REMARQUES
sur les moulins à vent.

PAR MR. LAMBERT.

I.

Soit AC la direction & la viteſſe du vent, & en même tems l'axe de la roue prolongé, FD une des ailes, que je ſuppoſe perpendiculaires à l'axe en ſorte que l'angle FCA ſoit droit, mais qu'elles déclinent de l'axe d'un angle $= BCA$. Soit de plus AC la direction & la viteſſe d'un point quelconque de l'aile P. Si ce mouvement du point P eſt transféré ſur le vent, la direction & la viteſſe compoſée du vent ſera GC, & ſon angle d'incidence GCB. Et ſi la droite CF diviſe partout la largeur de l'aile NM en deux parties égales NP, PM, la force du vent qui agit ſur l'élément de la ſurface $MNnm$ eſt cenſée concentrée ſur l'élément Pp.

II.

Poſons

$$\begin{aligned}
\text{l'angle } BCA &= \omega,\\
GCA &= \varphi,\\
\text{la viteſſe } AC &= V,\\
CF &= \lambda,\\
NM &= \varrho,\\
CP &= x, \qquad Pp = dx,\\
CE &= 1,
\end{aligned}$$

on conſidérera E comme le point auquel la force du vent doit être réduite, & on fera la viteſſe avec laquelle ce point tourne $= C$. Ce qui étant établi, on aura

$$AG = V \operatorname{tang} \phi = xC,$$
$$\operatorname{tang} \phi = \frac{xC}{V},$$
$$GC = V \sec \phi.$$

Soit de plus g la chûte des corps dans une seconde de tems, $\varkappa$ le poids d'un pié cubique d'air; la force relative du vent sur l'élément $MNnm$ sera $GP = \frac{\varkappa V^2 . \sec \phi^2 . \sin (\omega - \phi)^2 \zeta dx}{4g}$. Cette force GB étant résolue en GQ perpendiculaire & QB parallele au mouvement du point P, il n'y a que cette derniere qui fasse tourner l'aile. Or $BQ = GB \cos \omega$; donc la force qui tend à faire tourner l'élément $NMmn$ ou à faire équilibre à la résistance de la machine est

$$= \frac{\varkappa . V^2 . \sec \phi^2 . \sin (\omega - \phi)^2 . \cos \omega . \zeta dx}{4g}.$$

Pour réduire cette force au point E il faut l'augmenter dans le rapport de CE à CP; elle sera donc

$$dP = \frac{\varkappa V^2 \sec \phi^2 . \sin (\omega - \phi)^2 \cos \omega . \zeta r dx}{4g},$$

équation dont l'intégrale donnera la force totale du vent réduite au point E.

III.

Comme on a

$$x = \frac{V \operatorname{tang} \phi}{C}$$

substituant cette valeur dans l'équation dz, en regardant ϕ comme variable, on aura

$$dP = \frac{\zeta \varkappa V^4 \sec \phi^2 . \sin (\omega - \phi)^2 \cos \omega . t \phi . dt \phi}{4gCC}$$

ou bien

$$dP = \frac{\zeta \varkappa V^4 . (\sin \omega - \cos \omega \, t \phi)^2 . \cos \omega . t \phi . dt \phi}{4gCC}.$$

IV.

Si donc dans cette équation on regarde ζ, V, C, ω comme des quantités conſtantes, on aura l'intégrale

$$P = \frac{\zeta \varkappa V^4 \cos\omega}{4 \varepsilon CC} . (\tfrac{1}{2} \sin\omega^2 \, t\Phi^2 - \tfrac{2}{3} \sin\omega \cos\omega \, t\Phi^3 + \tfrac{1}{4} \cos\omega^2 \, t\Phi^4) + \text{conſt.}$$

Je ferai la conſtante $= 0$, en ſuppoſant que l'aîle s'étend juſqu'à l'axe C. La force du vent n'en devient qu'un peu plus grande, & on pourra toujours dans la ſuite en tenir compte. La force P ſera celle qui agit ſur toute l'aîle lorſqu'on prend l'angle Φ tel qu'il répond à toute la longueur $CF = \lambda$, ce qui arrive en faiſant

$$t\Phi = \frac{\lambda C}{V}.$$

C'eſt cette valeur que je retiendrai dans la ſuite de ce Mémoire.

