OBSERVATIONS

SUR LES
LES ÉQUATIONS D'UN DEGRÉ QUELCONQUE.

PAR MR. LAMBERT.

§. 1.

Soit une équation d'un degré quelconque

$$o = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \cdots\cdots\cdots\cdots + hx^2 + ix + k.$$

Qu'on fasse $\qquad x = y + z$

Et cette valeur étant substituée, on aura l'équation transformée

$$\begin{array}{llllll}
o = y^m & + my^{m-1}z & + m.\frac{m-1}{2}y^{m-2}z^2 \cdots & + m.\frac{m-1}{2}y^2z^{m-2} & + myz^{m-1} & + z^m \\
+ ay^{m-1} & + (m-1)ay^{m-2}z \cdots & & + (m-1).\frac{m-2}{2}ay^2z^{m-3} & + (m-1)ayz^{m-2} & + az^{m-1} \\
+ & by^{m-2} \cdots & & + (m-2)\frac{m-3}{2}by^2z^{m-4} & + (m-2)byz^{m-3} & + bz^{m-2} \\
 & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \\
 & & & + hy^2 & + 2hyz & + hz^2 \\
 & & & & + iy & + iz \\
 & & & & & + k.
\end{array}$$

Cette équation mérite une théorie particuliere, qui devroit se trouver dans les Institutions élémentaires de l'Algebre, parce qu'elle offre des propriétés très remarquables, & qui valent la peine d'être exposées.

§. 2.

§. 2. Faisons pour cet effet

$$o = y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} \dots\dots\dots\dots + Hy^2 + Iy + K,$$

& en comparant les termes, nous aurons les équations suivantes:

$$A = mz + a$$

$$B = m.\frac{m-1}{2}z^2 + (m-1)az + b$$

$$C = m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}z^3 + (m-1)\frac{(m-2)}{2}az^2 + (m-2)bz + c$$

etc.

$$H = m.\frac{m-1}{2}z^{m-2} + (m-1)\frac{m-2}{2}az^{m-3} + (m-2)\frac{(m-3)}{2}bz^{m-4} \dots + h$$

$$I = mz^{m-1} + (m-1)az^{m-2} + (m-2)bz^{m-3} \dots\dots + 2hz + i$$

$$K = z^m + az^{m-1} + bz^{m-2} + \text{etc.} \dots\dots + hz^2 + iz + k.$$

§. 3. Toutes ces équations ont un certain nombre de facteurs simples de la forme

$$x + p$$

& ce nombre est égal au plus grand exposant de l'équation. Et comme on a le choix d'égaler à zéro un des coëfficiens A, B, C etc. quelconque, on voit que dans ce cas ces *facteurs* deviennent *racines*. C'est ce que j'observe ici, parce que je me servirai indifféremment de l'une & de l'autre de ces dénominations.

§. 4. C'est ainsi qu'en faisant $K = o$, on aura l'équation

$$o = z^m + az^{m-1} + bz^{m-2} \dots\dots + hz^2 + iz + k.$$

Et cette équation étant la même que celle que j'ai d'abord proposée, on voit qu'elle aura les mêmes racines. Et quand même on ne feroit pas $K = o$, elle auroit ses facteurs $z + p$ semblables aux racines $x + p$ de l'équation proposée. La différence ne consiste qu'en ce qu'il est $x + p = o$, au lieu qu'il ne sera $z + p = o$, que lorsqu'on fait $K = o$.

§. 5.

§. 5. Si donc il eſt

a = la ſomme des racines x,

b = la ſomme du produit des racines x priſes deux à deux,

c = la ſomme du produit des racines x priſes trois à trois,

etc.

je dirai de la même maniere à l'égard de l'équation K, qu'il eſt

a = la ſomme des facteurs p

b = la ſomme du produit de ces facteurs pris deux à deux,

c = la ſomme du produit de ces facteurs pris trois à trois.

etc.

Et je parlerai de la même façon des équations A, B, C - - - - H, I.

§. 6. Revenons donc à l'équation K: on ſait que

le nombre de ſes facteurs p eſt - - - - - - - $= m$

le nombre des produits de ces facteurs pris deux à deux $= m.\frac{m-1}{2}$

le nombre des produits de ces fact. pris trois à trois $= m.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{3}$

etc.

