SUR

LES FORCES DU CORPS HUMAIN.

PAR M. LAMBERT.

PREMIERE PARTIE.

I.

Je me propoſe de conſidérer dans ce Mémoire les forces du corps humain entant que ce ſont *des forces motrices & accélératrices*, & ſans entrer dans des diſcuſſions phyſiologiques, je me bornerai à des expériences que chacun peut faire.

II.

D'abord donc je poſe pour principe *que les forces du corps ſe font ſentir à meſure qu'on les emploie.* Plus un fardeau qu'on porte eſt peſant, plus on ſent que le degré de force qu'il faut employer va en augmentant. On peut même s'exercer à cet égard de maniere que la ſimple ſenſation tienne lieu de balance. Les forces ſe font encore ſentir lorſqu'on s'en ſert pour mettre en mouvement, ſoit tout le corps, ſoit tel membre qu'on voudra; & l'on ſent également que plus la viteſſe doit être grande, plus auſſi il faut employer de force. Enfin on ſent auſſi les forces lorſqu'elles s'accroiſſent par les alimens, de même que lorſqu'elles s'uſent, ſoit par le travail, ſoit par la ſimple inaction.

III.

La force humaine eſt diſtribuée par tout le corps. Ce ſont comme pluſieurs forces particulieres, qui paroiſſent quelquefois indépendantes les unes des autres. Mais elles peuvent auſſi concourir toutes ou en grande partie, ſurtout lorſque c'eſt tout le corps qu'on veut mettre en mouvement,

& que ce mouvement doit être aſſez rapide pour qu'on ſoit obligé d'y employer toutes ſes forces. C'eſt ainſi qu'on ſaute ou qu'on court de toute ſa force. Dans ces cas le mouvement imprimé à chaque membre concourt à produire & à augmenter le mouvement *du centre d'inertie*. C'eſt par ce centre que doit paſſer *la direction moyenne de toutes ces forces particulieres*, & cette direction doit être celle ſuivant laquelle le centre d'inertie doit être mu. Tout cela eſt conforme aux *loix générales de la Dynamique*, & il eſt évident que c'eſt par de bons exercices qu'il faut aquérir la facilité de ſatisfaire à ces conditions de la maniere la plus avantageuſe.

IV.

La différence qu'il y a entre un *portefaix* & un *coureur* nous fait encore comprendre que l'on peut s'exercer tant pour *roidir* les membres que pour les rendre *agiles*. Ces deux exercices different très conſidérablement; mais les forces qu'on y emploie ſont plus ou moins les mêmes, entant qu'elles s'épuiſent & entant qu'elles doivent être renouvellées par les alimens & par le repos. Cependant lorſqu'on les a exercées de l'une de ces deux manieres, il ne s'enſuit pas qu'on les ait exercées en même tems de l'autre. Du reſte chaque homme eſt du moins médiocrement exercé de l'une ou de l'autre maniere. Pour peu qu'on laiſſe de liberté aux enfans, ils ſe portent d'eux-mêmes à ce double exercice. Ainſi ce n'eſt que pour les degrés extremes de ce double emploi des forces qu'il faut avoir égard à leur différence, & ſur tout à ce que ces degrés extremes ſe rencontrent rarement ou ne ſe rencontrent point du tout dans un même individu.

V.

Je conſidere ici les forces humaines comme *propres* à l'homme & ſans égard à la force de la gravité qui eſt *étrangere*. C'eſt une différence à laquelle il faut avoir ſoigneuſement égard. Quelquefois ces deux forces s'entr'aident; d'autres fois elles ſe traverſent mutuellement. A cet égard elles ſont de même nature & aſſez *homogenes* pour être ſuſceptibles d'*addition* & de *ſouſtraction*. Mais c'eſt préciſément d'où naît la difficulté de les démêler, lorſque c'eſt par la ſenſation qu'on en veut juger. Ainſi, p. ex. un homme pour se tenir droit sur ses piés doit nécessairement employer une force égale au poids de son corps. S'il n'a pas tant de forces, ou si ses forces sont entierement épuisées, il tombe en défaillance, & dans ce dernier cas c'est la gravité toute seule qui agit. Mais s'il veut s'élancer en sautant verticalement en haut, il a besoin non seulement de la force requise pour se soutenir, mais encore d'une partie d'autant plus grande des forces qui lui restent, que la vitesse avec laquelle il veut s'élancer doit être plus grande.

VI.

Or lorsque c'est par la sensation qu'on veut juger des forces qui sont propres à l'homme, il faut le faire de maniere que la gravité n'y change rien, ou que du moins on puisse sans difficulté tenir compte de son effet. Ainsi p. ex. lorsque je veux savoir si j'emploie la même force pour étendre le bras que pour le rapprocher du corps, je m'y prens mal en l'étendant en bas ou en haut. Dans le premier cas la gravité me seconderoit, en sorte que sans faire le moindre effort je n'aurois qu'à laisser tomber le bras. Dans le second cas la gravité oblige de redoubler l'effort, si je veux lever le bras avec la même vitesse avec laquelle il tombe par la seule action de la gravité. Mais si j'étens le bras & que je le rapproche du corps de telle sorte qu'il reste toujours dans le même plan horisontal en le mettant sur une table bien polie & horisontale, je me trouve dans le cas où je ressens la force qui fait seule mouvoir le bras. C'est de cette maniere qu'on peut s'assurer que si, tant en éloignant qu'en rapprochant le bras du corps, on le fait avec la même vitesse & par le même mouvement, on emploie précisément les mêmes degrés de force, & que toute la différence qu'il y a c'est que l'ordre est renversé. Ainsi en désignant la force par p, l'élément de l'espace par dx dans le premier cas, & par $-dx$ dans le second cas, on aura $\int p\,dx = -\int p\,dx + \text{const.}$

VII.

Il est moins facile de faire ces sortes d'expériences sur tout le corps. Lorsqu'on se couche sur une table horisontale suffisamment grande & bien polie, on ne sauroit empêcher qu'il n'y ait du frottement & ce frottement tient lieu d'appui. Sans ce frottement les loix de la Dynamique nous font voir que, quelque mouvement qu'on donne à ses membres dans une direction horisontale, le *centre d'inertie* reste immobile, & que même on ne sauroit rapprocher les piés du corps qu'entant qu'on peut rapprocher les bras & la tête des piés. Mais dès qu'on peut toucher un obstacle immobile, le centre d'inertie du corps peut être mu & on peut faire des essais sur les différens degrés de ses forces, telles qu'elles sont en elles-mêmes & sans que les effets de la gravité puissent nous faire illusion. On s'assurera, comme je l'ai dit à l'égard des bras, que si avec les mêmes efforts on fait les mêmes mouvemens en sens contraire & dans un ordre renversé, il en naît une même vitesse. Je dirai même qu'il est très bon qu'on fasse quelques-unes de ces expériences pour s'en assurer par la sensation immédiate. Cela donnera une idée bien claire des forces qui sont propres à l'homme; car nous sommes trop accoutumés à confondre ces forces avec celle de la gravité, & cela nous empêche de nous en faire des idées bien nettes, lorsqu'il s'agit de les considérer séparément, surtout lorsqu'elles s'entr'aident ou s'entr'empêchent. Il y a des mouvemens qu'on ne sauroit faire dans une direction horisontale & couché sur une table. Si donc on les fait de telle sorte que l'action de la gravité s'y joigne, il est très essentiel qu'on sache démêler l'effet de la gravité d'avec ceux qui sont dus à l'usage de nos forces. Il y a même des mouvemens dont on ne sauroit comment on les fait s'il n'y avoit point de gravité, & qui pourtant doivent être faisables sans l'intervention de cette force étrangere. Du reste, comme la gravité existe & que le corps humain est fait pour un monde où elle existe, les mouvemens possibles ou impossibles, faciles ou difficiles dans un autre monde ne sont pas ce qui doit nous arrêter. Il suffit donc que, dans les essais que nous faisons pour juger d'après nos sensations, nous sachions démêler ce qui est dû à la gravité d'avec ce qui est un effet de nos propres forces.

VIII.

La gravité fait que ce que j'ai appellé ci-dessus le *centre d'inertie* est en même tems le *centre de gravité*. Cela est très connu. Aussi me servirai-je de l'une & de l'autre de ces dénominations. Lorsqu'un homme porte quelque fardeau, c'est le *centre commun de gravité ou d'inertie* qu'on en-tend, & c'eſt par ce centre commun que doit paſſer la ligne de la direction moyenne de ſes forces, lorſqu'il marche ou qu'il s'élance avec le fardeau. Cette direction change lorſqu'il veut jetter le fardeau à terre; car dans ce cas il la fait paſſer par le centre de gravité du fardeau, du moins autant qu'il lui eſt poſſible, lorſque le fardeau eſt très peſant.

IX.

Je me ſuis aſſuré par différens eſſais que le corps de l'homme, ſa ſtructure & ſon organiſation ſont tels qu'il peut mouvoir ſon centre de gravité en tout ſens & avec une même facilité. Je dis: *avec la même facilité* ou *avec le même effort*, & ſans égard à ce qu'il peut être ou ſecondé ou contrarié par l'effet de la gravité. Cette force étrangere n'influe que dans la viteſſe qui réſulte de l'emploi de nos propres forces. Ce n'eſt donc pas par la viteſſe qu'il faut juger de nos forces, mais par la ſenſation du degré d'intenſité qu'elles ont dans chaque cas. C'eſt ce degré que j'ai trouvé être & pouvoir être le même, quelle que ſoit la direction dans laquelle le centre de gravité eſt mis en mouvement. L'eſſai eſt facile à faire & même ſans changer de place; car il ne s'agit que du ſimple effort initial avec lequel on imprime du mouvement à ce centre.

X.

Les forces du corps humain peuvent être conſidérées comme un être immatériel, en comparaiſon duquel le corps n'eſt qu'une ſimple maſſe qu'il s'agit de mouvoir. Si tout le corps doit être mu, ſa maſſe peut être conſidérée comme concentrée au centre de gravité, & je conſidere encore la force comme immédiatement appliquée à ce centre, dans la *direction moyenne* de toutes les forces particulieres & dans le *degré d'intenſité moyen* qui en réſulte, ſuivant cette direction. Encore le point d'appui doit-il être conſidéré comme transféré dans quelque point de la droite qui déſigne cette direction moyenne. C'eſt dans ce ſens que je viens de dire, que le degré d'intenſité de force peut être le même, quelle que ſoit cette direction moyenne.

XI.

J'ajoûterai que l'effet de nos forces eſt & peut être beaucoup plus rapide que celui de la gravité. Car même en s'élançant verticalement en haut on imprime au centre de gravité beaucoup plus de viteſſe que l'action de gravité n'en peut détruire pendant les mêmes momens. Cela fait que lorsqu'on s'élance dans une direction inclinée vers l'horiſon, la viteſſe imprimée au centre de gravité lui fait décrire un arc parabolique, & lorſqu'on monte ſur un plan incliné on détermine cette viteſſe de telle ſorte que le centre de gravité atteigne le ſommet de la parabole qu'il parcourt, dans le moment qu'on remet à terre le pié de devant. C'eſt ainſi qu'on marche avec le plus de facilité, parce que le centre de gravité ne peſe point ſur le pié qu'on met à terre, la direction de ſon mouvement étant alors horiſontale. Si on attendoit plus longtems, le centre de gravité recommenceroit à tomber, & peſeroit ſur le pié qu'on met à terre, & outre cela il faudroit plus de force pour s'élancer du nouveau. Si au contraire on n'attendoit pas ce terme, il faudroit étendre le pié pour qu'il atteignît, ce qui demanderoit de la force ſans néceſſité, & l'attitude ne ſeroit pas celle qui aideroit le mieux à pourſuivre la marche.

XII.

Conſidérons maintenant le cas où un homme monte ou s'élance verticalement, ſoit ſans fardeau, ſoit en en portant un. Que le poids de ſon corps ſoit $= P$, celui du fardeau $= q$, & $P + q$ ſera *la maſſe* qu'il doit faire monter. Il eſt évident qu'il doit employer une force plus grande que ce *poids* $P + q$. Je la déſignerai par $P + K$, de ſorte que la partie P eſt celle dont il a beſoin pour ſe tenir droit ſur ſes piés, & l'autre partie K comprend la force requiſe, non ſeulement pour ſoutenir le *poids* q, mais pour imprimer du mouvement à toute la *maſſe* $P + q$. Il faut donc de la force $P + K$ ſouſtraire le poids de cette maſſe $P + q$, pour avoir $(P + K) - (P + q) = K - q$, qui ſera la partie de la force qui produit du mouvement, ou bien la *force motrice*. Soit $\mathrm{d}x$ l'élément de l'eſpace, $\mathrm{d}h$ l'élément de la hauteur due à la viteſſe, on aura

$\mathrm{d}h =$

$$\mathrm{d}h = \frac{K-q}{P+q} \cdot \mathrm{d}x.$$

C'eſt là la formule fondamentale de la Dynamique.

XIII.

Le corps de l'homme en montant prend ſucceſſivement différentes attitudes. Si donc dans toutes ces attitudes il continuoit de faire le même effort K, la valeur de K feroit conſtante, & on auroit l'intégrale

$$h = \frac{K-q}{P+q} \cdot x + \text{Conſt.}$$

Mais quand la force K varieroit ſuivant les attitudes, il paroit néanmoins que l'effort requis pour monter avec un degré donné de viteſſe, influe proportionellement ſur tous ces degrés ſucceſſifs de la force K de telle ſorte qu'ils augmentent ou diminuent en raiſon de l'effort initial, & que par conſéquent auſſi la ſomme $\int (K-q)\,\mathrm{d}x$ augmente & diminue dans ce même rapport. Ainſi on ne s'écartera gueres de la vérité en faiſant ſimplement

$$h = n \cdot \frac{K-q}{P+q}$$

& en regardant n comme un coëfficient qu'il s'agit de déterminer par quelque expérience.

XIV.

On voit ſans peine que cette équation doit nous tenir lieu de l'intégrale qu'il eût fallu chercher. Cette équation nous apprend, que *la hauteur à laquelle on peut s'élancer en montant eſt en raiſon directe de la force motrice* K — q, *& en raiſon réciproque de la maſſe* P + q *qu'on éleve en montant*. Je crois qu'on doutera d'autant moins de la vérité de cette propoſition, qu'on eſt déja fort accoutumé à eſtimer les forces par les hauteurs verticales.

XV.

Pour déterminer le coëfficient n, je ſuppoſe un homme dont toute la force K ſoit égale à ſon propre poids P. Que cet homme, ſans avoir un fardeau à porter, ſaute verticalement en haut & de toute ſa force en commençant par plier les genoux afin de ſauter avec d'autant plus de vigueur;

il ne s'élevera gueres au delà de 2 piés. Dans ce cas on a donc $q = 0$, $K = P$, $h = 2$ piés. Cela donne $n = 2$, & on aura pour tout autre cas

$$h = 2 \cdot \frac{K - q}{P + q}.$$

XVI.

