EXPÉRIENCES ET REMARQUES
ſur les moulins que l'eau meut par en bas dans une direction horiſontale.

PAR MR. LAMBERT.

I.

Parmi les machines qui ſont mues par l'eau il n'y en a gueres de plus nombreuſes que les moulins. Cependant on n'a encore que très peu d'expériences faites dans le deſſein d'en examiner la théorie & de la rendre plus complette & en partie auſſi plus exacte qu'elle n'a été juſqu'à préſent. Mr. *Bélidor* s'eſt donné à cet égard quelque peine. Il donne tout le détail des meſures d'un moulin qu'il y a à *la Fere*, il y applique le calcul & le pouſſe au point de déterminer quel eſt le poids qu'on peut ſuppoſer égal à la réſiſtance tant de la meule tournante que du broiement du blé. Cette expérience eſt iſolée. Car quoique Mr. *Bélidor* diſe avoir examiné pluſieurs autres moulins, il n'en donne aucun détail, & il y a grande apparence que ces moulins différoient fort peu entr'eux. Ses calculs ſont fondés ſur des principes dont l'application aux moulins peut être conteſtée. J'ai vu ſans peine que cela demandoit encore beaucoup d'expériences, qu'il falloit varier ces expériences pour un même moulin, & les répéter pour d'autres moulins d'une ſtructure plus ou moins différente. C'eſt pour cela que je n'attendois que des occaſions favorables.

II.

Mr. *Siebike*, fils de l'Inſpecteur des moulins, très verſé dans la théorie de Mr. *Bélidor*, me fournit la premiere de ces occaſions. Le moulin royal confié à ſes ſoins eſt arrangé de maniere qu'en laiſſant à l'ajutoir conſtamment la même ouverture on peut hauſſer & baiſſer la roue que l'eau fait aller par deſſous, en ſorte que les aubes s'y enfoncent d'autant de pouces & de lignes qu'on voudra. Je priai donc Mr. *Siebike* de faire hausser la roue de deux en deux pouces, pour que l'eau eût successivement moins de prise sur les aubes, & que le mouvement de la roue fût de plus en plus rallenti. Dans chacune de ces expériences on laissa à la roue le tems de parvenir à l'état de permanence, & on compta le nombre des secondes requises pour chaque tour de la roue & même pour un assez grand nombre de tours successifs. Mr. *Guillaume*, Professeur d'Artillerie, m'aida dans ces expériences en comptant les secondes de tems, pendant que je les marquois sur mes tablettes. On comprend sans peine que ces expériences avoient pour but de comparer la force de l'eau avec la vitesse qu'elle communiquoit à la roue & par conséquent aux deux meules qu'elle fait tourner, & quelle loi il peut y avoir entre les différens degrés de force & de vitesse.

III.

Ces expériences se firent le 2 Février 1775 après midi. Le tems étoit beau & les eaux fort hautes. Mais avant que d'en rapporter le détail, il convient de donner les mesures nécessaires, pour en déduire ensuite les conséquences. Je donnerai ces mesures comme je les ai reçues de Mr. *Siebike*, c'est à dire en piés de Rhin.

1. La vitesse de la surface de l'eau sous la roue est due à la hauteur de 3 piés 2 pouces 6 lignes. Cette vitesse est donc $= 14,1605$ piés de Rhin.
2. Le diametre extérieur de la roue est de 15 piés.
3. Les aubes ont 1 pié de largeur & $8\frac{1}{3}$ piés de longueur.
4. Sur la flêche de la roue est fixée une roue qui a 60 dents; elle engrene de chaque côté dans un tambour qui porte 8 fuseaux.
5. Sur la fléche ou l'axe de chacun de ces tambours est fixée une roue en couteau de 60 dents, qui engrene dans le tourillon de la meule. Ce tourillon a 8 dents.
6. Moyennant ce rouage la meule tourne 25 fois pendant que la roue à eau fait deux tours.
7. Le diametre de la meule tournante est de 3 piés 8 p. ou de 44 pouces. Elle a 15 pouces de hauteur & pese 1650 livres, de sorte que le poids

des deux meules tournantes eſt de 3300 livres. Les meules dormantes n'ont point été meſurées, parce qu'il importe peu d'en connoître la hauteur & le poids.

8. Le canal, de même que l'ajutoir, a une largeur plus que double de celle de la roue, & l'eau au deſſous de la roue a plus de deux piés de profondeur, parce que l'eau, après avoir paſſé au deſſous & à côté de la roue, eſt encore deſtinée à mettre en mouvement trois autres roues.

IV.

Voici maintenant les expériences faites le 2 Février 1775.

Tours de la roue.	Expériences.		1	2	3	4	5	6	
	Enfoncement des aubes.		12	10	8	6	4	3	pouces.
1		Nombres de secondes de tems observés.	4½	6	7	10½	29½	84	
2			9½	11½	14	21	58	224	
3			14	17	20½	32	87½	325	
4			19½	22	27½	43	118½	412	
5			25	28	34½	54	147½	&c.	
6			30	33½	43	66	179½		
7			35½	39	50	78	210½		
8			40	45	56½	89	241½		
9			46	50½	63½	100	&c.		
10			51	56½	70½	111			
11			56	62	78	123			
12			61	68	85	&c.			
13			66	74	91				
14			71	80	98				
15			76	85½	106½				
16			81	91	114				
17			86	97	121				
18			&c.	103	128½				
19				108	135½				
20				114	141				
21				119½	148½				
22				125	156½				
&c.				&c.	&c.				
	Tems pour un tour.		5″, 06	5″, 68	7″, 11	11″, 17	29″, 83	103″ ±	

V.

