# IV.
# Algebraische Formeln für die Sinus von drey zu drey Graden.

§. 1.

In den Anfangsgründen der Trigonometrie wird die Verfertigung der trigonometrischen Tafeln gewöhnlich so angegeben, wie sie sich aus der Elementargeometrie begreiflich machen läßt, und wie diese Tafeln in der That anfangs verfertigt worden. Man kann nemlich vermittelst des Circuls und Lineales den Circul in 2, 3, 4, 5 gleiche Theile theilen, und jeden Bogen, so vielmal man will, halbiren. Daraus läßt sich sodann herleiten, wie sich der Circul von 3 zu 3 Graden, oder von 45 zu 45 Min. oder von 675 zu 675 Secunden eintheilen, und die Sinus, Tangenten und Secanten von allen diesen Bögen berechnen lassen. Diese Berechnungsart ist ungemein weitläuftig. Man hat daher seit der Erfindung der Infinitesimalrechnung auf Mittel gedacht, sie abzukürzen, und jede Sinus, Tangenten und Secanten für sich zu finden, ohne daß sie erst aus einander hergeleitet werden müßten. Dazu müßten nun allerdings unendliche Reihen gebraucht werden, dafern man nicht bey den imaginairen Formeln, die Herr Joh. Bernoulli zuerst gefunden, stehen bleiben wollte, als welche, wenn man sie nicht in unendliche Reihen verwandelt, fürnemlich nur zu Erfindung von Lehrsätzen dienen.

§. 2.

Will man aber für die Sinus und Tangenten algebraische Formeln haben, die weder imaginair sind, noch aus unendlich vielen Gliedern bestehen, so bleibt man eben so zurücke, wie die ersten Berechner der trigonometrischen Tafeln, weil man sie ebenfalls nur von 3 zu 3 Graden berechnen kann, und die dazwischen fallenden, durch fortgesetztes Halbiren, finden muß. Da mir solche Formeln noch nicht vorgekommen, so unterzog ich mich der Arbeit sie zu finden, um ausführlich zu sehen, auf welche Art die Sinus von 3 zu 3 Graden mehr oder minder irrational sind. Folgende Tabelle stellt sie mit einem Anblicke vor Augen.

## Formeln für die Sinus von drey zu drey Graden.

$$\sin. 3^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{15}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{3}{2}}$$
$$- \tfrac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{5}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\sin. 6^\circ = \tfrac{1}{8}\sqrt{(30-6\sqrt{5})} - \tfrac{1}{8}\sqrt{5} - \tfrac{1}{8}$$

$$\sin. 9^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{5}{2}} + \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$$

sin.

ſin. $12^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{15} + \frac{1}{8}\sqrt{3}$

ſin. $15^\circ = \sqrt{\frac{3}{8}} - \sqrt{\frac{1}{8}}$

ſin. $18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}$

ſin. $21^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$
$- \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$

ſin. $24^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{15} + \frac{1}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{8}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$

ſin. $27^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}$

ſin. $30^\circ = \frac{1}{2}$

ſin. $33^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$
$- \frac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}$

ſin. $36^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$

ſin. $39^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$
$- \frac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$

ſin. $42^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(30+6\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{5} + \frac{1}{8}$

ſin. $45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$

ſin. $48^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(10+2\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{15} - \frac{1}{8}\sqrt{3}$

ſin. $51^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{(5-\sqrt{5})}$
$+ \frac{1}{8}\sqrt{(15-3\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$

ſin. $54^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}$

ſin. $57^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(15+3\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$
$+ \frac{1}{8}\sqrt{(5+\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}}$

ſin. $60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

ſin. $63^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(5+\sqrt{5})} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sin. 66^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(30 - 6\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{5} + \frac{1}{8}$

$\sin. 69^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(15 - 3\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$
$+ \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}$

$\sin. 72^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$

$\sin. 75^\circ = \sqrt{\frac{3}{8}} + \sqrt{\frac{1}{8}}$

$\sin. 78^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(30 + 6\sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{5} - \frac{1}{8}$

