4. Für die vier übrig bleibenden sind in der ersten Columne die Jahre angesetzt. Und da die Neumonde für 1760 und 1769 sehr zweifelhaft ausfallen, so habe ich, um sie zu unterscheiden, nur bey denen für 1762 und 1780 in der 3ten Columne die Tage angezeigt.

Anmerkungen und Aufgaben

zum Gebrauche des in den Ephemeriden angegebenen Mondlaufes.

Von Herrn *Lambert*.

I.

Ich habe bereits im ersten Jahrgange der Ephemeriden angezeigt, daß und wie man um für jeden gegebenen Augenblick den Mond nach seiner wahren Schwankung vorzustellen, die Gleichung des Mondes oder den Unterschied seiner wahren und mittlern Länge gebrauchen müsse. Diese Gleichung ist nun in gegenwärtigem Bande der Ephemeriden für jede Mitternacht angesetzt. Und da sie die Summ aller Ungleicheiten des Mondlaufes angiebt, so kann sie an sich schon dienen, sich von der Art, wie der Mondlauf ungleich ist, einen deutlichern Begriff zu machen. Das Zeichen + zeigt an, daß die wahre Länge des Mondes größer ist als die mittlere; hingegen ist bey dem Zeichen — jene kleiner als diese. Es entsteht nun hier die

Aufgabe, aus der für jede Mitternacht angegebenen Gleichung des Mondes, diese Gleichung für jede Zwischenzeit zu finden.

I. Auflösung.

1. Für die nächst vorgehende oder nachfolgende Mitternacht nimmt man die wahre Länge und die Gleichung des Mondes, und bestimmt daraus dessen mittlere Länge, indem man die Gleichung abzieht, wenn sie mit + angesetzt ist, oder addirt, wenn — dabey steht.
2. Mit Hülfe der mittlern stündlichen Bewegung des Mondes findet man sodann, wie viel zu der erst gefundenen mittlern Länge desselben addirt oder abgezogen werden muß, um die mittlere Länge des Mondes für die verlangte Zeit zu haben.
3. Für eben diese Zeit berechnet man auch die wahre Länge des Mondes nach den in den Ephemeriden bereits gegebenen Anweisungen.
4. Der Unterschied der wahren und mittlern Länge wird die gesuchte Gleichung des Mondes seyn.

II. Auf-

II. Auflösung.

Man nimmt die Gleichungen des Mondes für die nächst vorhergehende und einige folgende Mitternächte, und sucht die ersten, 2ten, 3ten &c. Differenzen, vermittelst welcher die verlangte Gleichung nach der gewöhnlichen Art zu interpoliren gefunden wird. Man wird hiebey finden, daß die zweyte und folgenden Differenzen so wohl der Länge als der Gleichung des Mondes einerley sind, und daher immer gleich geschwinde oder gleich langsam abnehmen.

III. Auflösung

Man berechnet vermittelst der täglichen und stündlichen Bewegung, wie viel die wahre Länge des Mondes von der nächsten Mitternacht bis zu der vorgegebenen Zeit zu- oder abnimmt; ingleichen wie viel für eben diesen Zeitraum die mittlere Bewegung des Mondes austrägt. Der Unterschied dieser beyden Bewegungen giebt sodann an, um wie viel die Gleichung des Mondes zu- oder abgenommen hat.

Die stündliche mittlere Bewegung ist $32'.\ 56''.\ 27'''$ für mittlere Sonnenzeit. Für wahre Sonnenzeit ist sie bald grösser, bald kleiner. Jedoch beträgt der Unterschied hier nicht so viel aus, daß es nöthig seyn sollte darauf Acht zu haben, zumal wenn man immer die nächste Mitternacht nimmt.