Les nombres des ſecondes marqués dans cette Table croiſſent aſſez régulierement dans chaque expérience à l'exception de la derniere, où les aubes n'étoient dans l'eau qu'à la profondeur de 3 pouces. Auſſi il s'en falloit peu que cette profondeur ne fût inſuffiſante pour mettre la roue en mouvement. La roue s'arrêtoit même quelquefois pendant pluſieurs ſecondes, probablement par quelque cauſe accidentelle, & lorſqu'elle recommençoit à ſe mouvoir, c'étoit comme ſi cela ſe faiſoit par quelque choc, & même en continuant ſon mouvement elle avoit une viteſſe fort variable, de ſorte qu'on peut en inférer que pour peu qu'on eût encore hauſſé la roue, elle n'auroit point tourné du tout. Je ferai abſtraction de cette derniere expérience, parce qu'elle eſt de beaucoup trop anomale pour que la viteſſe de la roue puiſſe être déterminée avec aſſez de juſteſſe. Les tems requis pour chacune des quatre révolutions de la roue ſont de 84, 160, 241, 328 ſecondes. Ces tems vont en augmentant, de ſorte que le mouvement de la roue ſe rallentiſſoit de plus en plus. Peut-être qu'à la longue il auroit ceſſé entierement.

VI.

Soit maintenant le tems pour chaque tour $= \tau''$,
le rayon extérieur de la roue $= r$ piés de Rhin,
la longueur des aubes $= \lambda$,
leur largeur totale $= \mathfrak{b}$,

on aura

la diſtance du centre d'impulſion $= r - \frac{1}{2} b$,
la circonférence décrite par ce centre $= \pi(2r - b)$,
la viteſſe $= \pi \,.\, (2r - b) : \tau$,
l'aire de la partie mouillée de chaque aube $= b\lambda$.

Ici π dénote le rapport du diametre à la circonférence.

Soit de plus
la hauteur de la chûte de la ſurface de l'eau $= a$,

& en faiſant $g = \frac{1000}{64} = 5\frac{5}{8}$ piés de Rhin, on aura

la hauteur jusqu'au centre de l'impression $= a + \frac{1}{2} b$,
la vitesse due à cette hauteur $= 2 \sqrt{g (a + \frac{1}{2} b)}$.

Donc

la vitesse relative de l'eau $= 2 \sqrt{g (a + \frac{1}{2} b)} - \frac{\pi (2r - b)}{\tau}$,
la hauteur due à cette vitesse

$$= \frac{1}{4g} \left[2 \sqrt{g (a + \tfrac{1}{2} b)} - \frac{\pi (2r - b)}{\tau} \right]^2 .$$

Multipliant cette hauteur par l'aire $b \lambda$, on aura en piés cubiques la masse d'eau dont le poids est égal à la force de l'eau, appliquée au centre d'impulsion,

$$= \frac{b \lambda}{4g} \cdot \left[2 \sqrt{g (a + \tfrac{1}{2} b)} - \frac{\pi (2r - b)}{\tau} \right]^2 .$$

On n'aura qu'à multiplier cette quantité par $65\frac{1}{2}$ pour avoir cette même force en livres, poids de Berlin.

VII.

Il s'agit donc simplement de substituer à ces expressions les valeurs numériques pour avoir les résultats suivans.

Expériences.	1	2	3	4	5	6	
Tems de chaque tour τ	5, 06	5″, 68	7″, 11	11″, 17	29″, 83	103″ $\pm$	
b	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	
$r - \frac{1}{2} b$	7	$7\frac{1}{12}$	$7\frac{1}{6}$	$7\frac{1}{4}$	$7\frac{1}{3}$	$7\frac{3}{8}$	
$2\pi (r - \frac{1}{2} b) = \frac{44}{7} (r - \frac{1}{2} b)$	44	$44\frac{11}{21}$	$45\frac{1}{21}$	$45\frac{4}{7}$	$46\frac{2}{21}$	$46\frac{5}{14}$	
$C =$ vitesse du centre d'impulsion	8, 70	7, 84	6, 34	4, 08	1, 54	0, 44 $\pm$	
λb	$8\frac{1}{3}$	$6\frac{17}{18}$	$5\frac{5}{9}$	$4\frac{1}{4}$	$2\frac{7}{9}$	$2\frac{1}{12}$	
Hauteur $a + \frac{1}{2} b$	$3\frac{17}{24}$	$3\frac{5}{8}$	$3\frac{13}{24}$	$3\frac{11}{24}$	$3\frac{3}{8}$	$3\frac{1}{3}$	
$V =$ Vitesse répondante	15, 22	15, 08	14, 88	14, 70	14, 52	14, 43	
$V - C =$ vitesse relative	6, 52	7, 24	8, 54	10, 62	12, 98	13, 99 $\pm$	
Hauteur répondante	0,680	0,839	1,167	1,805	2,694	3,132 $\pm$	
Force de l'eau en p. cubiques	5, 67	5, 82	6, 48	7, 67	7, 48	6, 52 $\pm$	
En livres de poids, $P =$	371	381	425	502	490	427 $\pm$	
La même force réduite à un point de la circonférence de la roue comme à un point fixe - -	346	360	406	485	497	420 $\pm$	livres.
La même réduite aux $\frac{2}{3}$ du rayon de la meule - - p - -	171	177	219	262	258	227 $\pm$	livres.
Vitesse de ce point de la meule	18, 99	17, 06	13, 52	8, 60	3, 21	0, 90 $\pm$	piés.

VIII.

