, oder wenigstens nach einer andern ganz einfachen Ordnung nimmt. Ich werde indessen die Sache so vortragen, wie ich darauf geleitet worden. Dahin gehören demnach folgende Betrachtungen.

§. 4.

§. 4.

Wenn eine Zahl kleine Theiler hat, dergleichen z. E. 2, 3, 5, 7, 11, 13 u. sind, so ist die Theilung damit bald vorgenommen, und die Probe fällt desto leichter aus, weil man für diese Theiler Kennzeichen hat, daran sich bald finden läßt, ob sie in einer Zahl aufgehen, oder nicht. Hat hingegen eine Zahl nur grosse Theiler, so ist dieses eben der Fall, wo man sehr viele Theilungen mit den kleinern Primzahlen vergebens vornehmen muß. Man sieht leicht, daß man hier durch grosse Theiler solche verstehen muß, die von der Quadratwurzel der Zahl, deren Theiler man sucht, wenig unterschieden sind, oder ein geringes Verhältniß zu derselben haben. Z. E. hat die Zahl 479707 nur die zweien Theiler 491 und 977. Und diese werden groß genannt, weil sie von der Quadratwurzel $692 + \dots$ kaum um die Hälfte verschieden sind. Hingegen hat die Zahl 479708 allerdings einen größern Theiler 239854; sie hat aber auch einen sehr kleinen 2. Man kann daher nicht sagen, daß sie lauter grosse Theiler habe.

§. 5.

Wenn demnach eine Zahl A solche Theiler hat, die von ihrer Quadratwurzel nicht viel verschieden sind; so ist es das natürlichste, dieselben auf folgende Art zu suchen. Man ziehe die Quadratwurzel derselben in ganzen Zahlen aus, und sehe zugleich auf den Ueberrest der

6 I. Theilung und Theiler

Quadratwurzel in ganzen Zahlen, oder die von der nächst kleinern Quadratzahl sey $= a$, und der Ueberrest $= b$, so ist

$$A = aa + b.$$

Es ist klar, daß wenn A selbst eine Quadratzahl ist, sodann $b = 0$ wird. Da wir nun annehmen, A habe solche Theiler, die von a wenig verschieden sind, so nenne man den kleinern $a - x$, den größern $a + x + y$. so ist

$$A = aa + b = (a - x) \cdot (a + x + y)$$

$$\text{und } \frac{A}{a - x} = \frac{aa + b}{a - x} = a + x + \frac{xx + b}{a - x} \\ = a + x + y$$

Demnach wird

$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$

eine ganze Zahl seyn, welche zu $a + x$ addirt, den Theiler $a + x + y$ giebt. Man sieht zugleich auch, daß der Zähler dieses Bruches $xx + b$ der Ueberrest ist, welcher bleibt, wenn A durch $a - x$ getheilt, $a - x$ mal geht, oder wenn $a - x$ mit $a + x$ multiplicirt, von A abgezogen wird.

§. 6.

Man kann nun, um es im Vorbeygehen anzumerken, vermittlest dieser Formel

$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$

sprungsweise Zahlen bestimmen, zwischen welche kein

kein Theiler von A fällt. Es sey z. E. die Zahl 150737, so ist die nächst kleinere Quadrat- zahl 150544, ihre Wurzel $388 = a$, und der Unterschied $b = 193$, demnach

$$150737 = (388)^2 + 193$$

und $y = \frac{193 + xx}{388 - x}$

eine ganze Zahl. Hier sieht man nun leicht, daß man x wenigstens $= 14$ nehmen müsse, wenn y auch nur $= 1$ solle werden können; und daß demnach zwischen 388 und $388 - 14 = 374$ kein Theiler der Zahl 150737 vorkomme. Man setze ferner $x = 14 + p$, so findet man

$$y = \frac{389 + 28p + pp}{374 - p} = 1 + \frac{15 + 29p + pp}{374 - p}$$

eine ganze Zahl. Hier sieht man wiederum, daß p wenigstens $= 10$ müsse genommen werden, wenn der Quotient auch nur $= 1$ werden sollte. Demnach ist auch zwischen 374 und 364 kein Theiler der Zahl 150737. Man kann eben so fortfahren und $p = 10 + q$ setzen; und so wird man

$$y - 2 = \frac{41 + 50q + qq}{364 - q}$$

erhalten, welches wiederum eine ganze Zahl seyn muß.

§. 7.

Will man hiebei der beständig wieder vorkommenden Reductionen entübrigt seyn, so

A 4

fehrt

8 I. Theilung und Theiler

Lehrt man die Formel

$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$

um, indem man sie in

$$2x + y = \sqrt{4ay + yy - 4b}$$

verwandelt. Hier muß demnach

$$4ay + yy - 4b$$

eine Quadratzahl seyn. Dieses giebt in erst angeführtem Beispiele, wo $a = 388$ und $b = 193$ ist,

$$2x + y = \sqrt{1552y - 772 + yy}$$

woraus man für

$y = 1$	781 *	$y = 11$	16421 *
2	2336	12	17996
3	3893 *	13	19573 *
4	5452 *	14	21152 *
5	7013 *	15	22733 *
6	8576	16	24316
7	10141 *	17	25901 *
8	11708 *	18	27488 *
9	13277 *	19	29077 *
10	14848 *	20	30668 *
11	16421 *	21	32261 *
		22	33856 x.

findet. Ueber diese Zahlen bemerke man:

1. Daß, wenn die zwei ersten gefunden sind, die folgenden durch blosses addiren gefunden werden. Denn ihre Unterschiede sind 1555, 1557, 1559, 1561, 1563 u. jeder folgende um 2 grösser.

2. Da

2.^o Da diese Zahlen Quadrate seyn sollen, so werden die meisten von denen, die es nicht sind, leicht an den Endigungen erkannt; diese sind mit einem * bezeichnet.