$\sin. 81^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\sqrt{(5 - \sqrt{5})}$

$\sin. 84^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{15} + \frac{1}{8}\sqrt{3} + \frac{1}{8}\sqrt{(10 - 2\sqrt{5})}$

$\sin. 87^\circ = \frac{1}{8}\sqrt{(5 + \sqrt{5})} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{15}{2}} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}}$
$+ \frac{1}{8}\sqrt{(15 + 3\sqrt{5})} - \frac{1}{8}\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\sin. 90^\circ = 1.$

§. 3.

Bey der Berechnung dieser Formeln legte ich die Sinus von 45, 30, 18 Graden zum Grunde, weil von diesen, jeder für sich, aus der Elementargeometrie gefunden werden muß. Die übrigen Formeln fanden sich sodann aus den bekannten zween Lehrsätzen

$\sin.(x + y) = \sin. x. \cos. y + \cos. x. \sin. y$

$\sin.(x - y) = \sin. x. \cos. y - \cos. x. \sin. y.$

Sie müßten aber nach einer gewissen Ordnung gefunden werden, damit man aller Reductionen überhoben seyn könne. Die Ordnung, so ich dabey beobachtet, ist folgende:

I°. $\sin. 60^\circ = \cos. 30 = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

II°. $\sin. 75^\circ = \sin. (45 + 30)$

$\sin. 15^\circ = \sin. (45 - 30)$

III°. $\sin. 72^\circ = \cos. 18^\circ$

IV°.

IV⁶. $\sin. 54^\circ = \sin. (72 - 18)$
$\sin. 36^\circ = \cos. 54^\circ = \sin. (2.18)$
V°. $\sin. 12^\circ = \sin. (30 - 18)$
$\sin. 48^\circ = \sin. (30 + 18)$
$\sin. 24^\circ = \sin. (54 - 30)$
$\sin. 84^\circ = \sin. (54 + 30)$
$\sin. 6^\circ = \sin. (36 - 30)$
$\sin. 66^\circ = \sin. (36 + 30)$
$\sin. 42^\circ = \sin. (72 - 30)$
$\sin. 78^\circ = \sin. 102^\circ = \sin. (72 + 30)$
VI°. $\sin. 81^\circ = \sin. 99^\circ = \sin. (54 + 45)$
$\sin. 9^\circ = \sin. (54 - 45)$
$\sin. 63^\circ = \sin. 117^\circ = \sin. (72 + 45)$
$= \sin. (45 + 18)$
$\sin. 27^\circ = \sin. (72 - 45) = \sin. (45 - 18)$
VII°. $\sin. 3^\circ = \sin. (48 - 45)$
$\sin. 87^\circ = \sin. 93^\circ = \sin. (48 + 45)$
$\sin. 21^\circ = \sin. (45 - 24)$
$\sin. 69^\circ = \sin. (45 + 24)$
$\sin. 33^\circ = \sin. (45 - 12)$
$\sin. 57^\circ = \sin. (45 + 12)$
$\sin. 39^\circ = \sin. (45 - 6)$
$\sin. 51^\circ = \sin. (45 + 6)$.

§. 4.

In eben dieser Ordnung werden auch die Formeln selbst zusammengesetzter. Vergleicht man sie miteinander, in Absicht auf die Irrationalität, so findet sich, daß sie aus 15 verschiedenen Arten von Wurzelgrössen zusammengesetzt sind, und daß sie sich, wenn man einmal diese gefunden, durch bloßes Addiren und Subtrahiren berechnen lassen. Die Wurzelgrößen sind

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\sqrt{(1:2)}$ | $\sqrt{(5+\sqrt{5})}$ | $\sqrt{(5-\sqrt{5})}$ |
| $\sqrt{3}$ | $\sqrt{(3:2)}$ | $\sqrt{(10+2\sqrt{5})}$ | $\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$ |
| $\sqrt{5}$ | $\sqrt{(5:2)}$ | $\sqrt{(15+3\sqrt{5})}$ | $\sqrt{(15-3\sqrt{5})}$ |
| $\sqrt{15}$ | $\sqrt{(15:2)}$ | $\sqrt{(30+6\sqrt{5})}$ | $\sqrt{(30-6\sqrt{5})}$ |

§. 5.