Ce calcul fait voir que la viteſſe de la roue va en augmentant à meſure que les aubes ſont plus enfoncées dans l'eau, mais qu'il n'en eſt pas de même de la force P avec laquelle l'eau frappe les aubes. Cette force eſt moins grande quand la viteſſe augmente. Comme elle eſt requiſe pour faire équilibre à la réſiſtance qui provient tant du frottement des parties de la machine que du broiement du blé, il eſt évident que cette réſiſtance eſt moins grande lorſque la roue, & par conſéquent auſſi la meule, tourne avec plus de viteſſe, & qu'ainſi du moins la ſomme du frottement & du broiement ne ſauroit être regardée comme une quantité conſtante. Et ſi un plus grand degré de viteſſe produiſoit un frottement plus fort, comme d'autres expériences le font voir, il s'enſuivroit que le broiement demanderoit d'autant moins de force que la meule tourneroit avec plus de viteſſe. Car en ſouſtrayant d'une quantité qui déja par elle-même va en diminuant, une autre qui va en augmentant, il eſt clair que les reſtes iront encore plus en diminuant. Le broiement du blé a cependant certaines limites, qui déterminent la viteſſe qu'on doit donner à la circonférence d'une meule, pour que le blé ne s'échauffe pas trop, & que tant la qualité que la quantité de la farine ſoit un *maximum* pour un tems donné.

IX.

Il eſt aſſez difficile de ſéparer la force de l'eau requiſe pour faire équilibre au frottement, d'avec celle que demande le broiement, parce que ces deux parties dépendent fort différemment de la viteſſe, & que le frottement dépend en partie du plus ou du moins de force requiſe pour le broiement, entant qu'il en naît une plus grande preſſion ſur les parties qui ſe frottent. En attendant qu'on puiſſe voir plus clair dans tout cela, je n'ai pas laiſſé de faire ſur le même moulin quelques expériences qui s'y rapportent. Les voici.

Septieme Expérience.

Les aubes étant enfoncées de 10 pouces, je fis ôter les meules tournantes, pour laiſſer aller le rouage tout ſeul. Après que tout fut parvenu à l'état de permanence, il ſe trouva que la roue fit 19 tours par minute. Cela donne pour le centre d'impulſion des aubes une viteſſe de 14 piés, celle de l'eau étant de 15. La vitesse relative n'étoit donc que d'un pié. Ainsi la force requise pour vaincre le frottement du rouage tout seul est égale à un poids de 4 livres appliqué au centre d'impulsion, lorsque ce centre tourne avec une vitesse de 14 piés par seconde.

Huitieme Expérience.

Les meules tournantes étant remises, mais sans qu'on y versât du blé, de sorte qu'elles tournoient toutes seules sans moudre, on ne laissa aux aubes que $\frac{3}{4}$ pouce d'enfoncement dans l'eau. Le mouvement étant parvenu à son état de permanence, la roue fit un tour en $10\frac{1}{2}$ secondes.

Neuvieme Expérience.

Je fis baisser la roue d'un pouce de plus, de sorte que l'enfoncement des aubes étoit de $1\frac{3}{4}$ pouce. Dans l'état de permanence la roue fit un tour en $7\frac{1}{2}$ secondes.

Dixieme Expérience.

Après avoir enfoncé les aubes de $6\frac{1}{2}$ pouces dans l'eau, il se trouva que dans l'état de permanence la roue fit 14 tours par minute.

X.

Dans ces trois dernieres expériences il n'y avoit que le frottement du rouage & celui des axes de fer qui portassent les meules tournantes. Ces meules ne touchoient pas les meules dormantes, mais le trémoussement du moulin & du support de l'axe de fer pouvoit peut-être les faire choquer les unes contre les autres.

XI.

Comme les six premieres expériences peuvent nous faire voir quel devoit être l'enfoncement des aubes, pour que la roue eût la même vitesse que celle qu'elle avoit dans ces trois dernieres expériences, cette même vitesse facilite la comparaison que nous pourrons faire, du moins en gros, entre le moulin moulant & le moulin allant à vuide.

1°. Dans la huitieme expérience la roue fit un tour en $10\frac{1}{2}$ secondes. Or le moulin moulant, cette vitesse demande que les aubes soient enfoncées de $6\frac{1}{4}$ de pouces, & la force de l'eau est $=$ 493 livres. Or la vitesse dans l'un & l'autre cas étant la même, la force de l'eau est en raison de l'enfoncement des aubes, par conféquent comme $6\frac{1}{4}$ à $\frac{3}{4}$, ou comme 25 à 3. Diminuant donc la force totale 493 dans ce rapport, on aura 59 livres pour la force de l'eau, le moulin allant à vuide.

2°. Dans la neuvieme expérience l'enfoncement des aubes étoit de $1\frac{3}{4}$ pouce, & la roue fit un tour en $7\frac{1}{2}$ fecondes, ce qui, le moulin moulant, exige que les aubes foient enfoncées de $7\frac{3}{4}$ pouces, & la force de l'eau eft alors $=$ 435 livres. On aura donc

$$7\tfrac{3}{4} : 1\tfrac{3}{4} = 435 : 98$$

de forte que le moulin allant à vuide la force eft de 98 livres.

3°. Dans la dixieme expérience, les aubes étant de $6\frac{1}{2}$ pouces dans l'eau, la roue fit 14 tours par minute, de forte qu'elle employa $4\frac{2}{7}$ fecondes de tems pour faire un tour. Les expériences faites, le moulin moulant, ne nous offrent point de viteffes auffi grandes. Mais on peut en conclure que les aubes auroient dû être extrémement enfoncées, & avoir beaucoup plus de largeur. Et comme alors la force de l'eau ne croîtroit plus affez exactement en raifon de la largeur des aubes, il n'y a gueres moyen de faire ici une comparaifon analogue à celle que nous avons faite pour les deux autres expériences.

XII.

