

VII

Anlage
zur Tetragonometrie.

§. 1.

Die allgemeine Möglichkeit jedes Viereck Tab. I.
durch Ziehung einer Diagonale in zween
Triangel zu zerfallen, mag zu den Gedanken
Anlaß gegeben haben, daß, wer in Berech-
nung und Auflösung der Triangel wohl be-
wandert ist, in der Berechnung und Auflösung
viereckiger Figuren ohne Mühe fortkommen
werde. Sollte dieser Ausspruch mehr als eine
bloße Möglichkeit angeben, so wird gegenwär-
tige Abhandlung nur für Anfänger bestimmt
seyn, die sich in trigonometrischen Aufgaben,
und besonders in dem algebraischen Theile der
Trigonometrie entweder für sich, oder unter
Anführung ihres Lehrers, üben, oder von daher
Stof zu einer academischen Inauguraldisputa-
tion nehmen wollen. Denn ich werde mich
hier begnügen, die möglichen Fälle der Tetrago-
nometrie vorzuzählen, und die Anzahl der da-
bey vorkommenden Aufgaben zu bestimmen.

§. 2.

Wenn man ein Viereck, ohne es durch
Ziehung einer Diagonale in zween Triangel zu
thei-

theilen für sich betrachtet, so heist es weiter nichts als 4 Seiten und 4 Winkel, demnach in allem 8 Stücke an. Und da ist die Frage, wie fern einige dieser 8 Stücke durch die übrigen bestimmt werden, und wie vielerley Abwechselungen dabey möglich sind? Da man in der Algebra, sofern es nur die Frage ist, zu einer Gleichung zu gelangen, auf den Unterschied der gegebenen und gesuchten Stücke nicht sieht, so werde ich, um die vorzunehmende Abzählung einfacher zu machen, diesen Unterschied ebenfalls weglassen, weil derselbe vielmehr die Auflösung als die Erfindung der Gleichungen betrifft.

§. 3.

Da in jedem Vierecke die Summe der vier Winkel 360 Gr. beträgt, so kann aus dreyen Winkeln der vierte für sich gefunden werden. Es müssen aber die Data von einander unabhängig seyn, demnach läßt sich in Absicht auf die Seiten des Viereckes aus allen vier Winkeln nicht mehr finden, als sich aus dreyen finden läßt. Das will nun sagen, daß in den Gleichungen, die wir zu suchen haben, höchstens nur dreu Winkel vorkommen können, weil der vierte immer der Zusatz der dreu übrigen zu 360 Gr. ist.

§. 4.

Indessen sind dreu Winkel in so weit hinreichend, daß, wenn man noch zweu Seiten mitnimmt

nimmt, das ganze Viereck dadurch bestimmt wird. Demnach kann von den zweyen andern Seiten noch eine mit in die Gleichung genommen werden. Und so haben wir den Satz, daß drey Winkel und drey Seiten einander bestimmen. Da nun in diesem Fall eine Seite und ein Winkel aus der Gleichung wegleibt, so entstehen, in Absicht auf die Lage derselben, zweyen besondere Fälle. Denn es kann der wegleibende Winkel entweder an der wegleibenden Seite liegen, oder aber er liegt nicht an derselben und demnach zwischen zweyen von den in der Gleichung vorkommenden Seiten. Da es nun hiebey, in Absicht auf die Gleichung, nichts zu sagen hat, zwischen welchen von den drey Seiten der wegleibende Winkel fällt; so ist es überflüssig, diesen zweyten Fall noch ferner einzutheilen. Demnach haben wir für drey Seiten und drey Winkel nur zweyen Fälle.

§. 5.

Wird ein Winkel weggelassen, so muß der Abgang durch eine Seite ersetzt werden, und da haben wir vier Seiten und zweyen Winkel, die ebenfalls einander bestimmen. Auch hier giebt es, in Absicht auf die Lage der Winkel, noch zweyen besondere Fälle, die sich leicht denken lassen. Denn die zweyen Winkel liegen entweder einander gegenüber, oder sie liegen an einer Seite.

§. 6.