Weiter geht nun die Elementargeometrie nicht, als daß sie noch Mittel giebt, durch fortgesetztes Halbiren, die Sinus für kleinere Bögen zu finden. Die einfachste Art, dieses durch Rechnung zu verrichten, geben folgende beyden Formeln an

$$\sin.\tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin.y)} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin.y)}$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1+\sin.y)} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\sin.y)}$$

welche durch die Auflösung der Gleichung

$$\sin.y = 2\sin.\tfrac{1}{2}y\,.\cos.\tfrac{1}{2}y$$

leicht gefunden werden.* Werden diese beyde Formeln addirt und subtrahirt, so erhält man

$$\cos.\tfrac{1}{2}y + \sin.\tfrac{1}{2}y = \sqrt{(1+\sin.y)}$$

$$\cos.\tfrac{1}{2}y - \sin.\tfrac{1}{2}y = \sqrt{(1-\sin.y)}$$

Multiplicirt man diese mit

$$\sin.45^\circ = \cos.45^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

so ist

$$\sin.45^\circ.\cos.\tfrac{1}{2}y + \cos.45^\circ.\sin.\tfrac{1}{2}y = \sqrt{\left(\frac{1+\sin.y}{2}\right)}$$

$$\sin.45^\circ.\cos.\tfrac{1}{2}y - \cos.45^\circ.\sin.\tfrac{1}{2}y = \sqrt{\left(\frac{1-\sin.y}{2}\right)}$$

Dem-

demnach $\sin.(45^\circ + \frac{1}{2}y) = \sqrt{\left(\frac{1 + \sin. y}{2}\right)}$

$\sin.(45^\circ - \frac{1}{2}y) = \sqrt{\left(\frac{1 - \sin. y}{2}\right)}$

§. 6.

Aus den vorhin angeführten Formeln lassen sich noch einige speciale trigonometrische Lehrsätze herleiten, wenn man sie unter einander vergleicht. So z. E. ist

$\sin. 75^\circ - \sin. 15^\circ = 2\sqrt{\tfrac{1}{8}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sin. 45^\circ$

$\sin. 75^\circ . \sin. 15^\circ = \tfrac{1}{4}$

$\text{tang.}\, 15^\circ = 2 - \sqrt{3} = 2 - \text{tang.}\, 60^\circ$

$\text{tang.}\, 75^\circ = 2 + \sqrt{3} = 2 + \text{tang.}\, 60^\circ$

$\text{tang.}\, 15^\circ + \text{tang.}\, 75^\circ = 4.$

Eben so auch

$\sin. 54^\circ - \sin. 18^\circ = \tfrac{1}{2} = \sin. 30^\circ$

$\sin. 54^\circ . \sin. 18^\circ = \tfrac{1}{4}$

$\text{tang.}\, 18^\circ . \text{tang.}\, 54^\circ = \sqrt{\tfrac{1}{5}}$

$\sin. 36^\circ . \sin. 72^\circ = \tfrac{1}{4}\sqrt{5}$

$\text{tang.}\, 18^\circ + \sec. 18^\circ = \text{tang.}\, 54^\circ$

$\sin. 18^\circ + \sin. 54^\circ = \tfrac{3}{4} = \sin. 60^\circ$

$\text{cof.}\, 18^\circ + \text{cof.}\, 54^\circ = \tfrac{5}{4}$

ingleichen

$\sec. 30^\circ = \tfrac{1}{2}(\text{tang.}\, 30^\circ + \text{tang.}\, 60^\circ)$

$= \tfrac{4}{3} \sin. 60^\circ.$