3. Demnach bleiben nur noch die wenigen bey $y = 2, 6, 12, 16, 22$ u. zu untersuchen. Da nun von diesen, wenn man die Probe anstellt, nur die letzte 33856 eine Quadratzahl ist, und 184 zur Wurzel hat, so findet man dadurch

$$2x + y = 2x + 22 = 184$$

$$x = 81$$

folglich den einen Theiler

$$388 - x = 307$$

den andern

$$388 + x + y = 491.$$

Und zugleich weiß man, daß, wenn auch die Zahl 150737 noch andere Theiler haben sollte, derselben keiner zwischen 307 und 491 falle.

§. 8.

Die erstbemeldete Kennzeichen der Quadratzahlen, sind folgende:

1. Keine Quadratzahl endet sich mit 2, 3, 7, 8; sondern die Endungen sind

10 I. Theilung und Theiler

p 01	04	00	16	p 09
i 21	24	025	36	i 29
p 41	44	225	56	p 49
i 61	64	625	76	i 69
p 81	84		96	p 89

wo p überhaupt jede gerade Zahl, i aber jede ungerade bedeutet.

- 2.^o Jede gerade Quadratzahl läßt sich so vielmal durch 4 theilen, bis der Quotient ungerade wird. Geschieht dieses bey einer fürgegebenen geraden Zahl nicht, so ist sie keine Quadratzahl.
- 3.^o Demnach lassen sich auch die zwei letzten Ziffern einer geraden Quadratzahl durch 4 theilen.
- 4.^o Jede ungerade Quadratzahl um 1 vermindert, läßt sich durch 8 theilen.
- 5.^o Demnach auch die drey letzten Ziffern derselben um 1 vermindert, können durch 8 getheilet werden.
6. Jede Quadratzahl, durch 9 getheilt, geht entweder auf, oder sie läßt 1, 4, 7 im Ueberreste.
7. Eine ungerade Quadratzahl, so durch 9 nicht theilbar ist, läßt sich, um 1 vermindert, durch 24 theilen.

Proben

Proben von dieser Art giebt es noch unzählige. Man sieht aber aus dieser angeführten leicht, daß, wenn eine Zahl dieselbe aushält, es sehr wahrscheinlich eine Quadratzahl sey.

§. 9.

Man kann auch von diesen Kennzeichen mehrere verbinden, und dadurch das Auffuchen der Theiler einer Zahl abkürzen. Um dieses durch ein Beispiel zu erläutern, so sey die Zahl 479707 fürgegeben; und es solle gefunden werden, ob, oder welche Theiler sie habe? Zieht man nach den vorhergegebenen Regeln (§. 6.) die Quadratwurzel aus, so findet man

$$479707 = (692)^2 + 843 = a^2 + b$$

demnach $a = 692$

$$b = 843$$

und folglich

$$2x + y = \sqrt{(2768y + yy - 3372)}$$

demnach für

$y = 2$	2168*	$y = 8$	18836
3	4941*	9	21621*
4	7716	10	24408*
5	10493*	11	27197*
6	13272*	12	29988*
7	16059*	13	32781*
		14	35576 x.

Diese Zahlen sollten wiederum Quadratzahlen seyn; es werden aber vermöge der erst angegebenen Kennzeichen, die mit einem * bezeichneten

12 I. Theilung und Theiler

neten leicht ausgeschlossen, und so bleiben nur noch die zu untersuchen, welche bey $y = 4, 8, 14, 18$ etc. stehen. Um nun auch von diesen noch die meisten auszuschließen, werden wir das sechste dieser Kennzeichen gebrauchen, daß nemlich jede Quadratzahl durch 9 getheilt, müsse 0, 1, 4, 7 übrig lassen. Man sehe demnach

$y = 10m + 4$ und $y = 10m + 8$ so verwandelt sich der Ausdruck

$2768y + yy - 3372$ in folgende beyde

$27760m + 100m^2 + 7716$
und $27840m + 100m^2 + 17836$.

Diese beyde Ausdrücke theile man durch 9, und behalte nur die Ueberreste, so ist

der erste der zewente
 $4m + 3 + mm$ $3m + 7 + mm$.

Man sehe nun für m die Werthe von 0 bis 8, und indem man wiederum durch 9 dividiret, behalte man ebenfalls nur die Ueberreste, so findet sich

für $m =$		für $m =$	
0	3	0	7*
1	8	1	2
2	6	2	8
3	6	3	7*
4	8	4	8
5	3	5	2
6	0*	6	7*
7	8	7	5
8	0*	8	5

Unter

Unter diesen Ueberresten finden sich nur 0 und 7, welche bey Quadratzahlen vorkommen. Demnach werden für m auch nur die Werthe

6	0
8	3
15	6
17	9
24	12
26 π .	15 π .

beibehalten, welches für y die Werthe

64	8
84	38
154	68
π .	98 π .

giebt. Wir können aber bey m und den Ausdrücken

$$27760 m + 100 m^2 + 7716$$

$$27840 m + 100 m^2 + 17836$$

bleiben. Wird demnach in diesen

$m = 6$	$m = 0$
8	3
15	6
π .	9 π .

gesetzt, so findet sich

für		für	
$m = 6$	177976	$m = 0$	17836
$= 8$	236196 *	$= 3$	25314
	π .	$= 6$	188476 π .

Hier

14 I. Theilung und Theiler

$$\begin{aligned} \text{Hier ist nun } \frac{236196}{4} &= \frac{59049}{(9)} = \frac{6561}{(9)} \\ &= \frac{729}{(9)} = \frac{81}{(9)} = \frac{9}{(9)} = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{demnach die Quadratwurzel} &= 2.3.3.3.3. \\ &= 486 = 2x + y \text{ und } y = 10m + 4 = 84. \\ \text{Demnach } 2x + 84 &= 486 \\ x &= 201 \end{aligned}$$

$$a - x = 692 - 201 = 491 \text{ der erste Theiler,}$$

$$a + x + y = 692 + 201 + 84 = 977 \text{ der andere Theiler.}$$

Da die übrige Zahlen 177976, 17836, 25314, 188476 keine Quadratzahlen sind, welches vermittelst der Theilung durch 4 leicht erhellet, so folgt auch, daß die fürgegebene Zahl 479707, wenn sie auſſer den beyden Theilern 491 und 977 noch andere hätte, derſelben keiner zwiſchen dieſe beyde falle.