Je passe au cas où un homme s'élance dans une direction inclinée vers l'horison, ce qui a toujours lieu lorsqu'il monte sur un plan incliné. Soit AB une droite horisontale, AM le plan incliné, ADM la parabole que le centre de gravité parcourt, AN la tangente initiale, NMB une droite verticale. Soit c la vitesse tangentielle avec laquelle on s'élance. Faisons l'angle $MAB = \eta$, l'angle $NAB = \omega$, & soit $\frac{1}{2}\tau$ le tems employé pour parcourir l'arc ADM. J'exprime ce tems par $\frac{1}{2}\tau$, parce qu'à chaque pas qu'on fait, il faut encore un autre $\frac{1}{2}\tau$ pour se préparer au pas suivant, chaque pas exigeant un nouvel élan. Nous aurons donc

$$\begin{aligned}
AN &= \tfrac{1}{2} c\tau \\
AB &= \tfrac{1}{2} c\tau . \cos\omega \\
AM = x &= \tfrac{1}{2} c\tau . \cos\omega . \sec\eta \\
BN &= \tfrac{1}{2} c\tau . \sin\omega \\
BM &= \tfrac{1}{2} c\tau . \cos\omega . \tang\eta \\
NM &= \tfrac{1}{2} c\tau\, (\sin\omega - \cos\omega . \tang\eta) \\
&= \tfrac{1}{2} c\tau . \sin(\omega - \eta) . \sec\eta .
\end{aligned}$$

Mais on a aussi

$$NM = \tfrac{1}{4} g\tau^2$$

où g désigne la chûte des corps dans le tems $\tau = 1$. Donc égalant ces deux expressions on aura

$$\tau = \frac{2c . \sin(\omega - \eta)}{g \cos\eta}.$$

On a de plus la *vitesse moyenne*

$$v = \frac{x}{\tau} = \frac{c \cos\omega}{2 \cos\eta};$$

c'eſt la viteſſe avec laquelle par un mouvement uniforme on pourroit parcourir l'eſpace x dans le tems τ; c'eſt la viteſſe avec laquelle on marche.

XVII.

Or, ſuivant ce que j'ai remarqué ci-deſſus (Art. XI.), le ſoin d'éviter tout uſage inutile de ſes forces demande que le point M ſoit au ſommet de la parabole. Cela donne l'équation

$$\text{tang}\,\omega = 2\,\text{tang}\,\eta.$$

Et par-là la *viteſſe moyenne* devient

$$v = \frac{c}{2\,\sqrt{(1 + 3\,\text{ſin}\,\eta^2)}}.$$

XVIII.

La viteſſe c eſt due à la force accélératrice. Dénotant, comme ci-deſſus, par $P + K$ la force que l'homme emploie, ce n'eſt pas ici le poids $P + q$ tout entier qu'il faut en ſouſtraire, mais ſeulement la partie $(P + q).\text{ſin}\,\omega$. Car la force de la gravité ſe réſout dans les deux parties $(P + q).\,\text{ſin}\,\omega$ & $(P + q)\,\text{coſ}\,\omega$. Ce n'eſt que la premiere qui diminue l'effet de la force $(P + K)$, l'autre partie ne fait que courber le chemin que le centre de gravité parcourt pendant qu'il s'élance. Ainſi la *force motrice*, entant qu'elle agit dans la direction AN, eſt exprimée par $(P + K) - (P + q).\,\text{ſin}\,\omega$. Et comme la maſſe qu'elle doit mettre en mouvement eſt $= P + q$, nous aurons

$$dh = \frac{(P + K) - (P + q).\,\text{ſin}\,\omega}{P + q}.\,dx.$$

Par les mêmes raiſons que j'ai rapportées ci-deſſus, je ſubſtitue à l'intégrale de cette formule l'équation

$$h = n.\frac{P + K - (P + q).\,\text{ſin}\,\omega}{P + q}.$$

XIX.

Or par la théorie de la gravité nous avons

$$c = \sqrt{(4gh)}.$$

Nous avons de plus (Art. XVII.)

$$\text{tang}\,\omega = 2.\,\text{tang}\,\eta,$$

ce qui donne

$$\sin\omega = \frac{2\sin\eta}{\sqrt{(1+3\sin\eta^2)}}.$$

Donc on aura

$$h = n.\frac{(P+K).\sqrt{(1+3\sin\eta^2)} - 2(P+q)\sin\eta}{(P+q).\sqrt{(1+3\sin\eta^2)}},$$

$$c = 2\sqrt{gn}.\sqrt{\frac{(P+K)\sqrt{(1+3\sin\eta^2)} - 2(P+q)\sin\eta}{(P+q).\sqrt{(1+3\sin\eta^2)}}}$$

& par conséquent la *vitesse moyenne*

$$v = \sqrt{gn}.\sqrt{\frac{(P+K)\sqrt{(1+3\sin\eta^2)} - 2(P+q).\sin\eta}{(P+q).(1+3\sin\eta^2)^{3:2}}}$$

ou bien

$$v = \sqrt{\left[\frac{P+K}{P+q}.\frac{gn}{(1+3\sin\eta^2} - \frac{2gn.\sin\eta^2}{(1+3\sin\eta^2)^{3:2}}\right]}.$$

Posons pour plus de briéveté

$$A = \frac{gn}{1+3\sin\eta^2}$$

$$B = \frac{2gn\sin\eta}{(1+3\sin\eta^2)^{3:2}}$$

nous aurons

$$v = \sqrt{\left[\frac{P+K}{P+q}.A - B\right]}.$$

Or en retenant la valeur $n = 2$ (Art. XV.) & faisant $g = 15\frac{5}{8}$ piés de Rhin, j'ai calculé les valeurs suivantes.

η	A	B	η	A	B
0	31,250	0,000	45	12,500	11,180
5	30,553	5,266	50	11,347	10,475
10	28,658	9,531	55	10,372	9,789
15	26,021	12,211	60	9,615	9,238
20	23,132	13,614	65	9,021	8,786
25	20,347	13,878	70	8,564	8,426
30	17,857	13,499	75	8,226	8,153
35	15,728	12,799	80	7,993	7,962
40	13,954	11,987	85	7,857	7,850
45	12,500	11,180	90	7,812	7,812

XX.

Avant que d'appliquer ces formules à certains cas particuliers, il ne sera pas inutile de faire quelques remarques sur la *force centrifuge* qui a lieu lorsqu'on marche. Le pié sur lequel on avance en marchant est le point d'appui autour duquel le centre de gravité se meut, & la droite tirée du centre de gravité vers la plante de ce pié peut être considérée comme un *rayon vecteur*. Nommant donc ce rayon $= r$, & la vitesse du centre de gravité $= c$, la force centrifuge $= f$, on aura

$$f = \frac{cc}{2r}.$$

Cette force centrifuge peut devenir égale à celle de la gravité. Dans ce cas on aura $f = g$, ce qui donne

$$c = \sqrt{(2rg)}.$$

Donc si, pour un homme de taille médiocre qui ne porte rien, nous faisons $r = 2\frac{1}{2}$ piés de Rhin, g étant $= 15\frac{5}{8}$ piés, cela nous donne

$$c = 8{,}85 \text{ piés.}$$

Donc si cet homme court avec une vitesse de près de 9 piés par seconde, il cesse entierement de graviter sur ses piés. La vitesse n'a pas même besoin d'être aussi grande lorsqu'en courant on a les genoux pliés, comme cela arrive lorsqu'on court vîte, parce que par-là le *rayon vecteur* en devient plus petit, ce qui fait qu'une vitesse moins grande suffit pour que la force centrifuge fasse équilibre à la gravité. J'ai trouvé par des essais qu'en courant avec cette vitesse on reste tellement dans l'air que les piés n'agissent que *comme s'ils repoussoient la terre en arriere.* Cela demande beaucoup d'agilité dans les piés. Ils ne doivent frapper la terre qu'autant qu'il faut pour conserver la vitesse. C'est plutôt l'inégalité du chemin & le frottement qui en résulte dont il faut se servir pour cet effet, & il faut recommencer à repousser la terre en arriere dans les momens où le centre de gravité atteint le sommet de la parabole. Si on le fait plutôt, on fatigue les piés au delà de ce qu'il faudroit, & si on le fait plus tard, le choc des piés contre le chemin en devient plus rude, & l'on est forcé de plier les genoux, parce que le centre de gravité recommence à peser sur le pié qu'on met à terre, ce qui demande plus de force pour l'élancer de nouveau. Voilà pourquoi ce n'eſt que par l'exercice qu'on devient habile coureur. *Virgile* connoiſſoit cette légereté que donne la grande viteſſe, & il n'ignoroit pas que dans les courſes rapides la force eſt preſqu'entierement employée à plier la jointure des piés auſſi fréquemment qu'il le faut, & que bien loin de frapper rudement la terre, on ne la touche qu'autant qu'il faut pour conſerver la viteſſe. Du reſte c'eſt une hyperbole poétique que ce qu'il dit de la guerriere *Camille:*

Illa vel intactæ ſegetis per ſumma volaret
Gramina, nec teneras curſu læſiſſet ariſtas;
Vel mare per medium, fluctu ſuſpenſa tumenti,
Ferret iter, celereis nec tingeret æquore plantas.

C'eſt cette force centrifuge qui fait qu'on paſſe en patins ſur une glace de beaucoup trop mince pour qu'on pût s'y tenir ſans mouvement.

XXI.

Conſidérons maintenant le cas où $K = q$, & où, par conſéquent, en marchant on n'emploie qu'autant de force qu'il en faudroit pour ſe tenir droit en portant le même fardeau q. Il n'y a rien d'affecté dans cette maniere de marcher. Et comme on emploie la même force, ſoit pour marcher, ſoit pour s'arrêter, il vaut tout autant marcher; car du moins on avance. On n'a pas non plus beaucoup de peine à déterminer le degré de force, parce que ſi l'on s'arrête il ſe détermine par la néceſſité de ſe ſoutenir & la ſenſation fera juger ſi on l'emploie tout de même en marchant. Mettant donc $K = q$, la formule que nous avons trouvée pour la viteſſe v devient ſimplement

$$v = [A - B].$$

Or, prenant les angles η de 5 en 5 degrés, les valeurs répondantes de A, B ſont toutes trouvées. Ainſi il ne ſera pas difficile de former une Table pour les valeurs de v répondantes aux angles η de 5 en 5 degrés. J'obſerve donc ſeulement, que ſi on deſcend ſur un chemin incliné, l'angle η & les valeurs de B deviennent négatifs. Cela nous donne la Table ſuivante.

$+\eta$	v	$-\eta$	v
0	5,590	0	5,590
5	5,029	5	5,991
10	4,374	10	6,180
15	3,716	15	6,183
20	3,085	20	6,062
25	2,544	25	5,851
30	2,088	30	5,600
35	1,711	35	5,317
40	1,403	40	5,055
45	1,149	45	4,866
50	0,934	50	4,671
55	0,764	55	4,490
60	0,614	60	4,342
65	0,485	65	4,220
70	0,372	70	4,122
75	0,270	75	4,047
80	0,176	80	3,994
85	0,085	85	3,963
90	0,000	90	3,953

XXII.

La feconde colonne de cette Table nous fait voir que la viteffe va en diminuant, en forte qu'elle devient $= 0$ lorfque $\eta = 90°$. Cela eft évident; car lorfqu'on n'emploie que la force requife pour fe foutenir, il n'y a pas moyen de s'élever dans la direction verticale.

XXIII.

Nous voyons de plus dans la quatrieme colonne que lorfque la pente du chemin fur lequel on defcend eft entre 10 & 15 degrés, la viteffe due à la force $P + K = P + q$ eft un *maximum*. La différentiation donne pour la valeur de l'angle répondant à ce *maximum*

$$\sin \eta^2 = \frac{7 - \sqrt{45}}{6}$$

d'où l'on déduit

$$-\eta = 12°.\ 44'.$$

La viteffe répondante eft de 6,184 piés de Rhin par feconde. Il faut marcher fort leftement; mais auffi la force qu'on y emploie n'eft pas petite, Car quand on ne porteroit rien, de ſorte que $K = q = 0$, elle ne laiſſeroit pas d'être encore $= P$, c'eſt à dire égale au poids du corps, & on ſe laſſeroit autant qu'en ſe tenant droit & en repos.

XXIV.

Dans ma marche ordinaire & pour des acclivités médiocres je ne trouve rien qui ne ſoit aſſez conforme à cette Table. Sur un chemin horiſontal je fais 5 à 6 piés par ſeconde; & ſans aucun effort particulier j'emploie 13 ſecondes à monter un eſcalier de 24 marches, haut de $13\frac{1}{2}$ piés, & où l'angle $\eta = 37\frac{1}{2}$ degrés. Cela donne une hypothénuſe de $22\frac{1}{5}$ piés, lesquels étant diviſés par 13 ſecondes, donnent $v = 1,7$ pié. La Table dans la ſeconde colonne donne pour $\eta = 37\frac{1}{2}$ degrés, $v = 1,55$. La différence eſt fort petite. Du reſte cet eſcalier n'eſt pas trop fait pour mes pas. Je le monterois avec plus de facilité & avec plus de viteſſe ſi pour la même hauteur il n'avoit que 18 ou 20 marches. Il eſt clair auſſi que pour des acclivités plus grandes on ne ſe borne pas à employer la force P toute ſeule. La marche ſeroit de beaucoup trop lente.

XXV.

Il y a des perſonnes dont la marche eſt naturellement plus lente, & d'un autre côté il y en a auſſi qui ſans effort vont plus vîte. La marche lente eſt ſouvent une gravité affectée ou une coutume, ſouvent auſſi un défaut de tenſion & d'affluence des humeurs deſtinées à réparer les forces qui ſe perdent. Ce défaut d'affluence eſt fort ordinaire chez les vieillards, qui n'ont plus dans les jointures la mobilité qu'ils avoient dans un âge moins avancé. Ces ſortes de cas ne démentent point nos formules; car tout ce qui en réſulte c'eſt que ces perſonnes foibles ou indolentes n'emploient pas la force $P + K = P + q$ toute entiere pour marcher, & nos formules font voir que cela eſt très poſſible, ſurtout lorſque l'acclivité n'eſt pas fort grande, ou qu'au lieu de monter on deſcend.

XXVI.

Quoique la ſeconde colonne de la Table ne nous préſente point de *maximum* ou de *minimum* par rapport à la *viteſſe*, il s'en préſentera néanmoins un ſi nous avons égard au *tems*. Qu'il ſoit queſtion de parvenir à une

une hauteur verticale donnée. Des chemins de différente acclivité pourront y conduire. Il s'agit de savoir quelle est celle qui y conduit en *moins de tems*. Soit la hauteur $= H$, l'acclivité du chemin $= \eta$, sa longueur sera $= H \,.\, \text{cosec}\, \eta = H : \sin \eta$. Soit de plus la vitesse répondante à l'acclivité $= v$, le tems requis pour faire ce chemin $= t$; on aura

$$t = \frac{H}{v \,.\, \sin \eta} = \textit{minimum};$$

ou bien H étant constante, on fera

$$v \,.\, \sin \eta = \textit{maximum}.$$

Mettant donc pour v sa valeur générale (Art. XIX), le calcul donne pour l'acclivité cherchée

$$\sin \eta^2 = \frac{(P+K)^2}{9(P+q)^2 - 3(P+K)^2}.$$

Cette équation fait voir que l'acclivité qu'on cherche varie suivant le degré de force avec lequel on marche comparativement à la masse qu'on met en mouvement. Et comme $\sin \eta < 1$, il faut tout de même que

$$P + K < \tfrac{3}{2}(P+q)$$

sans quoi il n'y a point de *maximum* ou de *minimum* proprement dit.

