REMARQUES
ſur les moulins & autres machines où l'eau tombe en deſſus de la roue.

PAR MR. LAMBERT.

I.

Les roues à eau que je vais conſidérer dans ce Mémoire ſont arrangées de telle ſorte que l'eau y agit principalement par ſon poids, parce qu'elles portent l'eau qui tombe dans les vannes, qui ne ſe vuident entierement que lorſque les aubes commencent à avoir une poſition horiſontale VW. Les vannes près de R ſont toutes pleines, & en deſcendant l'eau tombe dans les vannes inférieures, qui ſans cela ſeroient moins remplies. Cela fait que de R juſqu'en M les vannes ſont ou peu s'en faut toutes pleines d'eau, & s'il y en manque les vannes de M en V en retiennent encore aſſez pour y ſuppléer. C'eſt donc tout au moins l'eau qui ſe trouve dans l'eſpace $MmSBM$, qui peſe ſur la roue, & ſa force équivaut au poids de $\lambda\beta(r - \frac{1}{2}\beta)$ piés cubiques d'eau. J'avertis ici que je laiſſe aux lettres λ, β, r, h, y, x, V, M, μ &c. la même ſignification qu'elles ont dans les deux Mémoires précédens.

II.

Cette force peut être doublée ſi au poids de l'eau nous joignons ſa preſſion; ce qui aura lieu ſi l'on entoure la roue d'un manteau ou canal circulaire $RMVT$, qui la ſerre tant en dehors qu'aux deux côtés d'auſſi près qu'il eſt poſſible ſans que le mouvement de la roue en ſoit arrêté. Si les vannes au deſſus de M ſe conſervent d'elles-mêmes pleines d'eau, on n'aura pas beſoin de continuer ce canal ou ce manteau de M juſqu'en R, mais on fera néanmoins très bien de l'allonger ou de le continuer dans la direction verticale MQ. C'eſt le moyen le plus ſûr de conſerver les vannes pleines d'eau juſqu'en M, où le canal MVT qui les ſerre de près continuera d'empêcher l'eau d'en ſortir, ſurtout lorſqu'on fait en ſorte que l'eau s'amaſſe plus abondamment dans l'entonnoir QMp, pour ſuppléer à ce qui ſort par l'eſpace qu'il faut laiſſer entre le canal MT & la roue. La force de l'eau ſera donc égale au poids de $\lambda \zeta (2r - \zeta)$ piés cubiques d'eau, & cette force eſt cenſée appliquée à la diſtance $= r - \frac{1}{2}\zeta$ du centre de la roue K. J'entens qu'il faut la diminuer en raiſon de tout l'eſpace $SBMLTmS$ à l'eſpace qu'occupe l'eau, parce que les aubes qui ſont au deſſus de M diminuent la maſſe & par conſéquent le poids de l'eau, & que tout le bois de la roue & des aubes au deſſous de M ou de Qp qui eſt dans l'eau, perd de ſon poids autant que peſe l'eau dont il occupe la place. Si l'on ne veut pas faire cette réduction, on allongera d'autant plus les aubes, ce qui peut s'exécuter même après que tous les calculs ſont faits.

III.

Soit UB la direction & la viteſſe de l'eau qui en B tombe dans les vannes, CB la direction & la viteſſe du point B de la roue. Si donc on transfere ce mouvement de la roue ſur l'eau qui tombe en B, dans une direction oppoſée BC, le mouvement compoſé de l'eau qui en réſulte, aura la direction & la viteſſe UC, & l'aube BS doit avoir une poſition parallele à UC. Voilà donc ce qui ſert à déterminer l'angle SBK que les aubes doivent former avec le rayon de la roue KB. Si on faiſoit cet angle plus grand, l'eau frapperoit l'aube en contreſens, & c'eſt ce qu'il faut éviter. Il ne ſert de rien de rendre cet angle plus petit, parce que l'eau frapperoit l'aube ſous un angle d'incidence aſſez petit, & les vannes depuis R en M ſe déſempliroient d'autant plus facilement, ce qu'il faut tâcher d'éviter.

IV.

