SUR LES IRRÉGULARITÉS du mouvement de Saturne.

PAR M. LAMBERT.

I.

M. *Halley* voyant que de quelque maniere qu'il tâchât d'accommoder ſes Tables aſtronomiques aux obſervations, il n'y auroit jamais moyen de parvenir à ce but, cela lui fit naître l'idée aſſez heureuſe de calculer toutes les oppoſitions des planetes ſupérieures, qui ont été obſervées avec une exactitude ſuffiſante, & de donner une liſte des erreurs de ſes Tables, en marquant de combien de minutes & ſecondes chaque oppoſition calculée différoit de celle qu'on avoit obſervée. Mr. *Halley* étoit fort éloigné de vouloir en impoſer. Il donne ſes Tables préciſément pour ce qu'elles ſont, ſans exiger rien de plus. Mais de la façon qu'il les donne, on voit qu'il ne tenoit pas à lui de les rendre plus exactes. Si elles s'écartent du ciel, c'eſt que le mouvement des planetes eſt troublé par des cauſes qu'on pouvoit à la vérité ſoupçonner, mais dont le calcul étoit trop compliqué & trop embarraſſant. Ce qu'il reſtoit donc à faire, c'étoit d'indiquer au moins la ſomme de leurs effets en donnant la liſte des erreurs des Tables.

II.

Cette liſte a mérité à juſte titre l'attention des Géometres & des Aſtronomes. On n'a pas manqué de la completter en y joignant les oppoſitions obſervées depuis; & d'un autre côté on s'eſt appliqué avec ſuccès, à évaluer les perturbations que les planetes ſe cauſent mutuellement. M. *Mayer* de Göttingue, célebre par ſes Tables lunaires, a donné des formules qui expriment aſſez bien les irrégularités qu'on obſerve dans le mouvement de

Jupiter, & M. *Wargentin* les a employées avec avantage dans ſes Tables des ſatellites de cette planete. On a encore réuſſi à l'égard des autres planetes, dont les irrégularités ne ſont pas fort conſidérables. Mais ce qui reſte encore en arriere, ce ſont les perturbations de Saturne, qui ſont les plus grandes de toutes. Car quoique M. *Euler* ait beaucoup travaillé ſur ce ſujet, & qu'il ait même obtenu les prix que l'Académie des Sciences de Paris a propoſés ſur cette queſtion pour les années 1748 & 1752, ſes deux Mémoires les ont mérités plutôt par les méthodes analytiques qu'il a employées, que parce qu'il a pouſſé jusqu'au bout la ſolution.

III.

M. *de la Lande* s'eſt à cet égard donné quelque peine. Il a eu ſoin de comparer les erreurs des Tables de Halley. Il trouve que ſi ces erreurs ſont dues à l'action de Jupiter ſur Saturne, elles doivent revenir, du moins à très peu près, dans un intervalle de 59 ou 60 ans. M. *de la Lande* dit que cela n'arrive pas, & il en infere: „qu'indépendamment de l'attraction „de Jupiter, il y a dans Saturne une inégalité dont la cauſe doit être diffé„rente, & qui à même configuration avec Jupiter produit un effet plus grand „que celui qui réſulte des plus grandes variétés dans la poſition de Jupiter „par rapport à Saturne" M. *de la Lande* ajoute encore, qu'il a toujours trouvé les retours de Saturne à l'équinoxe du printems, depuis un ſiecle, plus promts que ſes retours à l'équinoxe d'automne. Il croit qu'il faudra avoir recours à un changement d'excentricité, &c.

IV.

Voilà ſans doute des phénomenes bien ſinguliers, & qui méritent d'être approfondis & peſés mûrement. Pour cet effet il faudroit commencer par évaluer exactement l'action de Jupiter ſur Saturne. Par là on ſe trouveroit en état de réduire le lieu de Saturne dans chaque oppoſition obſervée, à celui qui auroit été le vrai lieu ſi l'action de Jupiter étoit nulle. Ces lieux ainſi réduits ſerviroient enſuite de baſe pour déterminer exactement l'ellipſe que Saturne décrit autour du Soleil. Et ſi alors on trouvoit que cette ellipſe ne ſatisfait pas à tous les lieux réduits de Saturne, mais qu'il y a des erreurs plus grandes que ne ſont les irrégularités dues à l'action de Jupiter, on ſera en droit d'en inférer qu'il exiſte encore quelque cauſe perturbatrice inconnue; & peut-être ſera-t-on en état de la faire mieux connoître.

V.

Cette méthode n'eſt pas encore praticable. Le calcul de l'action de Jupiter ſur Saturne eſt d'une prolixité qui jusqu'à préſent a rebuté les calculateurs les plus hardis. J'en ferai donc abſtraction, mais ſans me borner à faire quelque légere comparaiſon numérique des erreurs des Tables de *Halley*, qui ne meneroit qu'à quelque concluſion hazardée & fort indéterminée. Il s'agira plutôt d'entrer dans le détail, & de procéder bien méthodiquement. Pour cet effet je commence par examiner les différentes périodes qui peuvent ſe rencontrer dans l'action de Jupiter ſur Saturne. C'eſt à quoi me ſervira la Table ſuivante.

	Mouvement ſéculaire.			Tems périod. Années.
		z s o '	z	
1	♃ - - - - - - - - - - - - - -	8. 5. 6. 28	= 8, 43461	11, 8559
2	♄ - - - - - - - - - - - - - - -	3. 4. 23. 6	= 3, 39749	29. 4335
3	$\lambda = ♃ - ♄$ - - - - - - -	5. 0. 13. 22	= 5, 03713	19, 8526
4	2λ - - - - - - - - - - - - - -	10. 0. 26. 44	= 10, 07825	9, 9263
5	3λ - - - - - - - - - - - - - -	15. 1. 10. 6	= 15, 11138	6, 6175
6	4λ - - - - - - - - - - - - - -	20. 1. 23. 28	= 20, 14850	4, 9631
7	A anom. de ♃ - - - - - - - -	8. 5. 4. 28	= 8, 42907	11, 8637
8	a anom. de ♄ - - - - - - - - -	3. 4. 20. 53	= 3. 39130	29, 4872
9	$\lambda - a$ - - - - - - - - - - - -	1. 7. 22. 29	= 1, 64583	60, 7596
10	$2\lambda - A$ - - - - - - - - - - -	1. 7. 22. 16	= 1, 64518	60, 7830
11	$A - \lambda$ - - - - - - - - - - -	3. 4. 21. 6	= 3. 39194	29. 4816
12	$2\lambda - a$ - - - - - - - - - - -	6. 8. 5. 51	= 6, 68295	14, 9634
13	$3\lambda - A$ - - - - - - - - - - -	6. 8. 5. 38	= 6, 68231	14, 9649
14	$3\lambda - a$ - - - - - - - - - - -	11. 8. 19. 13	= 11, 72008	8, 5324
15	$3a - 2\lambda$ - - - - - - - - - -	0. 1. 5. 55	= 0, 09565	1045,5—
16	$2a - \lambda$ - - - - - - - - - - -	1. 8. 28. 24	= 1, 74647	57, 2578

VI.