§. 10.

Um nun wiederum zu dem §. 5. zurücke zu kehren, ſo haben wir daſelbſt angemerkt, daß in der Formel

$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$

der Zähler dieſes Bruches $xx + b$, der Ueberreſt iſt, welcher bleibt, wenn $a - x$ in A getheilt, $a + x$ mal geht; oder wenn $a - x$, $a + x$ male genommen von A abgezogen wird.

Seht

Setzt man nun für x der Ordnung nach 0, 1, 2, 3, 4 &c. so sieht man leicht, daß in

$$y = \frac{xx + b}{a - x}$$

der Zähler immer grösser, der Nenner aber immer kleiner wird, und daß daher nach und nach y grösser als 1, 2, 3, 4, 5 &c. werden muß. Es ist aber, wenn man A durch $a - x$ theilt, der Quotient

$$a + x + y = a + x + \frac{xx + b}{a - x}$$

demnach wächst dieser nicht nur um die Einheiten von x , sondern zugleich auch, wiewohl langsamer, um die von y . Ferner sieht man, daß die Ueberreste $xx + b$ anfangs wie die Quadrate von x , und daher ihre Unterschiede wie die ungerade Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 &c. anwachsen, bis sie grösser als der Theiler $a - x$ werden. Wird demnach, so bald dieses geschieht, $a - x$ von $xx + b$ abgezogen, so wird der Quotient um 1 grösser, und die folgenden Ueberreste nehmen nun ebenfalls stärker zu. Denn man setze, das Abziehen geschehe, wo $x = c$ wird, so ist der Ueberrest für $x = c$

vor dem Abziehen	nach dem Abziehen
$cc + b$	$cc + c + b - a$
demnach für die nächstfolgende Stelle $x = c + 1$	
$cc + 2c + 1 + b$	$cc + 3c + 2 + b - a$
und daher das Anwachsen dieser Ueberreste	
$2c + 1$	$2c + 2$

woraus

16 I. Theilung der Theiler

woraus man sieht, daß, wenn man das Abziehen wirklich vornimmt, die folgende Ueberreste um 1 stärker anwachsen, als wenn man das Abziehen nicht vorgenommen hätte.

§. 11.

Da sich alles dieses in einem Beispiele klarer zeigen läßt, so sey die Zahl 10007 durch jede kleinere Zahlen zu theilen, und die zu jedem Theiler gehörige Quotienten und Ueberreste zu finden. Nun ist $10007 = (100)^2 + 7$

$= a^2 + b$, demnach $a = 100$ und $b = 7$,

$$\text{folglich} \quad y = \frac{7 + xx}{100 - x}$$

Dieses giebt nun folgende Tabelle für jede Theiler $100 - x$.

§. 12.

In dieser Tabelle enthält die Columnne A die Theiler $100 - x$. In der Columnne B steht neben jedem Theiler der Ueberrest. Die dritte Columnne C giebt die Unterschiede, oder die allmähliche Zunahme dieser Ueberreste an. Endlich kommen in der vierten Columnne D die Quotienten in ganzen Zahlen vor. Alle diese Zahlen lassen sich nun allerdings finden, wenn man, der Ordnung nach, die fürgegebene Zahl 10007 durch 100, 99, 98, 97, 96 u. theilen will. Da es aber sehr langweilig ist, so viele Theilungen vorzunehmen, so ist es umstreitig

A

A	B	C	D	A	B	C	D
100	7		100 (I)	76	51		131
99	8	1	101	75	107	56	132
98	11	3	102	75	32		133
97	16	5	103	74	91	59	134
96	23	7	104	74	17		135
95	32	9	105	73	79	62	136
94	43	11	106	73	6		137
93	56	13	107	72	71	65	138
92	71	15	108	71	138	67	139
91	88	17	109	71	67		140
90	107	19	110	70	67	0 (70)	142 (II)
89	17		111	69	71	4	144
88	39	22	112	69	2		145
87	63	24	113	68	11	9	147
87	89	26	114	67	24	13	149
87	2		115	66	41	17	151
86	31	29	116	65	62	21	153
85	62	31	117	64	87	25	155
84	95	33	118	64	23		156
84	11		119	63	53	30	158
83	47	36	120	62	87	34	160
82	85	38	121	62	25		161
82	3		122	61	64	39	163
81	44	41	123	61	3		164
80	87	43	124	60	47	44	166
80	7		125	59	95	48	168
79	53	46	126	59	36		169
78	101	48	127	58	89	53	171
78	23		128	58	31		172
77	74	51	129	57	32	1 (58)	175 (III)
76	127	53	130	56	39	7	178
				55	52	13	181
				54	71	19	184

A	B	C	D	A	B	C	D
54	17		185	33	8		303
53	43	26	188	32	23	15 (47)	312 (IX)
52	75	32	191	31	25	2 (33)	322 (X)
52	23		192	30	47	22	332
51	62	39	195	30	17		333
51	11		196	29	31	14 (43)	344 (XI)
50	57	46	199	29	2		345
50	7		200	28	11	9 (37)	357 (XII)
49	11	4 (53)	204 (IV)	27	17	6 (33)	370 (XIII)
48	23	12	208	26	23	6 (32)	384 (XIV)
47	43	20	212	25	32	9 (34)	399 (XV)
46	71	28	216	25	7		400
46	25		217	24	23	16 (40)	416 (XVI)
45	62	37	221	23	48	25 (48)	433 (XVII)
45	17		222	23	25		434
44	19	2 (46)	227 (V)	23	2		435
43	31	12	232	22	41	39 (61)	453 (XVIII)
42	53	22	237	22	19		454
42	11		238	21	74	55 (76)	473 (XIX)
41	44	33	243	21	53		474
41	3		244	21	32		475
40	7	4 (44)	250 (VI)	21	11		476
39	23	16	256	20	87	76 (96)	496 (XX)
38	51	28	262	20	67		497
38	13		263	20	47		498
37	17	4 (41)	270 (VII)	20	27		499
36	35	18	277	20	7		500
35	67	32	284	1c.	1c.	1c.	1c.
35	32		285				
34	45	13 (47)	293 (VIII)				
34	11		294				
33	41	30	302				

eine beträchtliche Abkürzung, wenn alle diese Zahlen durch blosses Addiren gefunden, und gleichsam nur hingeschrieben werden können, so bald man vermittelst der Ausziehung der Quadratwurzel aus der fürgegebenen Zahl 10007 die drey ersten Zahlen

100 7 100
gefunden hat.