Es sey nun z. E. die Gleichung des Mondes für den 7. Aug. 1777 Morgens um 4 Uhr wahrer Zeit Berliner Uhr zu finden. Die Ephemeriden geben für die nächst vorgehende Mitternacht

Die Länge des Mondes	$5^{z.}$	$26^{o}.$	$1'.$	$10''$
Stündliche Bewegung - -			30.	42, 4
Gleichung - -		$+\ 3.$	25.	9
Tägliche Bewegung -		12.	11.	28

Die stündliche Bewegung mit 24 multiplicirt, giebt $12^{o}.\ 16'.\ 57'', 6$, und so viel würde der Mond sich in 24 Stunden fortbewegen, wenn er in jeder folgenden Stunde ebenfalls $30'.\ 42'', 4$ durchliefe. Er bewegt sich aber vom 6ten bis zum 7ten August nur $12^{o}.\ 11'.\ 28''$, und demnach bleibt er $5'.\ 29'', 6$ zurücke. Daher ist seine wahre Bewegung in x Stunden

$$= 30'.\ 42'', 4\ x - 5'.\ 29'', 6.\ \tfrac{xx}{576}$$

Hingegen die mittlere $= 32.\ 56, 4\ x$

Der Unterschied - $= -2'.\ 14''.\ x - 5'.\ 29, 6.\ \tfrac{xx}{576}$

Nun ist die verlangte Zeit 4 Stunden nach Mitternacht, demnach $x = 4$. Dieses giebt den Unterschied

$$= -\ 8'.\ 56'' - 0'.\ 9'', 1 = 9'.\ 5''$$

Um so viel ist demnach die Gleichung des Mondes 3°. 25'. 9" zu vermindern. Damit ist sie also für den 7. Aug. früh um 4 Uhr = 3°. 16'. 4".

II.

Die Bestimmung der Zeit, wenn der Mond gleiche Länge mit einem Stern hat.

Dieses geschieht vermittelst der täglichen und stündlichen Bewegung des Mondes. Die Methode dazu ist im 2ten Theile des ersten Jahrganges der Ephemeriden S. 104 angegeben. Sie wurde aber im ersten Theile nur durch das Beyspiel der Mondsviertel erläutert, wo demnach die relative stündliche und tägliche Bewegung des Monds von der Sonne gebraucht wurde. Dieses ändert zwar an der Methode nichts. Inzwischen werde ich hier noch ein Beyspiel von den Fixsternen geben.

Im Jahr 1776 den 1 Oct. geht der Mond vor dem Aldebaran vorbey. Es ist die Frage, um wie viel Uhr es geschieht? Die Länge des Aldebaran ist alsdann $2^{Z.}\ 6^{\circ}.\ 40'\ 13''$, Nun findet sich in den Ephemeriden 1776.

Sept. 30. Länge des Mondes	1. 24. 19. 33
Oct. 1 - - - -	2. 8. 27. 49
Bewegung in 24 Stunden -	14. 8. 16

Die ☌ des Aldebaran und des Mondes geschieht demnach den 1 Oct. Abends einige Stunden vor Mitternacht, da die Länge des Mondes um Mitternacht bereits 1°. 47'. 36" grösser ist; als die vom Aldebaran.

Die stündliche Bewegung des Mondes um Mitternacht ist 34'. 44". Mit dieser Geschwindigkeit würde der Mond die erstgefundene 14°. 8'. 16" nicht in 24 Stunden, sondern in 24, 425 Stunden durchlaufen. Demnach bewegt sich der Mond um Mitternacht langsamer als in den vorhergehenden Stunden, oder umgekehrt, desto geschwinder, je mehr man von Mitternacht rückwerts geht. Dieses kürzt die Zeit von der ☌ bis Mitternacht dergestallt ab, dass sie

$$= \frac{1^{\circ}\ 47'.\ 36''}{34.\ 14} = 0{,}425.\left(\frac{1.\ 47.\ 36}{14.\ 8.\ 16}\right)^2 = 3{,}090 \text{ St.}$$

oder = 3 St. 5 Min. 24 Sec. wird. Zieht man diese von Mitternacht ab; so bleibt 8 Uhr 54 Min. 36 Sec. als die wahre Zeit der Zusammenkunft des Mondes und des Aldebaran den 1 Oct. Abends, Berliner Uhr, und aus dem Mittelpunct der Erde gesehen.

III.

III.

Die Zeit des Auf- und Unterganges des Mondes für andere Oerter zu finden.

