

## Ueber die Bestimmung der Laufbahn der Cometen. Von Herrn Lambert.

Die Aufgabe von Bestimmungen der Laufbahn der Cometen mittelst dreier Beobachtungen hat die Liebhaber der Sternkunde schon viel und ofte beschäftigt. Schon *Kepler* schlug vor, daß man ihre wahre Bewegung als geradelinicht ansehen, und unter dieser Voraussetzung ihre scheinbare Bewegung bestimmen solle. Die Begriffe, die er sich von der Natur der Cometen machte, daß sie nemlich in dem Himmelsraume entstehen und dann wieder vergehen, konnte diesen Vorschlag, wiewohl nicht so ganz unbedingt, zur Folge haben. Denn man sieht nicht, daß das Entstehen mit einer Bewegung verknüpft seyn müsse, und wenn es auch wäre, so würde noch keine gerade und gleichförmige Bewegung daraus folgen. Vielmehr würde die Bewegung nach und nach schneller werden, wenn sie die Folge des Entstehens und Anwachsens der Masse seyn sollte, und auch die Richtung des Laufes dürfte sich ändern, wenn das anwachsen der Masse nicht immer von gleicher Seite her geschieht. *Kepler* sieng übrigens schon an zu vermuthen, die Sonne müsse eine Art von magnetischer oder anziehender Kraft haben, und so fehlte ihm wenig, um auf den Schluss zu kommen, daß auch die Cometen gegen die Sonne gezogen werden.

Inzwischen bediente sich *Cassini* bey dem Cometen von 1664 des *Kepler*'schen Vorschlages mit gutem Erfolge, indem er, mittelst einiger Beobachtungen, die fernern Erscheinungen voraus verkündigte, die auch, so lange der Comet sichtbar blieb, ziemlich eintrafen.

*Newton* machte die Beschaffenheit der wahren Bahn bekannt. Er gründete seine Schlüsse fürnemlich darauf, daß alles, was in dem Wirkungskreise der Sonne ist, eben so wie die Planeten und nach eben den Gesetzen, gegen die Sonne schwer seyn müsse. Selbst das Gesetz der Continuität fordert dieses. Die Folge davon war, daß die Cometen sich in Kegelschnitten bewegen in deren einem Brennpunct die Sonne ist.

Damit fiel nun freylich die geradelinichte Bewegung weg, und die Auflösung der Aufgabe gewann eine ganz andere Gestalt. Sie wurde so verwickelt, daß sie noch dermalen nicht anders als durch Näherungen von Statten geht, und die Frage nur ist, diese Näherungen so leicht und so genau zu machen, als es immer angehen mag. Von solchen Näherungsarten sind  
bereits

Bereits mehrere bekannt. Die Leichtigkeit und Genauigkeit ist aber dabey sehr ungleich und mehrentheils einander entgegen gesetzt. Ich habe mir daher vorgenommen einige von denen, die den meisten Ansehn hatten, näher zu betrachten.

Die erste ist nochmals die bereits erwähnte Voraussetzung der geradenlinichten und gleichförmigen Bewegung. Man zog diese auch nach *Newtons* genauer berichtigten Theorie, wieder herfür, um sie wenigstens auf kleine Stücke der Bahn des Cometen anzuwenden. Selbst *Newton* gebrauchte sie, wiewohl nicht um die Bahn genau zu bestimmen, sondern nur um überhaupt zu zeigen, daß seine Theorie mit dem was sich aus ganz allgemeinen Betrachtungen von dem Laufe der Cometen bestimmen läßt, gut übereintreffe.

*Gregori* fängt seine Theorie (*Astron. phys. & geometr. elementa*. Lib. V. Sect. II.) mit der *Cassinischen* Berechnungsart an, bemerkt aber dennoch, daß sie nicht allemale gleich gut sey, sondern nur wenn der Comet ziemlich weit von seiner Sonnennähe entfernt sey. Denn alsdann sey seine Bewegung wenig gebogen, und wenig ungleichförmig. Dieses hat einen Ansehn. Es ist aber dessen unerachtet nicht gegründet. Die wahre Bewegung des Cometen in seiner Bahn ist gerade im Perihelio am meisten gleichförmig, weil der Abstand von der Sonne sich alsdann am wenigsten ändert, und sofern man die Bahn als eine Parabel ansehen kann, die Geschwindigkeit in umgekehrter Verhältniß der Quadratwurzel des Abstandes ist. Hingegen ist allerdings die Krümmung der Bahn in dem Perihelio am größten. Man sieht also, daß *Gregori* den zuverlässigsten Gebrauch der *Cassinischen* Methode auf Bedingungen setzt, die nie zusammentreffen.