On fait bien encore de donner au canal en BD une courbure parabolique, qui réponde à la viteſſe de l'eau en D, parce qu'elle découlera ainſi ſur la roue de la maniere la plus naturelle, & nous aurons ici l'équation

$$\text{tang}\,\psi = \sqrt{\frac{\beta}{y}},$$

$$\text{coſ}\,\psi = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(\beta + y)}},$$

$$\text{ſin}\,\psi = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{(\beta + y)}}.$$

V.

Faiſons l'angle $SBV = \omega$, nous aurons l'angle $BUC = \psi - \omega$, & le rapport des viteſſes

$$BU : BC = \text{coſ}\,\omega : \text{ſin}(\psi - \omega) = 1 : (\text{ſin}\,\psi - \text{coſ}\,\psi \,.\, t\,\omega)$$
$$= \sqrt{(\beta + y)} : [\sqrt{\beta} - \sqrt{y} \,.\, \text{tang}\,\omega].$$

Or la viteſſe

$$BC = C \,.\, \frac{r}{r - \frac{1}{2}\beta} = \frac{4r\sqrt{(\beta g)}}{3(r - \frac{1}{2}\beta)},$$

& la viteſſe

$$BU = 2\sqrt{[g(\beta + y)]}.$$

Donc

$$2\sqrt{g(\beta + y)} : \frac{4r\sqrt{\beta g}}{3(r - \frac{1}{2}\beta)} = \sqrt{(\beta + y)} : [\sqrt{\beta} - \sqrt{y} \,.\, t\,\omega],$$

d'où ſuit

$$\text{tang}\,\omega = \frac{2r - 3\beta}{3(2r - \beta)} \,.\, \sqrt{\left(\frac{\beta}{y}\right)},$$

ou bien

$$\text{tang}\,\omega = \frac{1}{3}\,\text{tang}\,\psi \,.\, \frac{2r - 3\beta}{2r - \beta}.$$

Ainſi la tangente de l'angle SBK n'eſt qu'un peu moins grande que le tiers de la tangente de l'angle NBU.

VI.

Si l'effet de la machine eſt donné, le produit PC eſt une quantite donnée, & pour les moulins on a $PC = \frac{2}{3}Gpg$. Or

$$P = \tfrac{131}{2}\lambda\beta(2r - \beta) = \lambda\beta(h - \beta - y - \tfrac{1}{2}\beta - \tfrac{1}{7}\beta)$$
$$= \lambda\beta(h - 2\beta - y) . \tfrac{131}{2} \text{ livres.}$$
$$C = \tfrac{4}{3}\sqrt{(\beta g)}.$$

Donc

$$\tfrac{2}{3}Gp = \tfrac{262}{3}\lambda\beta^{3:2}(h - 2\beta - y) . \sqrt{g}.$$

Or comme nous avons à très peu près

$$t\omega = \tfrac{1}{3}\sqrt{\frac{\beta}{y}},$$

cela donne

$$y = \frac{\beta}{9 . t\omega^2}.$$

Faiſant donc l'angle $\omega = SBK = 30°$, cette équation ſe réduit à

$$y = \tfrac{1}{3}\beta.$$

Et nous aurons ainſi

$$\tfrac{2}{3}Gp = \tfrac{262}{3} . \lambda\beta^{3:2}(h - \tfrac{7}{3}\beta) . \sqrt{g}.$$

VII.

Cette équation nous donnera pour le produit $\lambda\beta$ un *minimum* lorſque

$$(h - \tfrac{7}{3}\beta) . \sqrt{\beta} = \textit{maximum}.$$

Cela arrive en faiſant $\beta = \frac{1}{7}h$. Donnant donc cette valeur à β, nous aurons de plus

$$y = \tfrac{1}{21}h.$$
$$x = \frac{2}{7\sqrt{3}}h,$$
$$t\psi = \sqrt{3}, \qquad \psi = 60°,$$
$$r = \tfrac{17}{42}h.$$

Ainſi les valeurs y, x, r, β ſont dans un rapport conſtant de h. C'eſt ſuivant ces rapports que la Figure eſt deſſinée.

VIII.

