CONSTRUCTION
d'une échelle balliſtique.

PAR M. LAMBERT.

§. 1.

Il y a huit ans que je lus à l'Académie un Mémoire ſur la réſiſtance des fluides, avec la ſolution du probleme balliſtique au moyen des ſuites infinies. Comme aſſez ſouvent l'uſage de ces ſuites demande beaucoup de tems & qu'il eſt même quelquefois embarraſſant, je penſai dès lors à quelque moyen d'abréger les calculs dans les applications particulieres, & l'idée d'un calibre ou d'une échelle ſe préſenta comme d'elle-même.

§. 2. Il s'agiſſoit donc de conſtruire un certain nombre de courbes balliſtiques conformément aux différens degrés de viteſſe & de réſiſtance. Pour cet effet je me ſervis des Tables calculées par feu M. le Comte *de Græveniz* ſous la direction de M. le Profeſſeur *Karſten* à *Buzow*, ſuivant l'idée que M. *Euler* en avoit propoſée dans les Mémoires de l'Académie 1753. Ces Tables étoient pour moi un ouvrage fait, entant qu'il ne s'agiſſoit que de voir en gros comment les courbes que je voulois conſtruire pouvoient être le mieux arrangées. Car du reſte une double ſuppoſition rendoit ces Tables moins exactes que ſi elles avoient été calculées plus ſcrupuleuſement. On y ſuppoſe: 1°. qu'un arc de 5 degrés de courbure differe très peu de ſa corde, & 2°. que l'angle que cette corde fait avec l'horiſon, ou bien l'angle d'élévation de la corde, tient le juſte milieu entre l'élévation de l'arc aux extrémités de la corde. La premiere de ces ſuppoſitions aggrandit toute la courbe environ d'une $\frac{1}{3000}$ partie, & quant à la ſeconde ſuppoſition on auroit plus approché de la vérité ſi au lieu des angles on avoit employé les tangentes.

§. 3. Comme avec tout cela l'erreur de ces Tables n'eſt pas fort conſidérable, & que depuis ce temps-là je n'ai pas eu le loiſir d'en calculer de plus exactes & en même tems de plus détaillées, j'ai cru devoir publier mes échelles telles qu'elles ſont; peut-être quelque amateur de calculs, plus intéreſſé à en tirer parti, s'occupera-t-il à les rendre & plus exactes & plus complettes. Je vais avant toutes choſes en donner la deſcription & en faire voir l'uſage.

§. 4. D'abord on voit dans la Figure huit courbes poſées ſur une même baſe, & formant avec cette baſe du côté droit des angles d'élévation de 45°. C'eſt l'élévation qu'on donne ordinairement aux mortiers, parce que dans la ſuppoſition que la réſiſtance de l'air n'eſt d'aucune conſéquence, cet angle eſt celui qui donne la plus grande amplitude du jet. Pl. II. Fig. 1.

§. 5. L'intérieure de ces courbes eſt la parabole, & un corps la parcourt dans le vuide. Les autres courbes ſont pour des milieux ſucceſſivement plus réſiſtans. A cet égard la Figure auroit pu être étendue à l'infini. Mais, telle qu'elle eſt, elle paroit ſuffire pour les jets des bombes, lorſque l'élévation du mortier ne ſurpaſſe pas 45 degrés.

§. 6. Toutes ces courbes ſont immédiatement conſtruites pour les cas où la viteſſe de la bombe au ſommet eſt de 100 pieds de Rhin par ſeconde. C'eſt de cette égalité de viteſſe que dépendent la poſition, la grandeur & la diſtance de ces courbes. Le nombre de 100 pieds de Rhin eſt ce qu'il y a de plus arbitraire. Je ne l'ai pris que parce que c'eſt un nombre rond, & qu'il m'a ſervi pour la conſtruction de la Figure.

§. 7. Toutes ces courbes ſont traverſées par d'autres courbes qui paſſent par les points d'élévation de 40, 35, 30, 25 &c. degrés. Il pourroit y en avoir de degrés en degrés, afin que chaque courbe pût ſervir pour tous les degrés d'élévation. Mais les Tables du Comte *de Grævenitz* n'étoient calculées que de 5 en 5 degrés.