Ce qui dans cette Table frappe d'abord, c'eſt le rapport très marqué qu'il y a entre ces périodes. On voit que les N°. 9. & 10. ne different preſque point. La différence entre N°. 12. & N°. 13. eſt également presque nulle. Peut-être même que ces périodes doivent coïncider entierement. Auſſi cela aura-t-il lieu dès qu'on ſuppoſera que le mouvement progreſſif des aphélies de l'une & de l'autre orbite eſt le même. La période N°. 11. revient à très peu près à N°. 8. Enſuite le triple de la période N°. 3., le quadruple de N°. 12. & 13., & le ſeptuple de N°. 14. donnent à très peu près les mêmes produits. Or ces périodes, qui different ſi peu ſoit entre elles-mêmes ſoit dans leurs multiples, ſe confondent de telle ſorte que quand on n'en conſidere les effets qu'*a poſteriori*, elles paroiſſent ne former qu'une ſeule période pendant une longue ſuite d'années.

VII.

Or l'action de Jupiter ſur Saturne peut, généralement parlant, être exprimée par la formule

$$\begin{aligned}
&\alpha . \sin \lambda - \beta . \sin 2\lambda + \&c. \\
&+ \gamma \sin(\lambda - a) + \delta . \sin(2\lambda - a) + \&c. \\
&- \varepsilon . \sin(\lambda - A) - \zeta . \sin(2\lambda - A) - \&c. \\
&+ \&c.
\end{aligned}$$

Et comme ces termes ſont les plus conſidérables de la ſuite, on voit que deux ou trois périodes compoſées comprendront toutes les irrégularités, ou peu s'en faut, que l'action de Jupiter produit dans le mouvement de Saturne.

VIII.

Je dois encore remarquer que dans la Table (§. V.) j'ai indiqué la période $3a - 2\lambda$, qui eſt de $1045\frac{1}{2}$ ans. L'effet de cette période ne ſauroit être fort grand. Mais quel qu'il puiſſe être, il peut ſe manifeſter à la longue, & même de maniere qu'on pourroit l'attribuer à un mouvement accéléré, tout périodique qu'il eſt. Du reſte je crois n'avoir pas beſoin d'avertir, que les rapports que je viens de faire voir entre les différentes périodes de la Table, inſinuent que Jupiter & Saturne ne ſont pas placés à tout hazard dans le ſyſteme ſolaire, mais de façon que leur action mutuelle ſe contrebalance d'une maniere conforme à l'état de permanence. M. *Wargentin* a fait des remarques aſſez ſemblables à l'égard des retours qu'on obſerve dans les ſatellites de Jupiter.

IX.

Après ces considérations générales sur les périodes qui se rencontrent dans les perturbations de Saturne causées par Jupiter, je vais maintenant donner ces perturbations elles-mêmes, ou, pour mieux dire, la liste des erreurs des Tables de *Halley*. Je les rangerai suivant l'ordre des oppositions de Saturne, en sorte qu'il y en ait 29 dans chaque colonne, & que la place pour celles qui n'ont pas été observées, reste vuide.

Liste des erreurs des Tables de Halley dans les oppositions de Saturne.

	− 0′. 40″		+ 4′. 40″	− 5′. 52″	+ 5′. 59″	− 5′. 3″
	− 0. 11		+ 2. 32	− 7. 32	+ 5. 16	− 7. 55
			+ 2. 58	− 7. 59	+ 4. 53	− 9. 43
			+ 2. 34	− 8. 49	+ 5. 21	− 12. 14
			+ 2. 17	− 9. 17	+ 2. 45	− 11. 58
			+ 3. 9	− 9. 19	+ 0. 28	− 13. 4
			+ 3. 20	− 9. 0	− 0. 40	− 15. 8
			+ 3. 34	− 9. 11	− 1. 25	− 15. 51
			+ 3. 44	− 9. 44	− 1. 2	− 17. 34
			+ 3. 50	− 9. 35	− 2. 10	− 18. 22
	+ 3. 44		+ 4. 19	− 9. 25	− 5. 25	− 20. 13
	− 1. 8		+ 4. 43	− 9. 25	− 4. 44	− 21. 9
	+ 3. 36		+ 4. 42	− 8. 44	− 5. 31	− 22. 0
	+ 1. 52		+ 3. 48	− 8. 0	− 5. 59	− 20. 53
+ 2′. 18″		− 3′. 24″	+ 3. 25	− 6. 52	− 5. 5	− 20. 56
+ 9. 43			+ 3. 34	− 4. 56	− 7. 9	− 19. 51
+ 3. 50		− 12. 17	+ 3. 11	− 4. 27	− 5. 36	− 19. 2
+ 0. 37			+ 2. 33	− 2. 42	− 6. 15	− 17. 12
+ 2. 35			+ 1. 31	− 0. 27		− 15. 32
− 4. 4		+ 6. 27	+ 0. 15	+ 0. 48	− 6. 56	− 13. 12
− 1. 13			− 0. 42	+ 2. 23	− 7. 49	− 10. 40
+ 3. 21			− 1. 57	+ 2. 24	− 8. 40	− 7. 59
− 3. 39			− 3. 5	+ 4. 9	− 6. 2	− 4. 57
+ 0. 55			− 3. 0	+ 4. 11	− 5. 9	− 0. 9
+ 0. 29			− 3. 22	+ 4. 47	− 4. 12	− 1. 14
+ 0. 28			− 3. 21	+ 6. 5	− 3 21	
− 0. 49			− 3. 41	+ 6. 10	− 2. 31	
+ 1. 7			− 3. 28	+ 6. 15	− 4. 25	
+ 0. 44			− 4. 54	+ 6. 51	− 4. 41	

X.

X.