Weiter läßt sich nun nicht gehen, weil ein Viereck nicht mehr als vier Seiten hat. Denn wolte man noch einen Winkel weglassen, so müßte noch eine Seite mit in die Gleichung genommen werden, und dieses würde also die fünfte Seite des Viereckes seyn. Wir haben demnach in allem nur vier allgemeine Fälle, und mit diesen vier Gleichungen. In jeder Gleichung kommen sechs Stücke vor, und jedes kann als ein Quasitum betrachtet werden. Dieses giebt demnach für alle vier Gleichungen 24 Auflösungen, und damit eben so viele einzelne Fälle.

§. 7.

Diese 24 Fälle werden in den vier ersten Figuren vorgestellt. Es enthält nemlich die

I^{te} Figur: Vier Seiten und zween entgegenstehende Winkel. Und die dazu gehörende Gleichung ist

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab \cos. \omega - 2cd \cos. \psi.$$

II^{te} Figur: Vier Seiten und zween nicht entgegenstehende Winkel. Und die Gleichung dazu ist

$$a^2 + b^2 + c^2 - d^2 = 2a(b \cos. \omega + c \cos. \phi) - 2bc \cos. (\omega + \phi).$$

III^{te} Figur: Drey Seiten, zween aussen an- und ein zwischenliegender Winkel. Die Gleichung dazu ist

$$a \sin. \omega = c \sin. (\omega + \phi) + d \sin. \lambda.$$

IVte Figur: Sechs auf einander folgende Stücke. Und die Gleichung dazu ist

$$c \sin. \psi = a \sin. (\phi + \psi) - b \sin. (\phi + \psi + \omega).$$

In diesen vier Gleichungen werden alle Winkel spitz genommen. Wenn sie demnach bey vorkommenden Fällen stumpf sind, oder wenn die Summen $\omega + \phi$, $\phi + \psi$, $\phi + \psi + \omega$ stumpf oder vollends grösser als 180 Grade sind, so müssen die Zeichen gehörig verändert werden. Doch ist dieses erst dann vorzunehmen, wenn die Gleichung aufgelöst worden, weil bey den meisten Auflösungen die Functionen der Winkel noch ihre Gestalt ändern. Man sieht übrigens, daß nicht jede Auflösung gleich einfach und geschmeidig ist, und daß besonders alle sechserley Auflösungen der zweyten Gleichung irrationale und doppelte Werthe geben.

§. 8.

Alle die 24 Fälle, welche in diesen vier Gleichungen enthalten sind, können in der practischen Feldmessenkunst wirklich vorkommen, wo man ein viereckiges Feld, wegen darauf und dazwischen liegenden Morästen, Sümpfen und Waldungen, dem Umkreise nach, auszumessen genöthigt ist, und wo sich weder alle Seiten noch alle Winkel gleich leicht oder bequem wirklich messen lassen.

§. 9.

Es sind aber diese 24 Fälle noch lange nicht alle, sondern nur diejenigen, wo man mit den Seiten und Winkeln am Umkreise ausreicht. Zerlegt man aber ein Viereck in zween Triangel, indem man eine Diagonale zieht, so ist es auf sehr vielerley Arten möglich, die gegebenen und gesuchten Stücke so zu vertheilen, daß nicht jeder der beyden Triangel für sich bestimmt, sondern beyde zusammengenommen werden müssen, wenn man zur Gleichung gelangen will. Diese Bedingung macht, daß die darunter begriffene Fälle nicht zur eigentlich sogenannten Trigonometrie, sondern zur Tetragonometrie gehören, und ihre eigene Verwickelungen, Schwierigkeiten und Auflösungen haben.

§. 10.

Diese Fälle habe ich von der 5ten Figur an bis zur 42ten vorgestellt, wie ich sie nach einer etwas mühsamen Abzählung habe finden und in Ordnung bringen können. Jede dieser Figuren hat eine ihr eigene Gleichung, und da in jeder sechsetley Grössen vorkommen, deren jede als ein Quæsitum betrachtet werden kann, so giebt dieses für die 38 Figuren 6 mal 38, oder 228 verschiedene Fälle. Ich werde nun darüber folgende Anmerkung hersetzen.

§. 11.

