REMARQUES

fur les moulins & autres machines dont les roues prennent l'eau à une certaine hauteur.

PAR MR. LAMBERT.

I.

Soit HN une partie de la roue, K son centre, GDBbEg le canal qui amene l'eau. Ce canal est baissé du côté de la roue en sorte que l'eau tombe immédiatement dans les aubes. Depuis le point b les aubes tournent dans un canal concentrique jusqu'en L. Comme ce canal doit empêcher que l'eau ne sorte des aubes, avant qu'elles parviennent en H, il est clair qu'il ne doit excéder la largeur & la longueur des aubes, qu'autant qu'il faut pour qu'elles puissent tourner librement. Il est clair aussi que la circonférence intérieure doit être couverte & fermée.

II.

Ces fortes de roues exigent que l'affluence de l'eau foit affez grande pour que, la roue tournant, tout l'espace entre les aubes se remplisse. Si donc on pose la vitesse moyenne des aubes $\equiv C$, leur longueur $\equiv \lambda$ & $AB \equiv \mathcal{E}$, on aura $\lambda \mathcal{E} C \equiv M$, la quantité d'eau que le canal doit fournir par seconde pour que les aubes entre M & H soient toujours remplies. La dépense d'eau, que nous poserons $\equiv \mu$, doit être un peu plus grande, pour suppléer encore à la partie de l'eau qui s'échappe entre le canal & les aubes. Cette partie d'eau qu'il faut de plus, contribue à retenir l'eau entre les aubes, & à lui conserver la pression qu'elle exerce contre les aubes.

III.

Soit SB une aube parvenue au point B. Il est clair que l'espace entre cette aube & celle qui la précede doit être rempli. Cela ne peut se faire à moins que les aubes n'ayent en SB une position horisontale, ou qu'elles ne soient même en S plus basses qu'elles ne sont en B. Car si les aubes avoient une position telle que AB, il est clair que l'espace SAB resteroit vuide, ou que l'air n'en seroit chasse qu'à mesure que les aubes approcheroient de H.

IV.

Si l'eau fortoit librement du canal en D, elle parcourroit une parabole DB, & tomberoit en B fuivant la direction de la tangente UB, & avec une vitesse conforme à la hauteur EF. On fait bien de donner au canal DB cette courbure parabolique, parce que l'eau coulera d'autant plus librement sur les aubes.

V.

La roue tournant, les aubes se soustraient au choc qu'elles recevroient si elles étoient en repos. Soit UB la vitesse de l'eau en B; soit de plus BC celle du point B de la roue. Si donc on transfere la vitesse de la roue sur l'eau, l'eau frappera les aubes suivant la direction & la vitesse UC. Il n'y aura donc point de choc, dès que les aubes en SB ont une position parallele à CU.

VI.

Or comme les aubes en SB doivent être ou horisontales ou plus basses en S qu'en B, on voit que cela influe encore dans la position de la droite CU. Si le point C est plus bas que le point U, la dissérence entre les vitesses BC, BU en devient d'autant plus grande, & c'est ce qu'il faut éviter. Car tout ce qu'on donne à la vitesse de l'eau se fait aux dépens de la force avec laquelle elle doit presser les aubes. Il est vrai qu'en laissant aux aubes en SB une position horisontale, & en faisant BU plus grande, il en résultera un choc contre les aubes. Mais ce choc sera fort oblique & fort petit, de forte qu'il ne compensera pas ce qu'on perd à l'égard de la force en prenant le point B plus bas. Le meilleur parti est donc de propor-

72 NOUVEAUX MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

tionner les vitesses CB, UB en sorte que CU ait une position horisontale de même que les aubes SB lorsqu'elles vont descendre au dessous du point B.

VII.

La vitesse de l'eau en B étant plus grande que celle de la roue, la sargeur du sil d'eau BM sera moins grande que BA, en raison réciproque de ces vitesses. Mais on sera bien d'arranger le canal en sorte que la vitesse moyenne de l'eau qui passe par la section ED soit égale à celle de la roue, & que la hauteur ED soit $\equiv AB$, dans le cas où l'assiluence de l'eau est la moins grande, & où il faut laisser découler l'eau par toute la section DE.

VIII.