Mais l'équation I qui précede immédiatement, étant inférieure d'un degré, tous ces nombres ſeront plus petits. Car

le nombre de ſes facteurs p' ſera - - - - - $= (m-1)$

celui des produits de ces fact. pris deux à deux - - $= (m-1).\frac{(m-2)}{2}$

celui des produits de ces fact. pris trois à trois - - $= (m-1).\frac{m-2}{2}.\frac{m-3}{3}$

etc.

Or

Or il eſt dans l'équation - - - - - - K - - - - - - - I

la ſomme des facteurs - - - - - - $= a$ - - - - - - $= \frac{m-1}{m} . a$

la ſomme des produits de deux à deux $= b$ - - - - - - $= \frac{m-2}{m} b$

la ſomme des produits de trois à trois $= c$ - - - - - - $= \frac{m-3}{m} . c$

etc.

De là il ſuit que, dans l'équation I, ces ſommes ſont moins grandes que les ſommes analogues dans l'équation K, & qu'elles ſont moins grandes dans le même rapport que ne le ſont les nombres des facteurs & des produits analogues dans les deux équations. Car il eſt

$$m \quad : \quad (m - 1) \quad = a : \frac{m-1}{m} a$$

$$m . \frac{m-1}{2} \quad : \quad (m-1) . \frac{m-2}{2} = b : \frac{m-2}{m} b$$

$$m . \frac{m-1}{2} . \frac{m-2}{3} : (m-1) \frac{m-2}{2} . \frac{m-3}{3} = c : \frac{m-3}{m} c$$

etc.

§. 7. Or les équations précédentes ſe forment chacune de celle qu'elle précede immédiatement, de la même maniere que l'équation I ſe forme de l'équation K. Donc ce que nous venons de faire voir à l'égard de ces deux dernieres équations s'étend généralement à toutes. C'eſt à dire:

1°. Dans chacune de ces équations, la ſomme de ſes facteurs eſt en raiſon ſimple & directe du nombre de ces facteurs.

2°. La ſomme des produits des facteurs pris deux à deux eſt en raiſon ſimple & directe du nombre de ces produits.

3°. La ſomme des produits des facteurs pris trois à trois, quatre à quatre etc. eſt en raiſon ſimple & directe du nombre de ces produits.

§. 8. Ainſi, l'équation K étant miſe pour baſe, comme aiant le plus de facteurs, & le plus de produits, les facteurs & les produits des autres équations ſe trouvent diminués dans le même rapport dans lequel il faudroit le faire ſi on vouloit prendre les termes moyens. Car il eſt clair que, pour prendre ces termes moyens, il faudroit diminuer la ſomme des racines dans le rapport du nombre des racines, & la ſomme de leurs produits pris deux à deux, trois à trois etc. dans le rapport du nombre de ces produits etc. Il auroit été difficile à prévoir, que toutes ces réductions ſe trouvent comme d'elles-mêmes en faiſant pour une équation quelconque $x = y + z$.

§. 9. Mais il doit s'enſuivre encore que toutes ces racines elles-mêmes ſont des termes moyens, de ſorte p. ex. qu'en prenant les racines de l'équation K, dans l'ordre où elles ſont ſucceſſivement plus grandes, il doit tomber entre chacune des deux qui ſe ſuivent immédiatement une racine de l'équation I. Mais c'eſt encore peu de choſe, tandis qu'il s'agira de faire voir que la poſſibilité des racines de la derniere équation K dépend de la poſſibilité des racines de toutes les équations précédentes, de ſorte que ſi p. ex. la ſeconde équation $B = 0$, a des racines imaginaires, les racines de $K = 0$ ne ſauroient plus être toutes réelles. Cela va même juſqu'au point que la ſolution générale de l'équation K dépend de la ſolution des équations de tous les degrés inférieurs, & nommément des équations B, C, D - - - H, I. C'eſt ce que je ferai voir dans la ſuite.