XXVII.

Faisons, comme ci-dessus, $K = q$, & nous aurons $\sin \eta = \sqrt{\tfrac{1}{6}}$, d'où suit $\eta = 24^\circ.\ 6'$. Ainsi lorsque pour monter on n'emploie d'autre force que celle qui est requise pour se soutenir en se tenant droit, l'acclivité la plus avantageuse du chemin sera de $24^\circ.\ 6'$, & la vitesse répondante sera $v = 2{,}65$ piés par seconde. Mr. *D. Bernoulli* dans son *Hydrodynamique* estime que cette acclivité pourroit être d'environ 30 degrés. Cette valeur répond à nos formules, pour peu qu'on fasse $P + K > P + q$. Car en faisant $\eta = 30^\circ$, on a $\sin \eta = \tfrac{1}{2}$. Cela donne

$$P + K = (P+q) \,.\, \sqrt{\tfrac{9}{7}} = 1{,}134 \,.\, (P+q).$$

La vitesse répondante est $v = 2{,}088$ piés par seconde. Mr. *Bernoulli* ne la suppose que de 1 pié; ce qui n'est pas assez à beaucoup près. L'expérience m'a donné 1,7 pié pour une acclivité plus grande (Art. XXIV.)

XXVIII.

L'équation

$$v \,.\, \text{ſin}\, \eta = maximum$$

eſt encore pour le cas où un homme fait tourner une roue en marchant ſur les talons; il y marche comme ſur un chemin dont l'acclivité eſt $= \eta$. Sa force eſt $= P \,.\, \text{ſin}\, \eta$. Et cette force multipliée par la viteſſe v doit donner un *maximum* pour que l'effet ſoit le plus avantageux. Ainſi tout ce que j'ai remarqué dans les deux Articles précédens quadrera encore ici, & il eſt inutile de le répéter.

XXIX.

J'en viens donc à enviſager nos formules ſous un autre point de vue. Tout le monde ſait qu'on ſe laſſe d'autant plutôt qu'on emploie plus de force. La force K ne ſauroit aller au-delà d'un certain degré, que je déſignerai par Q, de ſorte que la plus grande force de l'homme ſoit $= P + Q$. L'uſage de cette force n'eſt d'aucune durée, ſoit qu'on l'emploie à porter le plus grand fardeau qu'on puiſſe ſoutenir, ſoit qu'on s'en ſerve pour courir avec la plus grande viteſſe poſſible. Ce *maximum* de la force humaine eſt fort différent. On peut l'augmenter par un exercice & une pratique continuelle, comme font les portefaix & les coureurs de profeſſion. Une longue inaction & le défaut d'exercice la diminuent. L'infirmité, les maladies & l'âge peuvent la réduire au point qu'il faille un appui, même lorſqu'on ne porte rien. J'ai déja remarqué que la force Q pour un même individu n'eſt pas abſolument la même lorſqu'il s'agit ou de grands fardeaux ou de grandes viteſſes. (Art. IV.)

XXX.

Suppoſons qu'un homme ſe tienne ſimplement droit ſur ſes piés ſans rien porter. Il n'emploiera que la force P toute ſeule. Il aura donc la force Q de reſte, & cependant au bout de quelque tems il ſera las. Donc cette force Q au bout de ce tems ſera épuiſée. Ce tems ſera plus ou moins le même lorſque, ſans rien porter, il emploie la force P pour marcher. S'il marche pendant 12 ou 14 heures par jour, c'eſt tout ce qu'il peut faire. Déſignons en général ce tems par T. Or ſi ce même homme emploie une force $= P + K$, il ſoutiendra le travail moins longtems. Car ſa force réſidue ſera $= Q - K$. Je crois qu'on ne s'écartera pas fort de la vérité ſi l'on établit que ce tems décroît en raiſon de cette force réſidue, de ſorte qu'en poſant ce tems de t heures par jour on ait

$$t = \frac{Q-K}{Q} . T.$$

C'eſt comme ſi l'on ſuppoſoit *que la force réſidue décroît uniformément.* Il convient toutefois d'obſerver que ce tems eſt d'autant plus ſouvent interrompu par la néceſſité de ſe repoſer, que la force K eſt plus grande. L'affluence des humeurs néceſſaires pour entretenir les forces a une viteſſe aſſez déterminée. Ainſi il faut prendre du tems. C'eſt pourquoi auſſi on conſeille à ceux qui ont à faire une longue traite de ne pas trop ſe hâter, parce qu'avec une moindre viteſſe ils feront plus de chemin ſans ſe laſſer.

XXXI.

En regardant donc cette évaluation du tems t comme aſſez juſte, voici l'uſage que nous en pourrons faire. Il eſt évident qu'on marche avec le plus de ſuccès lorſque le produit vt eſt un *maximum*, *parce qu'on fait le plus de chemin avant que d'être las.* Si l'on ſubſtitue dans ce produit les valeurs de v, t, & qu'on regarde la force K comme variable, on trouve pour ce *maximum* les valeurs

$$K = \tfrac{1}{3}(Q - 2P) + \frac{2B}{3A} . (P + q)$$

$$P + K = \tfrac{1}{3}(Q + P) + \frac{2B}{3A} . (P + q)$$

$$v = \sqrt{\left[\tfrac{1}{3}A . \frac{P+Q}{P+q} - \tfrac{1}{3}B\right]}$$

$$t = \tfrac{2}{3}T . \frac{(Q+P)A - (P+q)B}{QA}.$$

Les lettres A, B ont ici la même ſignification que dans l'Article XIX.

XXXII.

Pour appliquer ces formules à quelque cas particulier je poſerai $Q = P$. C'eſt une valeur aſſez modique & convenable à des perſonnes qui ne font exercées ni à porter de grands fardeaux ni à faire des courfes fort rapides. Je pofcrai de plus $q = 0$. Cela nous donne la Table fuivante.

$+\eta$	v	$\frac{P+K}{P}$	$\frac{t}{T}$	$-\eta$	v	$\frac{P+K}{P}$	$\frac{t}{T}$
0	4,56	0,6667	1,3333	0	4,56	0,6667	1,3333
5	4,31	0,7816	1,2184	5	4,71	0,5518	1,1482
10	3,99	0,8884	1,1116	10	4,72	0,4449	1,5550
15	3,64	0,9816	1,0184	15	4,63	0,3518	1,6482
20	3,30	1,0590	0,9410	20	4,47	0,2743	1,7256
25	2,99	1,1213	0,8786	25	4,26	0,2120	1,7880
30	2,72	1,1706	0,8294	30	4,05	0,1627	1,8373
35	2,50	1,2091	0,7909	35	3,84	0,1242	1,8758
40	2,28	1,2394	0,7606	40	3,65	0,0940	1,9060
45	2,15	1,2630	0,7371	45	3,46	0,0704	1,9296
50	2,02	1,2821	0,7179	50	3,37	0,0512	1,9488
55	1,91	1,2959	0,7412	55	3,22	0,0375	1,9625
60	1,82	1,3072	0,6928	60	3,10	0,0262	1,9738
65	1,76	1,3159	0,6841	65	3,00	0,0175	1,9825
70	1,70	1,3226	0,6774	70	2,93	0,0108	1,9892
75	1,66	1,3274	0,6726	75	2,87	0,0059	1,9941
80	1,64	1,3308	0,6692	80	2,83	0,0026	1,9974
85	1,62	1,3327	0,6673	85	2,80	0,0006	1,9994
90	1,61	1,3333	0,6667	90	2,79	0,0000	2,0000

XXXIII.

Cette Table nous fait voir que parmi les angles η il y en a un où $t = T$ & $K = 0$. C'eft l'angle qui donne $A = 2B$, & il fe trouve $= 6°. 6'$, fon finus étant $= \sqrt{\frac{1}{13}}$. *Si donc l'acclivité eft de* $16°. 6'$, *on monte avec le plus d'avantage lorfqu'on n'emploie que la force* P *toute feule.* C'eft auffi la raifon qui fait que la viteffe répondante à cet angle fe trouve ici être la même que dans la Table de l'Art. XXI.

XXXIV.

Si l'acclivité eft moins grande, on a $P + K < P$, & $t > T$. C'eft ce qu'on a auffi dans tous les cas où on defcend. Et cela va au point qu'en defcendant verticalement on a $P + K = 0$, c'eft à dire: on defcend ſans employer aucune force, en s'abandonnant ſimplement à l'action de la gravité, pour paſſer d'un degré de l'échelle au ſuivant. Et comme alors $t = 2T$, on voit que la durée t eſt deux fois plus grande que ſi on employoit la force P. Si au contraire on monte verticalement, on a $K = \frac{1}{3}P$, & $t = \frac{2}{3}T$. On voit par-là combien la gravité facilite la deſcente, & la difficulté qu'elle produit lorſqu'il s'agit de monter.

XXXV.

Si le chemin eſt horiſontal on a $\eta = 0$, $t = \frac{4}{3}T$, $P + K = \frac{2}{3}P$, $v = 4{,}56$. On n'emploie donc que les deux tiers de la force P, qui eſt requiſe toute entiere lorſqu'on ſe tient droit & ſans marcher. La viteſſe eſt moins grande que ſi on employoit la force P toute entiere, & néanmoins on fait plus de chemin avant que d'être las. Cela confirme ce que j'ai rapporté dans l'Article XXV au ſujet des voyageurs qui ſe hâtent trop. Tout de même ceux qui ont été dans le cas de ſe tenir droit ſur les piés pendant quelques heures de tems, avouent qu'ils ſe ſeroient moins fatigués en marchant. On comprend qu'ils ne parlent pas d'une marche forcée, mais d'une marche dont ils ſavent confuſément qu'elle demande moins de force. Nos formules font voir que ce *moins* peut être un *minimum* proprement tel. Du reſte, il faut être plus ou moins exercé pour ſaiſir ce *minimum*; & comme il n'eſt tel que pour les marches de longue durée, cela fait que dans des excurſions moins longues on emploie plutôt la force P toute entiere. On y eſt accoutumé, parce qu'il faut l'employer même lorſqu'on s'arrête.

XXXVI.

La Table nous fait encore voir qu'il y a une pente où la *viteſſe la plus avantageuſe* eſt un *maximum*, c'eſt à dire *plus grande que pour une autre déclivité quelconque*. On trouve pour cet angle l'équation

$$\text{ſin } \eta^2 = \sqrt{\tfrac{1}{8}} - \tfrac{1}{3},$$

d'où ſuit

$$-\eta = 8^\circ.\ 11'.$$

On a de plus

$$\frac{P+K}{P} = 0{,}4826$$

$$t : T = 1,2413$$
$$v = 4,73.$$

Mais comme toutes ces valeurs ne ſont que pour le cas où $q = 0$, $P = Q$, je ne les ai rapportées qu'en forme d'exemple. Du reſte je n'y trouve rien qui ne ſoit aſſez conforme à l'expérience. Je ne me rappelle pas que perſonne ſe ſoit plaint d'un chemin dont la pente n'auroit été que de 8 degrés. On y marche fort aiſément, & elle eſt très propre à modifier la viteſſe de telle ſorte qu'elle n'aille pas en augmentant.

XXXVII.

La viteſſe v, telle que nous l'avons déterminée pour le *maximum* vt (Art. XXXI.), nous fournit encore un *maximum* $v . \sin \eta$, c'eſt à dire pour *l'acclivité la plus avantageuſe* (Art. XXVI - XXVIII.) En faiſant le calcul en conſéquence on trouve ſans peine que dans l'équation trouvée à cet égard pour la force K, on n'a qu'à faire $K = Q$. On a donc pour l'angle η qu'il s'agit de chercher

$$\sin \eta^2 = \frac{(P+Q)^2}{9(P+q)^2 - 3(P+Q)^2}.$$

Et par la raiſon que j'ai alléguée dans l'Article XXVI, les forces P, Q, & le poids q doivent être déterminés de telle ſorte que

$$P + Q < \tfrac{3}{2}(P+q)$$

ou bien

$$3q > 2Q - P.$$

En faiſant $3q = 2Q - P$, on a $\sin \eta = 1$, $\eta = 90$. Or pour cet angle on a $A = B = 7,812$, & par-là on trouve

$$v = 1,141$$

indépendamment des valeurs de P, Q. Mais le tems t en dépend de maniere que

$$t = \tfrac{2}{9} . \frac{P+Q}{Q} . T.$$

XXXVIII.

Lorſqu'on fait

$$3q > 2Q - P$$

il faut faire attention à ne pas donner à q une valeur qui rende le mouvement impoſſible, ce qui arriveroit ſi le quarré de la viteſſe devenoit négatif. Cela fait qu'il faut néceſſairement que

$$P + Q > \frac{B}{A} \cdot (P + q).$$

Et comme

$$P + Q < \tfrac{3}{2}(P + q)$$

il s'enſuit que la valeur de q eſt contenue entre des limites aſſez étroites, & que q, η ſont à cet égard dans une dépendance mutuelle.

XXXIX.

Mais en ſubſtituant la valeur de $\sin \eta$ dans celles de A, B (Art. XIX), on en déduit l'équation

$$\frac{B}{A} = \frac{2}{3} \cdot \frac{P + Q}{P + q}.$$

Cette équation fait que nous pouvons nous paſſer des limites que je viens d'indiquer; car elle ſatisfait à l'une, & elle renferme l'autre, parce que la valeur de B ne ſauroit être plus grande que celle de A. Nous avons de plus

$$v = \tfrac{1}{3} \sqrt{\left[A \cdot \frac{P + Q}{P + q}\right]}$$

$$A = \frac{ng\,[9(P + q)^2 - 3(P + Q)^2]}{9(P + q)^2}.$$

Or il n'y a gueres moyen de faire $q > Q$; car quand un homme pourroit marcher avec un fardeau auſſi peſant, il faudroit l'aider à le ſoutenir juſqu'à ce qu'il eût aquis la viteſſe requiſe pour qu'il fût enſuite aidé par la force centrifuge (Art. XX); il eſt évident qu'à moins qu'il ne marche conſtamment avec cette viteſſe, il ſera dans le cas, ou de ne plus pouvoir le ſoutenir, ou de perdre l'équilibre. Ainſi tout ce qu'on peut faire c'eſt de poſer $q = Q$. Dans ce cas l'acclivité la plus avantageuſe ſera $\eta = 24^\circ. 6'$, comme ci-deſſus (Art. XXVII). Cet angle pourra être plus grand ſi on fait $q < Q$; mais alors il faut faire tout au moins $q > (\frac{2}{3} Q - \frac{1}{3} P)$.

XL.

