

Die Construction, welche ich über diese Finsterniß nach Lambertischer Methode entworfen habe, stimmt sehr gut mit dieser Rechnung überein, so daß sich dadurch die Richtigkeit derselben bestätigt. Ich habe unterdessen dabey den Halbmesser der Erde nur mit dem Unterschied der Parallaxe des Mondes unter dem Aequator und der Sonnenparallaxe beschrieben, und auch die Vergrößerung des Mondhalbmessers in seiner Höhe aus der Acht gelassen; welches freylich kleine Unterschiede von einigen Secunden verursachen kann, welche zum Theil schon aus dem Erfolge sich ergeben. Ferner hätte die abgeplattete Figur der Erde; die ungleiche Bewegung des Mondes in seiner Bahn; die nicht unendliche Entfernung der Sonne und die Veränderung des Positions-Winkels am Meridian, mit in Betrachtung müssen gezogen werden, um die Resultate so genau zu haben, als es nur immer die mit Fleiß angestellte mechanische Operation zuläßt; man läßt aber diese kleinen Veränderungen und Ungleichheiten bey der Construction gemeinlich aus der Acht, weil solche zusammen genommen sehr wenig austragen, und weil die Tafeln und die Rechnungen selbst nicht zuverlässiger sind.

Ich fand nach der Construction:

Den Anfang der Finsterniß	um	4 Uhr	45', 7	
Das Mittel	-	-	5 - 31, 4	die Gröſſe 4 Zoll 34 Min.
Das Ende	-	-	6 - 13, 9	

Welche nun aufs höchste um etwas über $\frac{1}{2}$ Min. von dem, was die Rechnung giebt, abgehen.

Einige trigonometrische Anmerkungen von Herrn Lambert.

I.

Die gewöhnlichen Tafeln der Sinus und Tangenten, dergleichen die von *Vlacq*, *Sherwin*, *Wolf* und andere sind, gehen nur bis auf 7 Decimalstellen. Dieses hat nun in Absicht auf die Genauigkeit der Berechnungen den Erfolg, daß der einem Sinus zukommende Bogen nicht mehr bis auf eine Secunde gefunden wird, so bald dieser Bogen größer als $88^{\circ} 49'$ ist, weil für größere Bögen die in beneldten Tafeln angegebene Sinus um weniger

weniger denn 0,0000060 von einander verschieden sind. In Ansehung der Logarithmen muß der Bogen kleiner als $87^{\circ} 18'$ seyn, weil für grössere Bögen die Logarithmen der Sinus um weniger denn 0,0000060 von einander verschieden sind.

Es giebt nun zwar sowohl Tafeln als Formeln, die weiter als auf 7 Decimalstellen gehen. Aber die Tafeln sind selten zu haben, und die Formeln bey dem Gebrauche etwas weitläufig. Damit entsteht nun immer die Frage, was in solchen Fällen zu thun sey, wenn man die Rechnung bis auf einzelne Secunden richtig haben will? Die Antwort hierauf ist nun überhaupt, daß die ganze Rechnung anders müsse eingerichtet werden. Wie nun dieses geschehen könne, das wird sich am füglichsten durch die Anwendung auf einige besondere Fälle zeigen lassen.

Von diesen Fällen ist einer der öftte vorkömmt, wenn man nämlich aus der Länge, Breite und Abweichung des Mondes oder eines Planeten oder auch eines Sterns seine gerade Aufsteigung sucht, und der Ort des Sterns oder des Mondes ganz nahe bey \circ \vee oder \circ \simeq ist.

Es sey λ die Länge oder der Abstand vom nächsten Aequinoctialpunct auf der Ecliptic genommen; α eben dieser Abstand auf dem Aequator; δ die Abweichung und ϵ die Breite; so hat man überhaupt

$$\cos \alpha \cdot \cos \epsilon = \cos \delta \cdot \cos \lambda.$$

Hier kann es sich nun zutragen, daß alle diese Bögen viel zu klein sind, als daß α bis auf Secunden könnte nach dieser Formel genau gefunden werden.

In solchen Fällen ist es besser, wenn man diese Formel in folgende verwandelt

$$(1 - 2 \sin \frac{1}{2} \alpha^2) \cdot (1 - 2 \sin \frac{1}{2} \epsilon^2) = (1 - 2 \sin \frac{1}{2} \delta^2) \cdot (1 - 2 \sin \frac{1}{2} \lambda^2)$$

denn hieraus folgt sodann

$$f \frac{1}{2} \alpha^2 + f \frac{1}{2} \epsilon^2 - 2 \cdot f \frac{1}{2} \alpha^2 \cdot f \frac{1}{2} \epsilon^2 = f \frac{1}{2} \delta^2 + f \frac{1}{2} \lambda^2 - 2 f \frac{1}{2} \delta^2 \cdot f \frac{1}{2} \lambda^2$$

demnach

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = r \left(\frac{f \frac{1}{2} \delta^2 + f \frac{1}{2} \lambda^2 - f \frac{1}{2} \epsilon^2 - 2 f \frac{1}{2} \delta^2 \cdot f \frac{1}{2} \lambda^2}{1 - 2 f \frac{1}{2} \epsilon^2} \right)$$

oder nach einer leichten Verwandlung

$$\sin \frac{1}{2} \alpha = r \left(\frac{f \frac{1}{2} \delta^2 \cdot \cos \lambda + f \frac{\lambda + \epsilon}{2} \cdot f \frac{\lambda - \epsilon}{2}}{\cos \epsilon} \right)$$