§. 8. J'ai encore marqué au haut du côté gauche de la Figure la ſignification des lettres D, δ, C, ω, c, K, G, A, qui ſe rencontrent dans la Table & dans les formules qu'on voit de l'autre côté de la Planche. La ſignification de ces lettres eſt la même que celle que je leur ai donnée dans mon Mémoire ſur la Réſiſtance des fluides & dans mes Remarques ſur la force de la poudre à canon.

§. 9. Ces formules, de même que les courbes, ſont arrangées de telle ſorte que la valeur

$$\frac{GG}{CC}$$

déſigne la courbe qu'il faut employer dans chaque cas particulier dont il s'agit. Mais c'eſt rarement par cette quantité que l'on commence. Il faut la déterminer par les autres données, & même d'autant de manieres différentes que ces données peuvent être variées. Voici l'ordre qu'on ſuit le plus ordinairement.

§. 10. Les premieres données ſont le diametre de la bombe δ, & le nombre D qui marque combien de fois elle eſt ſpécifiquement plus peſante que l'air. Pour faciliter le calcul de cette gravité ſpécifique on peut ſe faire un calibre, qui indique d'abord le poids d'un globe d'air dont le diametre eſt égal à celui de la bombe. Le poids de la bombe, peſée dans le même air, étant diviſé par le poids de ce globe d'air, donnera le quotient $D - 1$. Mais comme la denſité de l'air eſt variable, il convient de mettre pour baſe une denſité donnée, afin que le nombre $D - 1$ puiſſe enſuite être corrigé en raiſon réciproque de la denſité de l'air du tems où la bombe eſt jettée.

§. 11. Les valeurs δ, D, étant données, on trouve ſans peine les valeurs de g, a, C, & on ſera en état de pourſuivre le calcul.

§. 12. La donnée qu'il faudroit avoir immédiatement c'eſt la viteſſe initiale tangentielle c. Cette viteſſe pour le jet des bombes & des boulets dépend de la force de la poudre à canon, qui n'eſt pas encore aſſez connue pour ſervir de baſe dans ces calculs. Cela fait qu'on renverſe la queſtion, en ſorte qu'au lieu de déterminer la portée par la viteſſe, on détermine la viteſſe par la portée, ou l'amplitude du jet, pour une élévation donnée. Voilà donc le premier probleme qui ſe préſente, & que je vai d'abord éclaircir par un exemple.

§. 13. Suppoſons qu'une bombe d'un pied de Rhin de diametre, peſant 150 livres, ſoit jettée d'un mortier ſous 45 degrés d'élévation, & qu'elle retombe à une diſtance de 6000 pieds de Rhin, lorſqu'une maſſe d'air d'un même volume peſe $\frac{1}{23}$ livre.

§. 14. Nous avons donc

$$D = 23 . 150 = 3450,$$
$$\delta = 1,$$
$$a = \tfrac{8}{3}\delta D = 9200,$$
$$A = 6000,$$
$$CC = ag = 287417,$$
$$A:a = 0,652.$$

Cette quantité, cherchée dans la colonne de la Table qui répond à l'élévation de 45 degrés, donne à très peu près la valeur

$$\frac{GG}{CC} = 0,25$$

d'où ſuit

$$GG = 71854,$$
$$G = 268,06,$$

de ſorte que la viteſſe de la bombe au ſommet eſt de 268 pieds par ſeconde.

§. 15. La valeur

$$\frac{GG}{CC} = 0,25,$$

cherchée à droite ſur la baſe commune des courbes balliſtiques, indique celle que la bombe parcourt, & l'échelle pour cette courbe ſe trouve en diviſant ſa baſe en 6000 parties, la portée étant de 6000 pieds.

§. 16. On voit encore que cette courbe du côté gauche coupe la baſe horiſontale ſous un angle d'environ $58\frac{1}{2}$ degrés, & c'eſt l'angle ſous lequel la bombe tombe à terre, ou bien ſous lequel elle coupe le plan horiſontal de l'embouchure du mortier.

§. 17. La formule

$$\frac{C^2}{G^2} = \frac{C^2}{K^2} + P$$

nous ſervira à trouver la viteſſe initiale horiſontale K. Car pour l'angle d'élévation de $45°$, nous avons $p = 2,2956$, & nous venons de trouver

$$C^2 : G^2 = 0,25.$$
$$C^2 = 287417.$$

Donc nous aurons

$$K^2 = 168628.$$

& par conſéquent

$$K^2 . \sec \alpha^2 = c^2 = 337256,$$
$$c = 580,74,$$

de ſorte que la viteſſe initiale eſt d'environ 581 pieds par ſeconde.