V.

Cette valeur étant ſubſtituée nous donne

$$P = \frac{\zeta \varkappa \cos\omega}{4 \varepsilon} . \left(\frac{\sin\omega^2 \lambda^2 V^2}{2} - \frac{2 \sin\omega \cos\omega \lambda^3 VC}{3} + \frac{\cos\omega^2 C^2 \lambda^4}{4}\right),$$

ou bien

$$P = \frac{\varkappa}{48 \varepsilon} . \zeta (6 \cos\omega \sin\omega^2 \lambda^2 V^2 - 8 \sin\omega \cos\omega^2 \lambda^3 VC + 3 \cos\omega^3 \lambda^4 C^2).$$

Dans cette équation les quantités P, ζ, λ, V, C, ω ſont indéterminées & peuvent être conſidérées comme variables. Pour les rendre moins arbitraires, on a eu égard à la condition que la force P devienne un *maximum*. C'eſt ce qu'on a fait ſurtout relativement à l'angle ω. Mais à proprement parler l'effet de la machine ne dépend pas ſimplement de la force P; c'eſt du produit PC qu'il dépend. Ce produit eſt donné dès que l'effet eſt donné. Et ſi l'effet doit être un *maximum*, c'eſt ce produit qui doit l'être auſſi.

VI.

Faiſant donc

$$PC = \frac{n}{48g}\cdot\beta(6\cos\omega\sin\omega^2\lambda^2V^2C - 8\sin\omega\cos\omega^2\lambda^3VC^2 + 3\cos\omega^3\lambda^4C^3)$$
$$= maximum$$

on voit ſans peine que la largeur des ailes β ne produit point de *maximum*, à moins qu'on ne la regarde comme une fonction de la longueur λ. Mais la largeur des ailes ne dépend gueres de leur longueur, ſurtout lorſque les ailes ſont rectangulaires. Ainſi nous regarderons λ ſimplement comme donnée. Il reſte donc encore les quantités λ, V, C, ω qu'on peut regarder comme variables, & même chacune ſéparément, parce qu'elles ſont indépendantes l'une de l'autre. Voici donc les réſultats de chacune de ces ſuppoſitions.

I. Soit la viteſſe V variable, la condition $d(PC) = 0$, donne

$$V = \frac{2\lambda C}{3t\omega},$$

d'où ſuit

$$t\omega = \frac{2\lambda C}{3V} = \tfrac{2}{3}t\Phi,$$

ce qui feroit $\Phi > \omega$, & c'eſt ce qu'il faut éviter. Ainſi la viteſſe V ne nous ſervira de rien pour le but que nous nous propoſons.

II. Soit la longueur de l'aile λ variable, elle rendra $PC = maximum$ lorſque

$$t\omega = \frac{\lambda C}{V} = t\Phi, \qquad \omega = \Phi,$$

c'eſt à dire lorſque l'aile eſt aſſez longue pour que le vent n'ait plus de priſe ſur ſon extrémité F.

III. Si la viteſſe C eſt ſuppoſée variable, elle donnera pour PC un *maximum* lorſque

$$t\omega = \frac{8+\sqrt{10}}{6}\cdot\frac{\lambda C}{V} = \frac{8+\sqrt{10}}{6}\cdot t\Phi,$$

ou bien

$$t\omega = 1,8603796 \,.\, t\phi.$$

Cette détermination differe presque du double de celle que nous donna la variable λ.