Diese

Diese Formel ist nach aller Schärfe richtig. Sind nun aber die Bogen δ , λ , ζ nur von 1 oder 2 Gr. so kann man sie sehr merklich abkürzen, weil man mit zureichender Genauigkeit folgende

$$\alpha = r (\delta^2 + \lambda^2 - \zeta^2)$$

gebrauchen, und demnach mit den Bögen selbst die Rechnung vornehmen kann.

Es sey Z. E. $\delta = 2^\circ$, $\lambda = 2^\circ$, $\zeta = 1^\circ$, so ist nach dieser letzten Formel

$$\alpha = r (4 + 4 - 1) = 2^\circ 64575 \\ = 2^\circ 38' 44'' 7$$

Nach der ganz genauen Formel aber ist

2. log. sin $1^\circ = 6,4837106$	1. sin $1\frac{1}{2}^\circ = 8,4179190$
log. cos $2^\circ = 9,9997354$	1. sin $\frac{1}{2}^\circ = 7,9408419$
<u>16,4834460</u>	<u>6,3587609</u>
1. cos $1^\circ = 9,9999338$	1. cos $1^\circ = 9,9999338$
<u>6,4835122</u>	<u>6,3588271</u>

Diese beyden Logarithmen geben

$$0,0003044474 \\ 0,0002284689$$

$$\text{Summe} = 0,0005329163$$

$$\text{Quadratwurzel} = 0,0230850 = \sin \frac{1}{2} \alpha$$

$$\frac{1}{2} \alpha = 1^\circ 19' 22''$$

$$\alpha = 2^\circ 38' 44''$$

welches bis auf einige Decimaltheile von Secunden dem vorhin gefundenen Werthe gleich ist.

Uebrigens ist hiebey anzumerken, daß die hier betrachteten Fälle gerade diejenigen sind, wo es sehr nöthig ist, sich eine Figur zu zeichnen, um sicherer entscheiden zu können, ob der Werth α von dem Aequinoctialpunct vor- oder rückwärts gerechnet werden muß. Eine solche Zeichnung erspart zugleich die Mühe, die man sonst nehmen müßte, die verschiedenen Fälle, die vorkommen können, vorzuzählen, und den, der jedesmal vorkommt, darunter auszufuchen.

Man sieht überdies ohne Mühe, daß die Formel

$$\alpha^2 + \zeta^2 = \delta^2 + \lambda^2$$

vier Aufgaben enthält, weil jeder der Werthe α , ζ , δ , λ als der zu suchende angesehen werden kann. Diese Formel begreift dem-

demnach auſſer dem hier betrachteten Fall, wo α geſucht wird, noch drey andere unter ſich. Es iſt aber unnöthig; jeden beſonders zu betrachten. Denn man ſieht aus der allgemeinen Gleichung

$$\cos \alpha \cdot \cos \zeta = \cos \delta \cdot \cos \lambda$$

daß die Werthe α , ζ , δ , λ für einander geſetzt werden können, und daher nur ihre Bedeutung zu ändern iſt, wenn man jedesmal die geſuchte Größe α , die drey gegebenen ζ , δ , λ nennen, folglich jede der aus dieſer Gleichung hergeleiteten Formeln, ſo wie ſie hier ausgedrückt worden, gebrauchen will.

II.

Ich werde demnach einen andern Fall vornehmen, und dieſes iſt derjenige, wo auf der Erde der Abstand zweener Oerter oder am Himmel der Abstand zweener Sterne ſehr geringe iſt, und aus der gegebenen Entfernung vom Pole und dem Unterschiede der Länge oder der geraden Aufſteigung gefunden werden ſoll.

Es ſey der geſuchte Abstand = x , ein Bogen des größten Circuls, ſo durch beyde Oerter oder Sterne geht; die Entfernungen vom Pole ſeyn c , κ , der Unterschied der Länge oder der geraden Aufſteigung = λ ; ſo giebt die Trigonometrie folgende Gleichung

$$\cos x = \cos c \cdot \cos \kappa + \sin c \cdot \sin \kappa \cdot \cos \lambda$$

Iſt nun x ſehr geringe, ſo reicht $\cos x$ ſo nahe an den Halbmeeßer, daß ſich der Bogen x mittelſt der gewöhnlichen Tafeln nicht bis auf eine Secunde genau beſtimmen läßt. Indeffen kann es Z. E. Fälle geben, wo man die Theile eines Micrometers mittelſt der Diſtanzen von ſehr nahe neben einander ſtehenden Sternen zu prüfen wünſchte, ſofern man nämlich vorausſetzen kann, daß ihre Lage in Abſicht auf die Länge und Breite oder auch in Abſicht auf die Abweichung und gerade Aufſteigung in den Sternverzeichniſſen richtig angegeben iſt, und die Sterne nahe genug beym Scheitelpuncte ſtehen, um von der Strahlenbrechung nichts zu beſorgen zu haben.