§. 18. Pour trouver la viteſſe avec laquelle la bombe retombe à terre, on emploira la formule

$$\frac{C^2}{G^2} + p = \frac{C^2}{K^2}.$$

Or l'angle ſous lequel elle retombe étant $\omega = 58\frac{1}{2}$ degrés, on aura $p = 4,3915$, ce qui donne

$$k^2 = 34251$$

donc

$$k^2 \sec \omega^2 = c^2 = 128087,$$
$$c = 357,58.$$

Ainſi la viteſſe tangentielle avec laquelle la bombe retombe à terre eſt d'environ 358 pieds.

§. 19. On voit par cet exemple que nos courbes balliſtiques, avec les formules que j'y ai jointes, ſont d'un uſage aſſez prompt, mais qu'au lieu des huit courbes que j'ai deſſinées il ſeroit bon de les tracer pour chaque centieme partie de la valeur $GG : CC$, depuis o juſqu'à $G^2 : C^2 = 1 : p = \frac{1}{2,2956} = 0,4361$. Du reſte on voit par la Figure qu'il n'eſt pas difficile d'interpoſer entre nos huit courbes telles autres qu'on voudra, puiſque de 5 en 5 degrés elles gardent un parallèliſme aſſez ſenſible. Je me ſuis même ſervi de ce parallèliſme pour conſtruire la plûpart de ces courbes d'après celles que les Tables du Comte *de Græveniz* donnent, non ſuivant les valeurs $G^2 : C^2$, mais ſuivant les valeurs p, ou ſuivant les angles que l'aſymptote de la branche aſcendante forme avec l'horiſon.

§. 20. Après avoir déterminé la viteſſe initiale c au moyen de la portée A répondante à une élévation ω donnée, on peut enſuite s'en ſervir pour trouver la courbe balliſtique pour un autre angle d'élévation quelconque.

§. 21. Suppoſons p. ex. que la même bombe avec la même viteſſe initiale ſoit jettée ſous un angle de 40 degrés. Nous aurons

$$\omega = 40^\circ,$$
$$p = 1{,}8583,$$
$$c^2 . \operatorname{cof} \omega^2 = K^2 = 197908,$$
$$\frac{C^2}{K^2} + p = \frac{C^2}{G^2} = 3{,}3116,$$
$$\frac{G^2}{C^2} = 0{,}302.$$

Ainſi c'eſt à très peu près la ſeptieme de nos courbes que la bombe parcourt.

§. 22. Or la Table, pour $\omega = 40^\circ$, $\frac{G^2}{C^2} = 0{,}302$, nous donne

$$\frac{A}{a} = 0{,}659,$$

donc

$$A = 6063 \text{ pieds}$$

qui eſt l'amplitude du jet.

§. 23. La viteſſe au ſommet ſe trouve par les équations

$$\frac{G^2}{C^2} = 0{,}302$$
$$C^2 = 28741,$$

d'où on aura

$$G = 294\tfrac{1}{2}.$$

§. 24. En cherchant le point où la courbe des angles d'élévation 40 — 40 coupe la courbe balliſtique qui répond à

$$\frac{GG}{CC} = 0{,}302,$$

on tirera par ce point d'interſection une droite horiſontale vers la main gauche, juſqu'à ce qu'elle rencontre la même courbe balliſtique; cette droite ſera diviſée par les 6063 pieds que nous venons de trouver pour l'amplitude du jet, & on aura l'échelle pour cette courbe relativement au cas dont il s'agit. On trouvera encore que c'eſt ſous un angle de $53\frac{1}{2}$ degrés que la bombe retombe à terre. Or pour $53\frac{1}{2}$ degrés on aura

$$p = 3{,}3829.$$

$$\frac{C^2}{G^2} + p = \frac{C^2}{k^2}$$

$$k^2 = 42933$$

$$c^2 = k^2.(\sec 53\tfrac{1}{2})^2 = 121344.$$

$$c = 348\tfrac{1}{3}$$

ce qui eſt la viteſſe tangentielle avec laquelle la bombe retombe à terre.