Voyons cependant comment nous pourrons procéder d'une autre maniere. La force de l'eau dans la dixieme expérience peut être calculée directement, parce qu'on connoit la viteffe de l'eau, celle de la roue & la partie enfoncée des aubes. Je trouve que cette force n'eft que de 81 livres. Comme donc elle eft très petite, j'ai calculé encore de la même maniere la force de l'eau dans les deux autres expériences. Le calcul me donna pour la huitieme expérience 72 livres, & pour la neuvieme 83 livres. Ces nombres different affez confidérablement de 59 & 98 que la comparaifon des expériences nous a fait trouver. La raifon en paroit être le peu d'enfoncement des aubes, qui rend fort fenfibles les moindres irrégularités dans le mouvement de l'eau & dans la conftruction de la roue. Mais comme après tout les nombres 72, 83, 81, que donne le calcul direct, different affez peu entr'eux, je m'en tiendrai nombre rond à 80 livres, d'autant plus qu'il qu'il n'y a gueres moyen d'estimer la partie variable qui dépend de la différente vitesse. Soustrayant ce poids de la force totale P que donnent les six premieres expériences, on aura la force requise pour le broiement

Exp.	1	2	3	4	5	6
	291	301	345	422	410	347 ±

On voit donc que le broiement demande une force variable, & qui devient plus petite lorsque la meule a plus de vitesse. Comme le frottement du rouage n'est que de 4 livres ou environ, on voit que les 80 livres sont presque toutes pour le frottement de la meule, & que le broiement demande $3\frac{1}{2}$ jusqu'à 5 fois plus de force. Il est probable que la meule en tournant avec plus de vitesse chasse la farine avec plus de force & qu'étant par-là même plus débarrassée elle souffre moins de résistance de la part du broiement.

XIII.

Il n'est pas démontré que le moulin qui nous a servi dans les expériences rapportées ci-dessus, soit le mieux arrangé à tous égards. Mais on a lieu de croire que l'enfoncement des aubes & leur largeur est du moins ce qu'il y a de mieux, & que ces aubes étant enfoncées de 12 pouces donnent aux meules la vitesse la plus avantageuse pour moudre le blé. Je crois encore qu'il en est de même du moulin de *la Fere* que Mr. *Bélidor* a examiné. Mr. *Bélidor* juge que deux meules produiront le même effet, lorsque leurs masses sont en raison réciproque de leur vitesse. Cela m'engage à comparer notre moulin avec celui de *la Fere*.

Dans le nôtre les meules tournantes pesent 3300 livres poids de Berlin, & la vitesse de leur circonférence est $=$ 28,5 piés. Le produit de ces deux nombres est 94050.

La meule à *la Fere* pesoit 4350 livres poids de marc, qui reviennent à 4552 livres poids de Berlin. La vitesse de la circonférence est 16,76 piés de Paris ou 17,35 piés de Rhin. D'où suit $4552 \cdot 17{,}35 = 78978$. Ainsi les effets de ces moulins seroient comme 94505 à 78978. Or le premier moud 10000 livres de farine par jour & l'autre 9000 livres poids de marc, ce qui fait environ 9420 livres poids de Berlin. Or quoique le rapport 10000 : 9420 ſoit moins grand que 94504 : 78978, la différence ne laiſſe pas d'être aſſez petite pour pouvoir être attribuée à la différence du blé, de la farine, de la dureté des meules &c.

XIV.

Dans la premiere expérience la force totale de l'eau étoit 371 livres. Souſtrayant 80 livres pour le frottement, il reſte 291 livres pour le broiement du blé. Cette force étant réduite aux $\frac{2}{3}$ du rayon de la meule devient 135 livres. Diviſant par ces 135 livres le poids des deux meules tournantes, qui eſt de 3300 livres, on aura pour quotient 24 +, de ſorte que la force requiſe pour le broiement appliquée aux deux tiers du rayon de chaque meule eſt environ la $\frac{1}{24}$ partie de ſon poids. Mr. *Bélidor* trouva au moulin de *la Fere*, que cette force étoit la $\frac{1}{35}$ partie du poids de la meule. Il paroit donc que la force requiſe pour moudre ne ſe regle pas tout ſimplement ſur le poids de la meule. La différence des diametres paroit y influer, & nous avons vu ci-deſſus que cette force dépend aſſez conſidérablement de la viteſſe de la meule (§. XII).

XV.

En attendant que tout cela puiſſe être mieux éclairci par d'autres expériences, nous pourrons mettre ces moulins pour baſe, entant que la maſſe, la grandeur & la viteſſe des meules reſtant les mêmes, la dépenſe d'eau, la chûte & le rouage peuvent être variés ſuivant les circonſtances locales, & comment on peut ménager l'eau autant qu'il eſt poſſible.

XVI.

Dans les cas où l'eau eſt aſſez peu abondante pour qu'il faille la reſſerrer dans un canal qui n'eſt gueres plus large & plus profond que les aubes, il faut avoir égard à la quantité d'eau qui paſſe tant au-deſſus qu'à côté des aubes. Pour ménager l'eau autant qu'il eſt poſſible, cette quantité d'eau doit être diminuée tant qu'on pourra. Une roue bien arrondie & les aubes bien ajuſtées peuvent y contribuer beaucoup. Mais on ne peut pas faire en ſorte que la roue quadre auſſi exactement dans le canal que le piſton dans le cylindre d'une machine pneumatique. Il faut laiſſer tant à côté qu'au-deſſous de la roue un eſpace libre, dont je déſignerai la largeur par *c*. Or entant que, la ſurface des aubes étant donnée, on peut varier le rapport entre leur longueur & leur largeur, ce rapport peut être déterminé par la condition, que l'eau qui ſe perd entre la roue & le canal doit être un *minimum*. Soit $\beta\lambda =$ conſt. $= A$; on aura la largeur de l'ajutoir $\lambda + 2c$, ſa hauteur $\beta + c$, donc l'aire ſera $= \beta\lambda + (\lambda + 2\beta)c + 2cc$. Cette aire ſurpaſſera donc la ſurface des aubes de la quantité $(\lambda + 2\beta)c + cc = \left(\lambda + \frac{2A}{\lambda}\right)c + cc$, qui doit être un *minimum*. Différentiant donc & faiſant la différentielle $= 0$, on aura