§. 13.

Dieses geht nun nach folgenden Regeln an.

- 1.° Erhellet aus der (§. 11.) gefundenen

$$\text{Formel} \quad y = \frac{7 + xx}{100 - x}$$

daß die ersten Ueberreste nach den Quadraten xx demnach ihre Unterschiede nach den ungeraden Zahlen 1, 3, 5, 7, 9 u. anwachsen.

- 2.° Daher finden sich in der dritten Columne C. diese ungerade Zahlen, der Ordnung nach, bis auf 19; und bis eben so weit sind sie in der zweyten Columne B zu dem ersten Ueberreste 7 addirt. Man begreift leicht, daß wenn 10007 eine Quadratzahl wäre, dieser erste Ueberrest $= 0$ seyn, und demnach die zweyte Columne die Quadrate 1, 4, 9, 16, 25 u. enthalten würde.

3. Nun findet sich die erstbemeldte Ordnung bey dem Theiler 90 unterbrochen: denn

20 I. Theilung und Theiler

19 zu 88 addirt, giebt 107. Da nun dieser Ueberrest grösser ist als der Theiler, so wird dieser davon abgezogen, und so bleibt 17, welcher nunmehr kleinere Ueberrest, unter 107 und ebenfalls neben 90 gesetzt ist; so, daß auf diese Art 90 zwey mal vorkömmt.

4. Sodann nahmen die Quotienten in der Columne D, welche überhaupt

$$100 + x + y = 100 + x + \frac{7 + xx}{100 - x}$$

sind, bis eben dahin, der Ordnung nach, um 1 zu. Von da an wird jeder um 1 grösser. Denn da 90 mal 110 = 9900 von 10007 abgezogen 107, demnach mehr als 90 übrig läßt; so sieht man leicht, daß sich in der That 90 mal 110 + 1, oder 90 mal 111 abziehen lassen. Und dieses macht, daß der Quotient 111 neben dem zweyten 90 und nicht neben 89 steht, wo er sonst würde zu stehen gekommen seyn, wenn man nicht 90 von 107 abgezogen hätte.

5. Endlich sieht man in der dritten Columne C daß von 19 nicht auf 21, sondern auf 22 gesprungen wird. Dieses würde ebenfalls nicht seyn, wenn nicht 90 wäre von 107 abgezogen worden. Denn so würde man

A	B	C	D
90	107	19	110
89	128	21	111
88	151	23	112
κ.	κ.	κ.	κ.

gehabt haben. Da aber auf diese Art alle Ueberreste B grösser seyn würden als ihre Theiler A, so müssen diese sämtlich abgezogen werden. Man ziehe sie wirklich ab, so wird jeder Quotient D um 1 grösser, und man erhält

90	17	19	111
89	39	22	112
88	63	24	113
κ.	κ.	κ.	κ.

dennoch eben die Zahlen, wie sie in der Tafel sind. Man verfährt daher kürzer, wenn man, wie es in der Tafel geschehen, 90 von 107 abzieht, und sodann von 19 auf 22 springt.

6.° Da nun die Ueberreste durch das beständige Addiren der Unterschiede, so in der Columnne C sind, immer anwachsen; so sieht man leicht, daß im folgenden wiederum müssen Subtractionen vorgenommen werden, so oft ein Ueberrest anfängt grösser als der Theiler zu werden.

7.° Dieses geschieht auch wirklich bey den Theilern 87, 84, 82, 80, 78, 76, 75, 74, 73, 71, welche daher eben so wie vorhin

22 I. Theilung und Theiler

90 doppelt vorkommen, und wo die Unterschiede C ebenfalls um 3 grösser werden.

8.^o Bis dahin geht demnach alles nach einem sehr einfachen Gesetze. Hingegen fängt bey dem Theiler 70 eine neue Ordnung an; und dieses geschieht immer wo der Quotient anfängt, doppelt, drey, vier, fünf u. mal grösser als der Theiler zu werden.

9.^o Um diese Abänderungen aber, der Ordnung nach, zu betrachten, so sieht man, daß bey 71 der Ueberrest 138 steht, und demnach 71 davon abgezogen werden muß. Dieses Abziehen macht, daß man in der Columnne C von 67 auf 70 kömmt, welche Zahl nun eben so groß ist als der Theiler; demnach wird sie zu dem neben dem 71 stehenden Ueberrest 67 nicht erst addirt, weil man den Theiler 70 von der Summe wiederum abziehen müßte. Ich habe demnach in der Columnne C 70 in () eingeschlossen, und 0 voran gesetzt, welches anzeigt, daß der neben 71 stehende Ueberrest 67 nicht vermehrt werde, sondern ebenfalls neben den Theiler 70 zu stehen komme.