Hiezu ist in dem ersten Jahrgange der Ephemeriden bereits eine ausführliche Anleitung gegeben worden, welche alle erforderliche Genauigkeit hat, dabey aber weitläuftiger ist, als man es zum gemeinen Gebrauch wünschen möchte. Oft kann man es bey einem beyläufigen Ueberschlage bewenden lassen, und mit diesem wird selbst auch vielen Calendermachern gut gedient seyn. Dahin mögen nun folgende Betrachtungen dienen.

Die Zeit des Auf- und Unterganges des Mondes richtet sich 1. nach der Zeit seines Durchganges durch den Mittagskreis. 2. Nach derjenigen Abweichung, die der Mond zur Zeit des Auf- oder Unterganges hat. 3. Nach der Polhöhe des Ortes.

Nun sind die Ephemeriden für den Berliner Horizont gerechnet, und da ist der leichteste Fall derjenige, wo der vorgegebene Ort unter dem Berlinschen Parallelkreise liegt. Damit kann also der Anfang gemacht werden.

In den Ephemeriden 1777 findet sich, z. E. die Aufgangszeit des Mondes zu Berlin 1777 den 23 Jan. Nachmittag um 4 Uhr, 5 Min. Den folgenden 24 Jan. Nachmittag um 5 Uhr 13 Minuten. Der Unterschied ist 1 St. 8 Min., und um so viel geht der Mond den 24 Jan. zu Berlin späther auf als den 23ten. Diese Verspäthigung wird auf den ganzen Berlinschen Parallelkreis, Westwerts gerechnet, vertheilt. Z. E. Amsterdam liegt beynahe unter dem Berlinschen Parallelkreise, aber um 9 Grade Länge mehr nach Westen. Also sagt man, 360 Gr. geben 1 St. 8 Min. was geben 9 Gr.? Die Rechnung giebt $1\frac{3}{4}$ Minuten. Demnach geht der Mond daselbst 1777 den 23 Jenner um nicht gar 2 Minuten späther auf als zu Berlin. Da er nun zu Berlin um 4 Uhr 5 Minuten Berliner Uhr aufgeht, so addirt man die erstgefundenen $1\frac{3}{4}$ oder 2 Minuten hinzu, und findet ohne fernere Reduction, dass der Mond zu Amsterdam 1777 den 23 Jan. Abends um 4 Uhr, 7 Min. Amsterdamer Uhr, aufgeht.

Liegt hingegen ein solcher Ort Ostwerts unter dem Berlinschen Parallelkreise, so versteht es sich, dass man am füglichsten rückwerts rechnet, da der Mond denen ostwerts liegenden Orten früher auf- und untergeht.

In dem erstgegebenen Beyspiele ist der gefundene Unterschied 1 St. 8 Min. so gross, dass er selten grösser wird. Da er nun dessen unerachtet für den Abstand von Berlin bis Amsterdam nicht ganze 2 Minuten Unterschied giebt; so folgt, dass wenn man dieses geringen Unterschiedes nicht achten will, der in den Ephemeriden für Berlin angesetzte Auf- und Untergang des Mondes für alle die Oerter könne ohne merklichen Fehler gebraucht werden, die in Holland, Deutschland und Pohlen unter dem Berlinschen Parallelkreise liegen. Will man aber auch keine Minute versäumen, so nimmt man die erst angegebene Reduction vor, und trägt sodann auch wegen der Parallaxe und Stralenbrechung Rechnung.

Liegt nun aber der vorgegebene Ort nicht unter dem Berliner Parallelkreise, so kann es geschehen, daß er wenigstens unter dem Berliner Meridian liegt, und dann ist die Rechnung wiederum ganz einfach. Denn es kömmt dabey kein anderer Unterschied, als der von den Tagbögen, vor. Z. E. Es sey die Frage von Aquileia, oben am adriatischen Meerbusen. Dieser Ort liegt unter dem Berlinschen Mittagskreise, aber unter der Breite von 46 Gr. und demnach viel näher beym Aequator als Berlin. Es sind folglich daselbst alle Tagbögen des Sommers kürzer, des Winters aber länger. Dieses macht, daß wenn die Abweichung des Mondes nördlich ist, der Mond daselbst früher auf- und späther untergeht als zu Berlin; und daß das Gegentheil Statt findet, wenn der Mond jenseits des Aequators ist. Fragt man demnach, wenn der Mond zu Aquileia 1777 den 23. Jan. aufgeht; so wird folgende Rechnung angestellt.

