OBSERVATIONS ANALYTIQUES.

PAR M. LAMBERT. (*)

§. 1. *Une fonction quelconque de deux quantités variables* x, y, *étant exprimée ou disposée en sorte qu'elle soit égale à zéro, ou à une quantité constante, ou enfin à une autre fonction quelconque de* y, *il s'agit de déterminer* x, *ou une fonction quelconque de* x *ou de* x, y, *par* y, *au moyen des différentiations.* Voilà un probleme d'une généralité peu commune, & dont la solution paroit promettre de nouveaux progrès à l'Analyse. Cependant c'est cette même généralité qui m'engage à en renvoyer la solution vers la fin de ce Mémoire. La bonne méthode veut qu'on aille du plus simple au plus composé. C'est le chemin qu'on suit ordinairement dans les découvertes qu'on fait, & la plus grande partie des Lecteurs aiment fort qu'on les conduise de la même maniere. Ils veulent d'abord s'accoutumer aux petites difficultés avant que d'en venir aux grandes. Cela est très-naturel. Par-là ils se trouvent instruits sans qu'il leur en coute une attention extraordinaire. Mais aussi, ordinairement, ceux qui veulent leur faire part de leurs découvertes n'y trouvent pas trop leur compte. Car outre que quelquefois les premiers commencemens de ces découvertes sont tels, qu'on aime mieux les cacher, une théorie qui commence par ce qu'il y a de plus abstrait, & de plus général, produit plus d'admiration & en impose d'avantage. Avec tout cela il y a des cas où cette derniere maniere de procéder est préférable au récit plus ou moins historique de la découverte, & cela arrive toutes les fois qu'une théorie est le résultat d'une nouvelle combinaison des principes les plus simples & les plus élémentaires.

§. 2. Ce n'est pas là le cas de ce Mémoire. Je regarde la théorie des fonctions comme une chose dont on n'a encore que des parties isolées. Je dirai peut-être une autre fois sous quel point de vue je l'envisage. Il suffira

(*) Ce Mémoire a été lu dans le courant de l'Année 1771.

ici d'approcher de la ſolution générale du probleme que je viens de propoſer, en paſſant par les degrés intermédiaires, c'eſt à dire, en réſolvant d'abord quelques cas plus ſimples. C'eſt dans cette vue que je commencerai par celui qui m'a fourni la premiere occaſion de faire ces recherches.

§. 3. On ſait qu'en cherchant les racines d'une équation, ſoit en tâtonnant, ſoit par approximation, on commence quelquefois par déterminer les limites de ces racines. La méthode s'en trouve dans pluſieurs livres élémentaires. En la repaſſant j'obſervai que par une eſpece d'approximation ces limites pouvoient être de plus en plus reſſerrées, au point qu'en continuant l'opération, la plus grande ou la plus petite racine ſe trouvoit comme d'elle-même. J'en fis l'eſſai ſur les équations du ſecond & enſuite du troiſieme degré, en faiſant dans cette derniere équation le ſecond terme $= 0$. Les ſéries qui exprimoient une des racines étoient fort ſimples, & je vis qu'elles conſervoient la même forme lorſqu'il s'agiſſoit de la racine d'un trinome quelconque

$$a\, x^{\kappa} + b^{\cdot}\, x^{\lambda} = d.$$

§. 4. Je fis entrer ces remarques dans un Mémoire qui ſe trouve dans le troiſieme Volume des *Acta Helvetica*, imprimé en 1757, en me bornant cependant à expliquer la méthode par l'exemple des équations du ſecond degré. J'ajoutai néanmoins que de la même maniere, pour un trinome quelconque de la forme

$$x^m + p\, x = q,$$

on trouve la ſuite

$$\begin{aligned} x = q : p - q^m : p^{m+1} + m \,.\, q^{2m-1} : p^{2m+1} - m \,.\, \tfrac{3m-1}{2}\, q^{3m-2} : p^{3m+1} \\ + m \,.\, \frac{4m-1}{2} \,.\, \frac{4m-2}{3}\, q^{4m-3} : p^{4m+1} \\ - m \,.\, \frac{5m-1}{2} \,.\, \frac{5m-2}{3} \,.\, \frac{5m-3}{4} \,.\, q^{5m-4} : p^{5m+1} \\ + m \,.\, \frac{6m-1}{2} \,.\, \frac{6m-2}{3} \,.\, \frac{6m-3}{4} \,.\, \frac{6m-4}{5} \,.\, q^{6m-5} : p^{6m+1} \\ - \&c. \end{aligned}$$

Enfin je fis voir que tout autre trinome

$$a x^{\kappa} + b x^{\lambda} = d$$

peut être ramené à la forme

$$x^m + p x = q$$

de deux manieres, & qu'on trouve toujours deux suites, dont l'une est nécessairement convergente.

§. 5. En 1764, quand j'arrivai à Berlin, je fis remarquer ces sortes de séries à Mr. Euler, comme méritant quelque attention. La démonstration étant supprimée dans les *Acta Helvetica* & n'ayant pas mes papiers avec moi, je me mis à la retrouver, ou à en trouver une autre plus simple. Pour cet effet je donnai au trinome la forme

$$o = x^m - a x^{m-1} - p$$

& en faisant usage des formules de Newton pour les sommes des dignités des racines je trouvai sans peine

$$\begin{aligned} \int x^n = {} & a^n + n a^{n-m} p + n \cdot \frac{n+1-2m}{2} a^{n-2m} \cdot p^2 \\ & + n \cdot \frac{n+1-3m}{2} \cdot \frac{n+2-3m}{3} \cdot a^{n-3m} \cdot p^3 \\ & + n \cdot \frac{n+1-4m}{2} \cdot \frac{n+2-4m}{3} \cdot \frac{n+2-5m}{4} \cdot a^{n-4m} p^3 \\ & + \&c. \end{aligned}$$