§. 25. S'il arrive que l'endroit où la bombe retombe n'eſt pas de niveau avec le mortier, mais plus ou moins élevé, alors il s'agit de connoître l'angle de l'élévation ou de l'abaiſſement de cet endroit, & au lieu de tirer parallele à l'horiſon la droite dont nous venons de parler (§. 24), il faudra la tirer conformément à ce qu'exige cet angle d'élévation ou d'abaiſſement, afin de voir où elle rencontre la courbe balliſtique dont on fait uſage. Nonobſtant cela cette ligne droite doit encore être tirée horiſontalement, afin d'avoir l'échelle pour meſurer les diſtances.

§. 26. Ce cas peut devenir aſſez embarraſſant lorſque la diſtance & l'élévation ou l'abaiſſement étant donnés, on veut trouver la viteſſe initiale de la bombe & l'élévation du mortier qui y répond, la bombe, le mortier, la poudre à canon & la conſtitution de l'air étant donnés. Ce probleme eſt en quelque façon indéterminé, en ce que la viteſſe initiale ou l'élévation du mortier admet quelque choix.

§. 27. S'il s'agit de ſe ſervir de ce choix pour faciliter la ſolution du probleme, on peut commencer par établir la courbe que la bombe doit parcourir. Suppoſons p. ex. que ce ſoit celle qui répond à $G^2 : C^2 = 0{,}25$, & que les autres données δ, a, C, ſoient les mêmes que dans les exemples précédens,

précédens, mais que le point où la bombe doit tomber ſoit à la diſtance de 4000 pieds & élevé de 20 degrés au deſſus de l'horiſon, de ſorte que la diſtance horiſontale ſoit $= 4000 . \operatorname{coſ} 20°$.

§. 28. Or pour la valeur $a = 9200$ (§. 14) & l'angle d'élévation 45°, la baſe de la courbe $GG : CC = 0{,}25$ eſt de 6000 pieds, à très peu près. Diviſant donc cette baſe en 6000 parties, on aura l'échelle pour cette courbe dans le cas dont il s'agit. De cette échelle on prendra les 4000, & il faudra tirer une corde dont la longueur ſoit $= 4000$, & qui faſſe avec l'horiſon un angle de 20 degrés. On trouvera que cette corde ſoutend la courbe près du $43\frac{1}{3}$ degré d'élévation & du 21 degré de deſcente. Or pour $\omega = 43\frac{1}{3}$ on a

$$p = 2{,}1383,$$

& on a comme ci-deſſus

$$\frac{GG}{CC} = 0{,}25$$

$$CC = 287417$$

donc

$$\frac{C^2}{K^2} = 1{,}8617$$

ce qui donne

$$k^2 = 154378$$

$$c = k . \operatorname{ſec} 43\tfrac{1}{3} = 541.$$

Ainſi la viteſſe initiale tangentielle eſt de 541 pieds par ſeconde, & l'élévation du mortier de $43\frac{1}{3}$ degrés.

1 : D Rapport de la densité du milieu à celle de la bombe.
δ Diametre de la bombe, en pieds de Rhin.
C Viteſſe terminale de la bombe en tombant.
ω Angle d'élévation, ſous lequel la bombe eſt jettée.
c Viteſſe initiale tangentielle.
K Viteſſe initiale horizontale.
G Viteſſe au ſommet.
A Amplitude du jet.

GG:CC	45°	40°	35°	30°	25°	20°
0,05	0,104	0,087	0,072	0,059	0,047	0,037
0,10	0,218	0,181	0,149	0,121	0,097	0,075
0,15	0,344	0,281	0,231	0,185	0,149	0,115
0,20	0,497	0,387	0,316	0,253	0,202	0,156
0,25	0,653	0,512	0,409	0,325	0,256	0,198
0,30	0,857	0,655	0,510	0,401	0,313	0,240
0,35	1,140	0,815	0,621	0,483	0,367	0,283
	A:a	A:a	A:a	A:a	A:a	A:a
p =	2,2956	1,8583	1,5076	1,2160	0,9664	0,7431

$$\frac{C^2}{G^2} = \frac{C^2}{K^2} + p \qquad a = \tfrac{8}{3}\delta D$$

$$CC = ag \qquad g = \tfrac{2000}{32}\,\frac{D-1}{D}$$

$$K = c.\cos\omega \qquad p = 2\int \sec\omega.\, d\tan\omega.$$

Courbes Ballistiques