Analytische Formeln zum Behufe der astronomischen Rechnungen. Von Hrn. *Lambert.*

I.

Es sey die Formel

$$\sin\delta = e \,.\, \sin\lambda$$

dergestalt aufzulösen, daß der Bogen δ mittelst einer bequemen Reyhe unmittelbar berechnet werden können.

Aus der bekannten Reyhe

$$\delta = \sin\delta + \frac{1}{2.3}\sin\delta^3 + \frac{1.3}{2.4.5}.\sin\delta^5 + \&c.$$

folgt von selbst

$$\delta = e\sin\lambda + \frac{1}{2.3}.e^3 \, s\lambda^3 + \frac{1.3}{2.4.5}.e^5\sin\lambda^5 + \&c.$$

Da nun nach bekannten Formeln die ungeraden Dignitäten der Sinus eines Bogens durch die Sinus des 1, 3, 5 &c, fachen Bogens ausgedruckt werden können, so verwandelt sich diese Reyhe in folgende

$$\begin{aligned}
\delta = {} & e\sin\lambda \\
& + \frac{1.3}{2.3\,4}.e^3 \, s\lambda + \frac{1.3}{2.4.5}.\frac{10}{16}e^5 \, s\lambda + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}.\frac{35}{64}e^7 \, s\lambda + \&c. \\
& - \frac{1}{2.3}.\frac{1}{4}e^3 \, s\,3\lambda - \frac{1.3}{2.4.5}.\frac{5}{16}e^5 \, s\,3\lambda - \frac{1.3.5}{2.4.6.7}.\frac{21}{64}e^7 \, s\,3\lambda \\
& \qquad + \frac{1.3}{2.4.5}.\frac{1}{16}e^5 \, s\,5\lambda + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}.\frac{7}{64}e^7 \, s\,5\lambda \\
& \qquad\qquad - \frac{1.3.5}{2.4.6.7}.\frac{1}{64}e^7 \, s\,7\lambda
\end{aligned}$$

Diese Formel hat bey Berechnung der Abweichung der Sonne, der Breite der Planeten &c. ihren Gebrauch. Es sey z. E. die Schiefe der Ecclipti, $= 23^\circ.\,28'.\,20''$, so ist

$$\begin{aligned}
\sin 23^\circ.\,28'.\,20 = e &= 0{,}3983044 \\
e^3 &= 0{,}0631894 \\
e^5 &= 0{,}0100248 \\
e^6 &= 0{,}0015903 \\
e^9 &= 0{,}0002523 \\
&\&c.
\end{aligned}$$

 und

und damit findet man jede Abweichung in Theilen des Halbmessers

$$\delta = 0{,}4067161 \sin\lambda - 0028939 \sin 3\lambda + 0{,}0000559 \sin 5\lambda - 0{,}0000014 \sin 7\lambda + \&c.$$

Demnach in Secunden eines Grades

$$\delta = 83891'' \, s\lambda - 597'' \, s\, 3\lambda + 11''\tfrac{1}{2} \, s\, 5\lambda - \tfrac{2}{7}'' \, s\, 7\lambda$$

Diese Formel wird Grad für Grad mittelst des *Abacus Sinnum*, so ich in den *Zusätzen zu den trigonometrischen und logarithmischen Tafeln* gegeben, sehr leicht berechnet.

II.

Fernere Anwendung.

Man setze, die Schiefe der Ecliptic werde um 1 Minute kleiner, oder der Sinus derselben sey überhaupt $= 0{,}3983044 - x$, so daß man die höhern Dignitäten von x weglassen könne. Auf diese Art erhält man die Formel

$$\begin{aligned}\delta = {} & 0{,}4067161.\, s\lambda - 1{,}0665.\, x\, s\lambda \\ & - 0{,}0028939.\, s3\lambda + 0{,}0233.\, x\, s\, 3\lambda \\ & + 0{,}0000559.\, s5\lambda - 0{,}0008.\, x\, s\, 5\lambda \\ & - 0{,}0000014.\, s7\lambda + \&c. \\ & + \&c.\end{aligned}$$