Il nous reſte encore un autre *maximum*; c'eſt que le produit vq en doit donner un. *Il s'agit de porter le plus grand fardeau avec le plus de* *vitesse*. Cela est avantageux sans doute; mais il faut voir jusqu'à quel point un semblable *maximum* peut avoir lieu. En substituant dans ce produit vq la valeur de v (Art. XXXI), on aura, pour $v^2q^2 = maximum$, l'équation

$$Aq^2 \cdot \frac{P+Q}{P+q} - Bq^2 = maximum.$$

Cette équation, en regardant q comme variable, donne, moyennant la différentiation & après toutes les réductions faites,

$$4Bq = A(P+Q) - 4BP + \sqrt{[A^2(P+Q)^2 + 8ABP(P+Q)]}$$

ou bien

$$4B(P+q) = A(P+Q) + \sqrt{[A^2(P+Q)^2 + 8ABP(P+Q)]}$$

d'où suit (Art. XXXI.)

$$v = \sqrt{\left[\tfrac{1}{3}B \cdot \frac{3\sqrt{A(P+Q)} - \sqrt{(A(P+Q)+8BP)}}{\sqrt{A(P+Q)} - \sqrt{(A(P+Q)+8BP)}}\right]}$$

$$t = \tfrac{1}{6}T \cdot \left[3\left(1+\frac{P}{Q}\right) - \sqrt{\left(\left(1+\frac{P}{Q}\right)^2 + 8 \cdot \frac{BP.P+Q}{AQQ}\right)}\right].$$

Or suivant ce que j'ai dit dans l'Article précédent, il faut éviter les cas où l'on auroit $q > Q$. Cette condition veut que $P+q < P+Q$, donc

$$4 - \frac{A}{B} > \sqrt{\left[\frac{A^2}{B^2} + \frac{8A}{B} \cdot \frac{P}{P+Q}\right]}$$

d'où suit

$$\frac{2B}{A} > \frac{2P+Q}{P+Q}.$$

Or la valeur de Q pour les hommes qui ne sont pas infirmes est tout au moins > 0. Et d'un autre côté il est clair qu'elle ne va pas à l'infini. Posant donc ces deux cas extrêmes, on aura pour le premier $Q = 0$, $B > A$, ce qui ne pouvant pas avoir lieu, demande qu'en effet Q soit > 0. Dans le second cas, où $Q = \infty$, on a $B > \frac{1}{2}A$, ce qui donne $13 \sin \eta^2 > 1$, & par conséquent $\eta > 16°.\ 6'$. Nous avons déja caractérisé cet angle par une autre propriété (Art. XXXIII). Ici il nous tient lieu de limites, & fait voir que le *maximum* dont il s'agit ne sauroit avoir lieu, à moins que le chemin n'ait une acclivité qui surpasse $16°.\ 6'$, ou qu'on ne veuille admettre $q > Q$, ce qui supposeroit un homme singulierement exercé (Art. XXXIX).

XLI.

XLI.

Si dans la condition

$$\frac{2B}{A} > \frac{2P+Q}{P+Q}$$

nous substituons les valeurs de A, B (Art. XIX), elle donne

$$\sin\eta > \frac{2P+Q}{\sqrt{(4P^2+20PQ+13Q^2)}}.$$

Par-là le *minimum* de l'angle η se détermine immédiatement par les valeurs qu'on donne aux forces P, Q.

XLII.

Supposons, comme ci-dessus (Art. XXXII.), $P = Q$, & nous aurons

$$\sin\eta > \frac{3}{\sqrt{37}}$$

$$\eta > 29^\circ.\ 33'.$$

Omettant donc les acclivités moins grandes que $29^\circ.\ 33'$, nous aurons la Table suivante.

η	$\frac{q}{P}$	$\frac{K}{P}$	v	$\frac{t}{T}$
29°.33′	1,000	0,667	1,223	0,833
30. 0	0,988	0,669	1,220	0,831
35. 0	0,882	0,688	1,142	0,823
40. 0	0,808	0,702	1,072	0,816
45. 0	0,755	0,713	1,011	0,810
50. 0	0,714	0,722	0,960	0,806
55. 0	0,686	0,727	0,916	0,803
60. 0	0,666	0,734	0,877	0,799
65. 0	0,649	0,738	0,835	0,798
70. 0	0,637	0,741	0,824	0,797
75. 0	0,623	0,742	0,813	0,796
80. 0	0,623	0,743	0,794	0,795
85. 0	0,619	0,744	0,786	0,794
90. 0	0,618	0,745	0,784	0,794

Cette Table nous fait voir que le tems t, de même que la force K, ne varient que très peu, mais que le fardeau q & la vitesse v décroissent plus fortement lorſque l'acclivité va en augmentant. Cependant, même lorsqu'on monte verticalement, le poids du fardeau q ne laiſſe pas d'être encore la $\frac{2}{5}^{me}$ partie du poids P, & la viteſſe eſt $= 0,785$ piés par ſeconde. Ainſi un homme qui peſeroit 125 livres & qui auroit une force Q égale à ce poids, éleveroit un fardeau de 77 livres verticalement en le portant. Si l'on multiplie ces 77 livres par la viteſſe 0,784, le produit ſera $= 60$. Ainſi c'eſt autant que s'il élevoit un poids de 60 livres à la hauteur d'un pié. Cela répond très bien à ce qu'on a trouvé par des expériences qui ont été faites préciſément dans le but de connoître le *meilleur emploi* des forces humaines, relativement à l'intenſité, à la viteſſe & à la durée. Mais ſi j'ai bien compris Mr. *Déſaguliers*, il fait aller *ce moment ſtatique* à 100 livres, ce qui feroit bien plus.

XLIII.

Comme le *maximum* vq n'a point lieu pour des acclivités moins grandes, à moins qu'on ne veuille faire $q > Q$, ce qui demanderoit un exercice tout particulier, il s'enſuit que pour toutes ces acclivités moins grandes, de même que pour les cas où l'on deſcend, on peut toujours faire $q = Q$. C'eſt auſſi ce qui répond très bien à l'expérience. J'ai ſouvent vu que lorsqu'on eſt en doute ſi un fardeau eſt trop peſant pour être tranſporté à quelques lieues de diſtance, on ſe contente d'eſſayer ſi on peut le ſoutenir en ſe tenant droit. Le chemin qu'il s'agit de faire n'eſt pas ce qui embarraſſe. Il ſuffit d'être aſſez exercé à maintenir l'équilibre & à marcher avec une viteſſe uniforme :

Leve fit quod bene fertur onus.

Or en faiſant $q = Q$, on ſatisfera du moins au *maximum* vt, en poſant (Art. XXXI.)

$$P + K = \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{2B}{3A}\right) \cdot (P + Q)$$

$$v = \sqrt{\tfrac{1}{3}(A - B)}$$

$$t = \tfrac{2}{3} T \, \frac{Q + P}{Q} \cdot \frac{A - B}{A}.$$

Ainſi les viteſſes ſeront moins grandes que celles que donne la Table de l'Article XXI, dans le rapport de $\sqrt{3}$ à 1, & ſi le chemin eſt horiſontal, on a $B = 0$, ce qui donne $P + K = \frac{1}{3}(P + Q)$, $v = 3{,}23$. Mais il ſuffit d'employer ces formules pour les deſcentes & pour les acclivités $\eta < 16^\circ.\ 6'$, ou en général pour celles qui ſuivant les différentes valeurs de P, Q n'admettent le *maximum* vq qu'à condition qu'on faſſe $q > Q$, ce qu'il convient d'éviter. Lorſque les chemins ont plus d'acclivité, il vaut mieux proportionner le fardeau q aux forces P, Q en ſorte qu'on ſatisfaſſe tout à la fois au *maximum* vt & au *maximum* vq, c'eſt à dire: qu'on porte *le plus grand fardeau* avec *le plus de viteſſe* & qu'on faſſe *le plus de chemin* avant que d'être las, l'acclivité du chemin étant donnée.

XLIV.

Pour calculer d'après quelques-unes des formules précédentes j'ai eu beſoin des valeurs

$$\frac{B}{A},\ \frac{A}{B},\ \frac{A^2}{B^2}$$

que j'ai calculées pour les angles η de 5 en 5 degrés. Il ne ſera pas inutile de les donner dans la Table ſuivante.

n	$B:A$	$A:B$	$A^2:B^2$
0	0,00000	infini	infini
5	0,17236	5,8151	3,3,8160
10	0,33258	3,0068	9,0407
15	0,47236	2,1170	4,4819
20	0,58852	1,6992	2,8872
25	0,68204	1,4662	2,1497
30	0,75593	1,3229	1,7500
35	0,81364	1,2291	1,5106
40	0,85905	1,1641	1,3551
45	0,89442	1,1180	1,2500
50	0,92319	1,0832	1,1733
55	0,94382	1,0595	1,1226
60	0,96077	1,0408	1,0833
65	0,97382	1,0269	1,0545
70	0,98385	1,0164	1,0331
75	0,99115	1,0089	1,0179
80	0,99614	1,0039	1,0078
85	0,99904	1,0010	1,0019
90	1,00000	1,0000	1,0000

XLV.

Disons encore un mot *sur les pas qu'on fait en marchant.* On sait qu'ils different assez considérablement, tant par rapport à leur grandeur que par rapport à la vitesse, même lorsqu'il n'y a rien d'affecté dans la marche. A cet égard il faut distinguer les effets de nos propres forces d'avec ceux de la gravité. A l'égard de la gravité les piés représentent *un pendule.* De là naît un certain *isochronisme* qu'on remarque dans les pas d'un même homme. L'expérience rapportée ci-dessus (Art. XXIV.) m'a fait voir que j'employois 13 secondes pour monter les 24 marches d'un escalier, c'est à dire pour faire 24 pas sur un chemin incliné sous un angle de $37\frac{1}{2}$ degrés. C'est faire 2 pas par seconde. Je n'en fais ni plus ni moins en marchant dans un chemin horisontal.

XLVI.

Cette même idée du pendule que représentent les piés, fait encore naître celle du *centre d'oscillation* & de sa *distance du point de suspension.*

On comprend par-là que les perſonnes de haute taille emploient plus de tems pour faire un pas, à moins qu'une plus forte tenſion de fibres ne les aide à ſe dépêcher. Mais comme cette tenſion des fibres ne dépend pas de la hauteur de la taille, & que des perſonnes moins grandes peuvent l'avoir dans le même degré, il s'enſuit que généralement parlant les perſonnes de haute taille emploient plus de tems à faire un pas. Du reſte ce pas eſt ordinairement plus grand.

XLVII.

Comme le poids de tout ce dont on revêt les piés éloigne le centre d'oſcillation de ſon point de ſuſpenſion, & que par-là les oſcillations, c'eſt à dire les pas, ont plus de durée, on comprend ſans peine que des bottes bien peſantes rendent les pas plus lents & la marche plus grave. De plus, comme en courant avec beaucoup de viteſſe on n'a garde d'étendre les piés, mais qu'on les laiſſe pliés, il eſt clair que par-là le centre d'oſcillation eſt rapproché du point de ſuſpenſion & que cela contribue à raccourcir le tems qu'il faut pour chaque pas. Nous avons vu ci-deſſus que cela augmente encore la *force centrifuge* & que cette attitude aide à *pouſſer le chemin en arriere* (Art. XX).

XLVIII.

Voilà donc généralement parlant quelle eſt l'influence de la gravité dans les pas qu'on fait, & quelles ſont les différences qui en naiſſent. La force propre de l'homme y intervient de différentes manieres. Celle qui eſt *la moins affectée* conſiſte en ce qu'on n'aide la gravité qu'autant qu'il faut pour qu'elle faſſe le reſte, ſuivant la nature & la grandeur des pas qu'on ſe propoſe de faire. Dans tous ces cas l'*iſochroniſme* des pas d'un même individu ſe conſerve aſſez bien. Il y a d'autres cas où les forces ſont employées à *diminuer* l'effet de la gravité. Cela arrive p. ex. ſi l'on marche avec une perſonne dont la marche eſt plus lente. Cela gêne & fatigue, parce qu'on emploie ſes forces comme en contreſens & elles ne laiſſent pas de s'uſer. La même choſe ſe remarque en montant un eſcalier dont les marches ſont trop-baſſes. Il faut lever le pié moins qu'on ne feroit ſur un eſcalier de même acclivité, mais plus conforme aux pas qu'on fait & aux attitudes que le degré d'acclivité requiert. Enfin il y a des cas tout opposés, c'est à dire où il faut seconder l'action de la gravité avec plus d'effort qu'on ne fait à l'ordinaire. Suivre pas à pas une personne qui marche avec plus de vitesse, c'est faire de ses forces un usage d'autant plus gênant qu'il s'agit de ne donner à ses piés ni trop ni trop peu de vitesse. C'est ainsi aussi qu'une même danse est fatigante pour tel individu par le trop de vitesse qu'elle demande, tandis qu'un autre se plaint de la lenteur avec laquelle il faut qu'il fasse ses pas, & qu'un troisieme s'en accommode très bien. Un escalier dont les marches sont trop hautes pour les pas qu'on feroit conformément à son acclivité, demande également des efforts fatigans. Il y a des escaliers qu'on monte mieux en sautant même de deux en deux marches, qu'on ne les monte en gênant sa vitesse naturelle.

XLIX.

Entant que les pas sont isochrones, leur grandeur est en raison de la vitesse moyenne v. Je trouve que les vitesses indiquées dans la seconde colonne de la Table de l'Art. XXXII. représentent assez bien la grandeur de deux de mes pas. Aussi, comme je viens de le dire, j'en fais deux par seconde. Toute la différence que j'y trouve, c'est que j'ai un peu plus de vitesse pour les acclivités moins grandes. Mais si une échelle presque verticale a les échelons à $\frac{4}{5}$ pié l'un de l'autre, je ne trouve aucune difficulté à la monter en faisant deux pas par seconde. Du reste je n'ai fait que peu d'expériences à l'égard des différentes acclivités. Au tems où je descendois dans les mines du *Hartz* à *Clausthal*, ou que j'escaladois les montagnes de la *Suisse*, je ne prévoyois point qu'un jour je m'occuperois de ces recherches.

SECONDE PARTIE.

L.

Je crois m'être suffisamment arrêté aux *cas où un homme marche, soit non chargé, soit en portant quelque fardeau.* Je n'ai donné mes formules fondamentales que comme pouvant assez bien tenir lieu de celles qu'on trouveroit, si l'intégration des deux équations différentielles (Art. XII. XVII.)

ne demandoit pas plus de données qu'on n'en a encore actuellement. J'ai allégué les raiſons qui m'ont porté à faire cette ſubſtitution & à la regarder comme admiſſible. Je ſuis entré dans tout le détail des conſéquences qui en découlent, & je les ai trouvées très compatibles avec l'expérience.

LI.

Il s'agit maintenant de conſidérer les *cas où un homme pouſſe ou tire.* Pour ſimplifier d'abord ces recherches je ſuppoſerai que *le chemin eſt horiſontal, de même que la direction dans laquelle il agit en pouſſant ou en tirant.* La ſeconde Figure repréſente l'attitude de cet homme pour le moment où Fig. il va appuyer ſur le pié CDB. Juſques-là il a appuyé ſur le pié CA, & il continue même juſqu'à ce que le centre de gravité ait aquis aſſez de viteſſe pour qu'il puiſſe commencer à s'élancer ſur le pié CDB. Dans cette attitude il a deux points d'appui. L'un eſt en A, & l'autre en F au bras EF, que je ſuppoſe étendu horiſontalement. La force qu'il emploie eſt celle dont il a beſoin pour tenir le bras droit de même que le corps, & de plus celle qu'il doit employer pour marcher. Mais la vraie force qui entre ici en conſidération, c'eſt la gravité, & particulierement le poids de ſon corps.