Ayant donc $ED \equiv AB \equiv \mathcal{E}$, on aura pour la vitesse moyenne $C \equiv \frac{4}{3}V(g\mathcal{E})$,

& par conséquent

$$M \equiv \lambda \in C \equiv \frac{4}{3} \lambda V_g \cdot \xi^{3+4}$$
.

IX.

Nommant de plus $DF \equiv y$, $FB \equiv x$, $LKB \equiv \phi$, $NBU \equiv \psi$, $KB \equiv r$, on aura

la viteffe de l'eau on $D \equiv \imath V(\mathfrak{e}_g)$, le tems employé pour parcourir l'arc $DB \equiv V(y:g)$.

Ce rems étant multiplié par cetre vitesse donne

$$x \equiv 2V^{\epsilon}g.V(y:g) \equiv 2V(\epsilon y),$$

d'où l'on déduit

$$\operatorname{tang} \psi = \frac{\mathrm{d} r}{\mathrm{d} y} = \frac{r}{2y} = \mathcal{V} \frac{6}{y} \\
\operatorname{cof} \psi = \mathcal{V} \left(\frac{y}{6+y} \right).$$

X.

L'angle BNC étant droit, on aura

BC:BU = fec NBC: fec NBU

ce qui, à cause de l'angle droit KBC, revient à

$$BC: BU = cof \psi : fin \phi$$
.

Or on a

$$BC = \frac{4}{3} \mathcal{V}(g\mathfrak{C}) \cdot \frac{r}{(r-\frac{1}{4}\mathfrak{C})}$$

$$BU = 2 \mathcal{V}g(\mathfrak{C} + y).$$

Substituant donc ces valeurs on obtient

$$\frac{2}{3}\left(\frac{r}{r-\frac{1}{3}}\right)V^{\varepsilon}:V^{\varepsilon}:V^{\varepsilon}+y)=\operatorname{cof}\psi:\operatorname{fin}\varphi_{\bullet}.$$

ce qui donne

$$cof \psi = \frac{2r \sin \varphi \, V \xi}{3(r - \frac{1}{2} \xi) \cdot V(\xi + y)}.$$

Mais nous venons de trouver

$$cof \psi \equiv V_{\overline{c} + \gamma}$$

Nous aurons donc

$$y = \frac{4Cr^2 \cdot \sin \Phi^2}{9(r-\frac{1}{2}C)^2}$$

Comme & est ordinairement très petite en comparaison de r, cette équation revient à très peu près à .

$$y = \frac{4}{2} \epsilon \sin \varphi^2$$
.

XI.

Faifons maintenant la hauteur totale EP = h, $HL = IP = \frac{1}{2}\xi$, on aura

$$FI \equiv h - b - y - \frac{1}{2} \mathcal{E} \equiv h - \frac{3}{2} \mathcal{E} - \frac{4}{9} \mathcal{E} \cdot \sin \varphi^2$$

$$\equiv h - \frac{35}{18} \mathcal{E} + \frac{9}{18} \mathcal{E} \cot \varphi^2.$$

C'est la hauteur répondante à la pression de l'eau contre les aubes. Il faudroit peut-être la prendre plus grande, parce qu'une aube étant parvenue en SB, l'espace SsbB se trouve déja rempli d'une partie d'eau, & cette cau ne laisse pas de peser sur l'aube SB. Mais comme il vaut mieux avoir trop de force que pas assez, nous nous en tiendrons à la hauteur FI. -En-la

74 Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale

multipliant par 6x, on aura en piés cubiques d'eau la force avec laquelle l'eau fait équilibre à la résistance de la machine. Multipliant ce nombre de piés cubiques par 65 \(\frac{1}{2}\), on aura cette force exprimée en livres, poids de Berlin,

$$P = \frac{131}{2} \cdot (h - \frac{35 - 8 \operatorname{cof} \phi^2}{18} \cdot \xi) \cdot \lambda \xi \cdot \mathcal{V} g.$$
XII.