§. 10. Reprenons pour cet effet l'équation transformée

$$0 = y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} \cdots\cdots + Hy^2 + Iy + K.$$

On ſait que le dernier terme K eſt le produit de toutes les racines, & que le coëfficient I du pénultieme terme eſt la ſomme des produits de $m - 1$ à $m - 1$ racines. Si donc cette équation a deux racines

ég-

égales, il s'enſuit qu'au moins une de ces racines entre dans chacun de ces produits, & que par conſéquent leur ſomme I ſera encore diviſible par une de ces racines. Or, K étant diviſible par l'une & l'autre, il eſt clair que cette racine ſera le commun diviſeur de K & I. De là il ſuit que les équations

$$K = z^m + az^{m-1} + \text{etc.} \cdots\cdots + hz^2 + iz + k$$
$$I = mz^{m-1} + (m-1)az^{m-2} \cdots\cdots + 2hz + i$$

doivent avoir un même facteur $Z + p$, lequel par conſéquent pourra être trouvé en poſant $K = I = 0$, & en procédant de la même maniere qu'on trouve les diviſeurs communs des nombres. Suppoſons p. ex.

$$0 = x^4 - 7x^3 + 21x^2 - 32x + 20,$$

& il s'agit de voir ſi cette équation a deux racines égales. Qu'on faſſe

$$x = y + z$$

& il ſera

$$\begin{aligned} 0 = y^4 &+ 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4 \\ &- 7y^3 - 21y^2z - 21yz^2 - 7z^3 \\ &\qquad + 21y^2 + 42yz + 21z^2 \\ &\qquad\qquad - 32y - 32z \\ &\qquad\qquad\qquad + 20. \end{aligned}$$

Faiſant donc

$$K = 0 = z^4 - 7z^3 + 21z^2 - 32z + 20$$
$$I = 0 = 4z^3 - 21z^2 + 42z - 32$$

& on aura

$$Q = 4K - Iz = 0 = -7z^3 + 42z^2 - 96z + 80.$$

De plus

$$R = 7I + 4Q = 0 = 21z^2 - 90z + 96.$$

 De

De là

$$S = 21I - 4Rz = o = -81z^2 + 498z - 672.$$

Et enfin

$$27R + 7S = o = 1056z - 2112$$

ce qui donne

$$o = z - 2$$

qui est le facteur cherché, & en même tems la racine qui se trouve deux fois dans l'équation proposée

$$o = x^4 - 7x^3 + 21x^2 - 32x + 20.$$

§. 11. On trouvera de même que, si l'équation

$$o = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; + hx^2 + ix + k$$

a n racines égales, l'équation K aura n facteurs égaux, & que l'équation I en aura $n - 1$, l'équation H en aura $n - 2$, que chaque équation antécédente en aura un de moins, & que cela continue jusqu'à l'équation qui n'en a plus qu'un seul. Il en sera de même si dans l'équation

$$o = x^m + ax^{m-1} + \text{etc.}$$

il se trouve des racines égales de différente valeur. Ces racines pourront toujours être trouvées, & par là on pourra rabaisser l'équation jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de racines égales. Et si des racines égales de différentes valeurs il y a une même quantité, alors on trouve une équation qui les renferme toutes seules, & cette équation sera encore un facteur de l'équation proposée. Mais je ne m'arrêterai pas à cette recherche. Il suffit pour le présent d'avoir fait voir un usage assez considérable de l'équation transformée

$$o = y^m - Ay^{m-1} + \text{etc.}$$

§. 12. Considérons maintenant l'équation

$$o = x^m + ax^{m-1} + \text{etc.}$$

ou,

ou, ce qui revient au même, l'équation

$$K = o = z^m + az^{m-1} + \cdots\cdots + hz^2 + iz + k,$$

& ſuppoſons que toutes ſes racines ſoient réelles & poſitives. Que ces racines ſoient z', z'', z''' etc. z^m, rangées en ſorte que chacune ſoit plus grande que celle qui la précede. Il eſt clair que chacune de ces racines étant ſubſtituée dans l'équation, la rendra égale à zéro, mais que cela n'arrivera pas, toutes les fois qu'on ſubſtitue une quantité différente de ces racines, & qu'en retenant tous les coëfficiens de z, il faudra augmenter ou diminuer le dernier terme k. Nous ſuppoſerons donc généralement que ce dernier terme ſoit $= v$. Voyons ce qui réſultera en augmentant ſucceſſivement la valeur de z depuis o juſqu'à ce qu'il ſurpaſſe la plus grande d'entre les racines z^m. On voit donc d'abord, qu'en faiſant $z = o$, il ſera $v = o$, & par conſéquent $v < k$. Et comme z' eſt ſuppoſée la plus petite d'entre les racines, on voit auſſi qu'on pourra donner à z toutes les valeurs moindres que z', ſans que v devienne $= k$, mais que pour toutes ces valeurs il ſera $v < k$. Or, en faiſant $z = z'$, on obtient $v = k$, & cela arrive de même en faiſant $z = z''$, qui eſt la ſeconde des racines, de ſorte qu'entre z' & z'' il n'y en a point d'autre. Il s'enſuit donc qu'en donnant à z une valeur quelconque intermédiaire entre z' & z''; on n'obtiendra pas $v = k$, mais qu'il ſera $v > k$. Car, v aiant commencé à croitre juſqu'à $z = z'$, ce ne ſera qu'après que z aura paſſé z', que v pourra recommencer à décroitre. Nous verrons d'abord ſous quelle condition cela pourra arriver dans le cas même où $z = z'$. Or, comme pour chaque valeur de $z = z'$, z'', z''', z^{IV} etc. on obtient $v = o$, on voit ſans peine que