1. Bemeldten Tag geht der Mond zu Berlin Abends um 4 Uhr 5 Minuten auf.
2. Um diese Zeit ist die Abweichung des Mondes 18 Grad, 44 Minuten nördlich.
3. Für diese Abweichung findet sich der halbe Tagbogen

für Berlin	-	7^{St}.	45′
für Aquileia	-	7.	22
Unterschied	-	0.	23

4. Dieser Unterschied um $\frac{1}{29}$ vermehrt, giebt nicht volle 24 Minuten.
5. Addirt man diese 24 Minuten zu 4 Uhr 5 Min. als der Zeit des Aufganges zu Berlin, so findet man, daß der Mond zu Aquileia 1777 den 23ten Jan. Abends um 4 Uhr, 29 Min. aufgeht.

Der Grund, warum hier der Unterschied der halben Tagbogen um $\frac{1}{29}$ vermehrt wird, ist schlechthin nur, weil die Mondstunden um so viel länger, als die Sonnenstunden, sind.

Wenn man hiebey alles ganz scharf nehmen wollte, so müßte man für die gefundenen 4 Uhr 29 Min. nochmals die Abweichung des Mondes suchen. Man würde sie um etwa 3 Minuten kleiner finden. Es kann aber ein so geringer Unterschied nichts austragen, dafern man nicht die halben Tagbögen bis auf Secundenzeit berechnet.

Der dritte Fall ist, wenn der Ort weder unter dem Berlinschen Parallel- noch Mittagskreise liegt. Dieser Fall kömmt nun freylich am häufigsten vor. Er wird aber auch aus den beyden vorhergehenden leicht zusammengesetzt. Es sey z. E. die Frage, wenn der Mond 1777 den 23. Jan. zu Lion aufgeht? Ich wähle diesen Ort, weil er unter dem Mittagskreise von Amsterdam, und dem Parallelkreise von Aquileia liegt, und für diese beyden Oerter die Rechnung bereits gemacht ist. Nemlich 1777 den 23. Jan. geht der Mond auf

1. Zu Berlin, um 4 Uhr 5 Min.
2. Zu Amsterdam, um 4 Uhr 7 Min. weil der Ort westlicher liegt, um 2 Min. späther.
3. Zu Aquileia, um 4 Uhr 29 Min. weil der Ort südlicher liegt, um 24 Min. späther.
4. Nun liegt Lion um so viel als Amsterdam, westlicher, und um so viel als Aquileia, südlicher denn Berlin: demnach treffen zu Lion beyde Verspäthigungen zusammen, und damit geht der Mond daselbst um 4 Uhr 31 Min. auf.

Auf diese Art kann immer das, was der Unterschied der Länge und der Breite beträgt, besonders gerechnet, und dann zusammengenommen werden. Man sieht aus diesem Beyspiele, dass der Unterschied der Breite am meisten auf sich hat, weil die Abweichung des Mondes sehr gross ist. Ist sie aber $= 0$, so fällt auch der Unterschied der Tagbögen weg.

IV.

Zur Prüfung der im ersten Jahrgange der Ephemeriden angegebenen Interpolationsmethode.

Um hierüber allgemeine Betrachtungen anzustellen, fand ich es am dienlichsten, die Gleichung des Mondes vorzunehmen, um zu sehen, wie sie sich in x Tagen ändert. Ich liess indessen Kürze halber die Reduction des Mondes auf die Ecliptic weg, und gebrauchte die in der *Sammlung astronomischer Tafeln* I. B. 16 S. befindliche Formel, welche Hr. *Schulze* aus den neuern Mayerschen Tafeln berechnet hat. In derselben ist

$\odot$ die mittlere Länge der Sonne.
$☽$ die mittlere Länge des Mondes.
$☊$ die mittlere Länge des aufsteigenden Knoten.
M die mittlere Anomalie des Mondes.
a die mittlere Anomalie der Sonne.