Suivant la maxime de Mr. Parent cette force multipliée par la vitesse moyenne de la roue $C \equiv \frac{A}{3} V(g \, G)$ doit être un maximum. Mais ce maximum ne se détermine pas ici avec le même succès que dans le cas où l'eau frappe les aubes par en bas, & que j'ai examiné dans le Mémoire précédent. Nous avons ici trois variables, λ , φ , G, dont les deux premieres, & surtout la longueur des aubes A, ne donnent ni un maximum ni un minimum. Cos G devient G 1, c'est à dire un maximum, si on sait G 1 0 ou G 1 80. Mais il saut éviter l'un & l'autre de ces deux extrêmes. Il ne reste donc que G, qui donne pour G un maximum, lorsqu'on sait

$$C = \frac{3}{5} \cdot \frac{18 h}{35 - 8 \cot \phi^2}.$$

C'est ce qu'on trouve en différentiant l'équation

$$PC = \frac{262}{3}(h - \frac{35-8 \operatorname{cof} \phi^2}{18} \cdot 6)\lambda 6^{3/2} V_g$$

Substituant cette valeur de C dans l'équation

$$FI \equiv h = \frac{35-8 \cdot \text{of} \phi^2}{18}$$
. C

on a

$$FI = \frac{2}{5}h$$
.

Cette quantité est très petite, & fait assez voir que cette maniere de procéder doit être changée en sorte qu'on tienne encore compte des deux autres variables, & surtout de la longueur des aubes λ . Voici donc comment nous pourrons nous y prendre, en supposant que l'effet ou le moment statique de la machine PC est donné.

XIII.

L'équation proposée se change sans peine en

$$\frac{PC}{\lambda C} = \frac{262}{3} (h - \frac{35 - 8 \cos(\varphi^2)}{18} \cdot C) \cdot V(gC).$$

Si donc le facteur

$$(h - \frac{35 - 8 \cot \phi^2}{18} \epsilon) V \epsilon$$

devient un maximum, il est clair qu'alors $\lambda \in C$ sera un minimum, le produit PC étant donné. Or $\lambda \in C$ est l'aire de la section du canal en ED, & il est bon que cette aire soit aussi petite qu'il est possible. Faisant donc ce facteur

$$(h - \frac{35-8 \cot \varphi^2}{18}) \mathcal{V} \in maximum$$

en supposant 6 variable, & ce maximum se trouve avoir lieu lorsque

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \cdot \frac{18h}{35 - 8\cos\varphi^2}.$$

Par là on a

$$\frac{PC}{\lambda C} = \frac{262}{3} \cdot \frac{2}{3} h \cdot V Cg$$

pour $\lambda \in \underline{\hspace{0.1cm}}$ minimum, entant que l'angle ϕ est censé donné. Il sera bon de rendre la valeur de ε aussi petite que la variable ϕ le permet. L'équation

$$6 = \frac{7}{3} \cdot \frac{18 h}{35 - \cos \phi^2}$$

fait voir que cela arrive en faisant $\phi = 90^\circ$. On aura donc

$$\begin{array}{l}
c = \frac{6}{35} \cdot h, \\
\frac{PC}{\lambda G} = 95, 29 h^{3/2}, \\
\lambda = \frac{0,06123 \cdot PC}{h^{5/2}}.$$

On a de plus $FI = \frac{2}{3}h$, de sorte que la hauteur FI, qui est destinée à faire équilibre à la résistance de la machine, fait les deux tiers de la hauteur totale EP. Voilà donc le meilleur parti qu'on puisse tirer de l'équation

76 NOUVEAUX MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

qui donne PC, entant qu'elle offre quelque maximum ou minimum. La section du canal en ED est un minimum relativement à sa hauteur ED, & cette hauteur elle-même est un minimum relativement à l'angle Φ .

XIV.

Les valeurs que nous venons de trouver nous donnent encore

$$y = \frac{46 \cdot \sin \phi^2}{9} = \frac{4}{9} e = \frac{6}{105} h,$$

$$x = 2 V e y = \frac{6}{35} \cdot h,$$

$$r = FP = \frac{2}{3} h + \frac{1}{2} e = \frac{79}{105} h.$$

Ainsi toutes ces valeurs ξ , x, r, y sont en raison donnée de la hauteur h. Cela suffit pour construire la seconde Figure qui fait voir le profil de la roue & du canal, quelle que soit la hauteur h. Il n'y a donc que la longueur des aubes λ qui suive un autre rapport.

XV.