Les 17 premieres oppofitions font celles que *Tycho* a obfervées depuis le 20 Août 1582 jusqu'au 23 Mars 1599, vieux ftyle. Enfuite il y en a 4 qui ont été obfervées par *Longomontanus* depuis le 19 Juillet 1608 jusqu'au 25 Août 1611, nouveau ftyle. Les trois qui font marquées dans la troifieme colonne font de *Riccioli*. Elles font du 13 Sept. 1642, du 9 Oct. 1644 & du 20 Nov. 1647, nouveau ftyle. Toutes ces obfervations font peu exactes. M. *Halley* les a omifes dans fa lifte, & je ne les rapporte que dans la fuppofition qu'elles ne manqueront du moins pas de 15 ou 20 minutes de degré, ou que telles qu'elles font, elles valent encore mieux que fi on ne les avoit pas. Les oppofitions rapportées dans les 4 dernieres colonnes font beaucoup plus exactes. Les premieres font d'*Hévélius*; elles commencent par l'oppofition obfervée le 3 Avril 1658. Les oppofitions fuivantes ont été obfervées partie en Angleterre partie à Paris. Celle de 1773 a été communiquée par M. *Mallet* de Geneve. La lifte de M. *Halley* ne va que jusqu'à l'oppofition obfervée le 30 Avril 1719. Les oppofitions fuivantes jusqu'à celle du 6 Oct. 1732 fe trouvent rapportées dans les *Élémens d'Aftronomie* de M. *Caffini*, & M. *Schulze* à Berlin les a comparées avec les Tables de *Halley*. Je remarquerai encore, que la Table que je viens de donner, indique de combien de minutes & de fecondes la longitude calculée de Saturne eft plus ou moins grande que celle qui réfulte de l'obfervation. J'ai placé 29 oppofitions dans chaque colonne, parce que de cette maniere deux colonnes forment à très peu près la grande période qui eft d'environ 60 ans. Par là on voit d'un feul coup d'œil que cette période ne ramene pas les erreurs des Tables dans le même ordre. Mais c'eft peu de chofe que de ne favoir que cela.

XI.

Pour voir plus clair il s'agit d'examiner les obfervations elles-mêmes. Chacune peut être plus ou moins fautive, & il eft évident que l'erreur qui eft dûe aux obfervations, ne doit pas être confondue avec ce qui eft dû aux caufes perturbatrices. Pour cet effet je me fervirai de la conftruction, Pl. IV. Soient donc les droites *MN*, *mn* diviſées en 300 ans, depuis 1550 jusqu'en 1850. La droite *PQ* ſoit diviſée ſuivant le nombre des oppoſitions de Saturne répondantes à ces années. Je les ai comptées en avant & en arriere, en commençant par celle du 3 Avril 1658. Soit enfin la droite *MPm* diviſée en minutes de degrés. De cette maniere la droite *PQ* ſera la ligne des abſciſſes, & les ordonnées ſeront les nombres de la Table pris ſur l'échelle *MPm*. Ces ordonnées ne ſont pas tirées dans la Figure. Je me ſuis borné à en marquer les extrémités par des points. Or tous ces points devroient former le contour d'une ligne courbe. On voit que s'ils ne la forment pas exactement, du moins depuis *A* jusques vers *B* il ne s'en faut pas de beaucoup. Les écarts les plus conſidérables ſe rencontrent depuis 1730 jusqu'en 1740. J'ai eu ſoin de faire paſſer cette ligne courbe *AB* entre ces points de telle ſorte qu'elle ſuive auſſi exactement qu'il eſt poſſible les inflexions que ces points indiquent. Mais c'eſt auſſi tout ce que j'ai pu faire. Les oppoſitions antérieures à l'an 1658 ſont trop peu exactes & en trop petit nombre pour que j'euſſe pu continuer la courbe depuis *A* vers *P*. Ce n'eſt donc que la partie *AB* qui peut ſervir de baſe pour ce qu'il s'agira d'en conclure.

XII.

Les ordonnées de cette courbe *AB* marquent pour chaque moment la ſomme totale des erreurs des Tables de *Halley*, de quelques cauſes que ces erreurs puiſſent provenir. Entre ces cauſes l'action de Jupiter paroît être la principale. Mais outre cela il eſt poſſible que les élémens qui ont ſervi de baſe pour ces Tables, ne ſoient pas préciſément ceux qui conviennent au mouvement de Saturne ſuppoſé ſimplement elliptique. Enfin il ſe peut qu'il y ait encore des cauſes perturbatrices qui ne ſont pas encore aſſez bien connues. Commençons d'abord par ſéparer ce qui provient de l'action de Jupiter. C'eſt à quoi nous ſerviront les périodes que nous avons examinées ci-deſſus. Parmi ces périodes il y en a deux qui ſont de $60\frac{3}{4}$ ans, & qui répondent aux argumens $\lambda - a$, $2\lambda - A$. Elles coïncident, ſi non exactement, du moins à peu de choſe près. Cela fait que l'effet de l'une & de l'autre peut être séparé tout à la fois de la somme totale. Cet effet revient après un intervalle de $60\frac{3}{4}$ ans. Si donc la somme des erreurs des Tables pour chaque moment est soustrait de la somme totale qui a lieu après $60\frac{3}{4}$ ans, ce qui reste ne sera plus affecté de la partie qui dépend des périodes $\lambda - a$, $2\lambda - A$. Mais il s'agit de voir comment cette soustraction change ce qui est dû aux autres périodes.

XIII.

Or la perturbation dûe à une période quelconque s'exprime par des termes de la forme

$$m \sin \Phi.$$

Mais après $60\frac{3}{4}$ ans, l'arc Φ devient $= (\Phi + n)$, & la perturbation répondante est

$$m \sin (\Phi + n)$$

en soustrayant de celle-ci la premiere, on aura

$$m \sin (\Phi + n) - m \sin \Phi = 2m \sin \tfrac{1}{2} n . \cos (\Phi + \tfrac{1}{2} n)$$
$$= 2m . \sin \tfrac{1}{2} n . \sin (\Phi + 90^\circ + \tfrac{1}{2} n)$$

de sorte que cette soustraction ne change point la longueur de la période Φ, mais seulement le coëfficient m, qui devient $2m \sin \frac{1}{2} n$, & le commencement des abscisses qui est reculé de la quantité $90^\circ + \frac{1}{2} n$.

XIV.