10. Da nun aber dadurch der Quotient um 1 grösser wird, so steht auch neben dem Theiler 70 nicht 141, sondern 142.

11. Da

11. Da ferner bey dem Theiler 70 eine Subtraction geschehen, so solte in der Columnne C neben 69 nunmehr 73 stehen; da sich aber auch hievon 69 abziehen läßt, und 4 übrig bleibt, so habe ich auch nur 4 neben 69 gesetzt, welches zu 67 addirt, den Ueberrest 71 giebt. Man sieht auch leicht, daß ebenfalls wegen des Abziehens, der Quotient um 1 grösser, und demnach 144 werden mußte.
12. Aus gleichen Gründen nehmen von da an die Quotienten um 2, die Unterschiede C um 4 zu, jedoch mit dem Bedinge, daß, wo die Ueberreste grösser als die Theiler werden, daselbst wiederum subtrahirt, der Theiler doppelt gesetzt, der Quotient um 1 vermehrt, und in der Columnne C $4 + 1$ oder 5 addirt wird; wie man es bey den Theilern 69, 64, 62, 61, 59 sehen kann.
13. Bis dahin geht es nach der zweyten Ordnung. Die dritte fängt aus ganz ähnlichen Gründen bey 57 an. Denn da würde in der dritten Columnne 58 zu stehen kommen, wenn man nach der zweyten Ordnung fortfahren wolte. Da aber 58 bereits grösser ist als der Theiler 57, so habe ich 58 in () eingeschlossen, und dafür 1 gesetzt, um der Subtractionen überhoben zu seyn. Dieses machte aber, daß
- B 4 nur

24 I. Theilung und Theiler

num die Quotienten um 3, die Zahlen C um 6 grösser werden, doch ebenfalls mit dem Bedinge, daß, wo die Ueberreste grösser als die Theiler werden, daselbst wiederum subtrahirt, der Theiler doppelt gesetzt, der Quotient um 1 vermehrt, und in der Columnne C $6 + 1$ oder 7 addirt wird, wie man es bey den Theilern 54, 52, 51, 50 sehen kann.

14. Auf diese Art geht es auch mit den folgenden Ordnungen, deren Anfang in der Columnne D mit römischen Zahlen gezeichnet steht. Bey jeder Ordnung wachsen die Theiler um so viel Einheiten als die Zahl der Ordnung angiebt, die Unterschiede C aber um doppelt so viel. Doch immer mit Vorbehalte des Umstandes, wo eine Subtraction vorgenommen wird.
15. Man sieht auch leicht, daß die Ordnungen immer näher zusammen kommen, oder sich auf weniger Theiler erstrecken. Dieses macht auch, daß man die Aufmerksamkeit wegen der Abwechselung der Zahlen in der Columnne C verdoppeln muß.
16. So z. E. bey dem Theiler 29 fängt die 14te Ordnung an, und zugleich wird 29 von 31 abgezogen; dieses macht, daß man in C 2. XI + 1 = 23 zu 14 addiren muß, um (37) zu erhalten. Nun wird der Theiler 28 von (37) abgezogen, und

und dieses macht, daß die XIIIte Ordnung anfängt. Der Unterschied $37 - 28 = 9$ wird vor (37) gesetzt und zu 2 addirt, um den Ueberrest 11 zu haben. Endlich wird $345 + XII = 357$ der Quotient; so dann giebt $2. XII + 9 = 24 + 9 = (33)$, und $33 - 27 = 6$, und $6 + 11 = 17$. Und wegen des Abziehens fängt die XIIIte Ordnung an; so, daß $357 + XIII = 370$ der Quotient wird κ .

17. Bey dem Theiler 23 wird zweymal, bey 21 dreyimal, bey 20 viermal subtrahirt; weil die Zahlen C immer größter, die Theiler aber immer kleiner werden. Ich habe demnach bey 20 abgebrochen, weil nachgehends die Quotienten so schnelle wachsen, daß des subtrahirens kein Ende wird.

18. Noch ist anzumerken, daß es Fälle giebt, wo gleich Anfangs subtrahirt werden muß. So z. E. wenn anstatt der Zahl 10007 die Zahl 10157 wäre vorgenommen worden zu theilen; so würde $a = 100$, $b = 157$ gewesen seyn. Demnach hätte man

A	B	C	D
100	157		100
100	57		101
99	59	2	102
98	63	4	103
97 κ .	69 κ .	6 κ .	104 κ .

B 5

und

26 I. Theilung und Theiler

und folglich gleich Anfangs zu subtrahiren gehabt; und so wären auch die Unterschiede C gleich Anfangs um 1 grösser gewesen.

§. 13.

Das bisher gesagte betrifft den Fall, wo man $a - x$ als Theiler ansieht. Man kann aber auch $a + x$ als Theiler ansehen, und da erhält man

$$\frac{A}{a+x} = \frac{aa+b}{a+x} = a-x + \frac{xx+b}{a+x}$$

Setzt man demnach für x der Ordnung nach 0, 1, 2, 3, 4, 5 etc. so wird der Theiler $a + x$ der Ordnung nach um 1 grösser, der Quotient

$$a-x + \frac{xx+b}{a+x}$$

der Ordnung nach um 1 kleiner, ausgenommen an denen Stellen wo der Bruch

$$\frac{xx+b}{a+x}$$

anfängt grösser als 1, 2, 3, 4 etc. zu werden, welches aber hier, wo der Theiler immer anwächst, nicht so ofte wie in den vorhergehenden Fall geschieht. Man sieht auch leicht, daß, weil hier der Theiler von a bis auf $A = aa + b$ anwachsen kann, die Berechnung von jedem Quotienten und Ueberresten um so viel mehr verlängert wird. Denn so z. E. hatten wir vorher bey der Zahl 10007 nur die Theiler von

100 bis 1; hingegen haben wir hier Theiler die von 100 bis 10006 gehen. Bey noch größern Zahlen wird dieser Unterschied noch größer. Uebrigens wird die länger dauernde Arbeit bey den Theilern $a + x$ dadurch leichter gemacht, daß man hier nicht auf so viele Abwechslungen von Ordnungen zu sehen hat. Ich werde nun, um das Verfahren zu erläutern, eben die Zahl 10007 vornehmen, ohne jedoch die daraus erwachsende Tabelle bis zum Ende fortzusetzen, weil die Berechnung von Anfang bis zum Ende gleich einfach bleibt.