IV. Faisant enfin l'angle ω variable, le produit PC sera un *maximum* lorsque

$$\begin{aligned} 0 = & \; 6\,t\omega^3 - 12\,t\omega, \\ & - 16\,t\omega^2 . t\phi + 8\,t\phi, \\ & + 9\,t\omega . t\phi^2. \end{aligned}$$

VII.

Ainsi les quatre variables V, λ, C, ω nous donnent entre ω & ϕ quatre rapports différens, qui sont tels qu'ils ne sauroient avoir lieu en même tems, & dont le premier doit être simplement rejeté. Voyons ce qu'on pourra faire de mieux à l'égard des trois autres. Pour cet effet je poserai généralement $t\omega = m\,t\phi$. Cette expression étant substituée dans la derniere équation du §. précédent, donne

$$t\phi^2 = \frac{12m - 8}{m(6m^2 - 16m + 9)}$$

& par conséquent

$$t\omega^2 = \frac{(12m - 8)m}{6m^2 - 16m + 9}.$$

Or comme un quarré ne sauroit être négatif, il faut que

$$6m^2 - 16m + 9 > 0.$$

Cela demande que

$$m > \frac{8 + \sqrt{10}}{6}$$

ou du moins

$$m = \frac{8 + \sqrt{10}}{6},$$

auquel cas $t\omega$ & $t\phi$ sont infinies. Ainsi quoique cette valeur de m soit

ſoit celle que demande la variable C, (§. VI. N°. III), la variable ω ne laiſſe pas d'exiger que

$$m > \frac{8 + \sqrt{10}}{6}.$$

Mais l'équation

$$t\omega^2 = \frac{12m^2 - 8m}{6m^2 - 16m + 9}$$

fait voir que quelque grande que puiſſe être m, on aura toujours

$$t\omega > \sqrt{2}$$

ou $t\omega = \sqrt{2}$, lorſque m eſt infinie ou $\phi = 0$. Or en faiſant ſucceſſivement $m = 2, 3, 4$ &c. on aura

pour	$m = 2$	$t\omega^2 = 32,$
	$m = 3$	$t\omega^2 = \frac{28}{5},$
	$m = 4$	$t\omega^2 = \frac{160}{41},$
	$m = 5$	$t\omega^2 = \frac{260}{79},$
	$m = 6$	$t\omega^2 = \frac{128}{43},$
	&c.	

de ſorte que $t\omega$ approche fort vîte de ſa moindre valeur $\sqrt{2}$. Or comme la variable λ demande $m = 1$, & que la variable C veut que $m = 1,8603796$, & qu'enfin la variable ω exige que $m > 1,8603796$, il ſemble que le meilleur parti eſt de s'en tenir à la valeur

$$m = \frac{8 + \sqrt{10}}{6} = 1,8603796,$$

qui tient, pour ainſi dire, le milieu entre les deux autres valeurs. Voici une autre maniere de procéder.

VIII.

Suppoſons que l'effet PC ſoit donné, de même que la viteſſe du vent V. Donnons à l'équation générale la forme ſuivante

$$\frac{48g \cdot PC}{V^2 \varkappa \mathfrak{C} \lambda} = 6 \,\text{coſ}\,\omega\ \text{ſ}\,\omega^2 \frac{\lambda C}{V} - 8\,\text{ſ}\,\omega\ \text{coſ}\,\omega^2 \frac{\lambda^2 C^2}{V^2} + 3\,\text{coſ}\,\omega^3 \frac{\lambda^3 C^3}{V^3}$$

ou bien

$$\frac{48\,g\,PC}{V^3\,\varkappa\,\mathfrak{C}\,\lambda} = 6 \operatorname{cof}\omega\, f\omega^2\, t\phi - 8\, f\omega \operatorname{cof}\omega^2\, t\phi^2 + 3 \operatorname{cof}\omega^3\, t\phi^3.$$