Appliquons tout ceci aux moulins. Je mettrai pour base celui que j'ai décrit dans le Mémoire précédent, & qui va bien lorsque $\frac{2}{3}pG = PC$ = 3247. Nous aurons donc

$$\lambda^{\bullet} = \frac{198,6}{h^{5/2}}.$$

$$C = \frac{4}{3}Vg^{\circ} = 2,1823Vh.$$

La circonférence moyenne de la roue est $= \frac{4.4}{7}(r - \frac{1}{2}\ell) = \frac{6.7}{7}h$. Cette circonférence étant divisée par la vitesse C donne le tems d'une revolution de la roue en secondes

$$T = 1,9202. Vh.$$

Et comme les meules tournent en 2 secondes, on aura

$$n \equiv \frac{5}{2}T \equiv 4,800. Vh,$$

le nombre *n* indiquant les tours de la meule répondans à un tour de la roue à eau. Enfin on a $P = \frac{3^2 \cdot 47}{C}$ livres, & $M = \lambda \cdot C = \frac{74 \cdot 3}{A}$ piés cubiques d'eau.

XVI.

Il ne reste donc qu'à supposer h successivement = 1, 2, 3 &c. piés de Rhin, pour avoir la Table suivante.

h	ļ C pićs.		1	y		r		r	λ		C		P	T		, n		M	
piés. 1			p.		P.		p.		p.		p.		her,	fec.				p. cub,	
	0,	17	0,	08	0,	23	0,	75	198,	6	2,	18	1488	I,	91	4,	80	74,	30
2	0,	34	0,	15	0,	46	1,	50	35,	1	,3,	09	1050	12,	72	6,	80	37.	15
3	0,	51	0,	23	0,	68	2,	26	12,	7	3,	78	859	3,	33	8,	31	24,	77
4	0,	69	0,	30	0,	91	3,	01	6,	2	4,	36	744	3,	84	9,	60	18,	57
5	0,	86	0,	38	ı,	14	3,	76	3,1	7	4,	88	665	4,	28	10,	70	14,	86
6	1,	03	0,	46	1,	37	4,	51	2,2	5	5,	35	607	4,	70	11,	76	12,	31
7	1,	20	0,	53	I,	60	5,	26	1,5	3	5,	77	563						
8	f,	37	0,	60	1,	83	6,	01	1,1	0	6,	17	526	5,	43	13,	58	9,	29
9	1,	54	0,	68	2,	05	6,	77	0,8	1	6,	55	496	5.	76	14,	40	8,	26
10	1,	71	0,	76	2,	28	7.	52	0,7	7	6,	90	471	6,	07	15,	18	7,	43

XVII.

On voit par cette Table que lorsque h < 3 piés la longueur des aubes A devient fi grande & leur largeur & fi petite qu'il vaut mieux faire abstraction de ces cas. On voit encore que réciproquement la longueur devient petite & la largeur grande à mesure que h va en croissant, de sorte que cette hauteur ne doit gueres aller au delà de 10 piés. C'est donc la condition d'éviter la disproportion entre la longueur & la largettr des aubes, qui acheve de déterminer ce que nos formules laissoient encore indécis, & nommément les limites de la hauteur h. La colonne M indique la dépense d'eau requise pour faire aller le moulin. Mais la dépense totale # est plus grande. Les aubes qui sont dans l'eau perdent de leur poids autant que pese l'eau dont elles occupent la place. Pour réparer cette perte il faut augmenter le poids P, ce qu'on obtient en faisant les aubes plus longues en raison du volume actuel de l'eau en SBLT au volume qu'elle auroit si les aubes n'y étoient pas. Ensuite comme l'eau qui passe entre le canal & la roue doit être fournie par la riviere, cela demande que la section du canal en ED foit & plus haute & plus large que ne la donnent les valeurs de 6, A que nous venons de déterminer.

XVIII.

Toutes ces remarques répondent très bien à ce que les artifans ont appris par routine & par expérience. Car lorsque l'eau n'a que tout au plus 3 ou 4 piés de hauteur ou de chûte, on se sert des roues qui prennent l'eau par dessous, & l'affluence doit être fort grande. J'ai examiné l'effet de ces roues dans le Mémoire précédent. Si au contraire la hauteur h va au delà de 1 o piés, on préfere les roues où l'eau tombe en dessus. Lorsqu'enfin la hauteur h va fort au delà de 10 piés, les roues ne sont plus de grand usage, à moins qu'on ne les arrange tout autrement.