J'ai fait l'angle $\omega = 30^\circ$, comme par maniere d'exemple. Mais il ſuffira de le regarder d'abord comme donné, & on aura

$$\left(h - 2\beta - \frac{\beta}{9\,\mathrm{tang}\,\omega^2}\right)\sqrt{\beta} = maximum.$$

Cela demande qu'on faſſe

$$\beta = \frac{3h\,.\,\mathrm{tang}\,\omega^2}{18\,\mathrm{tang}\,\omega^2 + 1}.$$

Par là on obtient

$$y = \frac{h}{54\,\mathrm{tang}\,\omega^2 + 3}$$

$$2\beta + y = \frac{(18\,\mathrm{tang}\,\omega^2 + 1)h}{54\,\mathrm{tang}\,\omega^2 + 3} = \tfrac{1}{3}h,$$

$$h - 2\beta - y = \tfrac{2}{3}h,$$

de ſorte que la hauteur $h - 2\beta - y$, à laquelle la force de l'eau eſt proportionnelle, eſt $= \frac{2}{3}h$, quel que ſoit l'angle ω. Par là le *maximum*

$$(h - 2\beta - y)\sqrt{\beta}$$

ſe change en

$$\tfrac{2}{3}h\sqrt{\beta} = \tfrac{2}{3}h\sqrt{\left(\frac{3h}{18 + \cot\omega^2}\right)} = maximum.$$

Ce *maximum* devient donc d'autant plus grand que l'angle ω eſt plus grand. Il ceſſe même d'être un *maximum*, parce que $\cot\omega$ peut aller à l'infini, ſi on veut ſuppoſer l'angle ω variable. Ainſi il faut ſe borner à une grandeur donnée. Je l'ai fait $= 30^\circ$, ce qui a donné $\beta = \frac{1}{7}h$. Si on le poſe $= 45^\circ$, on aura $\beta = \frac{3}{19}$. Or $\sqrt{\frac{1}{7}}$ ne differe de $\sqrt{\frac{3}{19}}$ que comme $\sqrt{19}$ à $\sqrt{21}$. Ainſi la différence n'eſt que de 1 ſur 20.

IX.

Laiſſant donc à l'angle ω la valeur de 30°, nous aurons

$$\tfrac{3}{4}Gp = \tfrac{262}{3}\,.\,\lambda\,.\,\tfrac{1}{7}\sqrt{\tfrac{1}{7}}\,.\,\tfrac{2}{3}h^{3:2}\,.\sqrt{g}$$

ce qui donne

$$\lambda = \frac{21 \cdot \sqrt{7} \cdot Gp}{262 h^{5:2} \sqrt{g}}.$$

Si donc pour les moulins nous faiſons comme dans les deux Mémoires précédens

$$Gp = 4870,$$

nous aurons

$$\lambda = \frac{261,17}{h^{5:2}},$$

ce qui donne

$h =$	4	5	6	7	8	9	10	11	12	&c.
$\lambda =$	8,16	4,67	2,96	2,02	1,44	1,07	0,82	0,65	0,52	
$\epsilon =$	0,57	0,51	0,86	1,00	1,14	1,27	1,43	1,57	1,71	

Nous voyons par-là que la proportion entre λ, ϵ eſt aſſez bonne, lorſque h eſt de 7, 8 juſqu'à 12 piés, d'autant plus que ſuivant ce que j'ai dit (§. II.) la longueur des aubes doit être faite plus grande que ne la donne ce calcul. Poſant donc ſucceſſivement $h = 7, 8, 9 \ldots 12$, on aura la Table ſuivante.

h	ϵ	y	x	r	λ	C	P	T	n	M
piés.	p.	p.	p.	p.	p.	p.	livr.	ſec.		p. cub.
7	1,00	0,33	1,15	2,83	2,02	5,27	616	3,38	8,45	10,55
8	1,14	0,38	1,32	3,22	1,44	5,63	577	3,61	9,02	9,23
9	1,27	0,42	1,48	3,63	1,07	5,94	547	3,83	9,57	8,21
10	1,43	0,48	1,65	4,04	0,82	6,30	515	4,04	10,10	7,38
11	1,57	0,52	1,81	4,45	0,65	6,60	495	4,23	10,57	6,71
12	1,71	0,57	1,98	4,86	0,52	6,89	471	4,42	11,05	6,15