Hier kann man nur für x das Product aus dem Cosinus der Schiefe der Ecliptic in die Anzahl von Secunden setzen, um welche sie geringer ist als $23^\circ.\ 28'.\ 20''$, das ist überhaupt

$$x = 0{,}9172533\, y''$$

Und dadurch erhält man in Secunden eines Grades

$$\begin{aligned}\delta = {} & 83891.\ \sin\lambda - 0{,}9669\ y''.\ \sin\lambda \\ & - 597.\ \sin 3\lambda + 0{,}0213\ y.\ \sin 3\lambda \\ & + 11\tfrac{1}{2}.\ \sin 5\lambda - 0{,}0007\ y.\ \sin 5\lambda \\ & - \tfrac{2}{7}.\ \sin 7\lambda + \&c. \\ & + \&c.\end{aligned}$$

III.

Setzt man ferner, die Tafel der Abweichung sey von Grad zu Grad berechnet, und man wolle sehen, wiefern man bey dem Einschalten den ganz einfachen Proportionaltheil nehmen könne; so kann man $\lambda + z$ anstatt λ setzen, und z als einen Theil eines Grades ansehen, so dass die höhern Dignitäten, ausser bey $\sin\lambda$, von z weggelassen werden können. Diesem nach ist

$$\sin(\lambda + z) = \sin\lambda + \cos\lambda.\ \sin 1^\circ.\ z$$

$$\sin(3\lambda + 3z) = \sin 3\lambda + \cos 3\lambda.\ \sin 3^\circ.\ z$$

&c.

Damit

Damit erhält man in Secunden eines Grades

$$\begin{aligned} \delta = \; & 83891'' \sin\lambda + 1464''.\ \cos\lambda.\ z - 13'' \sin\lambda.\ zz. \\ - \; & 597 \sin 3\lambda - 0{,}0031.\ \cos 3\lambda.\ z \\ + \; & 11\tfrac{1}{2} \sin 5\lambda \\ - \; & \tfrac{2}{7} \sin 7\lambda \end{aligned}$$

Die Ungleicheit in dem Proportionaltheile rührt demnach nur von den $-13''$ $\sin\lambda.\ zz$ her, worauf man aber, wenn alles bis auf Secunden genau berechnet werden soll, allerdings zu sehen hat. Demnach können bey Aufsuchung des Proportionaltheiles die zweyten Differenzen nicht durchaus versäumt werden, wenn die Tafel den Abweichung nur von Grad zu Grad berechnet ist.

IV.

Es sey die Formel

$$\text{tang}\ \alpha = \text{tang}\ x.\ \cos\ \omega$$

und diese soll ebenfalls in eine solche Reyhe aufgelöst werden, welche den Bogen a unmittelbar durch die Sinus der vielfachen Bogen x ausdrücke.

Hier hat man überhaupt

$$\text{tang}\ (x - a) = \frac{t\,x - t\,a}{1 + t\,x.\ t\,a}$$

Demnach, wenn man für $t\,a$ den Werth $t\,x \cos\omega$ und $1 - \cos\omega = e$ setzt,

$$t\,(x - a) = \frac{e\,\mathrm{s}x.\ \cos x}{1 - e\,\mathrm{s}x^2} = \frac{e\,\mathrm{s}\,2\,x}{2 - e + \cos 2\,x}$$

Man hat aber

$$x - a = t\,(x - a) - \tfrac{1}{3}\,t\,(x - a)^3 + \tfrac{1}{5}\,t\,(x - e)^5 - \&c.$$

Demnach

$$x - a = \frac{e\,\mathrm{s}x\cos x}{1 - e\,\mathrm{s}x^2} - \tfrac{1}{3}\left(\frac{e\,\mathrm{s}x\cos x}{1 - e\,\mathrm{s}x^2}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{e\,\mathrm{s}x\cos x}{1 - e\,\mathrm{s}x^2}\right)^5 - \&c.$$

Oder wenn man diese Ausdrücke in Reyhen auflöset,

$$\begin{aligned} x - a = e\,\mathrm{s}x\cos x + e^2\,\mathrm{s}x^3 \cos x + e^3\,\mathrm{s}x^5 \cos x + e^4\,\mathrm{s}x^7 \cos x + \&c. \\ - \tfrac{1}{3} e^3\,\mathrm{s}x^3 \cos x^3 - \tfrac{3}{3} e^4\,\mathrm{s}x^5 \cos x^3 - \&c. \\ + \&c. \end{aligned}$$