LII.

Abaiſſant du point E la verticale Ee, & achevant le parallélogramme $Efed$, la verticale Ee repréſentera les poids de l'homme P. Cette force ſe réſout par-là en deux autres Ef, Ed. On voit ſans peine que c'eſt la premiere qui eſt employée à pouſſer ou à tirer. Elle eſt appliquée comme à un levier EA, & à cet égard elle doit être diminuée toutes les fois que le point E eſt plus éloigné du point d'appui A que ne l'eſt le centre de gravité C. Faiſant donc

$$Ef : Ei = AE : AC,$$

la force avec laquelle il pouſſe ſera déſignée par Ei. Et il eſt clair que c'eſt encore la force avec laquelle le bras EF eſt étendu, & qu'à cet égard elle ne ſauroit être plus grande que n'eſt la plus grande force du bras. Je déſignerai cette plus grande force par F. Poſant de plus l'angle $dEe = \phi$, & la force $Ei = f$, nous aurons

$$EF = P . \text{tang}\,\Phi$$

$$K' = f = \frac{AC}{AE} . P \,\text{tang}\,\Phi$$

ou à très peu près

$$f = \tfrac{3}{5} P . \text{tang}\,\Phi.$$

Enfin la force totale du bras étant $= F$, & celle qui est employée $= f$, la force résidue sera $F - f$, & la durée de l'emploi de la force f diminue en raison de la force F à cette force résidue $F - f$.

LIII.

L'autre force

$$Ed = P . \text{sec}\,\Phi$$

agit directement contre le point d'appui A. Cela fait qu'elle n'admet point de diminution, comme l'admettoit la force Ef. Elle agit donc comme feroit la gravité, & à cet égard il faut nécessairement que

$$P \,\text{sec}\,\Phi < Q.$$

On voit encore que cette force $P . \text{sec}\,\Phi$ équivaut à celle que j'ai désignée ci-dessus par $P + q$, de sorte qu'on peut faire

$$P \,\text{sec}\,\Phi = P + q,$$

c'est à dire: *cette force* P *sec* Φ *agit comme feroit la gravité, si on se tenoit droit en portant un fardeau* $=$ q.

LIV.

Il faut maintenant observer *qu'un homme qui pousse ou qui tire, quand il marcheroit sur un plan horisontal, doit être considéré comme s'il marchoit sur un plan incliné.* Car la force $P \,\text{sec}\,\Phi = P + q$ agissant suivant la direction EA, comme feroit la gravité si cette droite étoit verticale, on peut la considérer comme telle; & comme l'angle $EAB < 90°$, il est clair que le chemin AB à cet égard cesse d'être horisontal. Ce que nous nommons horisontal fait un angle droit avec la direction de la gravité. Or par la résolution de la force Ee en Ef, Ed la direction de la gravité devient ici EA. Ainsi ce qu'il faut à cet égard nommer horisontal doit faire

un

un angle droit avec cette direction. Mais l'angle EAB étant $< 90°$, il s'enſuit que le chemin AB doit être conſidéré comme incliné, & l'angle ſous lequel il eſt incliné vers ſon horiſon eſt $= \varphi$.

LV.

On voit ſans peine que cette conſidération abrege infiniment nos recherches, en ce qu'elles ſe réduiſent à faire ſimplement les ſubſtitutions requiſes dans les formules que nous avons données dans la premiere partie de ce Mémoire. Ainſi au lieu de $P + q$ on mettra $P \sec \varphi$. L'angle η gardera ſa ſignification lorſque le chemin eſt réellement incliné, mais dans le fond on lui ſubſtituera l'angle φ, ſi le chemin eſt horiſontal, ou l'angle $\varphi + \eta$, ſi le chemin eſt incliné. La force K déſignera, de même que ci-deſſus, la force qu'on emploie pour marcher.

LVI.

Le chemin étant donc horiſontal, de même que la direction dans laquelle un homme pouſſe ou tire, la formule que nous avons trouvée pour la viteſſe de la marche (Art. XIX.) ſe change au moyen de ces ſubſtitutions en

$$v = \sqrt{\left[\frac{P + K}{P.\sec\varphi} \cdot \frac{gn}{1 + 3\sin\varphi^2} - \frac{2gn.\sin\varphi}{(1 + 3\sin\varphi^2)^{3:2}}\right]}.$$

Et en faiſant

$$A = \frac{gn}{1 + 3\sin\varphi^2}$$

$$B = \frac{2gn.\sin\varphi}{(1 + 3\sin\varphi^2)^{3:2}}$$

on aura

$$v = \sqrt{\left[\frac{P + K}{P\sec\varphi} \cdot A - B\right]}.$$

Cela me diſpenſe de répéter ici les Tables données ci-deſſus. Car les valeurs de A, B (Art. XIX.) ſont pour les angles φ les mêmes qu'elles étoient pour l'angle η. Et ſi dans quelque cas particulier on trouve $P.\sec\varphi = P + K$, de ſorte que $q = K$, on aura pour les différens angles φ les mêmes viteſſes que nous avons données dans la Table de l'Article XXI. pour les différens angles η. C'eſt un travail tout fait.

LVII.

Lorſqu'on tire ou qu'on pouſſe on ſe laſſe de deux manieres qui ſont aſſez indépendantes l'une de l'autre. La force des bras s'épuiſe dans un tems qui eſt en raiſon de la force réſidue $F - f$, & la force des piés & du corps s'épuiſe dans un tems qui eſt en raiſon de la force réſidue $Q - K$. On aura donc

$$t = \frac{Q - K}{Q} \cdot T$$

comme ci-deſſus (Art. XXXV). Et enſuite

$$t' = \frac{F - f}{F} \cdot T'.$$

Je n'ai point aſſez d'expériences pour ſavoir ſi & ſous quelles conditions les tems t, t' peuvent être le même tems. Les forces F, Q dépendent beaucoup de l'exercice. Ordinairement elles ne ſont pas moins grandes que la force P, mais elles peuvent aller au double, au triple, au quadruple & même au delà. Les tems T, T' paroiſſent pouvoir être le même tems.

LVIII.

La force q étant ici $= P(\sec \Phi - 1)$, on voit que pour un même homme elle varie ſimplement ſuivant l'angle Φ, & qu'à moins que cet angle ne ſoit fort grand, elle eſt aſſez petite. Quant à la force K, on eſt aſſez libre de l'augmenter conformément à l'effet qu'on veut produire. Si donc on fait encore ici $K = q$, comme dans l'Article XXI, on aura tout de même $v = \sqrt{(A - B)}$.

LIX.

Or il s'agit ſurtout de ſavoir: *comment en tirant ou en pouſſant on peut faire le meilleur emploi poſſible de ſes forces.* Cette queſtion eſt un peu vague & indéterminée. Ainſi nous examinerons d'abord ce qui regarde l'angle Φ, c'eſt à dire *l'inclinaiſon la plus avantageuſe qu'il faut donner au corps.* A cet égard il eſt naturel que le produit vf ſoit un *maximum*, afin qu'on pouſſe avec *le plus de force* & avec *le plus de viteſſe.* Or pour un même homme on a (Art. LII. LVI.)

$$f = \frac{AC}{AE} \cdot P \operatorname{tang} \Phi$$

$$v = \sqrt{\left[\frac{P+K}{P} \cdot \frac{gn \cdot \operatorname{cof} \Phi}{1 + 3 \operatorname{fin} \Phi^2} - \frac{2gn \cdot \operatorname{fin} \Phi}{(1 + 3 \operatorname{fin} \Phi^2)^{3:2}}\right]}.$$

Faiſant donc $v^2 f^2 =$ *maximum* on aura, en ne regardant que Φ comme variable,

$$\frac{P+K}{P} \cdot \frac{\operatorname{fin} \Phi \cdot \operatorname{tang} \Phi}{1 + 3 \operatorname{fin} \Phi^2} - \frac{2 \operatorname{fin} \Phi \cdot \operatorname{tang} \Phi^2}{(1 + 3 \operatorname{fin} \Phi^2)^{3:2}} = maximum.$$

Poſant la différentielle de cette équation $= 0$, on en déduit pour l'angle Φ l'équation ſuivante:

$$\frac{P+K}{P} \cdot \operatorname{cof} \Phi [2 - \operatorname{fin} \Phi^2 + 3 \operatorname{fin} \Phi^4] \sqrt{(1 + 3 \operatorname{fin} \Phi^2)} =$$
$$\operatorname{fin} \Phi (6 - 2 \operatorname{fin} \Phi^2 + 12 \operatorname{fin} \Phi^4).$$

LX.

Cette équation eſt encore indéterminée relativement à la force K. Mais cette force ſe déterminera par une autre condition qui eſt: *qu'avant que de ſe laſſer on faſſe le plus de chemin poſſible.* Cela demande que $vt =$ *maximum*. Or on a (Art. LVII. LVI.)

$$t = \frac{Q-K}{Q} \cdot T$$

$$v = \sqrt{\left(\frac{P+K}{P \sec \Phi} \cdot A - B\right)}.$$

Donc, prenant les quarrés,

$$(Q-K)^2 \cdot [(P+K) \cdot A - B \sec \Phi] = maximum.$$

Regardant K comme variable, cette équation donne

$$\frac{P+K}{P} = \frac{Q+P}{3P} + \frac{2 \sec \Phi}{3} \cdot \frac{B}{A},$$

ou en ſubſtituant les valeurs de A, B (Art. LVI.)

$$\frac{P+K}{P} = \frac{P+Q}{3P} + \frac{4 \operatorname{tang} \Phi}{3 \sqrt{(1 + 3 \operatorname{fin} \Phi^2)}}.$$

LXI.

Il ne reste plus qu'à substituer cette valeur dans la derniere équation de l'Article LVIII, & à faire les réductions requises pour avoir l'équation

$$\frac{P+Q}{P} \cdot \operatorname{cos}\Phi\,(2 - \operatorname{sin}\Phi^2 + 3\operatorname{sin}\Phi^4)\sqrt{(1+3\operatorname{sin}\Phi^2)} = \operatorname{sin}\Phi\,[10 - 2\operatorname{sin}\Phi^2 + 24\operatorname{sin}\Phi^4].$$

Voilà donc l'angle Φ déterminé par les forces P, Q de maniere qu'on satisfait à un double *maximum*, c'est *qu'on pousse avec le plus de force & le plus de vitesse & qu'avant que d'être las on fait le plus de chemin possible.*

LXII.

Posons pour servir d'exemple, comme ci-dessus (Art. XXXII.), $P = Q$; cette équation donne $\operatorname{sin}\Phi = 0{,}4142$, & par conséquent $\Phi = 24^\circ.\,28'$. Et en faisant $AC : AE = 3 : 5$, de sorte que $f = \frac{3}{5}P \,.\, \operatorname{tang}\Phi$, on aura $f = 0{,}273 \,.\, P$. De plus

$$\frac{B}{A} = 0{,}6730.$$

$$A = 20{,}64.$$

$$B = 13{,}78.$$

$$P + K = 1{,}1596 \,.\, P.$$

$$K = 0{,}1596 \,.\, P.$$

$$v = 3{,}143.$$

$$t = 0{,}84 \,.\, T.$$

Si donc cet homme pese 125 livres, on aura $P = 125$ livres, $f = 34$ livres, $K = 20$ livr. $P + q = P \,.\, \operatorname{sec}\Phi = 137$ livr. $q = 12$ livr. Ainsi cet homme tirera avec une force de 34 livres & fera $3\frac{1}{7}$ piés de chemin par seconde. Il pourra donc en tirant une corde qui passe par dessus une poulie faire monter un poids de 34 livres à une hauteur de $3\frac{1}{7}$ piés par seconde, ou bien en arrangeant la machine conformément à ce but, il élevera un poids de 107 livres à la hauteur d'un pié par seconde.

LXIII.

La valeur de l'angle $\phi = 24^\circ. 28'$ eſt très conforme à l'expérience. Ce n'eſt pas qu'on ne puiſſe s'incliner d'avantage, mais on ne le fait que dans les cas qui demandent un effort extraordinaire, & alors on marche avec beaucoup moins de viteſſe. Mr. *de la Hire* a examiné ces ſortes de cas relativement à l'équilibre. Il juge tout de même, d'après les obſervations, que l'angle ϕ eſt de 20 à 30 degrés. Le produit de la viteſſe v par la force f donne les 107 livres, que nous venons d'indiquer. C'eſt ce qu'on appelle *le moment ſtatique*. On voit qu'il eſt bien plus grand que celui de 60 livres que nous avons trouvé ci-deſſus (Art. XLII.) pour le cas où un homme, dont la force $Q = P = 125$ livres, comme nous la ſuppoſons ici, porte ce poids verticalement en haut. Mais outre que j'ai déjà remarqué dans l'Article cité, qu'en ſuppoſant la force Q plus grande, cet homme portera d'avantage, nos formules font aſſez voir que ces deux cas ne ſont pas généralement comparables. Lorſqu'il s'agit de faire porter un poids, un homme dont la force Q eſt très grande, y ſera plus propre, ſurtout s'il ne peſe pas beaucoup. Mais lorſqu'il s'agit de faire tirer, il faut des hommes qui peſent beaucoup, & dont la force Q ne laiſſe pas d'être grande. Suppoſons encore qu'un homme qui ne peſe que 125 livres doive faire aller une roue en marchant ſur les talons. Nous avons vu (Art. XXVIII.) qu'il fait le plus de chemin en ſe plaçant à $24^\circ. 6'$ du point le plus bas de la roue. La force avec laquelle il meut la roue eſt $= P.\sin 24^\circ. 6' = 51$ livres. Et par la Table de l'Art. XXXII. nous voyons que ſa viteſſe eſt de 3,05 piés par ſeconde. Multipliant cette viteſſe par la force, le produit ſera 155 livres. Ce *moment ſtatique* eſt donc bien plus grand. Cependant il ſe réduit à de moindres termes, parce que les gens qui font aller une roue ainſi, ſe tiennent ordinairement plus près du point le plus bas de la roue, ou s'appuient avec les mains contre quelque objet immobile, & par là il n'agiſſent plus avec tout le poids de leur corps. Outre cela il faut être bien exercé pour marcher avec tant de viteſſe dans une roue qui tourne. Et quelquefois la machine eſt arrangée de maniere qu'elle n'admet point cette viteſſe.

LXIV.

Quoique les cas où $P = Q$ ſoient aſſez ordinaires pour des perſonnes qui ne ſont ni infirmes ni exercées à la fatigue, il eſt clair que lorſqu'il s'agit de faire aller des machines en tirant ou en pouſſant, ou de faire monter les vaiſſeaux contre le courant de la riviere, on prend des gens dont la force Q ſurpaſſe de beaucoup la force P. Auſſi ces gens en cas de beſoin s'inclinent bien d'avantage. Regardant donc le rapport entre ces forces comme variable, notre formule fait voir que l'angle ϕ varie auſſi. Cela m'a engagé à calculer la Table ſuivante, en poſant $AC : AE = 3 : 5$.