Pour faire cette soustraction dans la Figure, j'ai transféré la courbe AB en ab, en l'avançant de $60\frac{3}{4}$ ans; & en tirant une nouvelle ligne droite RS pour les abscisses, j'ai construit la courbe CD, dont les ordonnées sont égales à la différence des ordonnées des courbes AB, ab répondantes à chaque moment donné. Cette nouvelle courbe CD n'est donc plus affectée de la double période $\lambda - a$, $2\lambda - A$, mais elle conserve encore ce qui dérive de toutes les autres périodes, qui ne sont pas des parties aliquotes de $60\frac{3}{4}$ ans.

XV.

Cette courbe CD paroît être beaucoup plus réguliere que la courbe AB, & il est fort naturel qu'elle le soit, puisqu'elle renferme une double perturbation de moins. La droite rs paroit être ſon axe, & en faiſant abſtraction de la petite inflexion anomale en c, il ſemble que la partie Cc doit être ſemblable à la partie cD, ce qui donneroit une période de $29\frac{2}{3}$, ou de $29\frac{3}{4}$ ans. Or parmi les périodes qui proviennent de l'action de Jupiter, celle dont l'argument eſt $A - \lambda$, eſt tant ſoit peu plus petite, tandis qu'au contraire celles dont l'argument eſt $2\lambda - a$ & $3\lambda - A$, ſont un peu plus grandes que la moitié de $29\frac{2}{3}$, ou de $29\frac{3}{4}$ ans. L'anomalie de Saturne elle-même a pareillement une période tant ſoit peu plus petite. De cette maniere la période de $29\frac{2}{3}$ ou de $29\frac{3}{4}$ ans ſemble tenir entre ces différentes périodes un milieu tel, que ce n'eſt qu'après pluſieurs retours que les petites différences entre ces périodes commencent à être ſenſibles. Cela fait qu'il n'y a gueres moyen de ſéparer ces effets, la ſuite des oppoſitions obſervées avec ſoin n'allant encore gueres au-delà d'un ſiecle.

XVI.

En attendant j'ai continué de part & d'autre la courbe CD, en retenant la période de $29\frac{3}{4}$ ans. Elle pouvoit me ſervir à continuer la courbe AB depuis B vers E, enſuite la courbe ab depuis a vers f, & enfin la courbe AB depuis A vers F. Car vu la maniere dont les trois courbes AB, ab, CD ont été conſtruites, il eſt évident que deux de ces courbes étant données, la troiſieme le ſera auſſi. Or j'ai continué la courbe AB depuis A jusques vers F, afin de voir ſi elle paſſe entre les points répondans aux oppoſitions obſervées avant 1658, & particulierement par *Tycho* pendant 17 ans. On voit dans la Figure que tous ces points ſont aſſez près de la ligne des abſciſſes PQ, mais diſperſés ſi irrégulierement, que tout ce qu'on en peut conclure c'eſt que l'erreur des Tables de *Halley* pour ces 17 ans ne peut pas aller à 20 ou plus de minutes, mais qu'elle doit être beaucoup plus petite.

XVII.

Après ce premier eſſai touchant la double période de $60\frac{3}{4}$ ans, j'ai cru devoir en faire un autre en employant la période de $29\frac{3}{4}$ ans. Pour cet effet j'ai transféré la courbe AB en $\alpha\beta$, en l'avançant de $29\frac{3}{4}$ ans, &

ayant tiré une nouvelle ligne TV pour les abſciſſes, j'ai conſtruit la courbe GH, dont les ordonnées ſont la différence entre les ordonnées des courbes AB, $\alpha\beta$ répondantes aux mêmes abſciſſes. Cette courbe GH ſe trouve donc pareillement débarraſſée de tout ce qui dérive des périodes de $29\frac{1}{4}$ ans. Auſſi on voit qu'à quelque légere anomalie près, elle paroît être beaucoup plus ſimple & plus réguliere que la courbe AB. Je pouvois également continuer cette courbe GH de part & d'autre, voyant qu'elle indique une période de $60\frac{3}{4}$ ans. Mais au lieu de la continuer uniquement par cette conſidération, j'ai préféré de la conſtruire au moyen des courbes AB, $\alpha\beta$, dont la premiere étoit déjà continuée moyennant la courbe CD, & dont l'autre pouvoit l'être parce que la premiere l'étoit. Le réſultat de cette conſtruction eſt, comme on voit dans la Figure, que dans le fond il étoit indifférent duquel des deux moyens de continuer la courbe GH je me ſerviſſe. Les petites anomalies en g, G, g, g reviennent dans un même intervalle de tems, quoiqu'avec des différences qui après pluſieurs retours peuvent devenir plus ou moins ſenſibles. Elles indiquent en même tems, que la période de $60\frac{3}{4}$ ans n'eſt pas ſimple, mais compoſée de quelques autres, qui ne ſont exactement égales, ni à cette période elle-même, ni à quelque partie aliquote. L'axe de cette courbe GH paroît être la droite tv. Elle eſt moins inclinée que l'axe rs de la courbe CD, l'angle swS étant à très peu près le double de l'angle vxV.

XVIII.

Si ces axes rs, tv ſont en effet des lignes droites, il faudra en inférer qu'il y a dans le mouvement de Saturne une accélération ou bien un retardement uniforme, qui ſuit le quarré du tems. Il n'y a rien dans la Figure qui contrediſe cette conſéquence. Tout au contraire, elle ſemble plutôt être confirmée par l'inégalité & le rapport qu'il y a entre les angles swS, vxV. Voici comment. Les ordonnées des courbes CD, GH ſont des *premieres différences* de la courbe AB. Or ſi le lieu de Saturne ne devoit être déterminé que par une équation de la forme

$$\alpha + m\tau + n \sin \mu\tau + \&c.$$

où τ marque le tems, α une époque, $m\tau$ le mouvement moyen, $n \sin \mu\tau +$ &c. les anomalies, il eſt clair qu'en changeant le tems τ en $\tau + \Delta\tau$, le lieu de Saturne pour ce tems $\tau + \Delta\tau$ ſera

$$\alpha + m(\tau + \Delta\tau) + n \sin \mu(\tau + \Delta\tau) + \&c.$$

& par conſéquent la différence

$$m.\Delta\tau + 2n.\cos(\mu\tau + \tfrac{1}{2}\mu.\Delta\tau).\sin(\tfrac{1}{2}\mu.\Delta\tau) + \&c.$$

Si donc $\Delta\tau$ eſt ſuppoſé être une quantité conſtante, la ligne courbe, conſtruite d'après cette formule, aura pour axe une droite parallele à la courbe conſtruite d'après la formule

$$n.\sin \mu\tau + \&c.$$

Mais ſi au contraire la longitude de Saturne ſe détermine par une équation de la forme

$$\alpha + m\tau + p\tau^2 + n \sin \mu\tau + \&c.$$

la différence du terme $p\tau^2$ ſera $p(2\tau.\Delta\tau + \Delta\tau^2)$. Et quand on ſuppoſeroit $\Delta\tau =$ conſt. il y aura toujours la quantité uniformément croiſſante τ, qui fera que la courbe des différences aura un axe incliné.