In jeder dieser Figuren sind sechs Stücke gezeichnet, welche in die Rechnung gezogen wer-

werden müssen; und zwar die meisten nur mit einem —. Wo aber einer der Winkel, durch welche die Diagonale geht, ganz vorkommt, da ist in der Figur ein Bogen dadurch gezogen. In jeder Figur kommt wenigstens einer von diesen Winkeln ganz oder ungetheilt vor, weil dadurch die beyden Triangel von einander abhängig gemacht werden. Aus eben dem Grunde kommt entweder noch die Diagonale, oder einer von denen an derselben liegenden Winkeln, oder auch beyde vor, jedoch dergestalt, daß in keinem Triangel mehr als drey ganz bestimmte Stücke vorkommen, weil sonst in demselben überflüssige Data und in dem andern Triangel zu wenig seyn würden.

§. 12.

Ich habe die Figuren in der Ordnung gezeichnet, wie sie bey dem Abzählen muß vorgenommen werden. Und dieses mag die Beschreibung davon abkürzen. Der untere Diagonalkwinkel kommt in allen vor. Demnach blieben noch 5 Stücke zu zeichnen. Und da da bey vielerley Abwechselungen möglich sind, so habe ich, um sie zu classificiren, bey der Diagonale angefangen. Diese kommt in den Figuren 5, 6, 7.... 25 vor, in den folgenden kommt sie nicht vor. Beyde dieser Hauptlassen enthalten gleich viel Fälle, wenn man die 1, 2, 3, 4te Figur mit zu der letztern rechnet.

§. 13.

Die erste Hauptklasse, woben nemlich die Diagonal vorkömmt, theilt sich in vier andere ein:

- I°. Fig. 5, 6, 7 haben den obern Diagonalwinkel gamt.
- II°. Fig. 8, 9, 10 haben dessen beyde Theile.
- III°. Fig. 11, 12 19 haben nur einen Theil desselben.
- IV°. Fig. 20 25 haben keinen Theil desselben, und zwar
Fig. 20 vier Seiten.
Fig. 21, 22 drey Seiten und einen Winkel.
Fig. 23, 24, 25 zwey Seiten und zween Winkel.

§. 14.

Die zwente Hauptklasse, woben die Diagonale wegbleibt, ist wiederum in Ansehung des obern Diagonalwinkels in zwey Classen Fig. 26 31 und Fig. 32 42, oder wenn man specialer gehen will, in 6 Classen getheilt, nemlich

- | | |
|-----------------------|----------------------|
| I. Fig. 26, 27, 28, | IV. Fig. 35, 36, 37, |
| II. Fig. 29, 30, 31, | V. Fig. 38, 39, 40, |
| III. Fig. 32, 33, 34, | VI. Fig. 41, 42. |

§. 15.

Die Auflösung aller dieser Fälle werde ich, wie Anfangs gesagt worden, denen überlassen, die

die sich in dem algebraischen Theil der Trigonometrie üben wollen. Die Erfindung der Gleichung für jede Figur kömmt immer auf den untern ungetheilten Diagonalwinkel an. In allen Figuren der zweyten Hauptclasse scheint es, als wenn in dem einen Triangel nicht genug Stücke wären; allein da muß man vermittelst der in den anliegenden Triangel vorkommenden Stücke die Diagonale bestimmen. Dadurch erhält man für den erstern Triangel das noch mangelnde Stück, und kann sodann vermittelst des untern Diagonalwinkels zur Gleichung gelangen. In der ersten Hauptclasse wird die Diagonal immer am mühsamsten gefunden, und bey verschiedenen geht es auch nicht einmal durch Construction leicht an. Ob übrigens alle die 228 Fälle in der Ausübung wirklich vorkommen und brauchbar sind, werde ich eben nicht stückweise untersuchen. Wenn man aber in der

8ten Figur die Diagonale,

29ten Figur den hintern Winkel,

30ten Figur die obere Seite

als ein Quæsitum ansieht, so enthalten diese Figuren eine Aufgabe, die eine von den schönsten und brauchbarsten in der practischen Geometrie ist, und wovon ich in den Anmerkungen und Zusätzen zur practischen Geometrie vier verschiedene Auflösungen gegeben habe.