$\sin\phi$	ϕ	$\frac{P+Q}{P}$	$\frac{f}{P}$	$\frac{P+K}{P}$	$\frac{P+q}{P}$	v	$\frac{t}{T}$	$\frac{vtf}{TP}$
0,3	17°.27′	1,474	0,189	0,863	1,048	2,54	1,29	0,62
0,4	23. 35	1,927	0,272	1,121	1,091	2,79	0,87	0,66
0,5	30. 0	2,478	0,346	1,408	1,155	2,81	0,72	0,70
0,6	36. 52	3,176	0,450	1,742	1,250	2,90	0,66	0,86
0,7	44. 26	4,134	0,588	2,210	1,400	2,95	0,61	1,06
0,8	53. 8	5,591	0,800	2,904	1,667	2,93	0,58	1,38
&c.								
1,0	90. 0	infini.	infini.	infini.	infini.	infini.	infini.	

LXV.

J'ai omis les cas où $\sin\phi > 0,8$, les cas où les ouvriers s'inclinent au delà de 53 degrés étant fort rares. Ceux qui tirent ou qui pouſſent les bateaux s'inclinent quelquefois autant. Ce ſont des gens exercés au point que leur force $P + Q$ ſurpaſſe 5 à 6 fois le poids de leur corps. J'ai encore omis les cas où on auroit $P + Q < P + q$; car il eſt évident que la force totale doit être plus grande que celle qui eſt requiſe pour ſe ſoutenir. Auſſi les formules donneroient-elles pour ces cas au tems t une valeur négative, & cela dénoteroit que ce tems doit être employé à aquérir de nouvelles forces. Outre cela lorſque l'inclinaiſon ϕ eſt ſi petite, la force f l'eſt également. Et quand une force f fort grande ne ſeroit pas néceſſaire dans quelque cas particulier, il eſt clair que des ouvriers robuſtes ſoutiendront le travail plus longtems & qu'ils agiront avec plus de viteſſe. Ainſi il faut tout au moins ſuppoſer $P = Q$, lorſqu'il s'agit du *maximum* de l'emploi des forces. Ce n'eſt pas chez des perſonnes foibles qu'il faut le chercher.

LXVI.

La Table nous fait voir que la viteſſe v ne varie très peu. Elle eſt à peu près la moitié de celle qu'on auroit en marchant librement ſur un chemin horiſontal & en n'employant que la force P (Art. XXI). Et comme la viteſſe qui répond à $\sin\phi = 0,8$ commence à être moins grande que celle qui répond à $\sin\phi = 0,7$ cela nous fait voir qu'elle a un *maximum*. Subſtituant la valeur de $(P+K):P$ (Art. LX.) dans l'expreſſion donnée pour la viteſſe v (Art. LIX.) & faiſant $dv = 0$ en regardant ϕ comme variable, on en déduit

$$0 = \frac{P+Q}{P}(5\sin\phi - 9\sin\phi^3)\sqrt{(1+3\sin\phi^2)} - 2\cos\phi + 12\cos\phi\sin\phi^2.$$

Cette équation étant comparée avec celle de l'Article LXI. on éliminera le rapport $(P+Q):P$, & on aura l'équation $0 = 1 - 20\sin\phi^2 + 36\sin\phi^4 - 48\sin\phi^6 + 63\sin\phi^8$, qui donne $\sin\phi = 0,78$, $\phi = 51°.\ 16'$. Nous voyons de plus que la force $P+K$ n'eſt qu'un peu plus grande que la moitié de la force totale $P+Q$. Quant à la force f, j'en ai exprimé le rapport à la force P. Elle doit être rapportée à la force F, qui pour des gens robuſtes eſt plus grande que P. Cela fait que dans tous ces cas les piés ſe laſſent avant les bras, ſans quoi le *maximum* $v(Q-K):Q$ n'auroit été d'aucun uſage, & il auroit fallu prendre le *maximum* $v(F-f):F$. J'ai encore rapporté dans la derniere colonne le produit vtf, qui exprime la totalité du chemin vt qu'on fait avant que d'être las, multiplié par la force f avec laquelle on pouſſe ou on tire. Ce produit exprime donc les rapports qu'il y a entre la totalité de l'effet à l'égard des différentes inclinaiſons ϕ.

LXVII.

En multipliant la force f par la viteſſe v on a le *moment ſtatique*, c'eſt à dire le poids que l'ouvrier au moyen d'une machine levera à la hauteur d'un pié en une ſeconde de tems, lorſqu'il fait aller la machine en pouſſant ou en tirant avec la force f & marchant avec la viteſſe v. Je donne cette *explication du moment ſtatique*, parce qu'il ſe rapporte uniquement à la variation qu'on peut donner au fardeau & à ſa viteſſe, la force motrice & ſa viteſſe reſtant la même. Ce n'eſt qu'au moyen des machines que la force f avec la viteſſe v équivaut à un fardeau mf avec la viteſſe $v:m$, ou à un fardeau vf avec la viteſſe 1. *On s'y prendroit bien mal d'appliquer ce* PRINCIPE DE STATIQUE *à la force humaine entant qu'elle eſt motrice.* La Table fait voir que le produit vf varie avec les angles ϕ, & même très conſidérablement. Ainſi p. ex. en poſant la force $P = 125$ livres, on a

ſin ϕ	vf	f
0,3	59 livres	24 livres.
0,4	95 -	34 -
0,5	121 -	43 -
0,6	163 -	56 -
0,7	217 -	73 -
0,8	293 -	100 -

On voit donc que le moment vf varie du ſimple juſqu'au quintuple & même au delà, ſi la force Q eſt encore plus grande. *Il faut donc ſe déſabuſer à l'égard du ſentiment aſſez généralement adopté, qu'il en eſt des hommes comme des machines, & qu'il ſuffit de déterminer le produit* vf *une fois pour toutes.* Mr. *Daniel Bernoulli* trouva que le produit vf équivaloit au poids de $\frac{3}{4}$ pié cubique d'eau. D'autres le font aller à 50 ou 60 livres. Mr. *Déſaguliers* l'eſtima 100 livres, tandis que Mr. *Amontons* ne trouva que $37\frac{1}{2}$ livres. Nos formules font voir que toutes ces évaluations peuvent avoir lieu, mais c'eſt préciſément la raiſon pourquoi on ne peut s'en tenir à aucune. Il faut abſolument avoir égard tant à la force des gens qu'on emploie qu'à la maniere dont on les emploie. Dans les cas particuliers c'eſt le poids P de l'ouvrier & ſa force Q qu'il faut commencer à déterminer. Par-là on aura le rapport $(P+Q):P$, qui étant cherché dans la Table, donnera l'angle ϕ & le rapport $f:P$, & par conſéquent la force f. C'eſt à cette force que doit être égale la réſiſtance qu'il faut vaincre en pouſſant ou en tirant, & alors la viteſſe v pourra être celle qui répond à cet angle ϕ. Autrement l'arrangement ſera mal pris. J'ai vu des

des gens tirant des bateaux avec une force $P+K$ avec laquelle ils leveroient de terre un poids de 300 livres & au delà. Si donc le *moment* vf n'étoit que de 60 livres, leur viteſſe ne pourroit être que de $\frac{1}{5}$ pié par ſeconde, tandis qu'il eſt de fait qu'ils marchent avec une viteſſe de près de 3 piés, inclinés au point d'être plus d'à moitié couchés. Il n'y a là rien qui ne ſoit très conforme à la Table que je viens de donner. Auſſi ſont-ce des gens exercés, qui ſavent prendre leurs meſures.

LXVIII.

Après ce que je viens de dire au ſujet des cas où l'on tire ou pouſſe dans une direction horiſontale & en marchant ſur un chemin horiſontal, il ne ſera pas difficile de paſſer à la conſidération plus générale des cas où, *tant le chemin que la direction dans laquelle on pouſſe ou tire, ſont inclinés.* La troiſieme Figure ne differe de la ſeconde qu'en ce que le chemin AB fait avec l'horiſon AH un angle $BAH = \eta$, & que la direction de la force du bras EK fait, tant avec l'horiſon qu'avec le chemin, un angle quelconque. Je déſignerai l'angle eEf par ψ, & l'angle dEe par ϕ, comme ci-deſſus (Art. LII), la droite Ee étant verticale. Fig

LXIX.

On voit ſans peine que toute la différence entre ces deux Figures & les cas qu'elles repréſentent conſiſte en ce que dans le cas préſent l'angle ψ peut être un angle quelconque. On aura donc bien plus généralement que ci-deſſus

$$Ef = \frac{P . \sin \phi}{\sin (\phi + \psi)}$$

$$Ei = f = \frac{AC}{AE} \cdot \frac{P . \sin \phi}{\sin (\phi + \psi)}$$

ou bien à très peu près

$$f = \frac{3 P . \sin \phi}{5 . \sin (\phi + \psi)}.$$

Et de plus

$$Ed = P + q = \frac{P . \sin \psi}{\sin (\phi + \psi)}.$$

Ces formules ſont indépendantes de l'angle η, parce qu'elles ſe rapportent ſimplement aux droites AE, EF & à la verticale Ee.

LXX.

Mais comme encore ici c'eſt la droite EA qui doit être conſidérée comme verticale, ce ſera le complément de l'angle EAB qui repréſentera l'acclivité du chemin. Cette acclivité ne doit donc pas être poſée $= \eta$, mais bien $= \phi + \eta$, parce que $90° - EAB = \phi + \eta$. Ainſi la formule générale que j'ai donnée pour la viteſſe v (Art. XIX), devient ici

$$v = \sqrt{\left[\frac{(P+K)\cdot \sin(\psi+\phi)\cdot gn}{P\cdot \sin\psi\cdot[1+3\sin(\phi+\eta)^2]} - \frac{2gn\sin(\phi+\eta)}{(1+3\sin(\phi+\eta)^2)^{3:2}}\right]}$$

ou bien en faiſant

$$A = \frac{gn}{1+3\sin(\phi+\eta)^2}$$

$$B = \frac{2gn\cdot\sin(\phi+\eta)}{[1+3\cdot\sin(\phi+\eta)^2]^{3:2}}$$

on aura

$$v = \sqrt{\left[\frac{(P+K)\cdot\sin(\phi+\psi)}{P\cdot\sin\psi}\cdot A - B\right]}$$

& les valeurs numériques des quantités

$$A,\ B,\ \frac{B}{A},\ \frac{A}{B},\ \left(\frac{A}{B}\right)^n$$

(Art. XIX. XLIV.) ſerviront encore ici, en mettant $\phi + \eta$ au lieu de η. Il en eſt de même de la Table (Art. XXI.), lorſqu'encore ici on poſe $P + K = P + q$.

LXXI.

Je vais appliquer ces formules aux cas où le chemin eſt horiſontal. Cela donne $\eta = 0$, & on aura pour la viteſſe

$$v = \sqrt{\left[\frac{P+K}{P}\cdot\frac{gn\cdot\sin(\phi+\psi)}{\sin\psi\cdot(1+3\sin\phi^2)} - \frac{2gn\cdot\sin\phi}{(1+3\sin\phi^2)^{3:2}}\right]}.$$

LXXII.

Or le *maximum* vf fournit ici deux équations, l'une lorſqu'on ſuppoſe que l'angle ϕ eſt variable, l'autre lorſque c'eſt l'angle ψ. Enſuite le *maxi-*

mum vt donne encore une troiſieme équation, ſi l'on regarde K comme variable. Ces trois équations ſont

$$\frac{P+K}{P} \cdot \frac{\text{ſin}(\phi+\psi)}{\text{ſin}\,\psi}$$
$$= \frac{\text{ſin}\,\phi\,[6\,\text{coſ}\,\phi \,.\, \text{ſin}(\phi+\psi) - 4\,\text{ſin}\,\phi \,.\, \text{coſ}(\phi+\psi) - 12\,\text{ſin}\,\phi^3 \,.\, \text{coſ}(\phi+\psi)]}{[2\,\text{coſ}\,\phi \,.\, \text{ſin}(\phi+\psi) - \text{ſin}\,\phi\,\text{coſ}(\phi+\psi) - 3\,\text{ſin}\,\phi^3 \,.\, \text{coſ}(\phi+\psi)]\,V(1+3\,\text{ſin}\,\phi^2)}$$
$$= \frac{4\,\text{ſin}\,\phi \,.\, \text{ſin}\,\psi \,.\, \text{coſ}(\phi+\psi)}{[\text{ſin}(\phi+\psi) \,.\, \text{coſ}\,\psi + \text{coſ}(\phi+\psi)\,\text{ſin}\,\psi] \,.\, V(1+3\,\text{ſin}\,\phi^2)}$$
$$= \frac{4\,\text{ſin}\,\phi}{3\,V(1+3\,\text{ſin}\,\phi^2)} + \frac{Q+P}{3P} \cdot \frac{\text{ſin}(\phi+\psi)}{\text{ſin}\,\psi}.$$

Ici donc la valeur $(P+K) \,.\, \text{ſin}(\phi+\psi) : P \,.\, \text{ſin}\,\psi$ s'élimine d'elle-même. Les deux équations qui reſtent, peuvent être changées de telle ſorte qu'on exprime les fonctions de l'angle ψ par tang ψ & elles ſeront du ſecond degré. Éliminant enſuite tang ψ, il reſte encore une équation entre ϕ, P, Q; de ſorte que deux de ces quantités étant données, on en déduira la troiſieme.

LXXIII.

Mais on voit aiſément que le calcul eſt moins embarraſſant, lorſqu'on ſuppoſe que l'angle ϕ eſt donné. C'eſt auſſi à quoi je m'en tiendrai. Voici donc l'ordre dans lequel on calculera les valeurs répondantes des autres quantités.

I. L'angle ψ ſe trouve moyennant l'équation

$$\text{tang}\,\psi^2 + \frac{4+12\,\text{ſin}\,\phi^4}{\text{ſin}\,2\phi} \,.\, \text{tang}\,\psi = 2 - 3 \,.\, \text{coſ}\,2\phi.$$

II. Enſuite on aura le rapport

$$\frac{Q+P}{P} = \frac{\text{ſin}\,\phi \,.\, \text{ſin}\,\psi\,[2\,\text{ſin}(\phi+2\psi) - 6\,\text{ſin}\,\phi]}{\text{ſin}(\phi+\psi) \,.\, \text{ſin}(\phi+2\psi) \,.\, V(1+3\,\text{ſin}\,\phi^2)}.$$

III. De plus le rapport

$$\frac{P+K}{P} = \frac{P+Q}{P} + \frac{4\,\text{ſin}\,\phi \,.\, \text{ſin}\,\psi}{3\,\text{ſin}(\phi+\psi) \,.\, V(1+3\,\text{ſin}\,\phi^2)}.$$

IV. Enfin le rapport

$$\frac{P+q}{P} = \frac{\sin\psi}{\sin(\phi+\psi)}.$$

V. Outre cela la viteffe

$$v = \sqrt{\left[\frac{P+K}{P} \cdot \frac{\sin(\phi+\psi)}{\sin\psi} \cdot A - B\right]}.$$

VI. Enfin la durée

$$\frac{t}{T} = \frac{Q-K}{Q},$$

VII. & le rapport

$$\frac{f}{P} = \frac{AC}{AE} \cdot \frac{\sin\phi}{\sin(\phi+\psi)}.$$

LXXIV.