Es läßt sich nun aber die erst angegebene Gleichung leicht in folgende verwandeln

$$1 - 2 \sin \frac{1}{2} x^2 = \cos c. \cos \kappa + f c. f \kappa - 2 f c. f \kappa. f \frac{1}{2} \lambda^2$$

oder

$$1 - 2 f \frac{1}{2} x^2 = \cos (c - \kappa) - 2 f c. f \kappa. f \frac{1}{2} \lambda^2$$

oder

$$1 - 2 f \frac{1}{2} x^2 = 1 - 2 \sin \left(\frac{c - \kappa}{2} \right)^2 - 2 f c. f \kappa. f \frac{1}{2} \lambda^2$$

oder endlich

$$f \frac{1}{2} x = r \left(f \frac{c - \kappa}{2} + f c. f \kappa. f \frac{1}{2} \lambda^2 \right)$$

Diese Formeln sind noch alle genau richtig. Sind nun aber die Werthe $c - \kappa$ und λ kaum von 1 oder 2 Gr. so kann statt der letzten Formel folgende

$$x = r \left(\lambda^2. f c. f \kappa + (c - \kappa)^2 \right)$$

gesetzt werden. Diese ist nun so weit genau, als man den Unterschied zwischen der Länge eines Bogens und dessen Chorde als unerheblich geringe ansehen kann. Wenn aber $\lambda = 0$ ist, oder die beyden Oerter oder Sterne unter einerley Mittags- oder Breitenkreise liegen, so giebt diese Formel $x = c - \kappa$, welches vollkommen richtig ist. Für den Fall, wo $c = \kappa$ oder die beyden Oerter oder Sterne unter einerley Parallelkreise liegen, giebt diese Formel den Werth $x = \lambda \sin c = \lambda \sin \kappa$, folglich statt des Bogens eines grössten Circuls den Bogen des Parallelkreises, jedoch in Graden eines grössten Circuls ausgedrückt, und demnach dessen wahre Länge, die aber immer etwas zu groß ist, dafern die beyden Oerter nicht 90 Gr. vom Pole entfernt sind.

III.

Es können übrigens selbst aus den gemeinen trigonometrischen Tafeln die Sinus, Tangenten, Secanten und Cosinus der kleinen Bögen viel genauer berechnet werden, als sie in diesen Tafeln angegeben sind, wenn man die darinn angegebenen Cotangenten und Cosecanten derselben zu Hülfe nimmt. Es sey Z. E. der Sinus und Cosinus von 1 Minute zu suchen; so hat man

$$\sin 1' = \frac{1}{\text{cosec. } 1'}$$

$$\cos 1' = 1 - \frac{1}{2 (\text{cosec. } 1')^2} - \frac{1}{8 (\text{cosec. } 1')^4} - \&c.$$

Setzt man nun den Halbmesser = 1, so ist die Cosecante von $1' = 3437,74682$. Damit erhält man

$$\sin 1' = 0,000290\ 888204\ 5$$

$$\cos 1' = 0,999999\ 957692\ 0$$

bis auf 13 Decimalstellen, wobey aber die 13te Stelle ungewiss ist. Ferner ist

$$\sec 1' = \frac{1}{\cos 1'} = 1,000000\ 042308\ 0$$

$$\tan 1' = \frac{1}{\cot 1'} = 0,000290\ 888216\ 7$$

wobey ebenfalls die 13te Decimalstelle ungewiss ist. Will man übrigens auf diese Art die Sinus, Cosinus, Tangenten und Secanten für Bögen suchen, die 10, 100 bis 1000 mal gröfser sind, so reicht man nicht bis auf so viele Decimalstellen. Z. E.

$\sin 2^\circ = \frac{1}{\operatorname{cosec} 2^\circ} = 0,0348994968$. Hiebey ist nun schon die 10te Decimalstelle unzuverlässig.

Einige Anmerkungen über die Kirchenrechnung von Herrn *Lambert*.

Es kommen bey Berechnung der Wochentage und der beweglichen Festtage einige Aufgaben vor, die eben dadurch, daß sie sich auf ganze Zahlen einschränken, von besonderer Art und gewissermaßen diophantisch sind, und sich nicht füglich durch analytische Formeln ausdrücken lassen. Wenigstens muß man mehrentheils dabey erinnern, was eigentlich bey der Anwendung solcher Formeln wegzulassen oder beyzubehalten ist. Der gregorianische und der verbesserte Calender haben noch mehrere Verwickelungen, als der viel einfachere julianische. Es wird daher nicht undienlich seyn, den julianischen zuerst zu betrachten.

Es sey demnach für ein beliebiges Jahr der Sonntagsbuchstabe des Julianischen Calenders zu finden. Die Angaben hiezu sind folgende:

I. Die