&

$$\int x^{n+r} = a^{n+r} + (n+r) a^{n+r-m} + \&c.$$

Or en divisant cette derniere série par la premiere, je trouvai

$$\begin{aligned} \frac{\int x^{n+r}}{\int x^n} = {} & a^r + r a^{r-m} p + r \cdot \frac{r-2m+1}{2} \cdot a^{r-2m} p^2 \\ & + r \cdot \frac{r-3m+1}{2} \cdot \frac{r-3m+2}{3} \cdot a^{r-3m} p^3 \\ & + r \cdot \frac{r-4m+1}{2} \cdot \frac{r-4m+2}{3} \cdot \frac{r-4m+3}{4} \cdot a^{r-4m} p^4 \\ & + \&c. \\ = {} & x^r \end{aligned}$$

de sorte que la série ne change point de forme lors même qu'au lieu de la racine x, on cherche une dignité quelconque x^r. De là il résulte sans peine encore

$$\log\left(\frac{x}{a}\right) = p\,a^{-m} + \frac{1-2m}{2}p^2 . a^{-2m} + \frac{1-3m}{2} . \frac{2-3m}{3} . p^3 a^{-3m}$$
$$+ \frac{1-4m}{2} . \frac{2-4m}{3} . \frac{3-4m}{4} . p^4 a^{-4m}$$
$$+ \text{\&c.}$$

puiſque l'expreſſion

$$\frac{x^r - a^r}{r}$$

ſe change en log $(x : a)$ lorſqu'on fait $r = 0$. Il en réſulte encore, qu'ayant une équation quelconque

$$y = A x^\mu + B x^\nu + C x^\tau + \text{\&c.}$$

on n'a qu'à faire

$$\varepsilon = A a^\mu + B a^\nu + C a^\tau + \text{\&c.}$$

pour avoir

$$y = \varepsilon + \frac{d\,\varepsilon}{d\,a} . p\,a^{1-m} + \frac{d\,d\,\varepsilon}{2\,d\,a^2} . p^2\,a^{2-2m} + \text{\&c.}$$
$$+ \frac{d\,\varepsilon}{d\,a}(1-m)\,p^2\,a^{1-2m}$$

& par conſéquent une fonction quelconque de x.

§. 6. Mr. Euler de ſon côté ne laiſſa pas de donner quelque attention à la formule (§. 4). Il en trouva une démonſtration, qu'il me dit être fondée immédiatement ſur la nature des équations, & il l'étendit encore aux quadrinomes de la forme

$$0 = x^m + a\,x^n + b\,x^p + c$$

ce qui, d'après ce que je viens de dire, n'eſt gueres plus difficile. Mais on n'a point de peine à ſe figurer que la ſérie, qui pour les quadrinomes & en général pour des polynomes quelconques doit donner une puiſſance & enfin une fonction quelconque de x, perd beaucoup de la ſimplicité qu'a celle qu'on trouve pour les trinomes. En effet cette ſérie pour les trinomes eſt, comme on vient de voir, ſi ſimple, qu'il ſemble qu'on devroit pouvoir en trouver la ſomme, & par conſéquent une expreſſion finie de la racine du trinome. C'eſt auſſi ce qui m'avoit principalement porté à en parler à Mr. Euler.

§. 7. Il y a quelques années que j'en parlai pareillement à Mr. de la Grange, en lui communiquant la ſérie qui pour le trinome exprime une dignité quelconque de la racine. J'ajoutai que Mr. Euler avoit trouvé une ſérie ſemblable, quoique plus compoſée, pour les quadrinomes; que j'ignorois quelle voie l'y avoit conduit, & que probablement il feroit inſérer dans les Commentaires de Petersbourg un Mémoire qu'il avoit compoſé ſur cette matiere. Mr. de la Grange trouvant ces recherches dignes de ſon attention, s'appliqua à traiter cette matiere dans une très grande généralité, en conſidérant d'abord un polynome quelconque. Il en réſulta pour un trinome de la forme

$$\alpha - x + \phi x = 0$$

la ſérie très-ſimple & très générale

$$\psi p = \psi x + \phi x \,.\, \psi' x + \frac{\mathrm{d}\,.\,(\phi x)^2 \psi' x}{2\,\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}^2\,.\,(\phi x)^3 \psi' x}{2\,.\,3\,\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^3\,.\,(\phi x)\,.\,\psi' x}{2\,.\,3\,.\,4\,\mathrm{d}x^3} + \&c.$$

où ϕ & ψ déſignent des fonctions quelconques, p une des racines du trinome, & $\psi' x = \mathrm{d}\psi x : \mathrm{d}x$, & où après les différentiations il faut changer x en α. Ces recherches accompagnées de pluſieurs autres ſe trouvent dans les Mémoires de l'Académie de 1768, & en 1769. Mr. de la Grange en fit encore une heureuſe application au fameux probleme de Kepler.

§. 8. Voilà donc la partie hiſtorique de ce que j'ai à dire. Il ſera tems de revenir à mon tour ſur cette matiere. Pour cet effet je retourne au trinome

$$a x^{\kappa} + b x^{\lambda} = d$$

auquel on peut toujours donner la forme plus ſimple

$$x = q + x^m$$

ce qui pour une puiſſance quelconque x^n donne

$$x^n = q^n + n q^{n-1} x^m + n \cdot \frac{n-1}{2} \cdot q^{n-2} x^{2m} + \&c.$$

Or en ſubſtituant dans le ſecond terme de cette ſuite la valeur

$$x^m = q^m + m q^{m-1} x^m + m \cdot \frac{m-1}{2} \cdot q^{m-2} x^{2m} + \&c.$$

on a

$$x^n = q^n + n q^{n-1+m} + n m q^{n-2+m} x^m + n.m.\frac{m-1}{2}.q^{n-3+m} x^{2m} + \&c.$$
$$+ n.\frac{(n-1)}{2} q^{n-2} x^{2m} + n.\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-2}{3}.q^{n-3} x^{3m} + \&c.$$

& en fubftituant dans le troifieme terme les valeurs x^m, x^{2m} on a

$$x^n = q^n + n q^{n-1+m} + n\ m\ q^{n-2+2m} + n.m.m\ q^{n-3+2m}\ x^m + \&c.$$
$$+ n.\frac{n-1}{2}.q^{n-2+2m} + n.\frac{n-1}{2}.2 m q^{n-3+2m} x^m + \&c.$$
$$+ n.m.\frac{m-1}{2} q^{n-3+m} x^{2m} + \&c.$$
$$+ n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3} q^{n-3} x^{3m} + \&c.$$

De la même maniere en fubftituant dans le quatrieme terme les valeurs de x^m, x^{2m}, x^{3m}, on a

$$x^n = q^n + n\ q^{n-1+m} + n\ m\ .\ q^{n-2+2m} + n\ m\ m\ q^{n-3+3m} + \&c.$$
$$+ n.\frac{n-1}{2} q^{n-2+2m} + n.\frac{n-1}{2}.2\,m q^{n-3+3m} + \&c.$$
$$+ n.m.\frac{m-1}{2} q^{n-3+3m} + \&c.$$
$$+ n.\frac{n-1}{2}.\frac{n-2}{3} q^{n-3+3m} + \&c.$$
$$+ \&c.$$

En continuant la même opération pour les termes fuivans, & en faifant la réduction des coëfficiens, on aura

$$x^n = q^n + n\,q^{n-1+m} + n\cdot\frac{n-1+2m}{2}\cdot q^{n-2+2m}$$
$$+ n\cdot\frac{n-1+3m}{2}\cdot\frac{n-2+3m}{3}\cdot q^{n-3+3m}$$
$$+ \&c.$$

§. 9. On peut encore, après avoir trouvé de cette maniere quelques-uns des premiers termes & par conféquent la loi de la progreffion des expofans, fe fervir de la doctrine du retour des fuites, en pofant

$$x^n = q^n(1 + A\,q^{m-1} + B\,q^{2m-2} + \&c.)$$

pour avoir

$$q = q + \frac{1}{n} A . q^m + \frac{1}{n} B q^{2m-1} + \&c.$$
$$+ \frac{1}{n} . \frac{1-n}{2n} A A q^{2m-1} + \&c.$$
$$- q^m - \frac{m}{n} q^{2m-1} - \&c.$$

& pour déterminer les coëfficiens

$$A = n$$
$$B = n . \frac{n - 1 + 2m}{2}$$

&c.