Um hierinn klarer zu sehen, müssen wir anmerken, daß wenn die Krümmung der Bahn des Cometen bey dem Gebrauch der *Cassinischen* Methode so viel auf sich hat, die Krümmung der Erdbahn eben so wenig aus der Acht gelassen werden könne. Dieses muß näher untersucht werden.

Es sey die Sonne in S, der Comet durchlaufe den Bogen seiner Bahn PK während dem die Erde den Bogen AC ihrer Bahn durchläuft. Nun ist unstreitig, daß wenn anstatt dieser Bögen die Chorden PK, AC mit gleichförmiger Geschwindigkeit durchlaufen würden, die *Cassinische* Aufgabe nach aller Schärfe gebraucht werden könnte. Der Comet würde zu E in R seyn während dem die Erde in D seyn würde. So aber ist der Comet in M, die Erde aber in B. Gesetzt aber dennoch, die Linien DR, GM wären einander parallel, so würde in beyden Fällen der Comet in gleichem Punkt des Himmels erscheinen, und so könnte ohne alles Bedenken D statt B, und R statt M gesetzt werden.

Soll nun aber DR mit BD parallel seyn, so muß

$$SR : RM = SD : DB$$

sich verhalten, dafern nemlich angenommen werden kann, daß die Punkte S, R, M in gleichem die Punkte S, D, B wo nicht genau doch sehr nahe in gerader Linie liegen. Dieses findet genau statt, wenn M das Perihelium des Cometen, B das Aphelium oder Perihelium der Erde ist, und die Zeiten zwischen den 3 Beobachtungen einander gleich sind. In andern Fällen fehlt, desto weniger je kleiner die Bögen sind.

Nun fordert aber die Theorie der Schwere, daß

$$\frac{1}{SM^2} : RM = \frac{1}{SB^2} : DB$$

genau oder ohne merklichen Unterschied statt finde. Diese Proportion kann nun mit der vorigen nicht bestehen, dafern nicht  $SM = CB$  gemacht wird.

Die Folge hieraus ist, daß die Cassinische Aufgabe am besten angeht, wenn der Comet zur Zeit der mittlern Beobachtung eben so weit von der Sonne entfernt ist, als die Erde. Und noch besser geht sie an, wenn der Comet alsdann zugleich in seinem Perihelio ist. Das Perihelium ist also in diesem Fall nicht nur nicht zu vermeiden, sondern es beüt gerade den schicklichsten Umstand an, die Cassinische Methode zu gebrauchen.

Ich sagte erst, daß S, R, M, auch wenn M nicht das Perihelium ist, sehr nahe in gerader Linie liegen, wenn der Bogen PK nicht sehr groß ist. Es sey Q der Punkt, wo die Parabel mit der Chorde PK parallel ist. Man halbire die Chorde in N, so wird der Raum SPQNS dem Raume SKQNS gleich seyn. Zieht man nun SM dergestalt, daß SQMS = SQNS wird, so ist SM die Linie welche den Sector SPMKS in zween gleiche Theile theilet, und demnach die Zeiten in welchen PM, MK durchlaufen werden, einander gleich machet. MN wird beynahe mit SQ parallel seyn. Denn es würde es vollkommen seyn, wenn der kleine Bogen QM gerade wäre. Nun durchschneidet SM die Chorde PK nicht in der Mitte N sondern in R. Es ist also zu sehen wie groß der Unterschied RN seyn wird. Wenn wir zu diesem Ende und Kürze halber MQ gerade und mit PK parallel, und so auch MN mit SQ parallel setzen, und das Parallelogramm vollenden, so wird

$$MV : SV = SQ : QM = MN : RN$$

folglich

folglich

$$RN = \frac{QM \cdot MN}{SQ}$$

seyn. Nun ist

$$QM = TN$$

$$MN = QT$$

folglich

$$RN = \frac{TN \cdot QT}{SQ}$$

Es kann aber TN nicht grösser werden als 2QT. Setzen wir demnach diesen größten möglichen Werth, so ist

$$RN < \frac{2QT^2}{SQ}$$

Es ist aber vermög der Natur der Parabel

$$QT = \frac{PK^2}{16 \cdot SQ}$$

folglich

$$RN < \frac{PK^4}{128 \cdot SQ^3}$$

Wenn demnach PK =  $\frac{1}{3}SQ$  seyn sollte, so würde dennoch

$$RN < \frac{SQ}{10368}$$

folglich

$$RN < \frac{PK}{3456}$$

seyn. Bey kleinern Bögen ist der Unterschied noch viel geringer. Und bey der Erde ist er noch deswegen viel kleiner weil ihre Bahn beynabe circular ist. Man kann also für kleine Bögen ohne alles Bedenken setzen daß die Punkte N, R zusammentreffen. Und so betrachtet lassen sich die Punkte R, D statt der Punkte M, B gebrauchen, auch wenn die Linien DR, BM einander nicht parallel sind. Ich werde aber hier den Gebrauch nicht wiederholen, den ich theils in einer besondern Abhandlung (*Mém. de l'Acad. 1771.*) theils im zweyten Bande der Ephemeriden hiervon gemacht