Diese Reyhe verwandelt sich nun ferner in folgende

$$\begin{aligned} x - a = \tfrac{1}{2} e\,\mathrm{s}\,2x + \tfrac{1}{4} e^2\,\mathrm{s}\,2x + \tfrac{1}{8} e^3\,\mathrm{s}\,2x + \tfrac{1}{16} e^5\,\mathrm{s}\,2x + \&c. \\ - \tfrac{1}{8} e^2\,\mathrm{s}\,4x - \tfrac{2}{16} e^3\,\mathrm{s}\,4x - \tfrac{3}{32} e^4\,\mathrm{s}\,4x - \&c. \\ + \tfrac{1}{24} e^3\,\mathrm{s}\,6x + \tfrac{3}{48} e^4\,\mathrm{s}\,6x + \&c. \\ - \tfrac{1}{64} e^4\,\mathrm{s}\,8x - \&c. \\ + \&c. \end{aligned}$$

Oder

Oder wenn man dieſe Reyhen ſummirt,

$$x - a = \frac{e\,f\,2x}{(2-e)} - \frac{e^2\,f\,4x}{2\,(2-e)^2} + \frac{e^3\,f\,6x}{3\,(2-e)^3} - \&c.$$

Oder endlich, wenn man für e den Werth 1 — coſ ω ſetzt, wodurch

$$\frac{e}{2-e} = (\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\,\omega)^2$$

wird,

$$x - a = t\tfrac{1}{2}\omega.\,f\,2x - \tfrac{1}{2}\,t\,\tfrac{1}{2}\,\omega^4.\,f\,4x + \tfrac{1}{3}\,t\,\tfrac{1}{2}\,\omega^6.\,f\,6x - \tfrac{1}{4}\,t\,\tfrac{1}{2}\,\omega^8.\,f\,8x + \&c.$$

V.

Dieſe Formel giebt die Reduction der Eccliptic auf den Aequator, der Planeten auf die Eccliptic &c. an. Man ſetze z. E.

$$\omega = 23^\circ.\ 28'.\ 20''$$

ſo erhält man

$lt\frac{1}{2}\omega^2 = 8{,}6350938$	$lt\frac{1}{2}\omega^4 = 7{,}2701876$	$lt\frac{1}{2}\omega^6 = 4{,}9052814$
$\log. 1'' = 4{,}6855749$	. . . . . $4{,}6855749$	. . . . . $4{,}6855749$
$3{,}9495189$	$2{,}5846127$	$0{,}2197025$
$8902{,}6$	$192{,}1$	$5{,}5$

$$x - a = 8902'',6.\,f\,2x - 192'',1.\,f\,4x + 5'',5\,f\,6x - \&c.$$

Es iſt hier nemlich x die Länge der Sonne, a ihre gerade Aufſteigung, ω die Schiefe der Eccliptic, und damit hat man die Formel

$$\text{tang } a = \text{tang } x.\,\text{coſ}\,\omega$$

welches gerade diejenige, die wir hier aufgelöſet haben.

VI.

Die zwo Gleichungen, welche wir erſt aufgelöſet haben,

$$f\,\delta = e.\,\text{ſin}\,\lambda = f\,\omega.\,f\,\lambda$$
$$\text{tang } a = \text{tang } x.\,\text{coſ}\,\omega$$

ſind gerade diejenigen, welche bey der Auflöſung jeder ſphäriſchen rechtwinklichten Triangel vorkommen. Wenn man den Unterſchied der gegebenen und geſuchten Stücke mit in Betrachtung zieht, ſo ſind es eigentlich

1. $\text{ſin}\,\delta = f\,\omega\,.\,f\,\lambda$
2. $\text{ſin}\,\lambda = \text{ſin}\,\delta : \text{ſin}\,\omega$
3. $\text{tang } a = \text{tang } x.\,\text{coſ}\,\omega$
4. $\cot x = \cot a\,.\,\text{coſ}\,\omega$
5. $\text{coſ}\,\omega = t\,a\,.\,\cot x$