Cette Table peut être comparée à celle que j'ai donnée dans le Mémoire précédent. On obſervera encore à l'égard de l'une & de l'autre, que ſi pour une hauteur h donnée l'affluence de l'eau eſt deux, trois &c. fois plus grande par ſeconde que les nombres correſpondans des colonnes M, on peut au lieu de deux moulins en faire aller trois, quatre ou d'avantage; & que d'un autre côté l'on n'aura qu'un moulin lorſque l'affluence de l'eau n'égale pas les nombres M répondans à la hauteur donnée h. Si cette hauteur va au delà de 12 piés, on pourra, au lieu d'une roue qui fait tourner deux meules, placer deux roues de suite dont chacune ne fasse tourner qu'une meule. C'est en partageant la hauteur h en deux parties. Mais dans ce cas l'affluence de l'eau doit être celle qui répond à la hauteur $= \frac{1}{2} h$, c'est à dire qu'elle doit être double de ce que demande la hauteur entiere, si chacune des deux roues doit faire tourner deux meules.

X.

Les roues considérées dans ce Mémoire de même que dans le précédent, s'accordent en ce qu'il n'y a que les deux tiers de la hauteur totale h qui soient employés à faire équilibre à la résistance de la machine. L'autre tiers semble devoir être destiné à produire & à conserver la vitesse de la roue. Mais cela n'est pas. Car dans les trois premieres Figures ce tiers de la hauteur h se trouve partagé en trois parties, parce que

$$\frac{1}{3} h = ED + DF + IP.$$

Et dans la quatrieme Figure on a

$$\frac{1}{3} h = ED + DF + Ff + IP.$$

Or la hauteur ED toute seule suffiroit pour fournir à la roue la quantité d'eau requise pour conserver les vannes toujours pleines d'eau. La partie DF est nécessaire afin que les vitesses BC, BU ayent entr'elles le rapport que demande la position des aubes. Or $ED + DF$ ne font pas encore le tiers de la hauteur h. Mais comme la roue doit être au dessus de l'eau en L, & que la pression de l'eau n'est censée agir que jusqu'à la profondeur HI, cela fait qu'aux parties $ED + DF$ il faut encore joindre $IP = \frac{1}{2} \zeta$. Et par une raison toute semblable la quatrieme Figure demande qu'à ces parties on joigne encore $Ff = \frac{1}{2} \zeta$. Voilà donc comment ces roues font qu'au lieu de la hauteur entiere h, qui pourroit être employée s'il n'étoit question que de l'équilibre, on ne peut en employer que les deux tiers, & que l'autre tiers n'est requis tout entier pour la vitesse que parce que c'est une *roue* qu'on fait tourner. Et entant que cette roue tourne dans l'eau, & que le canal ne la serre pas exactement, c'est encore une raison de plus qui augmente la dépense d'eau sans que la force en soit augmentée.

XI.

XI.

Avec tout cela ces roues ont encore beaucoup d'avantage ſur celles que l'eau frappe par en bas dans une direction horiſontale, & où par conſéquent elle n'agit ni par ſon poids ni par la preſſion, mais par le choc. Car pour ces ſortes de roues la hauteur requiſe pour faire équilibre à la réſiſtance de la machine, bien loin d'être $= \frac{2}{3}h$, n'eſt que $\frac{4}{9}(h - \frac{1}{2}\beta)$, ce qui ordinairement n'eſt que $\frac{1}{3}h$ ou $\frac{1}{4}h$. Auſſi Mr. *Parent* a-t-il fait voir il y a longtems que la quantité de mouvement ou le moment ſtatique de ces roues n'eſt que la $\frac{4}{27}$ partie de ce qu'il ſeroit ſi la roue ne tournoit pas. Car dans ce dernier cas ce moment ſeroit $= 2\lambda\beta(h - \frac{1}{2}\beta)^{1:2}h\sqrt{g} = Mh$, tandis que ſi la roue tourne avec le tiers de la viteſſe moyenne de l'eau, ce moment n'eſt que $\frac{8}{27}(h - \frac{1}{2}\beta)^{3:2}\lambda\beta \,.\, \sqrt{g} = \frac{4}{27}M(h - \frac{1}{2}\beta)$. Quant aux autres roues ces mêmes momens ſont Mh & $\frac{2}{3}Mh$. Il ſuit de là que le meilleur uſage des forces de l'eau dépend très conſidérablement de la maniere dont on la fait agir.

XII.