$$d\lambda - \frac{2A\,d\lambda}{\lambda\lambda} = 0,$$

$$\lambda\lambda = 2A = 2\lambda\beta,$$

$$\lambda = 2\beta,$$

de ſorte que la longueur des aubes doit être deux fois plus grande que leur largeur. Cette regle donne le *minimum* pour l'aire de l'eſpace qu'on laiſſe entre le canal & les aubes. On voit qu'elle eſt très ſimple; mais elle n'eſt pas indifféremment applicable, parce que la largeur des aubes dépend très conſidérablement de la chûte qu'on peut donner à l'eau. En augmentant la largeur des aubes on hauſſe le centre d'impulſion, & par là on diminue la hauteur due à la viteſſe & la force de l'eau ne croît pas en même raiſon que la largeur des aubes. Voyons quel ſera le réſultat lorſqu'on a égard à cette circonſtance.

XVII.

Soit h la hauteur de l'eau ſtagnante au deſſus du fond du canal ou de la baſe de l'ajutoir; on aura la quantité d'eau qui s'écoule par l'ajutoir par ſeconde

$$\mu = \tfrac{4}{3}.\sqrt{g}.\left[h^{3:2} - (h - \beta - c)^{3:2}\right].(\lambda + 2c)$$

la quantité qui frappe les aubes

$$M = \tfrac{4}{3}\sqrt{g}.\left[(h - c)^{3:2} - (h - \beta - c)^{3:2}\right].\lambda.$$

La différence $\mu - M$ doit être un *minimum*, lorſque μ ou M eſt une quantité donnée. Or comme c eſt très petite, nous aurons à très peu près

$$\frac{3\mu}{4\sqrt{g}} = (\lambda + 2c)\left[h^{3:2} - (h - \beta)^{3:2} + \frac{3c\sqrt{(h-\beta)}}{2} - \frac{3cc}{8\sqrt{(h-\beta)}}\right]$$
$$= \frac{3M}{4\sqrt{g}} + 2c\left[h^{3:2} - (h-\beta)^{3:2}\right] + \tfrac{3}{2}\lambda c\sqrt{(h-\beta)}$$
$$- \tfrac{3}{2}cc\sqrt{(h-\beta)} - \frac{3cc\lambda}{8\sqrt{(h-\beta)}}.$$

Donc

$$\frac{3}{4\sqrt{g}}(\mu - M) = 2c\left[h^{3:2} - (h-\beta)^{3:2}\right] + \tfrac{3}{2}\lambda c\sqrt{(h-\beta)}$$
$$- \tfrac{3}{2}cc\sqrt{(h-\beta)} - \frac{3cc\lambda}{8\sqrt{(h-\beta)}}$$
$$= \textit{minimum}.$$

D'où suit en différentiant

$$0 = c\sqrt{(h-\beta)} - \frac{\lambda c}{4\sqrt{(h-\beta)}} + \frac{cc}{4\sqrt{(h-\beta)}} - \frac{cc\lambda}{16(h-\beta)^{3:2}},$$

& après toute réduction faite

$$0 = (h - \beta + \tfrac{1}{4}c)\,.\,(h - \beta - \tfrac{1}{4}\lambda),$$

ce qui donne

$$0 = h - \beta - \tfrac{1}{4}\lambda,$$
$$\lambda = 4(h-\beta).$$

Mais on a aussi

$$\lambda = \frac{3M}{4\sqrt{g}\,.\,[h^{3:2} - (h-\beta)^{3:2}]}.$$

Donc

$$h^{3:2}(h-\beta) - (h-\beta)^{5:2} = \frac{3M}{16.\sqrt{g}}.$$

Par là on détermine $h - \beta$ par h, M, g. Cette équation peut avoir trois racines réelles. Ainsi dans les cas particuliers il faut voir laquelle donne pour $\mu - M$ un *minimum*. Je ne m'y arrêterai pas d'avantage. Car la quantité $\mu - M$ est ordinairement si petite, que si pour la réduire à son *minimum*, le rapport entre β, λ devient trop disproportionné à l'égard des autres circonstances, surtout de la force de l'eau, il faut en faire abstraction.

XVIII.

Je passe donc aux autres remarques qui restent à faire. En retenant la signification des lettres employées dans les calculs précédens, on aura la vitesse moyenne de l'eau

$$V = \frac{4\sqrt{g}.[(h-c)^{3:2}-(h-\mathfrak{E}-c)^{3:2}]}{3\mathfrak{E}}$$

& la vitesse de la roue

$$C = \frac{G(r-\frac{1}{2}\mathfrak{E})}{n\varrho},$$

où j'entens par ϱ le rayon de la meule, par G la vitesse d'un point de sa circonférence, & enfin n indique le nombre des révolutions de la meule répondant à un tour de la roue à eau. Les valeurs G, ϱ sont données, mais la lettre n dépend de l'arrangement du rouage. Je poserai $C = mV$, pour abréger le calcul. On aura donc la vitesse relative de l'eau

$$V - C = V(1-m) = \frac{4\sqrt{g}.[(h-c)^{3:2}-(h-\mathfrak{E}-c)^{3:2}]}{3\mathfrak{E}} - \frac{G(r-\frac{1}{2}\mathfrak{E})}{n\varrho}.$$