XIX.

Or dans notre exemple la différence $\Delta\tau$ pour la courbe CD eſt de $60\frac{3}{4}$ ans, & pour la courbe GH elle n'eſt que de $29\frac{3}{4}$ ans, ce qui revient à très peu près à la moitié. Cela fait que la *ſeconde différence* du terme $p\tau^2$ dans le premier cas eſt à très peu près quadruple de la même *ſeconde différence* dans le ſecond cas. De là il ſuit que l'angle swS doit être à très peu près le double de l'angle vxV. Et c'eſt auſſi ce qui a réellement lieu dans la Figure. Je trouve qu'à une diſtance de $60\frac{3}{4}$ ans du point d'interſection w l'axe incliné ws s'écarte de la ligne des abſciſſes wS de $4\frac{8}{10}$ minutes de degrés. Ainſi la partie du mouvement de Saturne qui dépend du terme $p\tau^2$, ſeroit de $2',4$ pour un intervalle de $60\frac{3}{4}$ ans, & par conſéquent de $6',49$ pour un ſiecle. M. *Halley* donne une équation ſéculaire de $1,4$ minute. Il la fait ſouſtractive, tandis que celle que je viens de trouver doit être additive. Mais outre qu'il eſt difficile de bien évaluer la quantité de cette équation féculaire au moyen des anciennes obfervations, il fe peut bien auffi que les lignes *rs*, *tv* ne font pas droites, mais de la forme $m . \sin n\tau$, de forte qu'elles ne retournent vers l'axe qu'après plufieurs fiecles. J'ai déjà remarqué ci-deffus (§. 6. 8.) que l'action de Jupiter fur Saturne renferme des périodes dont l'intervalle eft de plufieurs fiecles, & outre cela les caufes perturbatrices ne nous font pas encore toutes connues. Si les obfervations de *Tycho* étoient plus exactes qu'elles ne le font, on pourroit voir un peu plus clair dans tout cela. Cependant il n'y a gueres moyen de fuppofer que la ligne *rs*, au lieu d'être droite, fe courbe en forte qu'en *r* elle foit tout autant au deffus de *RS*, qu'elle l'eft en *D*. Cela éleveroit la courbe *F* d'une dixaine de minutes, de forte qu'au lieu de paffer entre les points répondans aux obfervations de *Tycho*, elle pafferoit beaucoup au deffus de ces points, ce qui ne fauroit être, à moins qu'on ne fuppofe que *Tycho* s'eft toujours trompé en même fens & du même côté.

XX.

Comme donc les obfervations antérieures à celles d'*Hévélius* ne fervent que très peu à juger fi la courbe *DC* peut être continuée vers *r* de la façon que je l'ai fait dans la Figure, ce fera aux obfervations qu'on fera dans la fuite qu'il faudra avoir recours. Pour cet effet j'ai continué la même courbe *CD* depuis *D* vers *s*, & cela m'a mis en état de continuer la courbe *AB* depuis *B* jusqu'en *E*. Je pouvois aller plus loin; mais cela fuffit. On verra dans les années fuivantes, fi les erreurs des Tables de *Halley* fuivront la direction de la courbe *BE*. Ces erreurs étoient négatives depuis 1725 jusqu'à préfent. Elles doivent maintenant devenir pofitives jusqu'en 1782, en forte que le *maximum* qui arrive en 1777 fera d'environ 5 minutes. Après 1782 elles redeviennent négatives & croitront jusqu'en 1794, où elles feront d'environ 23 minutes. L'événement fera voir fi cette prédiction s'accomplira, c'eft à dire fi la courbe *CD* étant continuée doit avoir l'inflexion *Dd*.

XXI.

Il y a dans nos courbes un phénomene que je ne dois point paffer fous filence. La courbe *GH* fuppofe la période de $29\frac{3}{4}$ ans, qu'indique la courbe *CD*, ou bien les ordonnées de la courbe *GH* sont les différences des ordonnées de la courbe *AB* prises à des intervalles de $29\frac{3}{4}$ ans. Si donc en effet il y a une période de $29\frac{3}{4}$ ans, il y a dans les erreurs des Tables de *Halley* une partie qui après $29\frac{3}{4}$ ans revient dans le même ordre, & qui par conséquent reviendra aussi après deux fois $29\frac{3}{4}$ ans, ou après $59\frac{1}{2}$ ans. Si donc on prend dans la courbe *AB* les différences des ordonnées qui sont éloignées entr'elles d'un intervalle de $59\frac{1}{2}$ ans, les restes doivent être les mêmes que lorsque ces ordonnées sont prises à des intervalles de $29\frac{1}{2}$ ans. Mais cela n'arrive pas. Car au lieu de la courbe *GH* qu'on trouve dans le dernier cas, on en trouve une qui a les mêmes inflexions que la courbe *CD* & qui n'en differe que très peu. Je l'ai dessinée en *LO*, prenant les abscisses sur la droite *IK*. Il faut donc que la courbe *CD*, qui paroît indiquer une période de $29\frac{3}{4}$ ans, ne soit pas dûe à cette période toute seule, mais qu'il s'y mêle d'autres périodes, dont les multiples coïncident, du moins à très peu près, avec le double de $29\frac{3}{4}$ ans. Or en consultant la Table donnée ci-dessus (§. 5.), nous trouvons

le triple de la période λ	$= 59{,}5578$	ans.
le double de la période a	$= 58{,}9744$	
le double de la période $A - \lambda$	$= 58{,}9632$	
le quadruple de la période $2\lambda - a$	$= 59{,}8536$	
le quadruple de la période $3\lambda - A$	$= 59{,}8596$	
le septuple de la période $3\lambda - a$	$= 59{,}7268$	
le quintuple de la période A	$= 59{,}3185$	

de sorte qu'en effet une période de $59\frac{1}{2}$ ans, qui est à très peu près le terme moyen de tous ces nombres, renferme toutes ces périodes particulieres, tellement que les petites différences se compensent mutuellement, du moins en grande partie. Il faut même que l'effet de toutes ces périodes particulieres se confonde bien singulierement, puisque la courbe *CD* présente des inflexions aussi simples & aussi régulieres, comme si elle ne dépendoit que d'une seule ou tout au plus de deux périodes.