habe. Hier war es genug zu zeigen, daß die geradelinichte Bewegung ganz anders müsse gebraucht werden, als es *Gregori* angegeben.

*Bouguer* (*Mém. de l'Acad. de Paris 1733*;) verfährt es auf eine ganz entgegengesetzte Art. Er ließt den Bogen *PK* gerade seyn, nahm aber den Bogen *AC* als gekrümmt an, und glaubte daß eben die kleine Linie *DB* ihm dienen werde, die Bahn des Cometen zu bestimmen. Man sieht aber leicht, daß wenn *DB* etwas auf sich hat, die Linie *MR* ebenfalls etwas auf sich haben müsse, und zwar desto mehr je näher der Comet bey der Sonne ist, weil *MR* alsdann grösser als *DB* ist. Es ist also unnöthig *Bouguers* Methode ferner zu prüfen.

Es ist nun zwar an dem, daß die Puncten *R*, *M* und *D*, *B* näher zusammenrücken je kleiner die Bögen *PM*, *AC* sind, und so scheint es daß sie sich ganz confundiren lassen, wenn diese Bögen unendlich klein angenommen werden. Aber auch dieses findet nicht so durchaus statt. Es würde nach aller Schärfe daraus folgen, daß der Comet sich der Erde näherte so lange seine scheinbare Bewegung an Geschwindigkeit zunimmt, und daß er sich von der Erde entferne, so lange sie abnimmt. Daraus fehlet aber oft sehr viel. Die Planeten z. E. bewegen sich viel gleichförmiger als die Cometen, und dennoch wird niemand behaupten, daß wenn sie stille zu stehen scheinen, sie am weitesten von der Erde weg sind. Sie sind im Gegentheil näher als in ihrer mittlern Entfernung. Man sieht also daß die Linien *RM*, *DB*, auch wenn sie unendlich klein sind, nicht so ganz unbedingt für gar nichts angesehen werden können. Der Winkel, so die Linien *RD*, *MB* mit einander machen, ist oft grösser als der Unterschied der Winkel so die Linien *PA*, *RD*, *KC* unter sich machen. Auf diesen Unterschied kömmt aber die Bestimmung der Verhältniß der Distanzen *AP*, *CK* fürnehmlich an. Nimmt man demnach statt dieser Winkel diejenigen welche von den Linien *PA*, *MB*, *KC* gebildet werden (wiewohl dieses selten angeht, weil diese Linien nicht auf eine gleiche Ebene reducirt werden können, dafern nicht *RD*, *MB* parallel sind) so kann es geschehen, daß man statt der wahren Bahn des Cometen eine himmelweit verschiedene findet.

Es folgt hieraus, daß wenn man zur Bestimmung der Bahn eines Cometen die geradelinichte Bewegung gebrauchen will, es nicht bloß rathsam sondern in den meisten Fällen schlechthin nothwendig ist, statt der Puncten *M*, *B* die Puncten *RD* zu gebrauchen. Es trifft zwar freylich *R* mit *N* selten zusammen. Wir haben aber bereits gezeigt, daß der Unterschied *RN*, wenn der Bogen *PK* nicht gar zu groß ist, sicher als  $\circ$  angesehen werden kann. Denn *MR* vermindert sich wie das Quadrat, *RN* aber wie das Biquadrat von *PK*.