$☽ - \odot = E.$
$☽ - ☊ = \alpha.$

Nun

Nun verwandelt sich in x Tagen

☽ in ☽ + 13°. 10′. 35″. 2‴. x = ☽ + 0,2299715. x
M in M + 13. 3. 53. 58. x = M + 0,2280271. x
α in α + 13. 13. 45. 40. x = α + 0,2308957. x
⊙ in ⊙ + 59. 8. 20. x = a + 0,0172028. x
a′ in a + 59. 8. 9. x = a′ + 0,0172019. x

und die Gleichung des Mondes in seiner Bahn wird

$A = -22641'' \sin M$	$-5207'' \cos M x$	$+599'' \sin M x^2$	$+49'' \cos M x^3$	$-3'' \sin M x^4$
$+772 \sin 2M$	$+355 \cos 2M x$	$-40 \sin 2M x^2$	$-2 \cos 2M x^3$	
$-36 \sin 3M$	$-25 \cos 3M x$	$+4 \sin 3M x^2$		
$+2 \sin 4M$	$+2 \cos 4M x$			
$+678 \sin a$	$-12 \cos a x$			
$-4 \sin 2a$				
$-115 \sin E$	$-23 \cos E x$	$+3 \sin E x^2$		
$+2396 \sin 2E$	$+1020 \cos 2E x$	$-217 \sin 2E x^2$	$-31 \cos 2E x^3$	$+3 \sin 3E x^4$
$+3 \sin 3E$	$+2 \cos 3E x$			
$+19 \sin 4E$	$+16 \cos 4E x$	$-7 \sin 4E x^2$	$-2 \cos 4E x^3$	
$-4591 \sin(2E-M)$	$-907 \cos(2E-M)x$	$+89 \sin(2E-M)x^2$	$+6 \cos(2E-M)x^3$	
$+32 \sin 2(2E-M)$	$+13 \cos 2(2E-M)x$	$-2 \sin 2(2E-M)x^2$		
$-197 \sin(2E+M)$	$-129 \cos(2E+M)x$	$+42 \sin(2E+M)x^2$	$+9 \cos(2E+M)x^3$	$-1 \sin(2E+M)x^4$
$-114 \sin(M+a)$	$-27 \cos(M+a)x$	$+3 \sin(M+a)x^2$		
$+146 \sin(M-a)$	$+31 \cos(M-a)x$	$-3 \sin(M-a)x^2$		
$+27 \sin(2E+a)$	$+12 \cos(2E+a)x$	$-3 \sin(2E+a)x^2$		
$-160 \sin(2E-a)$	$-65 \cos(2E-a)x$	$+13 \sin(2E-a)x^2$	$+2 \cos(2E-a)x^3$	
$-23 \sin(2E-M+a)$	$-5 \cos(2E-M+a)x$			
$+208 \sin(2E-M-a)$	$+37 \cos(2E-M-a)x$	$-3 \sin(2E-Ma)x^2$		
$+82 \sin(2\alpha-M)$	$+19 \cos(2\alpha-M)x$	$-2 \sin(2\alpha-M)x^2$		
$+11 \sin(E-M)$				
$+211 \sin 2(E-M)$	$-6 \cos 2(E-M)x$			
$+6 \sin(E+M)$	$+3 \cos(E+M)x$			
$+19 \sin 2(E+M)$	$+7 \cos 2(E+M)x$	$+2 \sin 2(E+M)x^2$		
$-50 \sin(4E-M)$	$-31 \cos(4E-M)x$	$+10 \sin(4E-M)x^2$	$+2 \cos(4E-M)x^3$	
$-15 \sin(2E-3M)$	$+4 \cos(2E-3M)x$			
$+57 \sin 2(☊-⊙)$	$-2 \cos 2(☊-⊙)x$			

Diese

Diese Gleichung hat demnach überhaupt die Form

$$A = B + C x + D x^2 + E x^3 + F x^4 + \&c.$$

Und man sieht ohne Mühe, dass wenn man mittelst der Differenzen interpolirt, die vierten Differenzen mehrentheils mitgenommen werden müssen, weil alsdann x bis auf 4 anwächst. Gebraucht man aber die stündliche Veränderung, so kann $F = 0$ gesetzt werden, weil man nicht über einen Tag hinaus zu rechnen nöthig hat.