XXII.

XXII.

La courbe LO eſt, comme je viens de le dire, celle qui reſte lorsqu'on ſouſtrait toutes les périodes qui ſe réſolvent en celle de $59\frac{3}{4}$ ans. Or ſi l'action de Jupiter eſt, ſinon la ſeule, du moins la principale cauſe perturbatrice des mouvemens de Saturne, cette courbe LO dépendra principalement des deux périodes $\lambda - a$, $2\lambda - A$, qui ſont de $60\frac{3}{4}$ ans (§. 5.). Mais comme cette courbe LO dans l'intervalle de $60\frac{3}{4}$ ans monte & deſcend deux fois, une équation de la forme

$$m \sin(\lambda - a) + n . \sin(2\lambda - A)$$

ne ſuffit pas pour repréſenter les inflexions de cette courbe. Il faudra donc lui en ſubſtituer une autre plus compoſée, de la forme

$$m \sin(\lambda - a) + n \sin(2\lambda - A)$$
$$+ p \sin 2(\lambda - a) + q \sin 2(2\lambda - A)$$

en ſorte que le coëfficient p ou q ſoit beaucoup plus grand que les coëfficiens m, n. Car la courbe LO dépend beaucoup plus de la moitié de la période de $60\frac{3}{4}$ ans, que de cette période elle-même. Peut-être auſſi les perturbations de Saturne dépendent-elles encore de quelque période d'environ $30\frac{1}{2}$ ans, qui n'eſt pas compriſe parmi celles que j'ai rapportées ci-deſſus. Quoi qu'il en ſoit, la courbe GH fait voir qu'en ſouſtrayant les périodes qui ſe réſolvent en celle de $29\frac{3}{4}$ ans, celle qui eſt de $60\frac{3}{4}$ ans reſte beaucoup plus viſiblement, puiſqu'en faiſant abſtraction de l'inflexion anomale en G, g, cette courbe dans un intervalle de $60\frac{3}{4}$ ans ne monte & ne deſcend qu'une ſeule fois.

XXIII.

On voit par la Figure, que les ordonnées de la courbe GH ſont beaucoup plus grandes que celles des courbes CD, LO. Or c'eſt de quoi l'on peut rendre raiſon par la maniere dont ces courbes ont été formées & par le rapport qu'il y a entre les périodes qui y ont été miſes pour baſe. Suppoſons que la formule

$$\alpha . \sin \phi$$

ſe rapporte à une période de $60\frac{3}{4}$ ans. Il eſt clair qu'après $29\frac{3}{4}$ ans, qui font la période qui a ſervi de baſe pour la courbe GH, l'angle ϕ ſera $= 175°.\,28'$. On aura donc

$$\alpha \sin(\phi + 175°.\,28') - \alpha \sin\phi = 2\alpha.\sin 87°.\,44'.\cos(\phi + 87°.\,44')$$
$$= 1{,}99944\,\alpha.\cos(\phi + 87°.\,44')$$
$$= -\,1{,}99944\,\alpha.\sin(\phi - 2°.\,16')$$

de ſorte que la courbe qui exprime cette différence, aura des ordonnées presque deux fois plus grandes que celle qui répond à la formule $\alpha.\sin\phi$ elle-même. Mais ſi au lieu de $29\frac{3}{4}$ ans, nous prenons le double, ou la période de $59\frac{1}{2}$ ans, qui a ſervi de baſe pour la courbe LO, on aura $\phi = 350°.\,56'$, ce qui donne

$$\alpha.\sin(\phi + 350°.\,56') - \alpha.\sin\phi = 2\alpha.\sin 175°.\,28'.\cos(\phi + 175°.\,28')$$
$$= -\,0{,}15808\,\alpha.\cos(\phi + 175°.\,28')$$
$$= +\,0{,}15808\,\alpha.\sin(\phi + 85°.\,28')$$

de ſorte que la courbe qui exprime cette différence aura des ordonnées plus de 6 fois plus petites que celle qui répond à la formule propoſée $\alpha\sin\phi$. Or la courbe LO a des inflexions beaucoup plus grandes. Mais j'ai déjà remarqué qu'elle dépend beaucoup plus de la moitié de la période de $60\frac{3}{4}$ ans, que de la période entiere. Celle-ci n'y influe qu'entant que les ordonnées répondantes au ſommet h ſont plus baſſes que celles qui répondent au ſommet i, & même abſtraction faite de ce que l'axe de cette courbe eſt plutôt parallele à la ligne ws (§. 16. & ſuiv.) qu'à la ligne wS.

XXIV.

Comme les différentes périodes qui dépendent de l'action de Jupiter ſur Saturne ne ſont pas exactement des parties aliquotes de $59\frac{1}{2}$ & de $60\frac{3}{4}$ ans, la Table ſuivante, qui en fait voir les excès & les défauts, pourra être de quelque uſage.

	Argumens.	Périodes Années.	Mouvement en $59\frac{1}{2}$ ans.	Mouvement en $60\frac{3}{4}$ ans.	Époques pour l'année 1703.
			z. s. °. ′	z. s. °. ′	s. °. ′
1	$3\lambda - a$ - - -	8,5324	6. 11. 20. 25	7. 1. 12. 42	8. 17. 6
2	$3\lambda - A$ - -	14,9649	3. 11. 21. 20	4. 0. 21. 24	5. 26. 39
3	$2\lambda - a$ - -	14,9634	3. 11. 21. 28	4. 0. 21. 33	8. 15. 45
4	$2\lambda - A$ - -	60,7830	0. 11. 22. 23	0. 11. 29. 48	5. 25. 24
5	$\lambda - a$ - - -	60,7596	0. 11. 22. 31	0. 11. 29. 56	8. 14. 24
6	λ - - - - -	19,8526	2. 11. 28. 59	3. 0. 21. 37	0. 1. 21
7	$\lambda + a$ - - -	11,8765	5. 0. 3. 45	5. 1. 13. 18	3. 18. 16
8	$\lambda + A$ - - -	7,4260	8. 0. 4. 28	8. 2. 5. 3	6. 8. 39
9	A - - - - -	11,8637	5. 0. 5. 31	5. 1. 13. 26	6. 7. 18
10	a - - - - -	29,4872	2. 0. 6. 26	2. 0. 21. 41	3. 16. 57
11	$A - \lambda$ - - -	29,4816	2. 0. 6. 33	2. 0. 21. 49	6. 5. 57

XXV.