Von

Von diesen Formeln giebt die zweyte, wenn $\frac{1}{\mathrm{s}\,\omega} = e$ gesetzt wird, eben die Reyhe, so wir für die erste gefunden haben, doch mit der Bedingung, daſs λ und δ die beyden veränderlichen Gröſsen sind. Da aber $1 : \mathrm{s}\,\omega > 1$, so wird die Reyhe divergirend, und daher von keinem sonderlichen Gebrauche. Die 4te Formel ist der 3ten ähnlich, da man $\cot x = t\,\xi$ und $\cot a = t\,\alpha$ setzen kann. Demnach dient die vorhin gefundene Reyhe für beyde. Die 5te Formel hat so wie die 2te das besonders, daſs da in jener $\cos\omega < 1$, in dieser $\sin\lambda < 1$ seyn muſs, in der fünften $t\,a . \cot x < 1$, und in der 2ten $\mathrm{s}\,\delta : \mathrm{s}\,\omega < 1$ demnach $a < x$ und $\delta < \omega$ genommen werden muſs.

VII.

Die Formel

$$t\,a = t\,x . \cos\omega$$

kommt auch bey Berechnung der wahren Anomalie der Planeten aus der eccentrischen oder dieser aus jener vor. Denn wenn

Die Eccentricität $= e$
Die wahre Anomalie $= v$
Die eccentrische $= \lambda$

gesetzt wird, so findet man

$$\sin v = \frac{\sin\lambda . \sqrt{(1 - ee)}}{1 + e \cos\lambda}$$

und hinwiederum

$$\sin\lambda = \frac{\sin v . \sqrt{(1 - ee)}}{1 - e \cos v}$$

und

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\lambda = \sqrt{\left(\frac{1+e}{1-e}\right)} . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v$$

oder umgekehrt

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} v = \sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)} . \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\lambda$$

welches durch die Differentation die sehr einfache Formel

$$\frac{dv}{\sin v} = \frac{d\lambda}{\sin\lambda}$$

giebt, welche demnach ohne Rücksicht auf die Eccentricität Statt findet. Diese Eigenschaft der Differentialgleichung kömmt überhaupt auch bey der Formel

$$ta = tx.\cos\omega$$

vor, als welche ebenfalls

$$\frac{da}{\sin 2a} = \frac{dx}{\sin 2x}$$

giebt.

VIII.

Ohne mich aber hier damit aufzuhalten, die Formel

$$t\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\left(\frac{1-e}{1+e}\right)}.\ \mathrm{tang}\ \tfrac{1}{2}\lambda$$

durch eine unendliche Reyhe besonders auszudrücken, so werde ich überhaupt die dreyerley Anomalien, nemlich die wahre $= v$, die eccentrische $= \lambda$, die mittlere $= a$ zugleich vornehmen, und ihre verschiedene Verhältnisse durch unendliche Reyhen, und wo es seyn kann, durch endliche Ausdrücke vorstellen. Ich setze dabey die grössere Axe der Ellipse $= 1$, die kleinere halbe Axe $= b$, die Eccentricität $= e$, so dass $bb = 1 - ee$ ist. Damit haben wir

I. $\lambda - v$

$$= \frac{2e}{1+b}.\,\mathrm{f}v + \frac{2e^2}{2(1+b)^2}\mathrm{f}2v + \frac{2e^3}{3(1+b)^3}\mathrm{f}3v + \frac{2e^4}{4(1+b)^4}\mathrm{f}4v + \&c.$$

II. $a - \lambda = \frac{2eb}{1+b}.\mathrm{f}v + \frac{2e^2b}{(1+b)^2}.\mathrm{f}2v + \frac{2e^3b}{(1+b)^3}.\mathrm{f}3v + \frac{2e^4b}{(1+b)^4}\mathrm{f}4v\ \&c.$

III. $a - v = (a - \lambda) + (\lambda - v)$ die Summ der Reyhen I. II.

IV. $a - \lambda = e.\sin\lambda$.

V. $\lambda - v$

$$= \frac{2e}{1+b}\mathrm{f}\lambda - \tfrac{2}{2}\left(\frac{e}{1+b}\right)^2\mathrm{f}2\lambda + \tfrac{2}{3}\left(\frac{e}{1+b}\right)^3\mathrm{f}3\lambda - \tfrac{2}{4}\left(\frac{e}{1+b}\right)^4\mathrm{f}4\lambda$$
$$+ \&c.$$