Es zeigt nun hier ferner der Ausdruck

$$A - B = C x + D x^2 + E x^3 + \&c.$$

an, um wieviel die Gleichung des Mondes sich in x Tagen ändert, und demnach um wieviel die wahre Bewegung des Mondes in seiner Bahn von der mittlern Bewegung verschieden ist. Es ist nemlich in der Zeit x die wahre Bewegung

$$Y = (13°.\ 10'.\ 35'' + C) x + D x^2 + E x^3 + \&c.$$

Demnach die Bewegung in der ersten Stunde

$$H = (32'.\ 56'',5 + \tfrac{1}{24} C) + \frac{D}{576}.$$

Und in der 25ten Stunde oder einen Tag nachher

$$\omega = (32'.\ 56'',5 + \tfrac{1}{24} C) + \frac{49}{576} D + \frac{1801}{13824} E.$$

Und in 24 Stunden

$$T = 13°.\ 10'.\ 35'' + C + D + E.$$

Nun kommen die Werthe H, ω, T in den Ephemeriden vor. Demnach kann C, D, E so bestimmt werden, wie es zugleich auch die Reduction auf die Ecliptic erfordert, weil diese in den Ephemeriden bereits mit gerechnet ist.

V.

Wiederkehr der Finsternisse nach 18 Jahren.

Halley hat das alte Saros oder den Zeitraum von 223 Monden wieder hervorgezogen, weil nach Verfluss dieser Zeit nicht nur die Finsternisse, sondern auch die Ungleichheiten des Mondlaufes ziemlich genau wiederkehren. Diese Ungleichheiten waren zu *Halleys* Zeit noch wenig bestimmt. Er gab demnach den Vorschlag, dass man die Fehler der Mondstafeln 18 Jahre lang durch Beobachtungen bestimmen sollte, damit, weil sie in den folgenden 18 Jahren wiederkehren, sie zur Verbesserung dessen, was die Tafeln geben, gebraucht werden könnten.

Seit den Mayerschen Mondtafeln ist dieser Vorschlag weniger nothwendig, ungeachtet es aus vielen Gründen gut ist, wenn die Beobachtungen des Mond-

Mondlaufes beſtändig fortgeſetzt werden. Indeſſen wird es nicht undienlich ſeyn, das Saros mit den Mayerſchen Tafeln zu vergleichen. Ich werde es hier in Abſicht auf die Zeit der Finſterniſſe thun.

Ein jedes Julianiſches Jahr zu $365\frac{1}{4}$ Tagen gerechnet, kommen auf 223 Neumonde 18 J. 10 T. 19 St. 42′. 48″ zu ſtehen. In dieſem Zeitraume ſind entweder 4 oder 5 Schalttage. Und ſo müſſen

im erſten Fall	18 J. 11 T. 7 St. 42′. 48″
im andern	18 J. 10 T. 7 St. 42. 48

gerechnet werden.

Nach Verfluſs dieſer Zeit ändert ſich

M in M — 2°. 51′. 20″
a in a + 10. 28. 33
α in α — 0. 28. 10

Ferner iſt die Zeit zwiſchen dem wahren und mittlern Neumonde überhaupt

+ 35141″ ſM — 15007″ ſa — 420″ ſ(M + a)
+ 1378 ſ2M + 187 ſ2a + 632 ſ(M — a)
+ 34 ſ3M — 53 ſ(2M + a)
+ 32 ſ(2M — a)
— 114 ſ(2α — M)
+ 92 ſ2(☉ — ☊)

Bey dem 223ten nachfolgenden Neumonde kömmt aber noch hinzu

— 43″ ſM + 250″ ſa — 56″ coſ(M + a)
— 7 ſ2M — 12 ſ2a — 146 coſ(M — a)
— 1750 coſM — 2727 coſa
— 137 coſ2M + 67 coſ2a
— 5 coſ3M

Um ſo viel iſt die Zeit von einem wahren Neumond bis zu dem 223ten nachfolgenden ebenfalls wahren Neumonde von dem mittlern Zeitraume

18 J. 10 T. 19 St. 42′. 48″

verſchieden. Der Unterſchied kann ſich bis auf $1\frac{1}{3}$ Stunde erſtrecken, und ſich in den folgenden Perioden noch mehr aufhäufen. *Halleys* Vorſchlag war alſo von keinem ſonderlichen Gebrauche.

Betrach-