On voit par cette Table qu'il n'y a que les argumens $2\lambda - A$, $\lambda - a$ qui répondent à la période de $60\frac{3}{4}$ ans, & que tous les autres en different fort considérablement; mais qu'à l'égard de la période de $59\frac{1}{2}$ ans, les différences sont beaucoup plus petites. Les 5 premiers argumens coïncident à un degré près, en sorte qu'après $59\frac{1}{2}$ ans il leur manque environ 8 ou 9 degrés, qu'ils doivent encore parcourir pour achever le tour d'un certain nombre de zodiaques. Dans le même intervalle de tems les 5 derniers argumens se trouvent avancés de quelques degrés au delà d'un certain nombre de zodiaques. Le 6me argument revient assez exactement, ou à un degré près, au même point après les $59\frac{1}{2}$ ans. J'ai choisi l'époque 1703, parce qu'elle suit de près une conjonction de Jupiter & de Saturne. Les époques sont pareillement assez remarquables. Celle de l'argument λ est 0, tandis que celles des argumens $3\lambda - A$, $2\lambda - A$, $A - \lambda$, A, $\lambda + A$ en sont éloignées d'environ 6 signes. Les argumens $\lambda - a$, $2\lambda - a$, $3\lambda - a$ coïncident vers le milieu du 8me signe, & les argumens $\lambda + a$, a, vers le milieu du troisieme signe. Du reste ces coïncidences proviennent de ce qu'en posant $\lambda = 0$, toutes ces époques dépendent simplement de celles des anomalies moyennes A, a, qui different dans ce cas d'environ 80 degrés.

XXVI.

Posons maintenant pour un tems donné quelconque l'effet de ces argumens

$$= \mathfrak{a} \sin(3\lambda - a) + \mathfrak{b}.\sin(3\lambda - A) + \mathfrak{c}.\sin(2\lambda - a) + \mathfrak{d}\sin(2\lambda - A) + \mathfrak{e}.\sin(\lambda - a) + \mathfrak{f}\sin\lambda + \mathfrak{g}\sin 2\lambda + \mathfrak{h}\sin(\lambda + a) + \mathfrak{i}\sin(\lambda + A) + \mathfrak{k}.\sin A + \mathfrak{l}\sin a + \mathfrak{m}\sin(A - \lambda)$$

& nous trouverons sans peine de combien cet effet sera plus ou moins grand après $60\frac{3}{4}$, $59\frac{1}{2}$ & $29\frac{3}{4}$ ans. Il n'y aura qu'à augmenter les arcs $(3\lambda - a)$, $(3\lambda - A)$ &c. de la quantité qui répond à ces intervalles de tems, & soustraire la formule que nous venons de proposer, de celle qui résulte de ces substitutions. Les résidus pourront ensuite être comparés aux courbes CD, GH, LO. Voici ces résidus, après y avoir fait les réductions requises.

Pour $60\frac{3}{4}$ ans.	Pour $59\frac{1}{2}$ ans.	Pour $29\frac{3}{4}$ ans.
$+0{,}728.\,\mathfrak{a}\,c(3\lambda - a + 21^{\circ}.21')$	$-0{,}167.\,\mathfrak{a}.\,c(3\lambda - a - 4^{\circ}.48')$	$+1{,}998.\,\mathfrak{a}.\,c(3\lambda - a + 87^{\circ}.36')$
$+0{,}371.\,\mathfrak{b}.c(3\lambda - A + 10.42)$	$-0{,}151\,\mathfrak{b}.c(3\lambda - A - 4.20)$	$-0{,}076.\,\mathfrak{b}.c(3\lambda - A - 2.10)$
$+0{,}374.\,\mathfrak{c}.\,c(2\lambda - a + 10.46)$	$-0{,}149\,\mathfrak{c}.c(2\lambda - a - 4.16)$	$-0{,}074.\,\mathfrak{c}.\cos(2\lambda - a - 2.\ 8)$
*	$-0{,}133\,\mathfrak{d}.\,c(2\lambda - A - 3.49)$	$+1{,}999.\mathfrak{d}.c(2\lambda - A + 88.\ 5)$
*	$-0{,}131\,\mathfrak{e}.\cos(\lambda - a - 3.45)$	$+1{,}999.\,\mathfrak{e}.\cos(\lambda - a + 88.\ 7)$
$+0{,}375.\,\mathfrak{f}.\cos(\lambda + 10.48)$	*	$-2{,}000.\,\mathfrak{f}.\cos(\lambda + 89.59)$
$+0{,}737.\,\mathfrak{g}.\cos(2\lambda + 21.37)$	*	$+2{,}000.\,\mathfrak{g}.\cos(2\lambda - 0.\ 1)$
$+0{,}738.\,\mathfrak{h}.\,c(\lambda + a + 21.39)$	$+0{,}065.\,\mathfrak{h}\cos(\lambda + a + 1.52)$	$+2{,}000.\,\mathfrak{h}.\,c(\lambda + a + 90.56)$
$+1{,}075.\,\mathfrak{i}.\cos(\lambda + A + 32.31)$	$+0{,}078.\,\mathfrak{i}.\cos(\lambda + A + 2.14)$	$+0{,}039.\,\mathfrak{i}.\,c(\lambda + A + 1.\ 7)$
$+0{,}740\,\mathfrak{k}.\cos(A + 21.43)$	$+0{,}096\,\mathfrak{k}\cos(A + 2.45)$	$+1{,}999.\,\mathfrak{k}.\cos(A + 91.22)$
$+0{,}271.\,\mathfrak{l}.\cos(a + 7.48)$	$+0{,}112\,\mathfrak{l}\cos(a + 3.13)$	$+0{,}056.\,\mathfrak{l}.\cos(a + 1.36)$
$+0{,}378.\,\mathfrak{m}.\,c(A - \lambda + 10.54)$	$+0{,}124\,\mathfrak{m}\,c(A - \lambda + 3.33)$	$+0{,}062.\,\mathfrak{m}\,c(A - \lambda + 1.46)$

XXVII.