Lorſqu'il s'agit de conſtruire un moulin ſur une riviere, on commence par déterminer tant l'affluence que la chûte de l'eau. J'ai déſigné cette hauteur par h, & par M le nombre de piés cubiques d'eau que la riviere amene à chaque ſeconde dans la ſaiſon où cette affluence eſt la moins abondante. Or nous avons

$$P = \tfrac{2}{3}h\lambda\beta \,.\, 65\tfrac{1}{2} \text{ livres.}$$
$$C\beta\lambda = M,$$

d'où ſuit

$$\frac{3CP}{131} = hM.$$

Et comme (Art. IV. IX.)

$$PC = \tfrac{2}{3}Gpg = 3249,$$

cela nous donne

$$hM = 74,405.$$

Voilà donc la valeur que ce produit hM doit avoir tout au moins, si la roue doit faire tourner deux meules égales à celles que j'ai décrites dans le premier Mémoire & si l'effet doit être le même. Il faut même que ce produit soit plus grand à cause de l'eau qui se perd.

XIII.

Jusqu'à présent j'ai supposé que les auges de la roue se remplissent entierement. Cela ne se peut gueres lorsque la hauteur de la chûte est fort grande, mais l'affluence de l'eau d'autant plus petite. Nos formules dans ces cas donneroient tant aux auges qu'au canal une figure trop disproportionnée, en ce que ζ deviendroit fort grande & λ fort petite (Art. IX). On arrangera donc ces valeurs de telle sorte que l'eau qui en R tombe dans chaque vanne, y reste jusqu'à ce qu'elle soit descendue bien au dessous du niveau du centre K. Et de cette maniere le manteau VT ne s'étendra que jusqu'aux aubes, dont l'eau commenceroit à découler si on ne l'empêchoit par ce moyen.

XIV.

Fig. 4. Ainsi p. ex. lorsque le diametre LB est de 28 piés, Bb n'aura pas besoin d'avoir plus d'un pié, & l'affluence de l'eau ne sera gueres plus grande que de 2 piés cubiques par seconde. La roue pourra tourner une fois en 11 secondes de tems. Ainsi pendant qu'elle fait un tour, les vannes ne recevront gueres au delà de 22 piés cubiques d'eau. Si donc il y a 44 vannes, chacune recevra un demi pié cubique d'eau. Or en faisant $b = 1$ pié, chaque vanne pourroit contenir près de 3 piés cubiques d'eau, ainsi 6 fois plus que ce qu'elle reçoit. Elle descendra donc fort bas avant que de commencer à se vuider. Or des 44 vannes il y en aura 18 chargées de l'eau qu'elles ont reçues, l'arc BV pouvant être de 150 degrés. Or si toutes les 22 vannes qui occupent la demi-circonférence BML portoient l'eau qu'elles ont reçue, & dont la quantité monte à 11 piés cubiques, le poids de cette masse réduit au point M diminue dans le rapport de la demi-circonférence au diametre, & devient par conséquent égal au poids de 7 piés cubiques. Ces 7 piés cubiques doivent encore être réduits en raison de de BL à $\zeta\omega$, ou environ en raison de 11 à 10. Par là on aura environ

$6\frac{1}{3}$ piés cubiques ou 415 livres de poids, pour la force de l'eau contenue dans les vannes de B en V, cette force étant ſuppoſée réduite au point μ, & agiſſant ſur un levier μK de $13\frac{1}{2}$ piés. Or chacune des deux meules tournantes fait $2\frac{1}{2}$ tours par ſeconde, & par conſéquent $27\frac{1}{2}$ tours pendant que la roue à eau n'en fait qu'un. Le poids appliqué aux deux tiers du rayon des meules tournantes eſt de 171 livres, & ces deux tiers du rayon ſont de $\frac{11}{9}$ pié. Multipliant donc 171 par $\frac{11}{9}$, & ce qui en réſulte par $27\frac{1}{2}$ & diviſant ce dernier produit par $\kappa\mu = 13\frac{1}{2}$ piés, nous aurons 426 livres, qui doivent équivaloir à la force de l'eau réduite au point μ. Le calcul précédent nous a donné 415 livres, ce qui ne différant que de 11 livres en moins, on voit que pour peu que l'affluence de l'eau ſoit plus grande que de deux piés par ſeconde, la roue à eau fera tourner deux meules telles que ſont celles que j'ai décrites dans le premier Mémoire. Du reſte je n'ai fait ce calcul qu'en gros, pour faire voir que dans les cas où la chûte de l'eau eſt fort grande on fait bien d'arranger la roue de maniere que les vannes ne reçoivent que peu d'eau, & qu'elles reſtent vuides en grande partie. En effet ſi nous ſuppoſons que la roue ne faſſe un tour qu'en 22 ſecondes de tems, de ſorte que ſa viteſſe ſoit réduite à la moitié, chaque vanne recevra 2 fois plus d'eau, mais les vannes commenceront à ſe vuider avant qu'elles ſoient deſcendues juſqu'au 150me degré. Cela diminue l'effet, & on eſt d'autant plus obligé d'avoir recours au manteau VT.