Cette double ſuppoſition eſt très admiſſible. Car comme la viteſſe du vent, de même que la denſité de l'air, eſt très variable & que dans un tems calme $V = 0$, il faut néceſſairement mettre pour baſe une valeur déterminée de $V^3\varkappa$, qui puiſſe produire l'effet donné PC. La queſtion revient donc à trouver l'arrangement de la machine qui y ſoit le mieux accommodé. Or la ſurface des aîles deviendra un *minimum* lorſque

$$6 \operatorname{cof}\omega\, f\omega^2\, t\phi - 8\, f\omega \operatorname{cof}\omega^2\, t\phi^2 + 3 \operatorname{cof}\omega^3\, t\phi^3 = \textit{maximum}.$$

Et il eſt évident que le *minimum* de la ſurface des aîles contribue à rendre le moulin plus compendieux pour un effet donné. Outre cela, quand le vent eſt très fort, les meuniers ſe voient obligés de diminuer la ſurface des aîles en repliant la toile qui les couvre.

IX.

De cette maniere la condition

$$6 \operatorname{cof}\omega . f\omega^2 . t\phi - 8\, f\omega . \operatorname{cof}\omega^2 . t\phi^2 + 3 \operatorname{cof}\omega^3 . t\phi^3 = \textit{maximum}$$

eſt réduite à deux variables, & d'ailleurs on tient compte de la longueur des aîles λ, parce que $\lambda\mathfrak{C}$ doit être un *minimum*. Or en faiſant $t\phi$ variable, on trouve que ce *maximum* & ce *minimum* a lieu, lorſque

$$t\omega = \frac{8 + V10}{6} . t\phi.$$

Poſons pour plus de briéveté $t\phi = \mu\, t\omega$, & nous aurons

$$\frac{48\,g\,PC}{V^3\,\varkappa\,\mathfrak{C}\,\lambda} = \operatorname{fin}\omega^3 (6\mu - 8\mu^2 + 3\mu^3)$$

ou

$$\frac{48\,g\,PC}{V^3\,\varkappa\,\mathfrak{C}\,\lambda} = 1,3796112 . \operatorname{fin}\omega^3.$$

Ici donc nous voyons d'abord que l'angle ω ne donne un *maximum* que lorſqu'il eſt droit. Mais c'eſt ce qu'il faut éviter. Je dirai même que ſi l'angle ω approche de 90 degrés tout ce calcul n'aboutira à rien. En voici les raisons.

X.

Dans le calcul on suppose que la surface des aîles est plane dans toute la rigueur géométrique; mais il s'en faut de beaucoup. Les aîles sont couvertes de toile, & la toile a une surface assez raboteuse & des cavités qui font que l'angle d'incidence GCB, tel qu'il est déterminé par la position des droites GC, BC, n'est pas celui qui résulte de tous les angles sous lesquels le vent tombe sur les fils de la toile. Si l'angle ω est $= 90°$, les aîles sont indifférentes à se mouvoir d'un côté plutôt que de l'autre. Mais pour peu qu'elles se meuvent, le vent accélérera leur mouvement. J'entens que la résistance de la machine ne soit pas trop forte pour les empêcher de se mouvoir. Une autre raison est que la toile qui couvre les aîles n'est pas parfaitement tendue. Elle cede à l'impression du vent & le vent la courbe en sorte qu'il y a plus de prise. Ces raisons font que l'angle ω est moins propre à déterminer le *minimum* de $\lambda\mathfrak{C}$, & qu'il vaut mieux s'en tenir à l'angle Φ, comme je viens de le faire.

XI.