§. 10. Paſſons maintenant au trinome

$$y = x - \phi x$$

où ϕx déſigne une fonction quelconque de x. Ce trinome, quoique beaucoup plus général que les précédens, eſt encore aſſés ſimple pour qu'il puiſſe ſuccéder immédiatement. Encore rien de plus ſimple que la façon de le conſtruire. Soit AM la courbe dont les ordonnées PM repréſentent la fonction ϕx répondante à l'abſciſſe $AP = x$. Qu'on faſſe $AB = y$, & en tirant la droite BM ſous un angle de 45°, l'interſection de cette droite & de la courbe, qui ſe fait au point M, donnera en même tems $PM = \phi x$ & $AP = x$. Pl.III. Fig.1.

§. 11. Cette conſtruction eſt ſimple & directe. J'en ajouterai néanmoins une autre, qui donne x & ϕ par approximation. Pour cet effet je remarque que du trinome propoſé

$$x = y + \phi x$$

on trouve ſans peine

$$x = y + \phi(y + \phi(y + \phi(y + \&c.))) \&c.$$

Cette ſérie indique les opérations ſucceſſives qu'il faut faire & qu'on peut encore faire lorſque la fonction ϕx eſt donnée par des expreſſions littérales ou numériques. Voici comment on procede à la conſtruction.

§. 12. On fait ſucceſſivement

$AB = y$ ce qui donne $Bb = \phi y$
$AC = y + \phi y$ . . . . $Cc = \phi(y + \phi y)$
$AD = y + \phi(y + \phi y)$ . . $Dd = \phi(y + \phi(y + \phi y))$
&c. &c.

De cette maniere on aura, en achevant les rectangles,

$$Bb = C\gamma = CB = \Phi y$$
$$Cc = D\delta = DB = \Phi(y + \Phi y)$$
$$Dd = E\varepsilon = EB = \Phi(y + \Phi(y + \Phi y))$$

&c.

§. 13. Comme donc de cette façon $y = AB$ est traitée comme une abscisse de la courbe AM, & que l'ordonnée $Bb = \Phi y$ y répond, on peut d'abord poser

$$BP = \Delta y$$

de sorte qu'on ait

$$AP = x = y + \Delta y.$$

Or on sait que tandis qu'une abscisse y se change en $y + \Delta y$, l'ordonnée répondante Φy se change en

$$\Phi y + \frac{\Delta y \,.\, d\Phi y}{dy} + \frac{(\Delta y)^2 \,.\, d^2 \Phi y}{2 dy^2} + \&c.$$

Mais par la construction ou aussi par le trinome proposé on a

$$\Delta y = x - y = \Phi x$$

& l'ordonnée répondante à l'abscisse $y + \Delta y$ est pareillement $\Phi x = PM$. Ainsi on a

$$\Phi x = \Phi y + \frac{\Phi x \,.\, d\Phi y}{dy} + \frac{(\Phi x)^2\, d^2 \Phi y}{2 dy^2} + \frac{(\Phi x)^3\, d^3 \Phi y}{2\,.\,3\, dy^3} + \&c.$$

ce qui, au moyen de la reversion des suites, donne

$$\Phi x = \Phi y + \frac{d(\Phi y)^2}{2\, dy} + \frac{dd(\Phi y)^3}{2\,.\,3\, dy^2} + \frac{d^3(\Phi y)^4}{2\,.\,3\,.\,4\, dy^3} + \&c.$$

Et comme on a

$$x = y + \Phi x$$

on trouve également

$$x = y + \Phi y + \frac{d(\Phi y)^2}{2\, dy} + \frac{d^2(\Phi y)^3}{2\,.\,3\, dy^2} + \&c.$$

& par conséquent

$$\int x\, dy = \tfrac{1}{2} yy + \int \Phi y\, dy + (\Phi y)^2 + \frac{d(\Phi y)^3}{2\,.\,3\,.\, dy} + \&c.$$

§. 14. Pour trouver enfin une fonction quelconque ψx, soit la courbe ANQ telle qu'à chaque abscisse $AP = x$ réponde l'ordonnée

PQ

$PQ = \psi x$. Donc à l'abſciſſe $AB = y$ répondra l'ordonnée $BN = \psi y$. Ainſi, comme ci-devant, on trouve pour l'abſciſſe

$$AP = x = y + \Delta y$$

l'ordonnée répondante

$$PQ = \psi x = \psi y + \frac{\Delta y \,.\, d\psi y}{dy} + \frac{(\Delta y)^2 \,.\, d^2 \psi y}{2\, dy^2} + \&c.$$

Mais nous venons de trouver

$$\Delta y = \Phi x = \Phi y + \frac{d(\Phi y)^2}{2\, dy} + \frac{d^2 (\Phi y)^3}{2\,.\,3\, dy^2} + \&c.$$

ſubſtituant donc cette valeur, & faiſant les réductions néceſſaires, on aura

$$\psi x = \psi y + \frac{\Phi y \,.\, d\psi y}{dy} + \frac{d((\Phi y)^2 \,.\, d\psi y)}{2\, dy^2} + \frac{d^2((\Phi y)^3 \,.\, d\psi y)}{2\,.\,3\, dy^3} + \&c.$$

Ce qui eſt la même ſérie que Mr. de la Grange a donnée dans les Mémoires de 1768. d'une maniere extremement différente de celle dont je viens de faire uſage.