D'où suit la force de l'eau contre les aubes

$$P = \frac{V^2(1-m)^2}{4g}.\mathfrak{E}\lambda.\frac{131}{2} \text{ livr.}$$

Cette force peut encore être exprimée autrement. Soit p la force qu'il faut appliquer aux $\frac{2}{3}$ du rayon de la meule, pour la faire tourner avec la vitesse qu'elle a dans celle des expériences rapportées ci-dessus, qu'on voudra mettre pour base. Cette valeur de p se trouve déterminée dans le VI^me article; du moins entant que l'effet du frottement & celui du broiement du blé peuvent être regardées comme les mêmes, lorsque la même meule tourne avec la même vitesse quand les proportions du rouage ne seroient pas les mêmes. Il n'y aura donc qu'à réduire cette force au centre d'impression de la roue, & elle deviendra

$$P = \frac{2\varrho.np}{3.(r-\frac{1}{2}\mathfrak{E})} \text{ livres.}$$

Égalant donc ces deux expreſſions de P nous aurons

$$\frac{131}{8g} \cdot V^2 (1 - m)^2 \cdot \mathrm{6}\lambda = \frac{2\,\varrho n p}{3\,(r - \frac{1}{2}\mathrm{6})}.$$

Or comme

$$\frac{n\,\varrho}{r - \frac{1}{2}\mathrm{6}} = \frac{G}{C} = \frac{G}{mV},$$

ſubſtituant cette valeur nous aurons

$$\frac{131}{8g} \cdot V^2 (1 - m)^2 \mathrm{6}\lambda = \frac{2Gp}{3mV},$$

d'où ſuit

$$m(1 - m)^2 = \frac{16\,Ggp}{393\,\mathrm{6}\lambda V^3}.$$

XIX.

Or la moindre dépenſe d'eau exige que le produit $\mathrm{6}\lambda V$ ſoit auſſi petit qu'il eſt poſſible. Donc la quantité $m(1 - m)^2$ doit être auſſi grande qu'il eſt poſſible. Faiſant donc

$$m(1 - m)^2 = maximum,$$

on trouve qu'il faut faire $m = \frac{1}{3}$. Cela donne

$$\frac{4}{27} = \frac{16\,Ggp}{393\,\mathrm{6}\lambda V^3}$$

ou bien

$$V^3 \mathrm{6}\lambda = \frac{36}{131} \cdot Ggp.$$

Et c'eſt la *moindre* valeur qu'on puiſſe donner à $V^3\mathrm{6}\lambda$, pour obtenir l'effet qu'on ſe propoſe, de ſorte qu'on a encore la condition

$$V^3 \mathrm{6}\lambda > \frac{36}{131} \cdot Ggp,$$

c'eſt à dire que $V^3\mathrm{6}\lambda$ ne doit pas être $< \frac{36}{131} \cdot Ggp$. Suppoſant p. ex. qu'en employant les mêmes meules tournantes avec les mêmes viteſſes, comme dans la premiere expérience, on ait

$$p = 171 \text{ livres.}$$
$$G = 8{,}70 \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{11}{6} \cdot \frac{1}{7} = 28{,}48 \text{ piés,}$$

d'où fuit

$$V^3 \text{ϐ} \lambda \geqq 14618,$$

c'eft à dire que s'il y a trop peu d'eau ou trop peu de chûte pour que le produit $V^3 \text{ϐ} \lambda$ furpaffe ou du moins égale 14618, le moulin ne produira pas l'effet de la premiere expérience.

XX.

Le *maximum* $m(1 - m)^2 = \frac{4}{27}$ revient à celui qu'a trouvé Mr. *Parent*, quoique d'une autre maniere. Mr. *Parent* s'en tint uniquement aux viteffes V, C. La force de l'eau, entant qu'elle dépend de ces viteffes, s'exprime par $(V - C)^2$, & fi cette force doit agir avec le plus de viteffe, il faut que

$$C \,.\, (V - C)^2 = \textit{maximum}.$$

Cela donne $C = \frac{1}{3} V$. Cette maniere de procéder fuppofe que la longueur & la largeur des aubes font données, & qu'on cherche fimplement le plus grand effet. Mais ici c'eft l'effet qui eft donné, & cela fait que λ, ϐ, V, C peuvent être regardées comme variables, tandis que Mr. *Parent* n'avoit d'autre variable que la viteffe C. Or la moindre dépenfe d'eau exigeroit $V \text{ϐ} \lambda = \textit{minimum}$. La moindre force de l'eau demanderoit que $(V - C)^2 \text{ϐ} \lambda = \textit{minimum}$. Mais l'équation

$$m(1 - m)^2 = \frac{16\, Ggp}{393\, \text{ϐ} \lambda V^3}$$

demande que $V^3 \text{ϐ} \lambda$ foit $= \textit{minimum}$. Ce *minimum* n'eft pas le produit des deux *minimum* que nous venons de nommer & qui font $V \text{ϐ} \lambda$, $(V - C)^2 \text{ϐ} \lambda$, mais le produit de $V \text{ϐ} \lambda$ multiplié par la force abfolue de l'eau V^2. Voilà donc ce que cette équation renferme de plus que celle de Mr. *Parent*. Non feulement elle nous donne fa regle pour le rapport des viteffes V, C, mais elle fait encore voir de quelle maniere les valeurs V, ϐ, λ influent dans le *maximum* qu'il avoit cherché.

XXI.