Comme

$$t\,\Phi = \mu\,t\,\omega = \frac{\lambda C}{V}$$

il s'ensuit que

$$C = \frac{\mu V t\omega}{\lambda}.$$

Cette valeur étant substituée donne

$$\frac{48 g}{\varkappa}\,.\,P = V^2\lambda^2\mathfrak{C}\,.\,s\omega^2\cos\omega\,(6 - 8\mu + 3\mu^2),$$

ou bien

$$\frac{36 g}{\varkappa}\,.\,P = V^2\lambda^2\mathfrak{C}\,.\,s\omega^2\cos\omega\,.\,\frac{84 + 24\sqrt{10}}{37 + 8\sqrt{10}},$$

Si d nc V, λ, $\mathfrak{C}$ sont données, la force P devient un *maximum* lorsque

$$t\omega = \sqrt{2}.$$

Cette équation combine donc le *maximum* de la force du vent relativement à l'angle ω, avec le *minimum* de la surface des aîles relativement à l'angle ϕ. Et comme le produit PC eſt une quantité donnée, il eſt clair que ce *maximum* de la force P donne en même tems le *minimum* de la viteſſe C des aîles ou du point fixe E. Ce *minimum* contribue de ſon côté à rendre le mouvement des aîles auſſi peu violent qu'il eſt poſſible pour un effet PC donné. Et comme pour ce même effet les aîles ſont auſſi petites qu'elles peuvent l'être, il n'y aura gueres de meilleur parti à prendre.

XII.

Nous avons donc les équations ſuivantes

$$t\omega = \sqrt{2}, \qquad \omega = 54^\circ.\ 44',$$

$$t\phi = \frac{6\sqrt{2}}{8+\sqrt{10}}, \qquad \phi = 37.\ 14\tfrac{1}{2},$$

$$\frac{gPC}{\varkappa} = \frac{7+2\sqrt{10}}{376+101.\sqrt{10}}.\sqrt{\tfrac{2}{3}}V^3\epsilon\lambda = 0{,}01564511.V^3\epsilon\lambda$$

$$C\lambda = \frac{6\sqrt{2}}{8+\sqrt{10}}.V = 0{,}7601747.V,$$

$$\frac{gP}{\varkappa} = \frac{V^2\lambda^2\epsilon}{54\sqrt{3}} = 0{,}02058094\ V^2\lambda^2\epsilon.$$

Et comme $g = \frac{1000}{64}$ piés de Rhin, & $\varkappa = \frac{1}{12}$ livre, on aura

$$PC = 0{,}00008344059.V^3\epsilon\lambda,$$

$$P = 0{,}0001097650\text{I}.V^2\lambda^2\epsilon.$$

XIII.

Suppoſons, comme dans les Mémoires précédens, $PC = 3247$ livres pour le cas où l'on veut faire tourner deux meules. Faiſons de plus $\lambda = 30$ piés, $\epsilon = 24$ piés pour 4 aîles, nous aurons

$$3247 = 0{,}00008344059.720.V^3$$

ce qui donne

$$V = 37{,}8 \text{ piés.}$$

Cette viteſſe du vent eſt environ le tiers du vent le plus fort, & elle n'eſt pas fort rare, ſurtout pendant l'hiver.

Si on ne veut faire aller qu'une de ces meules, on aura $PC = 1623\frac{1}{2}$ livres, ce qui donne $V = 30$ piés. Cette viteſſe n'eſt gueres moins grande que la précédente. On voit par-là que quand le vent ſouffle avec aſſez de viteſſe pour faire tourner une meule, il ne faut qu'un quart de la viteſſe de plus pour en faire tourner deux. C'eſt que l'effet ou le moment ſtatique eſt en raiſon du cube de la viteſſe. Cela fait qu'une viteſſe double produit un effet octuple, & fait tourner 8 meules lorſque la viteſſe ſimple n'en fait tourner qu'une ſeule.

Si au lieu de 4 ailes on en emploie 6, la viteſſe du vent requiſe pour produire le même effet n'en eſt diminuée que de $\frac{1}{8}$ partie. Ainſi le meilleur parti qu'on puiſſe prendre c'eſt de multiplier les meules & de les faire de différente grandeur, afin que le vent foible puiſſe du moins faire tourner la plus petite, & qu'à meſure que la viteſſe du vent augmente il puiſſe faire tourner & plus de meules & de plus grandes.