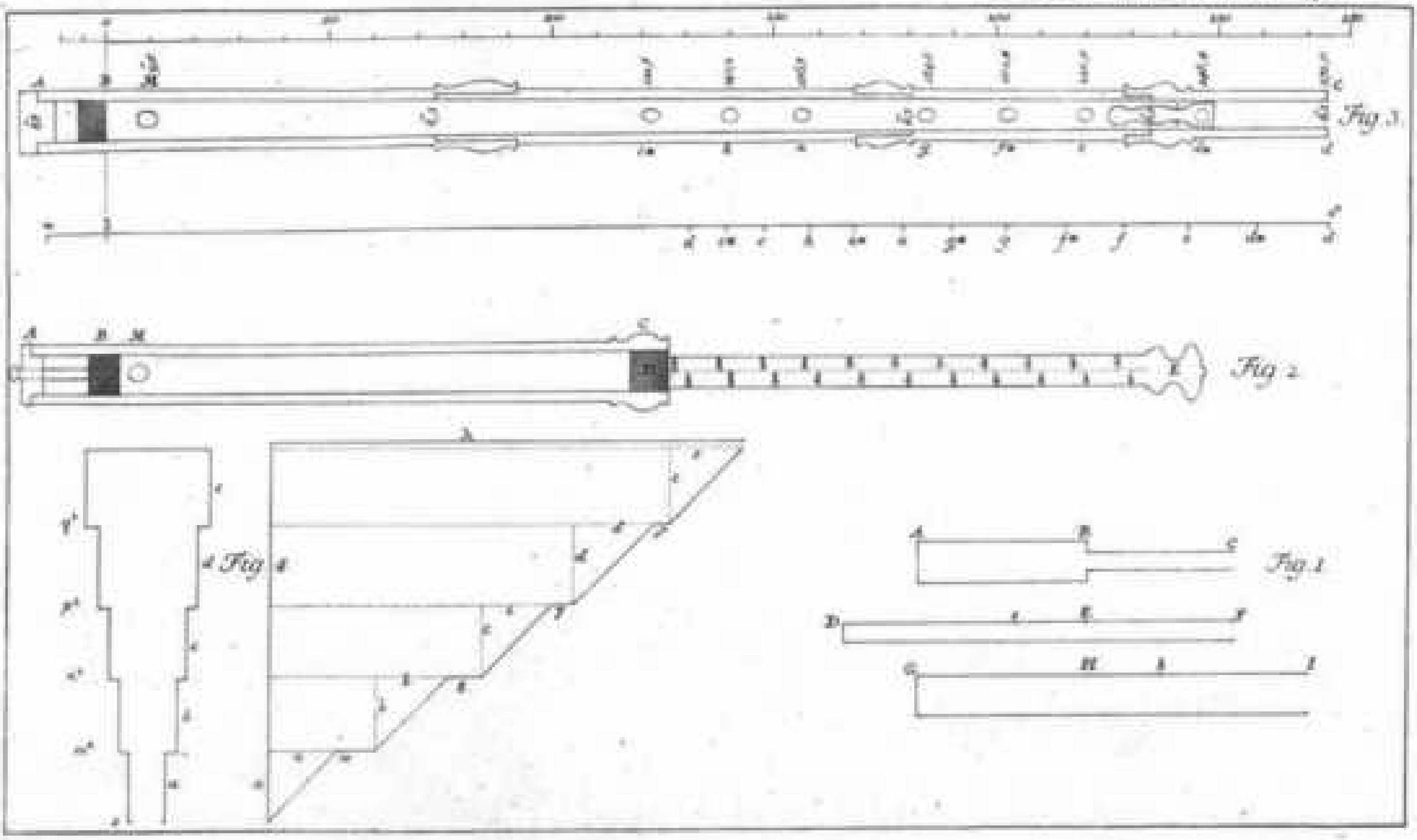
Fig. 3.
Fig. 2
Fig. 4
Fig. 1