z tombant entre	o & z'	on aura	$v < k$
	z' - - z''	- - - -	$v > k$
	z'' - - z'''	- - - -	$v < k$
	z''' - - z^{IV}	- - - -	$v > k$
	etc.		

& que cela continue alternativement jusqu'à ce que z passera la plus grande racine z^m, où cette alternative cesse.

§. 13. Comme donc, en donnant à z toutes les valeurs qui tombent entre deux racines z^n, z^{n+1} qui se suivent immédiatement, la valeur de v croît & décroît, il s'ensuit qu'une même valeur de v répond toujours à deux valeurs de z, dont l'une est plus proche de z^n tandis que l'autre est plus proche de z^{n+1}. Il s'ensuit encore que ces deux valeurs coïncident, lorsque v après avoir crû recommence à décroitre, c'est à dire, lorsque v aura atteint la plus grande valeur qui soit possible entre $z = z^n$, & $z = z^{n+1}$, ou la plus petite dans le cas où v commence à décroitre. Ainsi chacune de ces plus grandes ou de ces plus petites valeurs de v, entre deux racines z^n, z^{n+1} quelconques, répond à deux valeurs de z coïncidentes.

§. 14. Or il se peut que, dans certains cas, une de ces plus grandes ou de ces plus petites valeurs de v se trouve égale à k. Car, pour avoir une semblable équation, on n'a qu'à donner à k une de ces valeurs. Mais, dans tous ces cas où une des plus grandes ou des plus petites valeurs de v est égale à k, les deux valeurs de z qui y répondent, & qui sont coïncidentes, seront des racines de l'équation proposée. D'où il suit que, dans ce cas, cette équation aura deux racines coïncidentes ou égales.

§. 15. Mais le nombre des plus grandes & des plus petites valeurs de v est $= - 1$, c'est à dire, égal au nombre d'intervalles qui se trouvent entre les racines z', z'', z''' - - - z^m. Donc c'est en $m = 1$ manieres que les plus grandes & les plus petites valeurs de v peuvent être $= k$, ou bien il y a $m - 1$ valeurs de k possibles, qui rendent deux racines de l'équation égales. Or nous avons vu (§. 10.) que toutes les fois que l'équation $K = 0$ a deux racines égales, une de ces racines se trouve encore dans l'équation $I = 0$. Et comme cela a lieu pour toutes les $m - 1$ valeurs de k, & que cette valeur n'entre point dans l'équation I, il s'ensuit que l'équation I renferme me toutes les valeurs de z, qui dans ces $(m - 1)$ cas peuvent dans l'équation K devenir des racines égales. Et comme l'équation I ne monte qu'au $(m - 1)$ degré, & que par conféquent elle n'a que $(m - 1)$ racines, il s'enfuit qu'elle n'offre ni plus ni moins que ces $(m - 1)$ valeurs de z, qui dans l'équation $K = 0$ répondent aux $(m - 1)$ plus grandes & plus petites valeurs de v.

§. 16. Or, toutes les fois que les racines z', z'', z''' etc. font réelles, & qu'il n'y en a point d'égales, il y aura $(m - 1)$ cas réels, où la valeur de v devient la plus grande & la plus petite qu'elle puiffe être entre deux racines z^n, z^{n+1}. Donc, toutes les fois que les racines z', z'', z''' etc. z^m font toutes réelles, & qu'il n'y en a point d'égales, les racines de l'équation $I = 0$ feront néceffairement auffi réelles & différentes les unes des autres. Mais, fi dans l'équation $K = 0$, il y a des racines égales, nous avons vu comment il y en aura auffi dans l'équation $I = 0$, & comment l'une & l'autre équation peut en être affranchie, & rabaiffée à des degrés inférieurs. Ici il fuffit qu'elles foient réelles dans l'équation $K = 0$, pour que nous en inférions qu'elles le font auffi dans l'équation $I = 0$.