Quant aux roues que nous venons d'examiner, il y a encore quelques circonstances auxquelles il convient d'avoir égard. J'ai dit ci-dessus que le canal BL doit serrer d'assez près la roue pour qu'il s'échappe aussi peu d'eau Cela doit s'entendre principalement de la partie inféqu'il est possible. rieure du canal. L'eau qui est entre les aubes AB, TL agit par pression, & il est clair que si le canal en BL étoit bien bouché tant aux deux côtés de la roue qu'au dessous de l'aube LT, cette aube auroit à soutenir une pression égale au poids d'un prisme d'eau, dont la hauteur seroit = FI & la base égale à la surface de l'aube. Cette pression agit perpendiculairement sur l'aube LT, de sorte que si cette aube est inclinée comme dans la premiere Figure, la pression doit être résolue en deux autres, dont les directions paralleles aux droites HK, IH. C'est cette derniere qui fait tourner la roue, & on trouve qu'elle est égale à celle qui auroit lieu si l'aube étoit dirigée vers le centre & n'avoit qu'une largeur égale à AB. Les aubes placées entre SB & TL ne fouffriroient d'autre pression qu'en ce que l'eau les pousseroit plus fortement vers en haut que vers en bas. là ce qui leur fait perdre dans l'eau une partie de leur poids. Mais le cas où le canal s'ajuste si bien à la roue ne sauroit avoir lieu. Il faut laisser au moins affez d'espace pour que la roue tourne librement. Ainsi une partie de l'eau passe entre la roue & le canal. J'ai dit ci-dessus que cette eau doit être fournie directement par le canal, afin d'empêcher d'autant mieux que les aubes ne se vuident avant que de parvenir en LT. C'est donc, pour

lant ne laisse pas d'exercer contre l'eau qui est dans les aubes une pression un peu moins grande que dans le cas précédent. Mais il faut que la quantité d'eau qui s'échappe, soit fort petite. C'est surtout des deux côtés de la roue & vers en bas en L que le canal doit la serrer de près. On peut par en haut lui donner plus de prosondeur, parce que par-là les aubes se remplissent plus facilement, lorsqu'on commence à faire aller la roue, & la pression conserve mieux toute sa force.

XX.

Les moulins offrent encore une circonstance à laquelle il faut avoir égard. Les expériences rapportées dans le Mémoire précédent nous ont fait voir qu'il faut plus de force pour mettre le moulin en mouvement qu'il n'en faut pour le conserver dans l'état de permanence. La dissérence est environ comme 10 à 7 ou comme 4 à 3. Si donc la roue est construite conformément à l'état de permanence, l'eau semble avoir trop peu de force pour que le mouvement puisse commencer. Le surplus de force qu'il y faut se trouve dans la chûte de l'eau en DB. Cette chûte produit un choc, parce que la roue est d'abord sans mouvement. C'est encore par cette raison que l'espace AbBS se remplit d'eau, le canal étant sermé de tout côté jusqu'en Bb. Cela fait que l'esset est égal au poids d'une colonne d'eau dont la hauteur est E = E = E + y, & la base E = E + y. Reste à voir si ce poids suffit, c'est à dire si la hauteur EI est à la hauteur EI comme 10 à 7. Or nos formules nous donnent

$$EI = h - \frac{1}{2} \epsilon = \frac{32}{35} h,$$

$$FI = h - \frac{3}{2} \epsilon - y = \frac{2}{3} h.$$

Donc

$$EI:FI = 48:35 = 100:73,$$

de sorte que les formules précédentes donnent très bien ce surplus de force, & à cet égard elles n'ont pas besoin d'être changées. D'ailleurs quand il s'agit de la pratique, il convient à tous égards de donner à l'eau plus de force & plus d'affluence que les formules ne demandent, afin d'obvier d'avance à tous les obstacles dont la théorie ne tient pas compte & qui pourtant ne laissent pas de survenir.

XXI.