§. 15. J'ai promis de ne m'approcher de mon dernier probleme que par degrés. Ainſi je paſſerai à conſidérer un trinome tant ſoit peu plus compliqué. Le voici:

$$\varkappa \xi = \varkappa \eta + \varrho \xi.$$

Dans ce trinome $\varrho \xi$, $\varkappa \xi$, $\varkappa \eta$ déſignent des fonctions quelconques de ξ & η. Le probleme eſt: *Une fonction quelconque de ξ étant égale à une même fonction de η, plus une autre fonction quelconque de ξ, exprimer une troiſieme fonction quelconque $\Pi \xi$ par y, au moyen des différentiations.*

§. 16. La ſolution de ce probleme n'a aucune difficulté. Car on n'a qu'à faire

$$\varkappa \xi = x = AP$$
$$\varkappa \eta = y = AB$$

& on aura

$$\varrho \xi = BP = PM = \Phi x = \Phi \varkappa \xi.$$
$$\psi x = \psi \varkappa \xi = \Pi \xi.$$

Or comme nous avons (§. 14.)

$$\psi x = \psi y + \frac{\Phi y \,.\, d\psi y}{dy} + \frac{d(\Phi y^2 \,.\, d\psi y)}{2\, dy^2} + \&c.$$

il n'y aura qu'à faire les ſubſtitutions requiſes, pour avoir

$$\psi\varkappa\xi = \psi\varkappa\eta + \frac{\varphi\varkappa\eta . d(\psi\varkappa\eta)}{d(\varkappa\eta)} + \frac{d[(\varphi\varkappa\eta)^2\, d\psi\varkappa\eta]}{2(d\varkappa\eta)^2} + \&c.$$

Or

$$\psi\varkappa = \Pi$$
$$\varphi\varkappa = \varrho$$

on fera encore ces ſubſtitutions, & la ſérie qu'il s'agiſſoit de trouver ſera

$$\Pi\xi = \Pi\eta + \frac{\varrho\eta . d\Pi\eta}{d\varkappa\eta} + \frac{d[(\varrho\eta)^2 . d\Pi\eta]}{2(d\varkappa\eta)^2} + \frac{d^2[(\varrho\eta)^3 . d\Pi\eta]}{2.3.(d\varkappa\eta)^3} + \&c.$$

Il faut cependant obſerver qu'en faiſant les différentiations indiquées dans cette formule, ce n'eſt pas $d\eta$ mais $dy = d(\varkappa\eta)$ qui doit être priſe pour conſtante. Cela fait qu'il vaut mieux lui donner la forme développée

$$\Pi\xi = \Pi\eta + \varrho\eta\left(\frac{d\Pi\eta}{d\varkappa\eta}\right) + \varrho\eta\left(\frac{d\varrho\eta}{d\varkappa\eta}\right)\left(\frac{d\Pi\eta}{d\varkappa\eta}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\varrho\eta)^2 . d\left(\frac{d\Pi\eta}{d\varkappa\eta}\right) : d\varkappa\eta.$$
$$+ \varrho\eta . \left(\frac{d\varrho\eta}{d\varkappa\eta}\right)^2 . \left(\frac{d\Pi\eta}{d\varkappa\eta}\right) + \&c.$$
$$+ \tfrac{1}{2}\varrho\eta^2 . d\left(\frac{d\varrho\eta}{d\varkappa\eta}\right) . \left(\frac{d\Pi\eta}{d\varkappa\eta}\right) : d\varkappa\eta + \&c.$$
$$+ \varrho\eta^2 . \left(\frac{d\varrho\eta}{d\varkappa\eta}\right) . d\left(\frac{d\Pi\eta}{d\varkappa\eta}\right) : d\varkappa\eta + \&c.$$
$$+ \tfrac{1}{6}\varrho\eta^3 . d\left[d\left(\frac{d\Pi\eta}{d\varkappa\eta}\right) : d\varkappa\eta\right] : d\varkappa\eta . + \&c.$$
$$+ \&c.$$

où après chaque différentiation un $d\eta$ diſparoit, ce qui ramene toujours le calcul aux différentielles du premier degré.

§. 17. Dans le cas du trinome

$$\varkappa\xi = \varkappa\eta + \varrho\xi$$

que je viens de réſoudre, il n'y a que deux eſpeces de fonctions qui ſont $\varkappa$ & ϱ. C'eſt ce qui rend ce cas encore fort particulier. Pour le rendre plus général, il faudra y faire entrer une troiſieme fonction λ, pour avoir le trinome

$$\varkappa\xi = \lambda\eta + \varrho\xi$$

& le probleme ſera: *Une fonction quelconque de ξ étant égale à une autre* *fonction quelconque de* ξ, *plus une fonction quelconque de* η; *exprimer* ξ *ou une fonction quelconque de* ξ *par* η, *au moyen des différentiations.* Mais il n'est pas nécessaire de résoudre ce probleme, tel que je viens de l'énoncer. Car on voit d'abord qu'on peut faire

$$\lambda\eta = \varkappa\xi - \varrho\xi = \psi\xi$$

puisque la différence de deux fonctions de ξ est elle-même une fonction de ξ.

§. 18. Il suffira donc d'énoncer le probleme tout simplement de la façon suivante: *Une fonction quelconque de* x *étant égale à une fonction quelconque de* y; *déterminer* x *ou une fonction quelconque de* x *par* y, *au moyen des différentiations.*

§. 19. Ce probleme peut d'abord être ramené au précédent. Car soit l'équation proposée

$$\psi\xi = \varkappa\eta$$

elle se transforme sans peine en

$$\varkappa\xi = \varkappa\eta + (\varkappa\xi - \psi\xi)$$

& en faisant

$$\varkappa\xi - \psi\xi = \varrho\xi$$

on aura

$$\varkappa\xi = \varkappa\eta + \varrho\xi$$

ce qui est la formule dont je viens de donner la solution.

§. 20. Néanmoins il ne sera pas inutile de résoudre l'équation proposée

$$\lambda y = \psi x$$

plus directement. Considérons pour cet effet ψx comme une ordonnée PM d'une courbe AM, l'abscisse étant $AP = x$. Faisons $AB = y$, & l'ordonnée répondante sera $Bb = \psi y$. Soit enfin l'intervalle $BP = \Delta y$, nous aurons

$$y + \Delta y = x.$$

Or l'ordonnée répondante à l'abscisse $y + \Delta y = x$ sera

$$PM = \psi x = \psi y + \frac{\Delta y \,.\, d\psi y}{dy} + \frac{(\Delta y)^2\, dd\psi y}{2\,dy^2} + \&c. = \lambda\eta.$$

Faisons pour plus de briéveté

$$\frac{(\lambda y - \psi y)\,dy}{d\psi y} = \sigma y$$

& nous aurons

$$\sigma y = \Delta y + \frac{(\Delta y)^2 . dd\psi y}{2 dy . d\psi y} + \frac{(\Delta y)^3 . d^3\psi y}{2.3.dy^2.d\psi y} + \&c.$$

ce qui au moyen de la reverſion des ſuites donne

$$\Delta y = \sigma y - \frac{(\sigma y)^2 . dd\psi y}{2 dy . d\psi y} + (\sigma y)^3 . \frac{3(d^2\psi y)^2 - d\psi y . d^3\psi y.}{2 . 3 . (d\psi y)^2 . dy^2}$$

$$- (\sigma y)^4 . \frac{15 (dd\psi y)^3 - 10 . d\psi y . d^2\psi y . d^3\psi y + (d\psi y)^2 . d^4\psi y}{2 . 3 . 4 . (d\psi y)^3 . dy^3}$$

$$+ \&c.$$

§. 21. Or ayant Δy on n'a qu'à faire

$$x = y + \Delta y$$

pour avoir x.