Suppofons p. ex. l'angle $\phi = 30°$, on aura

I. $$\tan\psi^2 + \frac{4+\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} \cdot \tan\psi = 2 - \frac{3}{2},$$

ce qui donne

$$t\psi = -\frac{19}{4\sqrt{3}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{361}{48}\right)} = -\frac{32,9089}{12} \pm \frac{33,9853}{12}.$$

Il faut prendre le figne négatif, & par-là on aura

$$\psi = 100°.10'.$$

Cette valeur étant fubftituée dans les équations fuivantes donne

II. $\frac{Q+P}{P} = 2,869$

III. $\frac{P+K}{P} = 1,606$

IV. $\frac{P+q}{P} = 1,208$

V. $v = 2,96$ piés

VI. $\frac{t}{T} = 0,676$

VII. Et en faifant $AC : AE = 3 : 5$, on aura

$$\frac{f}{P} = 0,393.$$

LXXV.

Ce cas ne differe de celui que j'ai expofé pour le même angle $\phi = 30^\circ$ dans la Table de l'Art. LXIV qu'en ce qu'ici l'angle ψ, au lieu d'être droit, eft obtus & $= 100^\circ. 10'$. On voit que les forces Q, K, F, q, font ici plus grandes, fi la force P dans les deux eft la même. La viteffe eft ici tant foit peu plus grande, mais la durée eft moindre. Et le produit vtf eft ici $= 0,79$, tandis que dans l'autre cas il n'étoit que $= 0,70$. Cependant il faut dire que lorfqu'on veut comparer les cas où l'angle ψ varie, il faut le faire en fuppofant que le rapport $(P + Q) : P$ refte le même. Ce n'eft que de cette maniere qu'on pourra juger s'il eft plus avantageux de faire l'angle $\phi = 90^\circ$, ou de le faire plus grand. Pour cet effet il faut remarquer que l'angle ψ ne varie pas beaucoup. On trouve $\psi = 90^\circ$, foit qu'on faffe $\phi = 0$, ou $= 90^\circ$. Quant aux valeurs intermédiaires de ϕ j'ai trouvé

pour $\sin\phi =$	$\psi =$
$\sqrt{\tfrac{1}{10}}$	$98^\circ. 21'$.
0,4	99. 40.
0,5	100. 10.
0,6	99. 30.
$\sqrt{\tfrac{1}{2}}$	97. 50.

Or la Table de l'Art. LXIV eft pour $\psi = 90^\circ$. Ainfi la différence étant fi petite, le produit vtf ne fauroit être fort différent, dès que le rapport $(P + Q) : Q$ refte le même. Ainfi prenant pour ce rapport la valeur 2,869 telle que nous venons de la trouver, cette valeur dans la Table de l'Art. LXIV répond à $\sin\phi = 0,56$, & le produit $vtf : P^3$ répondant eft $= 0,79$, c'eft à dire exactement, ou peu s'en faut, le même que nous venons de trouver pour $\psi = 100^\circ. 10'$. Cependant cet angle $\psi > 90^\circ$ peut mériter la préférence à d'autres égards. Car fi p. ex. la force f eft employée à traîner un fardeau ou à tirer une charrette, cet angle $\psi > 90^\circ$ aide à vaincre le frottement & à faire monter le fardeau ou la charrette, lorfque le chemin n'eft pas uni, quoiqu'horifontal.

LXXVI.

Les formules générales que j'ai données (Art. LXIX. LXX.) nous ferviront encore pour les cas où l'angle $AEF = \phi + \psi$ eft droit. Ces cas ont lieu lorsqu'on *marche contre le vent.* Lorsque le vent est très fort, on est obligé de s'incliner en avant, afin de faire équilibre. L'action du vent se résoud en trois parties, dont l'une est perpendiculaire à la droite EA, l'autre parallele à cette droite & la troisieme perpendiculaire au plan vertical dans lequel on marche. Cette troisieme n'entre en considération que lorsqu'on marche obliquement contre le vent. La seconde fait qu'on pese moins, & la premiere est celle à laquelle il faut faire équilibre en s'inclinant contre le vent. Et comme le vent frappe le corps dans toute sa longueur, cela fait que le centre d'impulsion E est plus proche du centre de gravité C. Je ne ferai qu'ébaucher le calcul qu'on pourra faire si l'on ne veut estimer qu'à peu près l'effet du vent.

LXXVII.

La force du vent perpendiculaire à la droite AE équivaut plus ou moins à celle que le vent a en frappant à angles droits une surface plane de 4 piés quarrés. Un pié cubique d'air pese environ $\frac{1}{12}$ livre. Si donc la vitesse du vent est $= C$, sa force sera

$$F = \frac{1}{12} \cdot 4 \cdot \frac{CC}{4g} = \frac{CC}{12g} \text{ livres.}$$

Et comme dans ce cas

$$F = \frac{AC}{AE} \cdot P \cdot \sin\Phi$$

nous aurons

$$\sin\Phi = \frac{CC}{12g} \cdot \frac{AE}{AC \cdot P}.$$

Or le rapport $AC : AE$ est ici environ $= 4 : 5$. Cela donne

$$\sin\Phi = \frac{5CC}{48 \cdot P \cdot g}.$$

Supposons p. ex. $P = 125$ livres, & $C = 90$ piés, ce qui pour un vent est très fort, nous aurons

$$\sin\Phi = \frac{5 \cdot 8100 \cdot 64}{48 \cdot 125 \cdot 1000} = 0{,}432$$

$$\Phi = 25^\circ . 36'.$$

Cet homme marche donc contre le vent comme ſi, l'air étant calme, il montoit un chemin dont l'acclivité fût de $25°. 39'$. S'il n'emploie que la force $P + q$, la Table (Art. XXI) fait voir que ſa viteſſe ne ſera que de $2\frac{1}{2}$ pié, au lieu de 5,59 piés qu'elle auroit ſi, avec la même force & dans un air calme, il marchoit ſur un chemin horiſontal. On voit donc juſqu'à quel point un vent très fort peut retarder la marche, qui va droit contre le vent. Or comme ici la force $P + q = P \operatorname{coſ} \Phi =$ 113 livres, & par conſéquent eſt plus petite que la force P, il s'enſuit qu'on n'aura point de peine à faire que $P + K > P + q$ & à marcher avec plus de viteſſe contre le vent. Mais alors on ſent très bien qu'on emploie plus de force. Quand on fuit le vent en marchant dans la même direction, l'angle Φ eſt négatif; c'eſt donc comme ſi on deſcendoit ſur un chemin dont la pente fût $= \Phi$. Si donc on fait $P + K = P + q$, la Table de l'Article XXI. donne la viteſſe $v = 5,8$ piés par ſeconde. Comme cette viteſſe n'eſt gueres plus grande que celle qu'avec la même force on auroit ſur un chemin horiſontal, l'air étant calme, on voit que le vent empêche beaucoup plus lorſqu'il eſt contraire, qu'il ne ſeconde lorſqu'on l'a à dos. Cela aura lieu encore par une autre raiſon, qui dépend de la viteſſe relative, quoique du reſte dans les cas où la viteſſe du vent eſt de 90 piés & celle de la marche de $2\frac{1}{2}$ ou $5\frac{4}{5}$ piés, la viteſſe relative ne varie que comme $90 + 2\frac{1}{2}$ à $90 - 5\frac{4}{5}$, c'eſt à dire environ comme 11 à 10.

LXXVIII.

J'obſerverai encore que nos formules ſuppoſent une marche continue. Cela fait que ſi le chemin eſt incliné, la direction du bras EF doit être parallele au chemin, ou du moins faire avec le chemin un angle qui reſte le même. Ce dernier cas peut avoir lieu lorſqu'on tire au moyen d'une corde. Mais ſi l'on pouſſe, il n'y a gueres moyen de le faire en ſorte que la droite EF faſſe avec l'horiſon un angle plus grand que n'eſt l'acclivité du chemin. Car ce qu'on pouſſe s'éleveroit tellement qu'en continuant on ne pourroit plus l'atteindre. Dans ce cas donc on fait mieux en ſuppoſant la direction EF parallele au chemin AB. Cela donne $\psi = 90° + \eta$, & par conſéquent on aura pour ces cas

$$f = \frac{3}{5} P . \frac{\sin \varphi}{\cos (\varphi + \eta)}$$

$$P + q = \frac{P . \cos \eta}{\cos (\varphi + \eta)}$$

$$v = \sqrt{\left[\frac{P + K}{P} . \frac{\cos (\varphi + \eta)}{\cos \eta} . A - B\right]}.$$

LXXIX.

Ensuite comme il faut que $q < Q$, l'équation (Art. LXIX)

$$P + q = \frac{P . \sin \varphi}{\sin (\varphi + \psi)}$$

nous donne

$$\frac{P + Q}{P} > \frac{\sin \varphi}{\sin (\varphi + \psi)}.$$

C'est une condition à laquelle il faut surtout avoir égard si l'angle ψ est beaucoup plus grand qu'un angle droit, ou s'il approche de 180 degrés. Du reste les ouvriers se gardent bien d'eux-mêmes d'un angle φ aussi grand; ils allongent la corde, & par-là cet angle approche plus de 90 degrés.

LXXX.

Il y a encore des cas où l'angle ψ peut être déterminé par la maniere dont la force f doit produire son effet. Ainsi p. ex. s'il s'agit de tirer un fardeau en le traînant, le frottement entre en considération, & même seul, dès
Fig. 4. que le chemin est horisontal. Soit en général AB le chemin incliné vers l'horison AH sous un angle $BAH = \eta$. Que le fardeau AD soit tiré suivant la direction AE, qui fasse avec le chemin un angle $EAB = \psi - 90^{\circ} = \lambda$. De plus supposons que la verticale AL exprime le poids du fardeau $= p$, tandis que la droite AE désigne la force f avec laquelle on tire. Menant par le point A la droite AM perpendiculaire sur le chemin AB, & tirant LM parallele à ce chemin, AM dénotera la force avec laquelle le fardeau presse contre le chemin par l'action de la gravité, & LM est la force avec laquelle il tâche de descendre. Achevant de plus le rectangle $AKEB$, la droite AK désigne la force qui di-

minue

minue l'action de la gravité AM, de sorte qu'elle n'agit qu'avec la partie résidue KM. L'autre droite AB est la force avec laquelle le fardeau est tiré le long du chemin, mais qui est diminuée par la partie $AN = LM$, avec laquelle la gravité s'y oppose, de sorte que cette force n'est que $= BN$. Observons maintenant que le frottement est dû à la force MK, de sorte que NB doit être à MK dans un rapport donné. On fait communément

$$BN = \tfrac{1}{3}KM.$$

Ensuite il faut encore observer qu'on traîne ordinairement de maniere que la partie antérieure du fardeau ne soit point levée de terre, ce qui arriveroit si on faisoit $AK > \tfrac{1}{2}AM$. Ce rapport cependant peut varier. Ici je le prens tel, parce que je suppose que le centre de gravité du fardeau est au milieu, entre les points extrêmes A, D. Cette circonstance fait que la force de la gravité AM doit être considérée comme partagée à portions égales sur les points A, D. Faisant donc $AP = PM$, la partie PM est supposée agir sur le point D, tandis que l'action sur le point A n'est que KP. Or il y a quelque part dans la droite AD un point Q où ces deux actions peuvent être regardées comme concentrées, & ce point se détermine par l'analogie

$$KM : PM = AD : AQ.$$

Il faut donc toujours regarder la masse AD comme pressée contre le chemin par une force $= KM$, de sorte qu'on aura

$$BN = \tfrac{1}{3}KM,$$

ou bien, en substituant les valeurs de ces droites,

$$f.\cos\lambda - p.\sin\eta = \tfrac{1}{3}(p\cos\eta - f.\sin\lambda)$$

d'où l'on déduit

$$f = \frac{p(\cos\eta + 3\sin\eta)}{\sin\lambda + 3\cos\lambda}.$$

Or l'acclivité du chemin étant donnée, de même que le poids p, on voit que la force f peut encore varier lorsque l'angle λ varie, & qu'elle devient un *minimum* lorsque

$$\sin\lambda + 3\cos\lambda = maximum.$$

Cela arrive lorſqu'on fait

$$\tang\lambda = \tfrac{1}{3}$$
$$\lambda = 18^\circ.\ 26'.$$

De là on aura

$$\sin\lambda + 3\cos\lambda = \sqrt{10},$$

& par conſéquent

$$f = p(\cos\eta + 3\sin\eta)\,.\,\sqrt{\tfrac{1}{10}}.$$

Or ſi on avoit fait $\phi = 0$, on auroit eu

$$f = p(\cos\eta + 3\sin\eta)\sqrt{\tfrac{1}{9}}.$$

On voit donc que dans le premier cas la force f eſt moins grande dans le rapport de $\sqrt{10}$ à $\sqrt{9}$, c'eſt à dire environ d'une vingtieme partie. Ainſi on ne gagne pas beaucoup. De là vient qu'ordinairement on fait $\lambda < 18^\circ.\ 26'$. Par-là on approche des valeurs de l'angle ψ déterminées ci-deſſus (Art. LXXV). Du reſte quand on retiendroit la valeur de $\tang\lambda = \frac{1}{3}$, on ne paſſeroit les bornes de la condition

$$p\cos\eta > 2f\sin\lambda$$

que lorſque l'acclivité du chemin η ſeroit plus grande que $33^\circ.41'$. Car en ſubſtituant les valeurs de f, λ que nous venons de trouver, cette condition ſe réduit à

$$\tang\eta < \tfrac{2}{3}$$
$$\eta < 33^\circ.\ 41'.$$

On comprend encore que dans ces cas où l'on traîne le fardeau, ce n'eſt plus le *maximum* vf, mais le *maximum* vp, auquel il faut avoir égard. Mais dès que pour le déterminer on ne fait varier que l'angle ϕ, on trouve le même réſultat. Au contraire le réſultat ſera différent lorſqu'en retenant l'équation

$$f = \frac{p(\cos\eta + 3\sin\eta)}{\sin\lambda + 3\cos\lambda}$$

on fait varier l'angle $\lambda = \psi - 90^\circ$.

TROISIEME PARTIE.

LXXXI.

Les cas que j'ai confidérés dans les deux parties précédentes de ce Mémoire, font ceux où un homme marche. Il y en a un grand nombre d'autres où il emploie fes forces fans faire de chemin & où il n'emploie que les forces de quelque membre. Je compte parmi les premiers de ces cas ceux où on *jette*, de même que ceux où on *frappe*. Ces deux manieres d'employer fes forces ne font pas fort différentes. Les attitudes font plus ou moins les mêmes. Ainfi la différence confifte fimplement en ce qu'en jetant on lâche le corps qu'on jette, tandis qu'en frappant on le retient.

LXXXII.

En *jetant* ou en *frappant*, le bras ou en général le membre du corps qu'on emploie pour cela, paffe fucceffivement par différentes pofitions. Dans chaque pofition il y a une ou plus d'une force motrice qui accélere, ou qui retarde, ou qui modifie le mouvement. La maffe qu'il faut mouvoir eft celle du bras ou du membre qu'on emploie & celle du corps qu'on jette ou dont on fe fert pour frapper.