§. 14.

Hier sind nun wiederum in A die Theiler, in B ihre Ueberreste, in C deren Unterschiede, in D die Quotienten. Bey dem Theiler 111 geht die erste Subtraction vor, weil der Ueberrest 128 größer als der Theiler ist. Dadurch wird der Quotient, welcher 89 war, in 90 verwandelt, und in der Columnne C geht man nun von 21 nur zu 22. Denn die Subtraction, die mit 111 vorgenommen worden, ist so gut als mit allen folgenden Theilern vorgenommen. Da aber bey den folgenden Theilern nicht 111, sondern der Theiler selbst, oder 112, 113, 114, 115 u. hätte müssen abgezogen werden, so wird diese Verminderung der dazu gehörenden Ueberreste dadurch erhalten, daß die Unterschiede C nicht 23, 25 u. sondern nur 22, 24, 26 u. genommen werden. Eine eben dergleichen

28 I. Theilung und Theiler

A	B	C	D	A	B	C	D
100	7		100	129	74	51	77
101	8	1	99	130	127	53	76
102	11	3	98	131	182	55	75
103	16	5	97	131	51		76
104	23	7	96	132	107	56	75
105	32	9	95	133	165	58	74
106	43	11	94	133	32		75
107	56	13	93	134	91	59	74
108	71	15	92	135	152	61	73
109	88	17	91	135	17		74
110	107	19	90	136	79	62	73
111	128	21	89	137	143	64	72
111	17		90	137	6		73
112	39	22	89	138	71	65	72
113	63	24	88	139	138	67	71
114	89	26	87	140	207	69	70
115	117	28	86	140	67		71
115	2		87	141	137	70	70
116	31	29	86	142	209	72	69
117	62	31	85	142	67		70
118	95	33	84	143	140	73	69
119	130	35	83	144	215	75	68
119	11		84	144	71		69
120	47	36	83	145	147	76	68
121	85	38	82	145	2		69
122	125	40	81	146	79	77	68
122	3		82	147	158	79	67
123	44	41	81	147	11		68
124	87	43	80	148	91	80	67
125	132	45	79	149	173	82	66
125	7		80	149	24		67
126	53	46	79	150	107	83	66
127	101	48	78	151	192	85	65
128	151	50	77	151	41		66
128	23		78	152	127	86	65

chen Verminderung geht auch bey jeder folgenden Subtraction, 3. E. bey den Theilern 115, 119, 122, 125, 128, 131, 133 u. vor.

§. 15.

Es ist nun die Frage, diese Methode, wodurch unzählige Divisionen in ein blosses addiren und subtrahiren verwandelt werden, bey der Aufgabe von Erfindung der Theiler einer Zahl anzuwenden. Man sieht von selbst, daß es hiebey eigentlich nur auf die Ueberreste ankommt. Die in erstgegebenem Beispiele gebrauchte Zahl 10007 ist eine Primzahl; und so ist sich nicht zu verwundern, daß in den Columnen B kein Ueberrest = 0 wurde. Denn man sieht leicht, daß dieses geschehen muß, so oft die Zahl, so man auf diese Art behandelt, wirklich Theiler hat. Man sieht auch leicht, daß der Ueberrest desto früher = 0 wird, je näher ein Theiler der Quadratwurzel der Zahl kommt, deren Theiler man sucht. So 3. E. wenn die Zahl 53297 fürgegeben ist

$53297 = (230^2) + 397$,
dennoch hat man (§. 13. No. 18.)

A	B	C	D
230	397		230
230	167		231
229	169	2	232
228	173	4	233
227	179	6	234
226	187	8	235
225	197	10	236
224	209	12	237
223	223	14	238
223	0		239

Da

30 I. Theilung und Theiler

Da hier der erste Ueberrest 397 bereits grösser ist als der Theiler, so wird gleich Anfangs die Subtraction vorgenommen, und daher die Unterschiede Cum 1 vermehrt, $= 2, 4, 6, 8$ u. Bei 223 kommt die zweyte Subtraction vor. Und da der Ueberrest $= 0$ wird; so folgert man ohne weiters, daß die fürgegebene Zahl 53297 das Product aus 223 und 239 sey. Es ist für sich klar, daß man ungleich länger würde zu rechnen gehabt haben, wenn man 53297 durch alle Primzahlen von 1 bis 223 hätte wirklich dividiren wollen; und daß demnach durch diese Methode gerade diejenigen Theiler am kürzesten gefunden werden, die man sonst am mühsamsten durch das Dividiren mit Primzahlen findet.

§. 16.

Da man aber nicht voraus wissen kann, ob eine Zahl so schickliche Theiler habe, so würde in jeden andern Fällen der Vortheil dieser Methode nur in der Abkürzung bestehen, wodurch alle solche Divisionen erspart werden. Dieser Vortheil ist zwar allemal an sich beträchtlich; es findet sich aber noch ein anderer mit ein, und dieser macht, daß auch dann, wo eine fürgegebene Zahl entweder nur kleine, oder auch gar keine Theiler hat, man nicht nöthig hat, die Theiler sämtlich durch die Musterung gehen zu lassen; sondern, daß man sich mit denen begnügen kann, welche sich in einer dem

Bezir.

Bezirke der oben (§. 12. No. 14.) sogenannten ersten Ordnung befinden. Oder, welches einerley ist, man setzt die Tabelle nur so weit fort, bis der Quotient anfängt doppelt grösser als der Theiler zu werden.

§. 17.