§. 22. Mais quand il s'agit de trouver une fonction quelconque de x; ſoit cette fonction $\phi x = PQ$, on aura pour l'abſciſſe $y = AB$, l'ordonnée $BN = \phi y$, & à l'abſciſſe $y + \Delta y = x$, répondra l'ordonnée $PQ = \phi x$, de ſorte qu'on aura

$$\phi x = \phi y + \frac{\Delta y . d\phi y}{dy} + \frac{(\Delta y)^2 . d^2\phi y}{2 dy^2} + \&c.$$

où il ne reſte plus que de ſubſtituer la valeur de Δy, que nous venons de trouver, ce qui peut ſe faire, ſoit en général, ſoit lorſqu'on aura déterminé Δy dans les cas particuliers auxquels on veut appliquer ces formules.

§. 23. L'équation

$$\lambda y = \psi x$$

ayant, comme on voit, toute la généralité qu'elle peut avoir pour le cas où les deux variables ſont ſéparées; nous pourrons, ſans faire de ſaut, paſſer au cas où les variables ne ſont point ſéparées. Voilà donc le probleme que j'ai annoncé au commencement de ce Mémoire. J'expoſerai d'abord la formule générale dont nous aurons beſoin, & qui, indépendamment du probleme en queſtion, peut être d'uſage dans pluſieurs autres cas.

§. 24. *Soit* z *une fonction des variables* x, y. *Que* z *ſe change en* $z + \Delta z$, *tandis que* x, y *ſe changent en* $x + \Delta x$, $y + \Delta y$. *Il s'agit de déterminer* $z + \Delta z$ *par* x, y, *au moyen des différentiations.* On prévoit aiſément que pour parvenir à ce but, la fonction z doit être différentiée de deux manieres: d'abord en traitant x de variable & y de conſtante, & pour ces ſortes de différentielles j'employerai ſimplement la lettre d; enſuite en traitant y de variable, & x de conſtante, & pour ces ſortes de différentiations j'employerai la lettre δ. Ce qui étant ſuppoſé d'avance, voici la formule:

$$\begin{array}{lllll} z + \Delta z = z & + \dfrac{\Delta x . \mathrm{d} z}{\mathrm{d} x} & + \dfrac{(\Delta x)^2 . \mathrm{d}^2 z}{2 \mathrm{d} x^2} & & + \text{\&c.} \\ + \dfrac{\Delta y . \delta z}{\mathrm{d} y} & + \dfrac{\Delta x \Delta y . \mathrm{d} \delta z}{\mathrm{d} x . \mathrm{d} y} & + \dfrac{(\Delta x)^2 . \Delta y . \mathrm{d}^2 \delta z}{2 \mathrm{d} x^2 . \mathrm{d} y} & & + \text{\&c.} \\ + \dfrac{(\Delta y)^2 . \delta^2 z}{2 \mathrm{d} y^2} & + \dfrac{\Delta x . (\Delta y)^2 . \mathrm{d} \delta^2 z}{\mathrm{d} x . 2 \mathrm{d} y^2} & + \dfrac{(\Delta x)^2 . (\Delta y)^2 . \mathrm{d}^2 \delta^2 z}{2 \mathrm{d} x^2 . 2 \mathrm{d} y^2} & & + \text{\&c.} \\ + \dfrac{(\Delta y)^3 . \delta^3 z}{2 . 3 \mathrm{d} y^3} & + \dfrac{\Delta x . (\Delta y)^3 . \mathrm{d} \delta^3 z}{\mathrm{d} x . 2 . 3 . \mathrm{d} y} & + \dfrac{(\Delta x)^2 . (\Delta y)^3 \mathrm{d}^2 \delta^3 z}{2 \mathrm{d} x^2 . 2 . 3 . \mathrm{d} y^3} & & + \text{\&c.} \\ + \text{\&c.} & + \text{\&c.} & + \text{\&c.} & & + \text{\&c.} \end{array}$$

Dans cette formule $\mathrm{d} x$ & δy ſont conſtantes.

§. 25. Cette formule eſt entierement analogue à celle dont j'ai fait uſage ci-deſſus, & qui découle de la préſente dès qu'on fait, ſoit Δx, ſoit Δy, $= 0$. Alors il ne reſte que la premiere colonne verticale ou la premiere ſérie horizontale. Mais en la prenant dans toute ſa généralité, on prévoit ſans peine que les calculs où il faut en faire uſage deviennent conſidérablement plus longs.

§. 26. Soit maintenant l'équation

$$\phi y = \psi (x, y)$$

c'eſt à dire, une fonction quelconque des deux variables x, y égale à une fonction quelconque de y; il s'agit de déterminer x ou une fonction quelconque de x, ou de (x, y), par y, au moyen des différentiations.

§. 27. Obſervons d'abord que ſans déroger à l'univerſalité de ce probleme on peut ſuppoſer $\phi y = 0$. Car l'équation propoſée ſe change par une ſimple tranſpoſition en

$$0 = \psi (x, y) - \phi y$$

& il eſt clair que la différence entre une fonction de x, y & une fonction de y eſt toujours une fonction de x, y. Je retiendrai néanmoins ϕy. Mais comme cette fonction détermine le rapport entre x & y, qu'il eſt plus à propos de laiſſer indéterminé, je poſerai plus généralement

$$\psi (x, y) = z$$

afin de pouvoir donner à x & y des valeurs quelconques indépendamment du rapport que l'équation

$$\Phi y = \psi(x, y)$$

établit entre ces deux variables.

§. 28. Comme donc il s'agit ici d'une fonction de deux variables, ce n'est plus une ligne courbe, mais une surface courbe qu'il faut considérer, entant que par ce moyen la solution du probleme devient plus claire. Je ne dessinerai pas une semblable surface. Il suffira d'en marquer les points qui entrent dans le calcul, & de présenter aux yeux les abscisses & les ordonnées répondantes. Soit donc l'une des abscisses x prise sur la droite AP, de sorte que $AP = x$. Soit prise l'autre abscisse y sur la droite AQ, de sorte que $AQ = y$. Qu'on acheve le rectangle ou le parallélogramme $APRQ$, & sur R soit érigée l'ordonnée RM, qui répond aux deux abscisses x, y; on aura

Fig. 2.

$$RM = \psi(x, y) = \Phi y = z.$$

§. 29. Enfin j'observe qu'en général les séries tiennent lieu d'approximation, surtout lorsque la somme ne sauroit être exprimée par quelque formule finie, ou qu'on aime mieux faire usage de la série elle-même. Voici à quoi aboutit cette remarque.