L'équation $\frac{4}{27} = \frac{16 \,.\, Ggp}{393 \,.\, \text{ϐ} \lambda V^3}$, qui en faifant $C = \frac{1}{3} V$, devient

$$\frac{131}{2} \,.\, C^2 \text{ϐ} \lambda \,.\, C = \frac{2}{3} G \,.\, p$$

veut ſimplement dire qu'il y a équilibre lorſque la force $\frac{131}{2} . C^2 \beta\lambda$ multipliée par ſa viteſſe C eſt égale à la réſiſtance p multipliée par ſa viteſſe $\frac{2}{3} G$. Comme c'eſt une des premieres loix de la ſtatique, on voit que cette équation auroit pu être trouvée fort brievement, ſi nous n'avions pas voulu faire voir comment elle eſt liée au *maximum* $m(1 - m)^2 = \frac{4}{27}$.

XXII.

Paſſons maintenant en revue les données & les équations que nous avons pour la ſolution du probleme propoſé (§. XV).

1°. D'abord donc nous avons la dépenſe d'eau

$$\mu = \tfrac{4}{3} . \sqrt{g} . (\lambda + 2c) . [h^{3:2} - (h - \beta - c)^{3:2}].$$

Cette dépenſe μ eſt cenſée donnée par la viteſſe moyenne de l'eau multipliée par l'aire de la ſection tranſverſale de la riviere ou du canal. La valeur de c ne doit être tout au plus que d'un demi-pouce, lorſque l'eau doit être extrémement ménagée. Ainſi il ne reſte ici d'autre indéterminée que la longueur λ & la largeur β des aubes.

2°. Enſuite nous avons

$$M = \tfrac{4}{3} . \sqrt{g} . \lambda . [(h - c)^{3:2} - (h - \beta - c)^{3:2}]$$

$$M = \beta\lambda V$$

$$V = \frac{(h - c)^{3:2} - (h - \beta - c)^{3:2}}{3\beta} . 4\sqrt{g}.$$

3°. De plus nous avons pour le *maximum* de l'effet ou plutôt pour le *minimum* de $V^3\lambda\beta$,

$$V^3\lambda\beta = \tfrac{36}{131} . Ggp.$$

Cette équation jointe à celle que nous avons pour μ, achevera de déterminer β, λ. Et s'il arrivoit que ces valeurs de β, λ fuſſent trop diſproportionnées, il faudroit y remédier entant qu'on pourra faire

$$V^3\lambda\beta > \tfrac{36}{131} . Ggp.$$

Et comme en ce cas on n'aura plus $m = \frac{1}{3}$, l'équation

$$m(1 - m)^2 = \frac{16\, Ggp}{393 . V^3 \beta\lambda}$$

aidera

aidera à trouver les racines m. Il convient de prendre celle qui ſera $> \frac{1}{3}$ & < 1, & qui donnera $C = mV$.

4°. Enfin on aura

$$\frac{n}{r - \frac{1}{2}\beta} = \frac{G}{gC}.$$

Cette équation ne donne que le rapport entre n & $r - \frac{1}{2}\beta$. On fait r beaucoup plus grande que β, afin que l'eau frappe les aubes moins obliquement. Il eſt encore bon que n ſoit de pluſieurs unités, parce qu'ordinairement la meule tourne avec beaucoup plus de viteſſe que la roue à eau. Et comme n détermine l'arrangement du rouage & le rapport entre le nombre des dents & des fuſeaux, il eſt clair que n doit être un nombre entier ou un rapport entre deux nombres entiers. Tout cela ſe détermine le plus commodément par les circonſtances locales.

XXIII.

Suivant toutes ces équations la dépenſe d'eau $= \mu$ ſeroit toujours totale, c'eſt à dire égale à l'affluence, & on n'obtiendroit toujours que le même effet, c'eſt à dire, des meules données tourneroient avec des viteſſes données. Il s'agit donc de trouver la moindre dépenſe d'eau néceſſaire pour cet effet. Voici comment on pourra obtenir ce but. L'équation

$$V^3 \lambda \beta = \tfrac{36}{131} \cdot Ggp$$

ſe change ſans peine en

$$V^2 M = \tfrac{36}{131} \cdot Ggp.$$

Or G, g, p étant données, il eſt clair que M ſera d'autant plus petite, que la viteſſe V, & par conſéquent auſſi la hauteur h, ſera plus grande. Si donc il s'agit de ménager l'eau, on fera bien de ſe ſervir de toute la hauteur de la chûte que les circonſtances permettent, à moins qu'elle ne donne trop peu de largeur aux aubes. La viteſſe V ne paſſe pas certaines limites, qu'on trouve en faiſant $\beta = 0$, & $\beta = h - c$. Ces limites ſont

$$V > \tfrac{4}{3} \sqrt{(g(h - c))},$$
$$V < 2 \sqrt{(g(h - c))}.$$

Nous aurons donc

$$M < \frac{81 \cdot Gp}{524\,(h - c)}.$$

Et

$$M > \frac{9}{131\,(h - c)}.$$

Il faudra faire à d'autant plus forte raiſon

$$\mu > \frac{9 \cdot Gp}{131\,(h - c)}.$$

C'eſt ce qu'on obtiendra à meſure qu'on donnera plus de largeur aux aubes. Car le vrai *minimum* de M n'a lieu que lorſqu'on fait $\beta = 0$. Mais comme cela ne ſauroit ſe faire, on voit du moins que pour diminuer autant qu'il eſt poſſible la dépenſe d'eau, on fait bien de donner aux aubes une largeur fort modique. Si en effet l'affluence de l'eau n'eſt gueres plus grande que ce *minimum* de la dépenſe, il vaudra tout autant l'employer toute entiere, afin de ne pas trop rétrécir la largeur des aubes. Mais ſi l'affluence eſt beaucoup plus grande que le *minimum* de la dépenſe, on cherche ſi le ſurplus peut être deſtiné à quelqu'autre uſage. Dans ces cas on donne aux aubes une largeur modique de 8, 10, 12 &c. pouces. Par là on trouve V par l'équation