Um dieses zu erweisen, und zugleich durch ein Beyspiel aufzuklären, werden wir wiederum die Zahl 10007 vornehmen, und dabey setzen, die Tabelle (§. 11), so wir für dieselbe berechnet, sey nur bis auf den Theiler 70 fortgesetzt. Da nun bis dahin kein Ueberrest $B=0$ ist; so sieht man sogleich, daß, wenn auch die Zahl 10007 Theiler haben sollte, deren keiner zwischen 70 und 142 falle. Nun sage ich, daß wenn die Zahl 10007 einen Theiler z haben sollte, der kleiner als 70 ist, dieses sich an denen bis zu dem Theiler 70 berechneten Theilern, Ueberresten und Quotienten erkennen lasse. Denn was auch immer z für eine Zahl seyn mag, so fällt wenigstens ein Multipulum davon zwischen 70 und 142, oder auch nur zwischen 70 und 140; und zwar wird es

2z seyn, wenn z zwischen 35 und 70					
4z	.	.	.	18	35
8z	.	.	.	9	17
16z	.	.	.	5	8
32z	.	.	.	3	4
64z	.	.	.	2	2
128z	.	.	.	1	1

fällt.

32 I. Theilung und Theiler

fällt. Demnach wird ein Multiplum von z , und zwar wenigstens eines, zwischen 70 und 140 fallen, und daher unter denen von 100 bis 70 berechneten Theilern oder unter ihren Quotienten vorkommen. Dazu kommt nun noch der Umstand, daß, wo auch immer dieses Multiplum vorkommt, der in B dabey befindliche Ueberrest, entweder der Theiler z selbst, oder wenigstens ein Multiplum davon ist. Das will nun sagen: wenn unter den bis zu dem Theiler 70 in B befindlichen Ueberresten einer vorkommt, der entweder mit dem Theiler oder mit dem Quotienten commensurabel ist, so, daß entweder der Ueberrest und der Theiler, oder der Ueberrest und der Quotient, oder alle drey sich durch einerley Zahl dividiren lassen; so ist diese Zahl zugleich auch ein Theiler der fürgegebenen Zahl 10007. Geht es aber bey keinem der Ueberreste an, so ist 10007 eine Primzahl. Denn da der Voraussetzung zufolge z in 10007 getheilt werden kann, so wird 10007 durch das Multiplum $n z$ getheilt, entweder ebenfalls aufgehen, oder z , $2 z$, $3 z$, $4 z$. . . $m z$ übrig lassen, nemlich eben so vielmal z , als n in $(10007 : z)$ getheilt, Einheiten übrig läßt. Lasset uns nun dieses durch einige Beispiele erläutern.

§. 18.

Es seyn die Theiler der Zahl 217871 zu finden. Hier ist

$$217871 = (466)^2 + 715$$

dem

denmach

A	B	C	D	A	B	C	D
466	715	—	466	455	381	22	478
466	249		467	454	405	24	479
465	251	2	468	453	431	26	480
464	255	4	469	452	459	28	481
463	261	6	470	452	7		482
462	269	8	471	451	38	31	483
461	279	10	472	450	71	33	484
460	291	12	473	449	106	35	485
459	305	14	474	448	143	37	486
458	321	16	475	447	182	39	487
457	339	18	476	446	223	41	488
456	359	20	477				

Da sich nun hier bey dem Theiler 446 der Ueberrest 223 findet, welcher halb so groß als der Theiler ist; so ist 223 ein Theiler der fürgegebenen Zahl 217871. Nimmt man die Theilung vor, so ist der Quotient $977 = 2.488 + 1$. Denn da 446 in 217871 getheilt, $488\frac{1}{2}$ mal geht, so geht die Hälfte von 446 doppelt so viel, oder 977 mal. Will man nun sehen, ob 977 Theiler habe; so ist

$$977 = (31)^2 + 16$$

34 I. Theilung und Theiler

deninach

A	B	C	D
31	16		31
30	17	1	32
29	20	3	33
28	25	5	34
27	32	7	35
27	5		36
26	15	10	37
25	27	12	38
25	2		39
24	17	15	40
23	34	17	41
23	11		42
22	31	20	43
22	9		44

Diese Tabelle wird nur bis zu den Theiler 22 fortgesetzt, weil schon dieser den doppelt grössern Quotienten 44 giebt. Sie mußte aber bis dahin fortgesetzt werden, weil unter den Ueberresten B keiner vorkame, der mit seinen zugehörenden Theiler oder Quotienten commensurabel wäre; dennach ist 977 eine Primzahl.

§. 19.

Wenn eine Zahl kleine Theiler hat, so darf man die dafür zu berechnende Tabelle nicht weit fortsetzen, weil ihre Multipla sich bald zeigen. Es seyn z. E. die Theiler der Zahl 391391 zu suchen,

suchen, wo man leicht sieht, daß sie deren haben muß, und daß wenigstens 391 und 1001 solche sind. Nun ist

$$391391 = (625)^2 + 766$$

demnach

A	B	C	D
625	766		625
625	141		626
624	143	2	627
623	147	4	628
622	153	6	629
621	161	8	630

Es ist unnöthig die Tabelle weiter fortzusetzen: denn

143 und 624 lassen sich durch 13 theilen.

143 " 627 " " " " 11 "

147 " 623 " " " " 7 "

153 " 622 " " " " 17 "

161 " 621 " " " " 23 "

161 " 630 wiederum durch 7 theilen.

Und da man leicht sieht, daß schon das Product aus 7, 11, 13, 17, 23 die Zahl 391391 geben wird, wie es dieselbe auch wirklich giebt; so sind die einfachsten Factoren dieser Zahl sämtlich gefunden. Da übrigens so viele kleine Factoren ebenfalls viele nicht gar grosse Producte haben, so kann es nicht fehlen, daß nicht auch von diesen die Multipla bald vorkommen sollten. Wir wollen zu diesem Ende die Tabelle um etwas weiter fortsetzen:

36 I. Theilung und Theiler

621	161	8	630
620	171	10	631
619	183	12	632
618	197	14	633
617	213	16	634
616	231	18	635
615	251	20	636
614	273	22	637
613	297	24	638
612	323	26	639
611	351	28	640
610	381	30	641
609	413	32	642
608	447	34	643
607	483	36	644
11.	11.	11.	11.