VI. $a - v = (a - \lambda) + (\lambda - v)$ die Summ der Reyhen IV. V.

VII $a - \lambda = e\,\mathrm{f}a - \tfrac{1}{2}e^2\mathrm{f}2a + \frac{3}{2.4}e^3\mathrm{f}3a - \frac{4.^2 1}{2.4.6}e^4\mathrm{f}4a + \frac{5^3.1}{2.4.6.8}e^5.\mathrm{f}5a - \&c.$

$$- \frac{1}{2.4}e^3\mathrm{f}a + \frac{2^2.2}{2.4.6}e^4\mathrm{f}2a - \frac{3^3.3}{2.4.6.8}e^5\mathrm{f}3a + \&c.$$

$$+ \frac{1.2}{2.4.6.8}e^5\mathrm{f}a - \&c.$$

$$- \&c.$$

VIII.

VIII. $a - v =$

$$2e\,\text{ſ}a - \tfrac{5}{4}e^2\,\text{ſ}2a + \tfrac{13}{12}e^3\,\text{ſ}3a - \tfrac{103}{96}e^4\,\text{ſ}4a + \tfrac{1097}{960}e^5\,\text{ſ}5a - \tfrac{1223}{960}e^6\,\text{ſ}6a + \&c$$
$$- \tfrac{1}{4}e^3\,\text{ſ}a + \tfrac{11}{24}e^4\,\text{ſ}2a - \tfrac{43}{64}e^5\,\text{ſ}3a + \tfrac{451}{480}e^6\,\text{ſ}4a$$
$$+ \tfrac{5}{96}e^5\,\text{ſ}a - \tfrac{17}{192}e^6\,\text{ſ}2a$$

IX. $\lambda - v = (a - v) - (a - \lambda)$ der Unterſchied der Reyhen VII. VIII.

Ich habe dieſe Formeln bereits vor mehren Jahren ſelbſt berechnet. Sie ſind aber deswegen nicht ſo ganz neu, da man einige davon in mehrern aſtronomiſchen Schriften, andere beſonders in den Abhandlungen der Petersburgſchen und Berlinſchen Academie der Wiſſenſchaften von Hrn. *Euler* und *de la Grange* bekannt gemacht und unterſucht findet. Es war übrigens hier der Ort ſie zuſammen in einer Tabelle vorzuſtellen. Das Geſetz des Fortganges der VIIIten dieſer Formeln iſt ziemlich verwickelt und weitläuftig. Hr. *de la Grange* hat daſſelbe in den Memoires der K. Academie allhier 1769 zuerſt und auf eine ganz neue Art bekannt gemacht. Das Geſetz des Fortgangs der VIIten Formel hat etwas viel einfachers. Die Coefficienten ſind Brüche, deren Nenner ſchlechthin Producte der geraden Zahlen 2. 4. 6. 8. 10 &c. ſind. Dieſe wachſen nach den Exponenten des e an. Die Zähler beſtehen aus dem Producte einer Quadratzahl in eine andere Zahl. Die Quadratzahl iſt immer das Quadrat des vielfachen der Anomalie a. Die andere Zahl aber erwächſt durch bloſses Addiren auf folgende Art

1	1	1	1	1	1	1	1	&c.
	1	2	3	4	5	6	7	
			2	5	9	14	20	
					5	24	28	
							14	

Und damit iſt z. E. das neunte Glied der Reyhe

$$+ \frac{9^7 . 1}{2.4.6\ldots16} . e^9\,\text{ſ}9a$$
$$- \frac{7^7 . 7}{2.4.6\ldots16} . e^9\,\text{ſ}7a$$
$$+ \frac{5^7 . 20}{2.4.6\ldots16} . e^9\,\text{ſ}5a$$
$$+ \frac{3^7 . 28}{2.4.6\ldots16} . e^9\,\text{ſ}3a$$
$$+ \frac{1^7 . 14}{2.4.6\ldots16} . e^9\,\text{ſ}a$$

Das Geſetz des Fortganges der übrigen Reyhen iſt ſehr einfach.

VIII.