§. 30. Qu'on prenne plus ou moins arbitrairement sur les deux axes les abscisses

$$AB = \xi$$
$$AC = \eta$$

& qu'en achevant le parallélogramme $ABDC$ on éleve sur le point D l'ordonnée DN, de sorte que N soit un point de la même surface courbe. On aura

$$DN = \psi(\xi, \eta).$$

Faisons pour plus de briéveté

$$DN = \zeta$$

& il est aisé de voir que $\zeta = \psi(\eta, \xi)$ doit être traitée ici simplement comme une fonction ψ des deux variables η, ξ prises arbitrairement, de sorte qu'on ne sauroit poser $\zeta = \Phi\eta$, à moins qu'on ne fasse en même tems $\eta = y$ & $\xi = x$; ce qu'il est inutile de faire, avant que par la solution du probleme on n'ait déterminé x par y.

§. 31. Nous aurons donc

$$AP = x = \xi + \Delta\xi$$
$$AQ = y = \eta + \Delta\eta$$
$$RM = z = \zeta + \Delta z = \Phi y = \psi(x, y)$$

& par conséquent au moyen de la formule générale (§. 24.)

$$\begin{aligned}\Phi y = z = \zeta + \Delta\zeta = \zeta &+ \frac{\Delta\xi \cdot d\zeta}{d\xi} + \frac{(\Delta\xi)^2 \cdot dd\zeta}{2\,d\xi^2} + \&c.\\ &+ \frac{\Delta\eta\,\delta\zeta}{d\eta} + \frac{\Delta\xi \cdot \Delta\eta \cdot d\delta\zeta}{d\xi \cdot d\eta} + \frac{(\Delta\xi)^2 \cdot \Delta\eta \cdot d^2\delta\zeta}{2 \cdot d\xi^2 \cdot d\eta} + \&c.\\ &+ \frac{(\Delta\eta)^2\,\delta^2\zeta}{2\,d\eta^2} + \frac{\Delta\xi \cdot (\Delta\eta)^2 \cdot d\delta^2\zeta}{d\xi \cdot 2d\eta^2} + \frac{(\Delta\xi)^2 \cdot (\Delta\eta)^2 \cdot d^2\delta^2\zeta}{2d\xi^2 \cdot 2d\eta^2} + \&c.\\ &+ \&c. + \&c. + \&c. + \&c.\end{aligned}$$

§. 32. Or comme il s'agit de déterminer x ou une fonction quelconque de x par y, il est clair que y étant donnée, & η pouvant être prise à volonté, $\Delta\eta = y - \eta$ ne dépend que de la détermination arbitraire de η. Il n'en est pas de même de $\Delta\xi = x - \xi$. La détermination de $\Delta\xi$ influe très-essentiellement dans la solution du probleme. Pour y parvenir il faut faire

$$\Delta\xi = x - y$$

ce qui emporte encore l'égalité

$$\xi = y$$

& par-là $\Delta\xi$ & ξ sont déterminés, en sorte qu'il n'y reste plus rien d'arbitraire.

§. 33. Après cette remarque on voit que $\Delta\xi$ est la seule inconnue qui entre dans la série du §. 31. Cela fait que pour abréger nous pouvons lui donner la forme toute simple

$$z = A + B \cdot \Delta\xi + C \cdot (\Delta\xi)^2 + D(\Delta\xi)^3 + \&c.$$

en faisant

$$A = \zeta + \frac{\Delta\eta \cdot \delta\zeta}{d\eta} + \frac{(\Delta\eta)^2 \cdot \delta^2\zeta}{2\,d\eta} + \&c.$$
$$B = \frac{d\zeta}{d\xi} + \frac{\Delta\eta \cdot d\delta\zeta}{d\xi \cdot d\eta} + \&c.$$
$$C = \frac{d^2\zeta}{2d\xi^2} + \frac{\Delta\eta \cdot d^2\delta\zeta}{2d\xi^2 \cdot d\eta} + \&c.$$

&c.

de sorte que tous ces coëfficiens A, B, C &c. sont donnés par les différentiations indiquées dans les séries répondantes.

§. 34. Ayant donc la férie

$$z = \Phi y = A + B . \Delta \xi + C . (\Delta \xi)^2 + \&c.$$

on trouvera $\Delta \xi$ au moyen de la reverfion de cette fuite, ou bien $\Delta \xi$ fera exprimée par une férie où il n'y entre que les quantités données $\Phi\, y$, A, B, C &c. & des coëfficiens numériques. Et comme on a

$$x = y + \Delta \xi$$

on voit que la valeur de x fe trouve enfuite fans peine, y & $\Delta \xi$ étant connues.

§. 35. Mais fi au lieu de x il faut en déterminer une fonction quelconque qui foit $\Pi\, x$, ce probleme ne fera plus que linéaire. On cherchera d'abord cette même fonction répondante à l'abfciffe ξ, qui fera $\Pi\, \xi$; enfuite on aura

$$\Pi\, x = \Pi\, \xi + \frac{\Delta \xi . d \Pi \xi}{d \xi} + \frac{(\Delta \xi)^2 . d^2 \Pi \xi}{2\, d \xi^2} + \&c.$$

où il ne refte plus qu'à fubftituer la valeur de $\Delta \xi$, qui eft toute trouvée (§. 34.)

§. 36. Enfin fi au lieu d'une fonction de x il s'agiffoit de déterminer une fonction de x, y, qui foit $\Pi\, (x, y)$, on voit aifément que tandis que y eft donnée, cette fonction peut être traitée comme $\Pi\, \xi$. Mais traitons-la néanmoins plus généralement. Pour cet effet on cherchera d'abord une même fonction pour les abfciffes ξ, η, qui fera $= \Pi\, (\xi, \eta)$. Enfuite on aura par la formule générale (§. 24.)

$$\begin{aligned} \Pi (x, y) = \Pi\, (\xi, \eta) &+ \frac{\Delta \xi . d \Pi\, (\xi, \eta)}{d \xi} + \&c. \\ &+ \frac{\Delta \eta . \delta \Pi (\xi, \eta)}{d \eta} + \frac{\Delta \xi . \Delta \eta . d \delta \Pi (\xi\, \eta)}{d \xi . d \eta} + \&c. \\ &+ \&c. \quad + \&c. \quad + \&c. \end{aligned}$$

où il ne refte plus qu'à fubftituer la valeur trouvée de $\Delta \xi$ (§. 34.)

§. 37. J'ai confervé dans ce calcul la quantité arbitraire η. Il convient maintenant de remarquer qu'en faifant $\eta = 0$ on a $\Delta \eta = y$, & en ce cas $d \eta$ défigne la différentielle initiale, que le point D tombe en B, & que les différentielles $\delta \zeta$, $\delta^2 \zeta$ &c. doivent être prifes en conféquence. Du refte les expreffions ne s'abregent point par là.