Hier findet sich nun bereits, daß
 231 und 616 durch 77 oder 7 mal 11,
 273 " 637 " " 91 " 7 " 13,
 483 " 644 " " 161 " 7 " 23,
 und auſſer dem wiederum
 297 und 638 durch 11,
 323 " 639 " " 17,
 413 " 609 " " 7 theilbar ſind.

§. 20.

Es giebt es auch ſehr häufig ſolche Fälle,
 wo die Theiler unter den Ueberreſten ſo gleich
 ſelbſt zum Vorſchein kommen. Denn man
 ſieht leicht, daß dieſes in erſt angeführtem Bey-
 ſpiele ſchlechthin nur deſwegen nicht geſchehen,
 weil

weil die ersten Ueberreste an sich schon viel größer als die Theiler waren. So z. E. ist

$$35351 = (188)^2 + 7$$

demnach

A	B	C	D
188	7		188
187	8	1	189
186	11	3	190
185	16	5	191
184	23	7	192

Hier findet sich nun schon $184 = 8 \cdot 23$: so, daß demnach 23 ein Theiler der fürgegebenen Zahl 35351 ist. Wenn man aber auch weiter fortfährt,

183	32	9	193
182	43	11	194
181	56	13	195
180	71	15	196
179	88	17	197
178	107	19	198
177	128	21	199
176	151	23	200
175	176	25	201
175	1		202
174	29	28	203

so kommt man auf $174 = 6 \cdot 29$, so, daß demnach auch 29 ein Theiler von 35351 ist. Da man nun voraus sehen kann, daß der dritte Theiler 53 seyn müsse, so darf man nur noch ein wenig die Rechnung fortsetzen, um auf den

E 3

Quo-

38 I. Theilung und Theiler

Quotienten $212 = 4 \cdot 53$, oder auf den Theiler $A = 159 = 3 \cdot 53$ zu kommen. Es ist

173	59	30	204
172	91	32	205
171	125	34	206
170	161	36	207
169	199	38	208
169	30		209
168	71	41	210
167	114	43	211
166	159	45	212
165	206	47	213
165	41		214
164	91	50	215
163	143	52	216
162	197	54	217
162	35		218
161	92	57	219
160	151	59	220
159	212	61	221
159	53		222.

Hier kömmt demnach der dritte Factor 53 zum Vorschein.

§. 21.

Es giebt aber auch Fälle, wo man die Rechnung beynähe eben so weit fortsetzen muß, um die Theiler zu finden, als wenn die Zahl eine Primzahl wäre. Dahin gehört z. E. die Zahl 10001, welche $= (100)^2 + 1$ ist. Man hat

hat demnach

A	B	C	D	A	B	C	D
100	1		100	81	38		123
99	2	1	101	80	81	43	124
98	5	3	102	80	1		125
97	10	5	103	79	47	46	126
96	17	7	104	78	95	48	127
95	26	9	105	78	17		128
94	37	11	106	77	68	51	129
93	50	13	107	76	121	53	130
92	65	15	108	76	45		131
91	82	17	109	75	101	56	132
90	101	19	110	75	26		133
90	11		111	74	85	59	134
89	33	22	112	74	11		135
88	57	24	113	73	73	62	136
87	83	26	114	73	0		137
86	111	28	115	72	65	65	138
86	25		116	71	132	67	139
85	56	31	117	71	61		140
84	89	33	118	70	131	70	141
84	5		119	70	61		142
83	41	36	120				
82	79	38	121				
81	119	40	122				

Hier fandte sich demnach bis auf $A = 73$ kein Ueberrest B, welcher mit seinem Theiler, oder mit seinem Quotienten commensurabel gewesen wäre. Bey $A = 73$, wird $B = 0$, und demnach

40 I. Theilung und Theiler

nach ist $10001 = 73 \cdot 137$. Und diese Factoren müssen Primzahlen seyn.

§. 22.

Wir können nun noch zugleich anmerken, daß wenn man eine solche Tabelle für eine Zahl bis dahin berechnet hat, wo der Quotient doppelt so groß wird, als der Theiler, eine solche Tabelle zugleich auch für Zahlen dienen kann, die um einige Einheiten, oder auch um mehrere grösser oder kleiner sind als die Zahl, für welche die Tabelle ist berechnet worden. So z. E. wenn die Theiler der Zahl 10003 zu finden sind; so werden in der erst für die Zahl 10001 berechneten Tabelle, alle Ueberreste um 2 grösser. Alles Uebrige bleibt. Man sieht sodann bald, daß z. E. der dritte Ueberrest 5 sich in $5 + 2 = 7$ verwandelt, und daß der dabei stehende Theiler $A = 98$ durch 7 getheilet werden kann, folglich 7 ein Theiler von 10003 ist. Vergleicht man die sämtlichen Ueberreste, jeder um 2 vergrößert, mit ihren Theilern und Quotienten, so findet man sie nur in denen Stellen commensurabel, wo sie Multipla von 7 sind, und daraus läßt sich folgern, daß $\frac{10003}{7} = 1429$ eine Primzahl sey.

§. 23.

§. 23.

Hätte man hingegen die Zahl 10005 vorgenommen, von welcher man zwar ohnehin sieht, daß sie wenigstens durch 5 und 3 getheilt werden kann; so würden alle Ueberreste um 4 vergrößert werden müssen. Dieses verwandelt den Ueberrest 83 in $83 + 4 = 87$, so, daß er dem Theiler gleich wird. Demnach läßt sich 10005 durch 87 theilen. Eben so wird der Ueberrest 111 in $111 + 4 = 115$ verwandelt, und daher dem Quotienten gleich. Daher ist auch 115 ein Theiler von 10005. Mehr hat man nicht nöthig zu suchen, weil $10005 = 87 \cdot 115 = 3 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 29$ ist. Nimmt man eben diese Vergleichung mit 10007 vor, in dem man zu jeden Ueberresten 6 addirt; so findet sich keiner weder mit seinem Theiler noch mit dem Quotienten commensurabel, demnach ist 10007 eine Primzahl.