LXXXIII.

La force motrice ou accélératrice peut être évaluée immédiatement par des expériences. C'eft la force avec laquelle on peut faire équilibre à une réfiftance qui eft égale, & qui peut toujours être produite par quelque poids, qu'il s'agit de lever ou de tenir fufpendu. Ainfi p. ex. un homme qui ayant le bras étendu horifontalement peut foutenir un poids de 50 livres, eft cenfé avoir dans fon bras une force accélératrice qui dans cette attitude fait équilibre à ce poids de 50 livres & outre cela au poids du bras. Si au lieu de foutenir ce poids de 50 livres de la main, il le fufpendoit au coude du bras étendu, il eft clair qu'en employant la même force, ce poids pourroit être doublé, ce bras étendu pouvant être confidéré comme un levier dont le point d'appui eft dans l'aiffelle.

LXXXIV.

Fig. 5. Soit la poſition du bras ACM, A l'aiſſelle, AV une droite verticale, BM la direction ſuivant laquelle la main M tend à ſe mouvoir en faiſant équilibre au poids P ſuſpendu par deſſus la poulie B, moyennant la corde MBP. La force accélératrice du bras ſoutiendra le poids P & outre cela le poids du bras, lequel ſera moindre que ſi l'angle VAM étoit droit. C'eſt de cette maniere que la force accélératrice pourra être évaluée par des expériences, quelle que ſoit la poſition du bras. L'on comprend du reſte que chacune de ces poſitions demande une attitude correſpondante de tout le corps, pour qu'il reſte en équilibre.

LXXXV.

Le poids du bras peut être réduit au point M, lorſqu'on diminue celui de chaque partie en raiſon réciproque de ſa diſtance du point A. Enſuite on le réduit encore à la direction MB moyennant un parallélogramme $pbMm$, dont les côtés bM, mM ſont dans les directions MB, MA, & dont la diagonale Mp eſt verticale & repréſente le poids du bras réduit au point M. De cette maniere la force Mm tend à étendre le bras, & la force Mb jointe au poids P fait équilibre à la force accélératrice appliquée au point M & agiſſant ſuivant la direction BM. Cette force pour des hommes robuſtes & exercés peut aller à 100 livres & au delà. Je n'ai pas trouvé qu'elle varie beaucoup lorſque l'angle VAM varie. Mais en faiſant ces ſortes d'eſſais il faut bien prendre garde de ne point agir dans une direction différente de celle qu'on ſe propoſe d'examiner, & qui doit être perpendiculaire, ou peu s'en faut, à la direction du bras. Il eſt bon qu'on appuie l'aiſſelle contre quelque objet immobile, afin que le corps ne ſe prête pas à augmenter la force du bras & à faire changer la direction.

LXXXVI.

Après avoir réduit au point M le *poids du bras*, pour évaluer la force accélératrice, il faut encore y réduire la *maſſe du bras*. Cela ſe fait, comme dans tous les mouvemens accélérés, en raiſon réciproque du quarré de la diſtance du point A. Soit C une partie quelconque de la maſſe.

Cette partie, réduite au point M, devient $= (C . AC^2 : AM^2)$. Si donc le bras étoit cylindrique, sa masse réduite au point M se réduiroit à un tiers de son poids.

LXXXVII.

Soit maintenant p le poids & la masse du bras, Q le poids & la masse du corps qu'il faille jeter, P la force accélératrice P. Enfin soit l'angle $VAM = \Phi$, la longueur $AM = r$, on aura $r\,\mathrm{d}\Phi$ l'élément de l'espace que le point M parcourt dans le tems $\mathrm{d}\tau$. Je suppose pour plus de simplicité que son mouvement est circulaire & que l'angle AMB est droit. Le poids du bras réduit au point M sera à peu près $= \frac{1}{2}p$. Ajoûtant encore le poids Q, on aura

$$Mp = \tfrac{1}{2}p + Q.$$
$$MB = (\tfrac{1}{2}p + Q) . \sin\Phi.$$

Donc la force accélératrice

$$= P - (\tfrac{1}{2}p + Q) . \sin\Phi.$$

Ensuite on aura la masse du bras, réduite au point M, $= \frac{1}{3}p$. Ajoûtant la masse Q, on aura la masse totale

$$= \tfrac{1}{3}p + Q.$$

Soit v la vitesse du point M, & h la hauteur due à cette vitesse, la formule fondamentale de la Dynamique donnera

$$\mathrm{d}h = \frac{P - (\frac{1}{2}p + Q) . \sin\Phi}{\frac{1}{3}p + Q} . r\,\mathrm{d}\Phi$$

où il ne s'agit que d'exprimer P par Φ, si en effet cette force varie assez considérablement, lorsque l'angle Φ varie.

LXXXVIII.

Mais nous pourrons donner à P une valeur constante moyenne, & de cette maniere nous aurons

$$h = \frac{Pr\Phi + r(\frac{1}{2}p + Q) . \cos\Phi}{\frac{1}{3}p + Q} + \mathrm{Const.}$$

Or le mouvement commençant quelque part, nous ferons $h = 0$ lorſque $\Phi = \omega$. Cela nous donne

$$h = \frac{Pr(\Phi - \omega) + r(\frac{1}{2}p + Q)(\cos\Phi - \cos\omega)}{\frac{1}{3}p + Q}.$$

Cette formule ſe réduit à

$$h = \frac{Pr(\Phi + \omega}{\frac{1}{3}p + Q}$$

lorſqu'on prend l'angle initial ω négatif & égal à l'angle terminal Φ.

LXXXIX.

Suppoſons p. ex. que le poids du bras ſoit de 6 livres $= p$, & celui du corps qu'on jette, de 2 livres $= Q$. Poſons la force accélératrice moyenne $= 32$ livres, & l'angle $\omega = -20°$, $\Phi = +20°$, la longueur du bras $r = 2$ piés de Rhin, & nous aurons

$$h = 16 \,.\, \text{Arc.}\,40° = 11\tfrac{1}{6} \text{ piés},$$

ce qui donne la viteſſe terminale $v = 26\frac{2}{5}$ piés. Le corps jeté parcourra une parabole & reviendra au niveau du point où on l'a lâché, à la diſtance de 19 piés.

XC.

La formule que nous venons de trouver, fait voir que la hauteur h, & par conſéquent la viteſſe v, pourroit croître à l'infini, ſi l'angle ω alloit toujours en croiſſant. Mais outre que la force P s'affoibliroit en s'épuiſant, il s'y joint encore le frottement, qui croît en raiſon de la hauteur h ou du quarré de la viteſſe. Ayant donc égard à cette circonſtance, la formule différentielle ſe change en

$$dh = \frac{P - (\frac{1}{2}p + Q)\sin\Phi - mh}{\frac{1}{3}p + Q} \,.\, r\,d\Phi$$

ce qui, en retenant la valeur de P moyenne & conſtante, donne

$$h = \frac{P}{m} - (\tfrac{1}{2}p + Q) \,.\, \frac{9mr^2\sin\Phi - 3r(p + 3Q)\cos\Phi}{9m^2r^2 + (p + 3Q)^2} + C \,.\, e^{-m\Phi : A}$$

où C eſt la conſtante, qui ſe détermine parce que $h = 0$, lorſque $\Phi = \omega$. Le coëfficient m déſigne le rapport entre la hauteur h & la partie dont la force motrice eſt diminuée à cauſe du frottement. Et pour plus de briéveté j'ai poſé $\frac{p+3Q}{3r} = A$. On aura donc

$$C = (\tfrac{1}{2}p + Q) \cdot \frac{9mr^2 \sin\omega - 3r(p+3Q)}{9m^2r^2 + (p+3Q)^2} \cdot e^{m\omega : A} - \frac{P}{m} \cdot e^{m\omega : A}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} h = {} & \tfrac{P}{m}(1 - e^{m(\omega - \phi) : A}) \\ & + (\tfrac{1}{2}p + Q) \cdot \frac{9mrr \sin\omega - 3r(p+3Q)\cos\omega}{9m^2r^2 + (p+3Q)^2} \cdot e^{m(\omega-\phi) : A} \\ & - (\tfrac{1}{2}p + Q) \cdot \frac{9mrr \sin\phi - 3r(p+3Q)\cos\phi}{9m^2r^2 + (p+3Q)^2}. \end{aligned}$$

La valeur du coëfficient m eſt aſſez conſidérable en ce que la viteſſe v commence à atteindre ſon *maximum*, lorſque l'angle $\phi - \omega$ eſt à peine de 40 ou 50 degrés. Ainſi la quantité exponentielle approche fort vîte de zéro, de ſorte que la valeur de h commence bientôt à ne varier qu'entre certaines limites, qui ſe déterminent par

$$\begin{aligned} h & = \frac{P}{m} - (\tfrac{1}{2}p + Q) \cdot \frac{9mrr \sin\phi - 3r(p+3Q)\cos\phi}{9m^2r + (p+3Q)^2} \\ & = \textit{maximum} \ \& = \textit{minimum}. \end{aligned}$$

XCI.

Le cas que je viens de conſidérer, peut tenir lieu d'un grand nombre d'autres. Le point M peut être celui d'un point quelconque du corps humain. La droite BM déſignera dans tous les cas la direction du mouvement. Et moyennant la poulie B, & des poids B, on ſera toujours en état d'évaluer par des expériences la force accélératrice appliquée ou réduite au point M dans la direction M. Le mouvement du point M peut ſe faire ſuivant une ligne droite ou courbe quelconque, quoiqu'ordinairement il ſoit ou droit ou circulaire. L'angle bMp peut tout de même être un angle quelconque. Si cependant le mouvement ſe fait dans une direction horiſontale, le calcul ſe ſimplifie beaucoup. Je n'entrerai point dans ces détails. La force P varie extrêmement ſuivant l'âge, le tempérament, l'état de ſanté, l'exercice &c. Elle ſera de 100 livres pour un homme robuste & bien exercé, tandis qu'elle ne sera que de quelques livres pour un homme affoibli par l'âge ou par des maladies. Outre cela on ne l'emploie pas toujours toute entiere.

XCII.

La différence que j'ai faite dans les deux premieres Parties de ce Mémoire entre les efforts requis pour faire équilibre & ceux que demande l'agilité, devient encore plus nécessaire dans les cas qui font le sujet de cette troisieme Partie. La valeur de h dépend tout autant du chemin que le point M parcourt pendant que le mouvement s'accélere, que de la force P qu'on emploie pour produire l'accélération. Ainsi, par exemple, s'il s'agissoit simplement de pousser, la direction BM, perpendiculaire à celle du bras étendu AM, seroit la moins efficace de toutes. Mais dès qu'il s'agit de jeter ou de frapper, cette direction mérite la préférence, parce que le point M parcourant un arc de cercle, fait assez de chemin pour réparer ce que l'on perd, par la raison que la force suivant cette direction est plus petite.

XCIII.

Ensuite comme le bras, ou tel autre membre du corps qu'on voudra, n'est pas également mobile en tout sens, il est clair qu'il faut éviter les attitudes & les mouvemens qui sont moins naturels. Il faut également préférer ceux où la gravité seconde la force accélératrice. C'est ainsi qu'on ne frappe de bas en haut que dans les cas où on n'est pas libre de faire autrement, parce que la gravité s'oppose à la force motrice du bras.

RECHERCHES

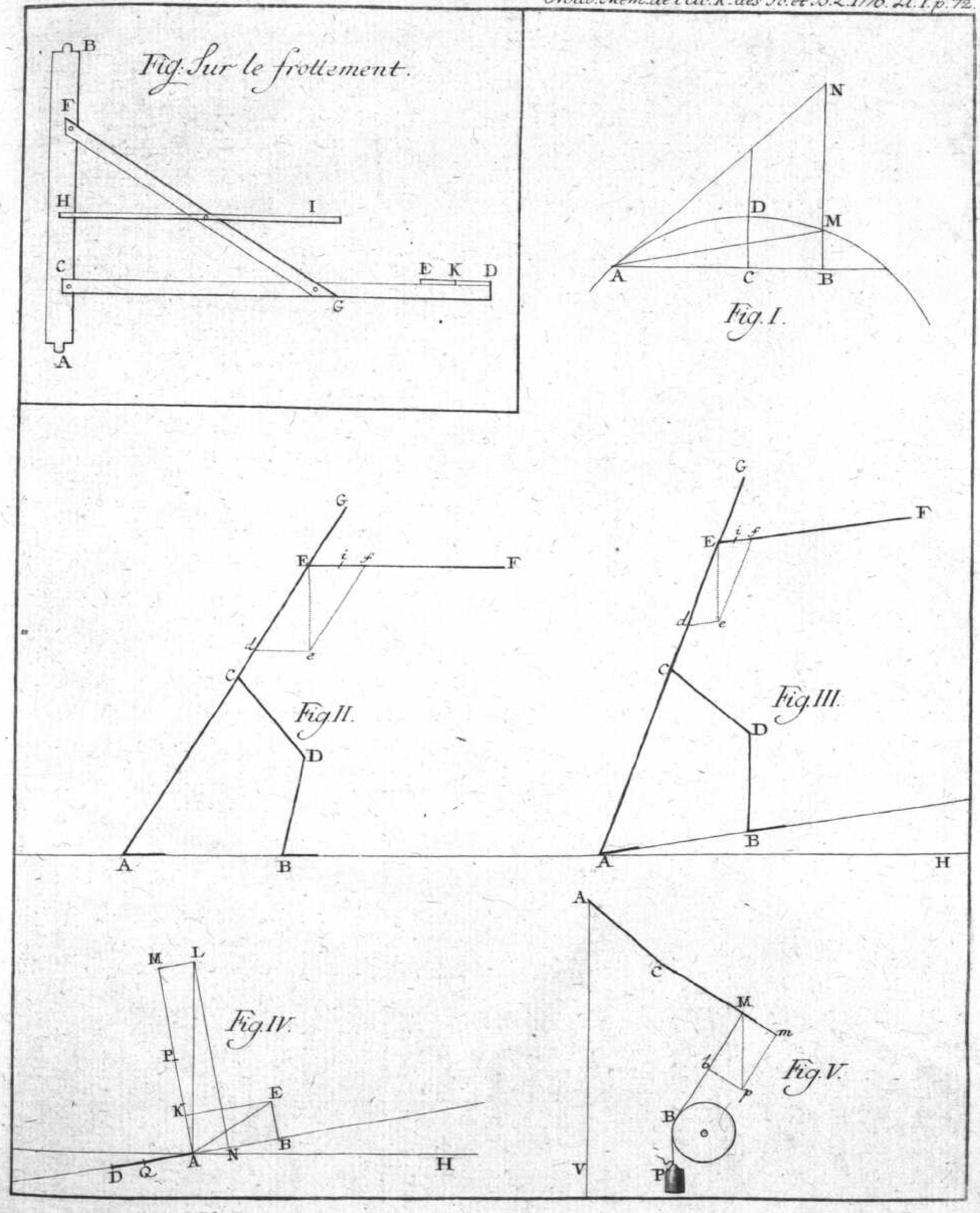

Fig. Sur le frottement.

Fig. I.

Fig. II.

Fig. III.

Fig. IV.

Fig. V.