$$V = \frac{(h - c)^{3:2} - (h - \beta - c)^{3:2}}{3\beta} \cdot 4\sqrt{g},$$

& enſuite λ par l'équation

$$\lambda = \frac{36\,Ggp}{131\,V^3\,\beta}.$$

Et comme cette équation demande que $m = \frac{1}{3}$, on aura $C = \frac{1}{3}V$, de ſorte qu'il ne reſte plus qu'à accommoder les valeurs n, r aux circonſtances & aux conditions rapportées ci-deſſus en ſorte que

$$\frac{n}{r - \frac{1}{2}\beta} = \frac{G}{\varrho C}.$$

Enfin en déterminant μ, on ſaura quel eſt le ſurplus de l'eau dont on peut faire quelqu'autre uſage. On comprend que ce ſurplus doit être évalué pour le cas où la riviere fournit le moins d'eau.

XXIV.

On voit ſans peine que dans cette ſolution du probleme (§. XV.) j'ai fait un double uſage du *maximum* de $m(1 - m)^2$. Car d'abord cela nous a donné l'équation

$$V^3 \lambda \mathfrak{C} = V^2 M = \frac{36}{131} . Ggp$$

& en même tems la condition que, ſi on veut obtenir l'effet du moulin qu'on s'eſt propoſé, le produit $V^3 \lambda \mathfrak{C}$, ou $V^2 M$ ne ſauroit être moins grand que cette équation ne le demande. Enſuite cette même équation nous a fait entrevoir que pour avoir la moindre valeur de M & par conſéquent de μ, il faut prendre la viteſſe V auſſi grande qu'il eſt poſſible. Mais comme la plus grande viteſſe de V demanderoit $\mathfrak{C} = 0$, il en réſulte que la moindre dépenſe d'eau exige que les aubes ayent une largeur fort modique. Obſervons encore que cette moindre dépenſe n'eſt pas un *minimum* proprement dit, parce que la condition

$$V \lessdot 2\sqrt{(g(h - c))}$$

ne dépend pas de quelque *maximum*, mais ſimplement des valeurs g, h, c, qui ſont données.

XXV.

L'équation

$$V^3 \lambda \mathfrak{C} = \frac{36}{131} Ggp$$

nous offre encore un autre *minimum*, qui regarde la longueur des aubes λ. Elle ſe transforme en

$$\lambda = \frac{36 . Ggp}{131 \; V^3 \mathfrak{C}}$$

où il eſt évident que λ ſera un *minimum* lorſque $V^3 \mathfrak{C}$ eſt un *maximum*. Or nous avons

$$V = \frac{(h - c)^{3:2} - (h - c - \mathfrak{C})^{3:2}}{3\mathfrak{C}} . 4\sqrt{g}.$$

Donc

$$\frac{[(h - c)^{3:2} - (h - c - \mathfrak{C})^{3:2}]^3}{\mathfrak{C}\mathfrak{C}} = maximum.$$

Regardant la hauteur $h - c$ comme donnée, & ε comme variable, on trouve que ce *maximum* demande que

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{105} - 3}{10} \cdot (h - c)$$

ou bien

$$\varepsilon = 0,72469507 \cdot (h - c).$$

Cette équation nous servira surtout dans les cas où la hauteur $h - c$ est petite, & où par conséquent il est nécessaire de réduire λ à sa moindre valeur. Employant donc cette équation, elle donne

$$V = 7,1213 \cdot \sqrt{(h - c)}.$$

Et en faisant, comme ci-dessus (§. 19),

$$\tfrac{36}{131} \cdot Ggp = 14618,$$

nous aurons

$$\lambda = \frac{55,8}{(h - c)^{5:2}},$$

où nous voyons d'abord que si $h - c$ n'étoit que d'un pié, la longueur des aubes λ seroit de près de 56 piés. Elle se réduit à 28 piés, si la roue ne doit faire aller qu'une meule. Mais c'est toujours une longueur démésurée, qui fait voir que la chûte d'un pié ne suffit gueres pour un moulin bien arrangé. Posons $h - c = 2$ piés, nous aurons

$$\lambda = 9,9;$$

cette longueur est passable. Si nous faisons $h - c = 3$ piés, nous aurons

$$\lambda = 3,63$$
$$\varepsilon = 2,17$$

ce qui approche fort du *minimum* (§. XVI), qui demande $\lambda = 2\varepsilon$. Si nous posons $h - c = 4$ piés, nous aurons

$$\lambda = 1,74.$$
$$\varepsilon = 2,90$$

Ici donc on pourra prendre ϵ moins grande que l'équation

$$\epsilon = 0,7247 \cdot (h - c)$$

ne la donne; mais cela n'eſt pas néceſſaire, parce que dans les cas où h va au delà de 3 piés, il vaudra mieux donner au canal la courbure de la roue afin que l'eau la faſſe tourner non par le choc mais par la preſſion. Ainſi l'uſage des roues, que l'eau frappe par deſſous dans une direction horiſontale, ſe borne au cas où la hauteur h ne va pas au delà de 3 piés. Et ſi $h < 2$, les aubes auront une longueur déméſurée, à moins qu'on ne veuille employer des meules beaucoup plus petites & moudre d'autant moins de farine. Cependant en faiſant $h = 1,44$ on aura pour le cas où il n'y a qu'une meule

$$\lambda = 11,25$$

ce qui eſt encore paſſable.