§. 38. Mais en faifant $\eta = y$, on a $\Delta \eta = 0$, ce qui pour la valeur z (§. 33.) donne la férie toute fimple

$$z = \zeta + \frac{\Delta \xi . d \zeta}{d \xi} + \frac{(\Delta \xi)^2 . d^2 \zeta}{2\, d \xi^2} + \&c.$$

& par là le calcul s'abrege très-confidérablement.

§. 39.

§. 39. Après avoir fait voir la ſolution du probleme des fonctions de deux variables, je paſſerai briévement ſur ce que je pourrois encore dire. Car d'abord il eſt clair que dans ce calcul y n'eſt regardée comme variable qu'afin qu'on puiſſe traiter x de variable, & qu'ainſi au lieu de y on peut regarder comme variable un coëfficient quelconque de l'équation propoſée, & par là on trouvera pour l'inconnue x les différentes valeurs qu'elle peut avoir. Enſuite on peut auſſi ſe figurer le cas de deux équations

$$0 = \psi(x, y)$$
$$0 = \Pi(x, y)$$

qui pour renfermer les deux inconnues x, y, peuvent être réſolues. On regardera d'abord x, y comme variables, & au moyen des différentiations on trouvera deux valeurs de x, puiſque chaque équation en fournit une. De cette ſorte, en chaſſant x, il ne reſte plus que l'inconnue y. Pour la traiter de variable on regardera encore comme variable quelque coëfficient, qui ſoit $= a$. Ainſi on aura une équation

$$0 = \Phi(y, a)$$

& on parviendra au moyen des différentiations à déterminer y par a & les autres quantités connues des deux équations propoſées. J'ajouterai donc ſimplement, que la façon de traiter les fonctions de 3, 4, ou d'un nombre quelconque de variables, n'a pas plus de difficulté, mais bien plus de proxilité, que lorſqu'il n'y a que deux variables.

§. 40. Il reſteroit peut-être à donner quelques exemples. Car quoique les problemes dont j'ai ſucceſſivement donné la ſolution ſoient de telle nature que ceux qui précedent ſont renfermés comme des cas particuliers dans ceux qui ſuivent, & qu'ainſi ils puſſent tenir lieu d'exemples, ce ne ſeroit néanmoins qu'à certains égards. Car les ſolutions que j'en ai données ſont toutes différentes les unes des autres, parce que pour chacun de ces problemes j'ai tiré la ſolution des circonſtances & des conditions qui lui ſont particulieres. Et c'eſt ce qu'il convient toujours de faire. La plupart des méthodes générales n'offrent, pour ainſi dire, que des poſſibilités générales, dont il ſuffit d'abord d'être aſſuré une fois pour toutes. Mais au contraire, quand il s'agit des cas particuliers, il arrive aſſés ſouvent que cette aſſurance de la poſfibilité, ou n'eſt pas ſuffiſante, ou ne conduit pas par le chemin le plus court. Ainſi il reſte toujours à voir ſi les circonſtances, les conditions & les données qu'on trouve dans chaque cas particulier, ne fourniſſent point des facilités, qui pour être particulieres, ne ſauroient entrer dans la méthode générale.

§. 41. Pour rapporter néanmoins quelques exemples, j'en choiſirai un qui revient aſſés ſouvent. On ſait que lorſque dans le calcul intégral ou dans l'application qu'on en fait à des cas particuliers, on eſt parvenu à ſéparer les variables, on regarde le probleme ſinon comme réſolu, du moins comme fort ſimplifié, parce qu'alors il ne reſte plus qu'à trouver l'intégrale de deux différentielles, dont chacune ne renferme qu'une ſeule variable. L'équation à laquelle la ſéparation des variables conduit eſt en général

$$\mathrm{f}\,(\varkappa\, y)\, \mathrm{d}\, y = \mathrm{f}\,(\pi\, x)\, \mathrm{d}\, x.$$

Cette équation n'étant qu'un cas particulier du probleme du §. 20, elle nous ſervira d'exemple.

§. 42. Pour cet effet nous n'avons qu'à faire les ſubſtitutions requiſes qui ſont

$$(\lambda\, y) = \mathrm{f}\,(\varkappa\, y)\, \mathrm{d}\, y$$
$$(\psi\, x) = \mathrm{f}\,(\pi\, x)\, \mathrm{d}\, x$$

& par conſéquent

$$(\psi\, y) = \mathrm{f}\,(\pi\, y)\, \mathrm{d}\, y$$
$$\mathrm{d}\,(\psi\, y) = (\pi\, y)\, \mathrm{d}\, y$$
$$\mathrm{d}\,\mathrm{d}\,\psi\, y = \mathrm{d}\, y\, .\, \mathrm{d}\,(\pi\, y)$$
$$\mathrm{d}^3\, \psi\, y = \mathrm{d}\, y\, .\, \mathrm{d}^2\,(\pi\, y)$$
&c.

enfin

$$\sigma\, y = \frac{(\lambda\, y - \psi\, y)\, \mathrm{d}\, y}{\mathrm{d}\, \psi\, y} = \frac{\mathrm{f}\,\varkappa\, y\, \mathrm{d}\, y - \mathrm{f}\,\psi\, y\, .\, \mathrm{d}\, y}{\pi\, y}.$$

Toutes ces valeurs étant ſubſtituées, & toute réduction faite, il en réſulte (§. 20. 21.)

$$\begin{aligned} x = y &+ \frac{\mathrm{f}\,\varkappa\, y\, .\, \mathrm{d}\, y - \mathrm{f}\,\pi\, y\, .\, \mathrm{d}\, y}{\pi\, y} - \left(\frac{\mathrm{f}\,\varkappa\, y\, .\, \mathrm{d}\, y - \mathrm{f}\,\pi\, y\, .\, \mathrm{d}\, y}{\pi\, y}\right)^2 . \frac{\mathrm{d}\,(\pi\, y)}{2\,\pi\, y\, .\, \mathrm{d}\, y} \\ &+ \left(\frac{\mathrm{f}\,\varkappa\, y\, .\, \mathrm{d}\, y - \mathrm{f}\,\pi\, y\, .\, \mathrm{d}\, y}{\pi\, y}\right)^3 . \frac{3\,(\mathrm{d}\,\pi\, y)^2 - \pi\, y\, .\, \mathrm{d}^2\,\pi\, y}{2\, .\, 3\, .\, (\pi\, y)^2\, .\, (\mathrm{d}\, y)^2} \\ &+ \left(\frac{\mathrm{f}\,\varkappa\, y\, .\, \mathrm{d}\, y - \mathrm{f}\,\pi\, y\, .\, \mathrm{d}\, y}{\pi\, y}\right)^4 . \frac{15\, .\, (\mathrm{d}\pi y)^3 - 10\, .\, \pi y\, .\, \mathrm{d}\pi y\, .\, \mathrm{d}^2\,\pi y + (\pi y)^2\, .\, \mathrm{d}^3\,\pi y}{2\, .\, 3\, .\, 4\, .\, (\pi\, y)^3\, .\, (\mathrm{d}\, y)^3} \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

Dans cette formule, comme dans la formule générale (§. 20. 21.), dy est constante.