Quoique la seconde Figure représente l'arrangement de la roue & du canal conformément au double minimum que les quantités 6x & 6 admettent, il y a pourtant des cas où la grandeur de la roue se détermine par Cela fait que l'angle P peut devenir plus ou d'autres circonstances. moins grand que 90 degrés. Car si le rayon de la roue KB est donné, de même que la hauteur PF, on aura

$$\tau - cof \phi = \frac{PF}{KB}$$

de sorte qu'alors l'angle & est déterminé. La troisieme Figure représente une roue & le canal pour le cas où cof $\phi = -\frac{2}{16}$. Cet arrangement a l'avantage que quand il s'échapperoit un peu d'eau des aules inférieures, l'eau qui est entre les aubes supérieures répareroit cette perte, en ce qu'elle peseroit d'autant plus efficacement sur les aubes, que ces aubes sont les plus éloignées de la verticale KL. Du reste, suivant ce que j'ai remarqué (§. XIX), le fond du canal n'a pas besoin d'être recourbé si en avant en B, comme il est marqué dans la Figure.

XXII.

Mr. Siebike m'a communiqué les dimensions d'un moulin dont la roue à cau & la position du canal sont à quelque différence près comme dans la premiere Figure. L'eau ne fort pas par toute la hauteur ED qui est de Fg. t. 16 pouces, mais par un ajutoir qui a 61 pouces de hauteur & dont la largeur est égale à celle du canal. Le rayon de la roue $KB = 6\frac{1}{5}$ piés, $AB = 6 = 6\frac{1}{2}$ pouces, & $\lambda = 28$ pouces. Cela donne le rayon moyen r — 1 6 = 6 piés 2 pouces, & la circonférence répondante = 39,15 piés. Or la roue tourne 94 fois en 485 secondes de tems. Donc la vitesse moyenne de la roue est = C = 7,588 piés par seconde. L'eau se jette dans les aubes de maniere qu'elle ne fait que les remplir. La hauteur FI est de 4 piés 2 pouces. Cette hauteur étant multipliée par $\lambda \in \frac{2x}{2}$ piés quarrés donne 5,266 piés cubiques d'eau, lesquels étant multipliés par 65 donnent

un poids de 345 livres. De ce poids il faut soustraire ce que la roue entant qu'elle est dans l'eau perd de son poids. Or il y a de B en H 8 aubes, qui font un volume de ot pié cubique. Outre cela les aubes sont fermées des deux côtés par un plan circulaire ou annulaire, dont le volute de B en H est de 219 piés cubiques. La somme de ces volumes fait 310 piés cubiques. La multipliant par 65 de on trouve que cela fait un poids de 221 livres. Ce poids doit être diminué dans le rapport de l'arc HB à la hauteur FI, qui est celui de 7 \$ à 4 1. Par là il se réduit à 1 18 livres, & c'est ce qu'il faut soustraire de la force de l'eau = 345, pour avoir la force réellement employée pour faire équilibre à la résistance. Cette force est donc de 227 livres. La meule tournante pese 1915 livres; elle fait 2 tours par seconde & son diametre est de 441 pouces. Cette vitesse & ce diametre sont à peu près les mêmes qu'au moulin examiné dans le Mémoire précédent. Mais le poids est ici un peu plus grand. Cela fait qu'ici la force appliquée aux = du rayon de la meule peut être évaluée à 90 livres. Car dans le Mémoire précédent cette force pour deux meules tournantes étoit de 171 livres. Ici il n'y a qu'une meule. Ainsi cette force se réduiroit à la moitié, qui est 85 1 livres. Je pose 90 livres, parce qu'ici la meule est d'autant plus pe-Cette force étant réduite au rayon moyen de la roue à eau, devient = 214 livres. Car pendant une révolution de cette roue la meule en fait 12, & $\frac{2}{3}$ e $\equiv \frac{89}{72}$ piés, $r = \frac{1}{2}$ G $\equiv \frac{299}{45}$ piés. Cela donne

 $90.12.\frac{89}{72}.\frac{48}{299} = 214.$

Ainsi la force de l'eau requise pour faire équilibre à la résistance tant du frottement que du broiement du blé est = 214 livres. Le calcul précédent nous donne 227 livres. La dissérence n'est que de 13 livres & par conséquent autant que nulle, parce que dans ces sortes de machines il n'y a pas moyen de tenir compte de toutes les minucies.