Zu diesen Formeln kommen noch folgende zwo.

$$\tfrac{1}{2}\alpha = e + \tfrac{11}{96}e^3 + \frac{595}{10240}e^5 + \&c.$$

$$e = \left(\frac{\alpha}{2}\right) - \tfrac{11}{96}\left(\frac{\alpha^3}{2}\right) - \frac{587}{240.\,128}\left(\frac{\alpha}{2}\right)^5 + \&c.$$

gerechnet werden, wo e die Eccentricität, α die gröste Gleichung des Planeten in Theilen der grössern halben Axe ausdrückt. Die Berechnung dieser Formeln fiel mir über die Maassen weitläuftig aus, und dieses macht, dass ich sie nur bis auf das dritte Glied der unendlichen Reyhe berechnet habe.

IX.

Bey Reyhen von der Art, wo die Glieder nach dem Sinus der vielfachen Bögen fortgehen, kann es oft geschehen, dass sie müssen umgekehrt werden. Ich werde vorerst in einem Beyspiele zeigen, wie ich dieses verstehe, und dann die allgemeine Formel angeben. Man setze, die wahre ☌♀☉ geschehe τ Minuten nach der mittlern, und zur Zeit der mittlern ☌ sey die mittlere Anomalie der ♀ = M, der Erde = m, so ist die Frage die Zeit τ durch eine allgemeine, das will sagen, auf jede ☌☉♀ passende Formel auszudrücken. Nun bewegt in jeder Minute und in Theilen des Halbmessers

die Erde	0,00001194638	Aphel.	0,0000000060
die Venus	0,00001941880	Aphel.	0,0000000054

Damit ist zur Zeit der wahren ☌♀☉ die mittlere Anomalie

der ♀ $A = M + 0{,}00001941826.\,\tau$

der ♁ $a = m + 0{,}00001194578.\,\tau$

Und die Gleichung des Mittelpuncts für

♀ $P = 0{,}0139620.\,\sin A - 0{,}0000610.\,\text{ſ}2A + 0{,}0000007\,\text{ſ}3A.$

♁ $p = 0{,}0336608.\,\sin a - 0{,}0003541.\,\text{ſ}2a + 0{,}0000051\,\text{ſ}3a.$

Ferner ist für jede Minute die Voreilung der ♀ = 0,00000747242. Und damit erhält man die Gleichung

$$P - p = 0{,}00000747242\tau = x.$$

$$A = M + 2{,}5987225.\,x$$
$$a = m + 1{,}5987217.\,x$$

wird; so erhält man die Gleichung

$$x = 0{,}0139620.\,\text{ſ}(M + 2{,}5987225x) - 0{,}0336608\,\text{ſ}(m + 1{,}5987217x)$$
$$- 0{,}0000610.\,\text{ſ}(2M + 5{,}1974450x) + 0{,}0003541\,\text{ſ}(2m + 3{,}1974434x)$$
$$+ 0{,}0000007.\,\text{ſ}(3M + 7{,}7961675x) - 0{,}0000051\,\text{ſ}(3m + 4{,}7961651x)$$

Hieraus

Hieraus erhält man mit Weglassung der allzukleinen Glieder

$$
\begin{aligned}
x = {} & 0{,}0139620\, sM + 0{,}0362834 \cos M.x - 0{,}0471452\, sM.x^2 \\
& \qquad - 0{,}0468390 \cos M.x^3 \\
& - 0{,}0000610\, s2M - 0{,}0003170 \cos 2M.x + 0{,}0008239\, s2M.x^2 \\
& \qquad + 0{,}0012432 \cos 2M.x^3 \\
& + 0{,}0000007\, s3M - 0{,}0538131 \cos m.x + 0{,}0430160\, sm.x^2 \\
& \qquad + 0{,}0229289 \cos m.x^3 \\
& - 0{,}0336608\, sm + 0{,}0011322 \cos 2m.x - 0{,}0018101\, s2m\,x^2 \\
& \qquad - 0{,}0019297 \cos 2m.x^3 \\
& + 0{,}0003541\, s2m \\
& - 0{,}0000051\, s3m.
\end{aligned}
$$

X.