§. 17. Si donc, dans l'équation $I = 0$; il y a des racines imaginaires, il y en aura également dans l'équation $K = 0$. Car, fi celles-ci étoient toutes réelles, celles-là le feroient également.

§. 18. Or les équations B, C, D - - - - H, dépendent chacune de celle qui la fuit, de la même maniere que l'équation I dépend de l'équation K. Donc toutes leurs racines feront réelles dès que toutes les racines de l'équation K le font. Et réciproquement, fi dans une des équations B, C, D etc. - - H, quelconque il y a des racines imaginaires, il y en aura dans toutes celles qui la fuivent.

§. 19. On voit de là comment dans l'équation propofée

$$0 = x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \cdots\cdots hx^2 + ix + k$$

la poffibilité des racines dépend fucceffivement des coëfficiens a, b, c, etc. C'eft ainfi p. ex. que le coëfficient a peut être pris à volonté, puifpuisque l'équation A est du premier degré. Mais, dès qu'on a donné à ce coëfficient une certaine valeur, on ne pourra plus donner au second coëfficient b une valeur quelconque. Car l'équation

$$B = 0 = m.\frac{m-1}{2}z^2 + (m-1)az + b$$

étant du second degré, on voit que b y peut avoir une valeur qui rende ses deux racines imaginaires, & alors il y aura des racines imaginaires dans toutes les équations suivantes C, D - - - - K. Mais, si on fait b négative, ou qu'on lui donne une valeur positive qui rende les racines de $B = 0$ possibles, on se trouvera de la même façon restreint à ne donner aux coëfficiens c, d - - - h, i, k que des valeurs qui se trouvent entre certaines limites. Car on voit aisément que, quand même toutes les racines de l'équation $I = 0$ sont réelles, elles ne donnent encore que les valeurs de z répondantes aux plus grandes & aux plus petites valeurs de v. Or il est très possible que le dernier terme k de l'équation K surpasse quelques unes des plus grandes, ou soit plus petit que quelques unes des plus petites valeurs de v, & il est clair qu'alors il y aura autant de paires de racines imaginaires, & cela indépendamment de la possibilité des racines de l'équation $I = 0$.

§. 20. Supposons maintenant qu'il s'agisse d'une formule qui exprime généralement toutes les racines de l'équation $K = 0$, il est clair qu'il faudra que cette formule renferme toutes les limites entre lesquelles doivent se trouver les coëfficiens b, c, d - - - h, i, k, pour que toutes les racines de $K = 0$ soient possibles, en sorte que lorsqu'entre ces racines il y en a d'impossibles, cette formule fasse voir combien il y en a, & pourquoi elles sont impossibles. Il faut qu'elle fasse voir, si elles ne dépendent que du coëfficient k; ou si elles dépendent de l'équation $I = 0$, ou de quelcune des équations antécédentes. Et voilà comment la solution générale d'une équation quelconque dépend de celles des équations de tous les degrés inférieurs, & comment la formule dont je viens de parler, doit tirer des

équa-

équations B, C, D - - - - H, I, les marques charactériſtiques de la poſſibilité des racines de $K = o$.

§. 21. Comme dans l'équation $K = o$, il y a $(m - 1)$ plus grandes & plus petites valeurs de v, il eſt queſtion de ſavoir comment elles peuvent être trouvées. On voit bien que la voie qui s'offre le plus naturellement, ſeroit de réſoudre l'équation $I = o$, afin d'avoir toutes les valeurs de z répondantes. Ces valeurs enſuite devroient être ſubſtituées chacune dans l'équation $K = o$, afin de trouver les valeurs de v. Cette voie n'eſt pas peu prolixe, mais il y a moyen de trouver une équation qui les renferme toutes. Car, en ſubſtituant v à la place du dernier terme k de l'équation $K = o$, cette équation aura deux racines égales, dont l'une ſe trouvera encore dans l'équation $I = o$. On n'aura donc qu'à traiter ces deux équations comme lorſqu'on cherche un facteur commun ,& on pouſſera l'opération juſqu'au réſidu qui doit être $= o$. Ce réſidu ne renfermera plus que les coëfficiens a, b, c - - - - i & l'inconnue v. Et toute réduction faite, on aura une équation du $(m - 1)$ degré, laquelle par conſéquent renfermera toutes les valeurs v qu'il s'agiſſoit de chercher.