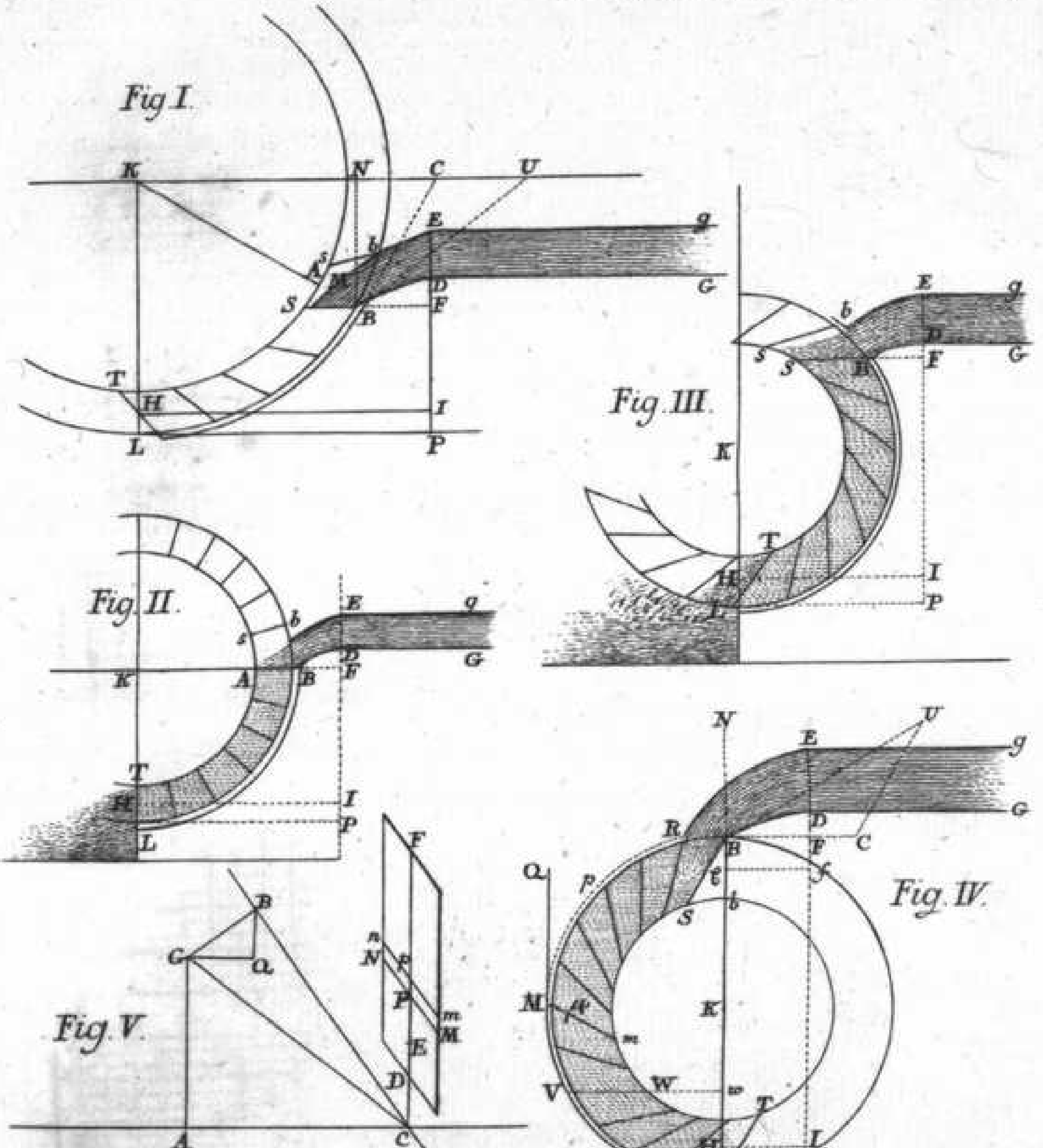
Fig I.
Fig. II.
Fig. III.
Fig. IV.
Fig. V.