§. 43. Cette solution suppose l'intégration $\int \varkappa y . dy$ & $\int \pi y . dy$ toute faite, ce qui n'est pas toujours facile. Mais rien n'empêche d'avoir encore recours à la différentiation, en faisant

$$\int \varkappa y . dy = y . \varkappa y - \frac{y^2 . d(\varkappa y)}{2 . dy} + \frac{y^3 . d^2(\varkappa y)}{2 . 3 . dy^2} - \frac{y^4 . d^3(\varkappa y)}{2 . 3 . 4 . dy^3} + \&c.$$

$$\int \pi y . dy = y . \pi y - \frac{y^2 . d(\pi y)}{2 dy} + \frac{y^3 d^2(\pi y)}{2 . 3 . dy^2} - y^4 . \frac{d^3(\pi y)}{2 . 3 . 4 . dy^3} + \&c.$$

Ce qui, en posant

$$\varkappa y - \pi y = \varrho y$$

donne

$$\int \varkappa y . dy - \int \pi y . dy = y . \varrho y - \frac{y^2 d(\varrho y)}{2 dy} + \frac{y^3 . d^3(\varrho y)}{2 . 3 dy^2} - \&c.$$

§. 44. Cet exemple comprend tous les cas où dans une équation différentielle les variables x, y peuvent être séparées. Mais quand elles ne peuvent pas l'être, alors c'est au probleme du §. 23. qu'il faudra avoir recours. On voit bien qu'au lieu des fonctions Φy, & $\zeta = \psi(\eta, \xi)$ (§. 31), on aura $\int \Phi y . dy$ & $\psi(\eta, \xi) d\xi$, $d\eta$, & qu'à moins qu'on ne fasse $\Delta y = 0$ (§. 38.) il faut différentier $\psi(y, \xi) d\xi$, $d\eta$ de deux manieres, savoir en ne supposant que ξ, & en ne supposant que η variable, comme l'indiquent les lettres d, δ, employées pour cet effet (§. 24.)

§. 45. Les équations dont il s'agit ont en général la forme

$$0 = (\Phi y)(\varrho x)\int \psi(x, y) dx - \int \Pi(x, y) dy + \text{const.}$$

lorsque les différentielles sont du premier degré. On pourra toujours commencer à les différentier, & on aura en général

$$\frac{dy}{dx} = \varkappa (x, y)$$

ou réciproquement

$$\frac{dx}{dy} = \lambda (x, y).$$

Mais au moyen de la série de M. Jean Bernoulli on a

$$\int \psi(x, y) dx = x . \psi(x, y) - \frac{xx . d\psi(x, y)}{2 dx} + \frac{x^3 . d^2 \psi(x, y)}{2 . 3 . dx^2} - \&c.$$

Or en différentiant on trouve

$$\frac{d\psi(x,y)}{dx} = \sigma(x,y) + \frac{\tau(x,y)\,dy}{dx}$$

& en substituant la valeur

$$\frac{dy}{dx} = \varkappa(x,y)$$

on a

$$\frac{d\psi(x,y)}{dx} = \sigma(x,y) + \tau(x,y)\,.\,\varkappa(x,y) = \psi'(x,y)$$

& de la même maniere on trouvera

$$\frac{d^2\psi(x,y)}{dx^2} = \frac{d\psi'(x,y)}{dx} = \psi(x,y)$$

&c.

De cette sorte l'intégrale sera

$$\int\psi(x,y)\,dx = x\,.\,\psi(x,y) - \frac{xx}{2}\,.\,\psi'(x,y) + \frac{x^3}{2\,.\,3}\,.\,\psi''(x,y) - \&c.$$

c'est à dire, exprimée par une série où il n'y entre plus ni différentielle ni intégrale.

§. 46. On procedera de la même maniere à l'égard de l'intégrale

$$\int\Pi(x,y)\,dy = y\,.\,\Pi(x,y) - \frac{yy\,.\,d\Pi(x,y)}{2\,dy} + \frac{y^3\,d^2\Pi(x,y)}{2\,.\,3\,.\,dy^2} - \&c.$$

en substituant après chaque différentiation la valeur

$$\frac{dx}{dy} = \lambda(x,y)$$

& on aura

$$\int\Pi(x,y)\,dy = y\,.\,\Pi(x,y) - \frac{yy}{2}\,.\,\Pi'(x,y) + \frac{y^3}{2\,.\,3}\,.\,\Pi''(x,y) - \&c.$$

& de cette maniere l'équation

$$0 = \Phi y - \varrho x - \int\psi(x,y)\,dx + \int\Pi(x,y)\,dy$$

n'ayant plus ni différentielles ni intégrales, pourra être traitée sur le pied de l'équation

$$\Phi y = \psi(x,y)$$

du §. 26. afin que x ou une fonction quelconque de x ou de (x,y) soit déterminée par y.

Fig. I.

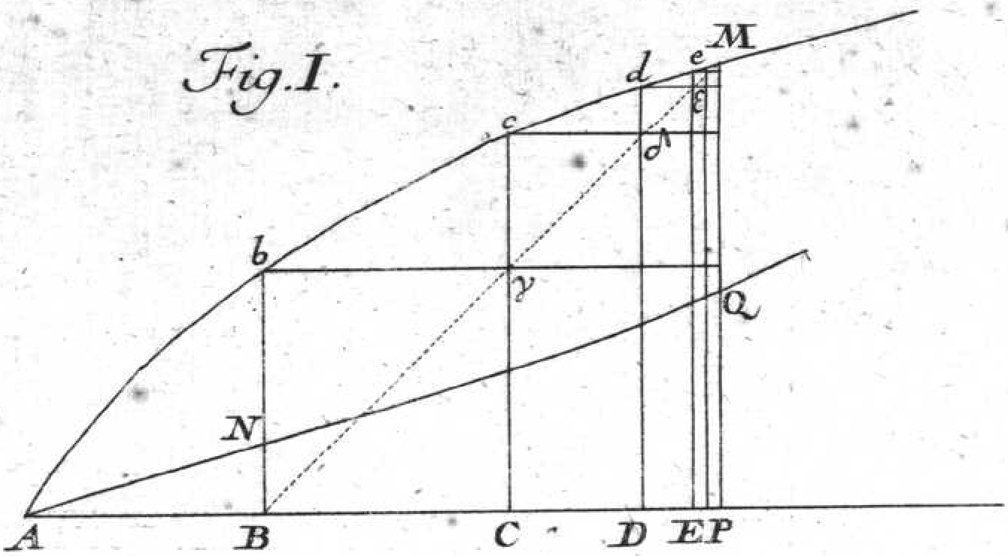

Fig. II.