§. 22. Soit p. ex. l'équation du troiſieme degré

$$K = o = z^3 + az^2 + bz + k$$

& il ſera

$$I = o = 3z^2 + 2az + b.$$

Or, en poſant v au lieu de k, ces deux équations auront une racine commune. Il ſera donc

$$R = 3K - Iz = az^2 + 2bz + 3v = o.$$

D'où il ſuit

$$S = 3R - aI = (6b - 2aa)z + (9v - ab) = o$$

$$T = 3Sz - (6b - 2aa)I = [3(9v - ab) - 2a(6b - 2aa)]z$$
$$- b(6b - 2aa) = o.$$

 Or

Or, ces deux équations renfermant le même facteur, il doit être

$$z = \frac{9v - ab}{6b - 2aa} = \frac{b(6b - 2aa)}{3.(9v - ab) - 2a(6b - 2aa)}.$$

D'où l'on obtient

$$(9v - ab)^2 - \frac{2a}{3}(6b - 2aa)(9v - ab) = \tfrac{1}{3}b(6b - 2aa)$$

équation qui renferme les deux valeurs de v qu'il s'agiſſoit de chercher.

§. 23. Voici encore une autre méthode. En retenant l'équation

$$I = 0 = z^2 + \tfrac{2}{3}az + \tfrac{1}{3}b$$

tranſpoſons l'équation K en ſorte qu'il ſoit

$$v = z^3 + az^2 + bz.$$

Et comme pour une équation du 3^e^ degré il n'y a que deux valeurs de v, faiſons

$$0 = v^2 + Av + B.$$

Or, en ſubſtituant dans cette équation la valeur de v, il ſera

$$\begin{aligned} 0 = z^6 + 2az^5 + 2bz^4 & \\ + aaz^4 + 2abz^3 + bbz^2 & \\ + Az^3 + Aaz^2 + Abz + B. & \end{aligned}$$

De cete équation on pourra ſouſtraire les multiples ſuivans de l'équation $I = 0$.

$$\begin{array}{lllll} -Iz^4 = & -z^6 - \tfrac{2}{3}az^5 - \tfrac{1}{3}bz^4 & & & \\ -CIz^3 = & & -Cz^5 - \tfrac{2}{3}Caz^4 - \tfrac{1}{3}bCz^3 & & \\ -DIz^2 = & & & -Dz^4 - \tfrac{2}{3}Daz^3 - \tfrac{1}{3}Dbz^2 & \\ -EIz = & & & & -Ez^3 - \tfrac{2}{3}Eaz^2 - \tfrac{1}{3}Ebz \\ -FI = & & & & -Fz^2 - \tfrac{2}{3}Faz - \tfrac{1}{3}Fb. \end{array}$$

Et

Et tous les termes pourront être faits $= 0$. Par là on parviendra à déterminer les coëfficiens A, B, C, D, E, F, & l'équation

$$0 = v^2 + Av + B$$

sera trouvée.

§. 24. On procédera de la même maniere pour une équation $K = 0$ d'un degré quelconque, & on parviendra à une équation

$$0 = v^n + \alpha v^{n-1} + \beta v^{n-2} \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . + k.$$

Or cette équation se trouve à l'égard de la possibilité des racines dans le même cas que l'équation $I = 0$. L'une & l'autre ont dans chaque cas particulier un même nombre de racines possibles ou impossibles. Et quel que soit le nombre des racines impossibles dans l'une ou l'autre de ces deux équations, l'équation $K = 0$ en aura tout au moins autant. Mais, lors même que toutes les racines v sont possibles, on n'aura qu'à en chercher la plus grande & la plus petite, pour voir si dans l'équation K il y a des racines impossibles qui dépendent de son dernier terme k. Car, toutes les fois que k ne tombe pas entre la plus grande & la plus petite racine v, on est assuré que l'équation $K = 0$ n'a qu'une seule racine possible, lorsqu'elle est d'une dimension impaire, & qu'elle n'en a que deux ou n'en a point, lorsqu'elle est d'une dimension paire. Mais, si k se trouve entre les limites de la plus grande & de la plus petite racine v, alors l'équation $K = 0$ aura tout au moins deux racines possibles de plus.