Diese Gleichung hat nun überhaupt folgende Form

$$x = a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.$$

Um sie aufzulösen, muss sie erstlich in folgende

$$a = (1 - b)x - cx^2 - dx^3 - \&c.$$

verwandelt werden. Die Auflösung selbst geschieht nach der gewöhnlichen Umkehrung der Reyhe, und man findet, wenn man die Rechnung vornimmt,

$$
\begin{aligned}
x = a + ab + ab^2 & + ab^3 + ab^4 + ab^5 + \&c. \\
+ a^2c & + 3a^2cb + 6a^2cb^2 + 10a^2cb^3 \\
& + a^3d + 4a^3db + 10a^3db^2 \\
& \qquad + 2c^2a^3 + 10a^3c^2b \\
& \qquad\qquad + 5da^4c.
\end{aligned}
$$

XI.

Diese Formel dient nun überhaupt zur Richtschnur, und zeigt, welche Multiplicationen der durch a, b, c, d &c. vorgestellten Grössen müssen vorgenommen werden. Diese Grössen sind aber Sinus und Cosinus von Bogen, deren Product wiederum in Sinus und Cosinus der Summe und Differenz der Bögen nach bekannten Formeln aufgelöst werden. Man treibt auch diese Multiplication nur bis so weit als die Producte noch eine Grösse haben, die in Rücksicht auf die vorgesetzte Genauigkeit der Rechnung nicht weggelassen werden können.

XII.

Auf diese Art habe ich nun aus der letzten Gleichung (No. IX.) in Minutenzeit folgende hergeleitet.

$$
\begin{aligned}
r = {} & 1864',5.\,fM && + 131',6\,f(M+m) && - 0,9\,f(M+3m)\\
+ {} & 25,5.\,f2M && + 0,5\,f2(M+m) && + 0,4\,f(M-3m)\\
+ {} & 0,6.\,f3M && + 31,5\,f(M-m) && - 0,1\,f(3M+m)\\
- {} & 4501,8.\,fm && + 10,8\,f(M+2m) && + 0,1\,f(3M-m)\\
+ {} & 168,1.\,f2m && + 0,4\,f(M-2m) && \\
- {} & 9,8.\,f3m && - 4,0\,f(2M+m) && \\
+ {} & 0,5.\,f4m && + 1,0\,f(2M-m) &&
\end{aligned}
$$

Zusatz zur Lehre vom Einschalten.

Von Herrn *Lambert*.

Bey der Einschaltungsformel

$$A' = A + \Delta A.x + \Delta^2 A.x.\left(\frac{x-1}{2}\right) + \Delta^3 A.x.\frac{x-1}{2}.\frac{x-2}{3} + \&c.$$

liegt eine Einheit zum Grunde, die, wenn sie zu groß angenommen wird, allzuviele Differenzen erfordert, oder auch die Reyhe vollends unbrauchbar machet. Man schließt daher, daß wenn in einem fürgegebenen Fall die Differenzen ΔA, $\Delta^2 A$, $\Delta^3 A$, &c. nur langsam abnehmen, man besser thut, wenn man eine kleinere Einheit zum Grunde legt. Also hatte man in der *Connoissance des tems*, um das Einschalten zu erleichtern, die Länge des Mondes so wohl für Mittag als für Mitternacht angesetzt, das will sagen, man hat vorerwähnte Einheit, die sonst einen Tag bedeutete, auf einen halben Tag heruntergesetzt.

Es entsteht nun hier die Frage: *Wie viel man eigentlich durch ein solches Heruntersetzen gewinne?*

Um diese Frage allgemein aufzulösen, werde ich annehmen, die Einheit soll auf ihren xten Theil heruntergesetzt werden, so daß man nach Belieben $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, &c. setzen könne. Die Tafel wird demnach

für $0x$, $1x$, $2x$, $3x$, &c.

die Werthe A, A', A'', A''', &c.

angeben, und man wird sodann die Differenzen

$$
\begin{aligned}
\delta A &= A' - A\\
\delta^2 A &= A'' - 2A' + A\\
\delta^3 A &= A''' - 2A'' + 3A' - A \quad \&c.
\end{aligned}
$$

erhalten, da man sonst die ungleich größern ΔA, $\Delta^2 A$, $\Delta^3 A$, &c. hatte. Es ist nun aber

x =