Die geradelinichte Bewegung sollte eigentlich nur dienen um zu finden, wie sich der Comet der Erde nähert oder entfernt. Auch gab sie nicht die Distanzen selbst, sondern nur die Verhältnisse zwischen denselben, und in so fern blieben die wahren Distanzen und die wahre Bahn des Cometen noch ganz unbekannt. Man war demnach auf andere Mittel bedacht, um die wahren Distanzen zu finden. Und auch hiezu wurde die geradelinichte Bewegung gebraucht. Man nahm vier beobachtete Längen des Cometen. Man zeichnere die Erdbahn, und auf derselben die vier Punkte, wo die Erde zur Zeit der Beobachtungen gestanden. Mittelft der beobachteten Längen ließ sich aus jedem dieser Punkte auf der Ebene der Erdbahn eine Linie ziehen, welche diese Längen vorstellte, so nemlich, daß man gewiß war, der Comet habe zur Zeit der Beobachtungen senkrecht über diesen Linien gestanden. Die Punkten über welchen er gestanden sahe man, wegen der vorausgesetzten geradelinichten und gleichförmigen Bewegung, als in einer geraden Linie liegend an. Man gedachte sich diese gerade Linie als bereits gezogen, und war bey gleicher Voraussetzung berechtigt zu schliessen, daß ihre Theile in Verhältnis der Zeiten seyn müssen, die zwischen den Beobachtungen verfloßen waren. Auf diese Art entstand das Problem: durch vier Linien von gegebener Lage eine fünfte zu ziehen, welche von jenen in Theile getheilt sey, die ein gegebenes Verhältnis haben. Die Auflösung findet man in *Newtons Arithm. univ.* Probl. 56, bey *Gregori L. V. Prop. XI*, bey *Cassini* in den *Mém. de l'Acad. de Paris 1727*, wie auch in meinen *Orbitis cometarum* §. 51, wo ich aber jedoch (§. 54) angebe was zu thun ist, wenn die vier Durchschnittspuncte nicht in gerader Linie liegen. Dann die gerade Linie kam mir schon damals als sehr mißlich vor.

Dermalen kann ich nun angeben worinn das mißliche eigentlich besteht, und wie es überaus viel vermindert werden könne. Es sey *S* die Sonne, *P, M, N, Q* die vier Oerter des Cometen zur Zeit da die Erde in *A, B, C, D* ist. Man ziehe die Chorden *PQ, AD* und die Linien *SP, SM, Sm, SN, Sn, SQ* wie auch *SA, SB, Sb, SC, Sc, SD*, so müssen nicht die Linien *BM, CN*, sondern die Linien *bm, cn* gebraucht werden.

Ungeachtet nun diese Linien *bm, cn* nicht durch unmittelbare Beobachtung bekannt sind, so lassen sie sich doch aus den Beobachtungen herleiten, weil die Punkte *Sm M B b*, so wie auch die Punkte *Sn N C c* in einer Ebene liegen.

Man zeichne sich auf der Kugelfläche die 4 beobachtete Oerter des Cometen. Durch die beyden äußersten ziehe man einen größten Circul. Ferner durch den zweyten und dritten ziehe man zween größte Circul nach den Punkten der Ecliptik wo die Sonne zur Zeit der zweyten und dritten Beobachtung

achtung Beobachtung war. Diese *zwey* Circul werden die Ebenen BSM, CSN vorstellen, und da wo sie den durch die beyden äußersten Oerter des Cometen gezogenen größten Circul durchschneiden, werden die Oerter seyn, wo man den Comet zur Zeit der 2ten und 3ten Beobachtung würde gesehen haben, wenn derselbe in m, n und die Erde in b, c gestanden hätte. Dann aber würde die Bewegung sowohl des Cometen als der Erde geradelinicht, und wo nicht vollkommen doch bis auf einen unerheblichen Unterschied gleichförmig gewesen seyn.

Uebrigens muß auch hier der Bogen PQ oder AD nicht allzugroß seyn. Dafs er aber auch nicht gar zu klein seyn müsse, erhellet daraus, weil die Beobachtungen selbst nicht immer so genau sind, daß die geringen Unterschiede, worauf es hiebey ankommt, nicht merklich dadurch sollten verfälscht werden.

---

## Anmerkungen über die Stralenbrechung.

Von Herrn *Lambert*.

---

**M**ayer hat in der Erklärung seiner nach England geschickten und daselbst nach erhaltenem Preise durch den Druck bekannt gemachten Mondtafeln, zur Bestimmung der astronomischen Stralenbrechung eine Formel gegeben welche sehr genau mit den Beobachtungen eintreffen soll. Auch soll sie nach der Theorie, wo nicht als ganz richtig, doch wenigstens als der Wahrheit sehr nahe kommend bewiesen werden können.

Den Beweis selbst hat *Mayer* zurückbehalten. Wir haben also nur die Formel an und für sich, und so entsteht die Frage, ob oder wiefern sich aus derselben diejenige Theorie herleiten lasse, auf welche sie gegründet ist.

Die Formel selbst ist folgende:

1. Man drücke die Barometerhöhe in Pariser Zollen und deren Decimaltheilen aus, und setze sie =  $b$ .
2. Der Grad des Réaumur'schen Thermometers über dem Frierpunct sey =  $g$ .
3. Der scheinbare Abstand eines Sterns vom Scheitelpunct werde durch  $\gamma$  ausgedrückt.