On voit ici d'un coup-d'œil que les coëfficiens numériques les plus considérables se trouvent dans la troisieme colonne, & qu'ils multiplient les cosinus des argumens $3\lambda - a)$, $(2\lambda - A)$, $(\lambda - a)$, λ, 2λ, $(\lambda + a)$, A. C'est donc de ces argumens que dépend principalement la courbe GH, les coëfficiens numériques des autres argumens étant 30, 40, jusqu'à 50 fois plus petits. Ainsi l'équation pour la courbe GH rapportée à l'axe txv, & entant qu'elle dépend de l'action de Jupiter, se réduit à

$$\begin{array}{l}
+\ 2\,\mathfrak{a}.\cos(3\lambda - a + 87^\circ.\ 36) \\
+\ 2\,\mathfrak{d}.\cos(2\lambda - A + 88.\ \ 5) \\
+\ 2\,\mathfrak{c}.\cos(\lambda - a + 88.\ \ 7) \\
-\ 2\,\mathfrak{f}.\cos(\lambda + 89.\ 59) \\
+\ 2\,\mathfrak{g}.\cos(2\lambda - 0.\ \ 1) \\
+\ 2\,\mathfrak{h}.\cos(\lambda + a + 90.\ 56) \\
+\ 2\,\mathfrak{k}.\cos(A + 91.\ 22)
\end{array}$$

XXVIII.

Il ne sera pas difficile de faire voir que dans cette expression il n'y a que le second & le troisieme membre qui soient fort considérables. Pour cet effet j'ai soustrait chaque ordonnée de la courbe GH de celle qui en est éloignée d'un intervalle de $60\frac{3}{4}$ ans, en les prenant toutes depuis l'axe vxt. Les résidus m'ont donné la courbe kl, qui se rapporte à l'axe TxV. J'ai calculé de même l'expression pour la courbe GH, que je viens de rapporter (§. 27.) en augmentant les arcs de ce que demande un intervalle de $60\frac{3}{4}$ ans, & en prenant la différence: je l'ai trouvée être

$$\begin{array}{l}
+\ 1{,}4562\ \mathfrak{a}.\sin(3\lambda - a + 65^\circ.\ \ 9) \\
-\ 0{,}7495\ \mathfrak{f}.\sin(\lambda + 51.\ 48) \\
+\ 1{,}4736\ \mathfrak{g}.\sin(2\lambda + 21.\ 37) \\
+\ 1{,}4757\ \mathfrak{h}.\sin(\lambda + a + 67.\ \ 7) \\
+\ 1{,}4800\ \mathfrak{k}.\sin(A + 67.\ 24)
\end{array}$$

Cette différence exprime les ordonnées de la courbe hl qui ne dépend que des périodes $3\lambda - a$, λ, 2λ, $\lambda + a$, A. Les coëfficiens numériques sont à très peu près égaux, à l'exception de celui du second terme, qui n'est qu'environ la moitié de chacun des autres. Comme tous sont assez grands, on n'en peut rejeter aucun considéré en soi-même. Or les valeurs $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ sont encore inconnues. Mais quelles qu'elles puissent être, on voit qu'elles ne sauroient aller à plusieurs minutes de degré, les ordonnées de la courbe hl étant moindres que 3 minutes. C'est aussi tout ce que je crois pouvoir conclure de cette courbe. Elle n'est déduite immédiatement des observations que depuis h jusqu'en i. La partie antérieure il se fonde sur ce que j'ai continué la courbe CD & de là aussi la courbe GH, comme je l'ai dit ci-dessus (§. 16. 17.). Ainsi cette courbe hl pourra être d'autant moins exacte qu'elle approche plus de l. On y trouve des vestiges des périodes de 10 & de 12 ans, qui répondent aux argumens 2λ, $\lambda + a$, A. Car depuis l'ordonnée répondante à l'année 1700 jusqu'à celle qui répond à l'an 1770, elle a 6 *minima* & 5 *maxima*, qui reviennent après un intervalle de 10 à 12 ans. Du reste la période $3\lambda - a$ étant d'environ $8\frac{1}{2}$ ans, il est très possible qu'elle contribue à rendre ces retours moins réguliers. Et comme c'est environ de 20 en 20 ans que cette courbe passe l'axe, il semble qu'il y ait encore une période composée d'environ 36 ou 40 ans. Aussi en effet c'est au bout de 36 ans que les périodes de 12 & de $8\frac{1}{2}$ ans coïncident. Mais les observations ne sont pas assez exactes pour séparer l'effet de ces différentes périodes. C'est déjà beaucoup que d'avoir pu pousser la construction jusqu'à des détails d'une ou de deux minutes.

XXIX.

Comme donc la courbe GH dépend presque entierement des deux termes

$$+ \ 2\mathfrak{d}.\cos(2\lambda - A + 88°.5)$$
$$+ \ 2\mathfrak{e}.\cos(\lambda - a + 88.7)$$

cela nous met en état d'évaluer à peu de chose près les coëfficiens $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$. Il suffit de remarquer, que pour une ordonnée de cette courbe qui réponde à une année quelconque dans la Figure, les valeurs de λ, a, A sont celles qui ont lieu $29\frac{3}{4}$ ans auparavant. J'ai fait ce calcul pour les ordonnées de 10 en 10 ans, en commençant par l'année 1700, & en prenant les ordonnées depuis l'axe xv. Voici les équations que j'ai trouvées:

$+ 6',70$	$= + 0,3505\,\mathfrak{d}$	$- 0,8523\,\mathfrak{e}$	pour l'année	1700.
$- 2,45$	$= - 0,6250\ldots$	$- 0,8852\ldots$		1710.
$- 6,90$	$= - 0,9904\ldots$	$- 0,0529\ldots$		1720.
$- 2,40$	$= - 0,3883\ldots$	$+ 0,8310\ldots$		1730.
$+ 3,95$	$= + 0,5932\ldots$	$+ 0,9030\ldots$		1740.
$+ 6,20$	$= + 0,9952\ldots$	$+ 0,0924\ldots$		1750.
$+ 7,05$	$= + 0,4253\ldots$	$- 0,8085\ldots$		1760.
$- 1,50$	$= - 0,5602\ldots$	$- 0,9191\ldots$		1770.

Or de quelque maniere que l'on combine ces équations, on trouvera toujours que le coëfficient $\mathfrak{d}$ eſt d'environ 7 ou $7\frac{1}{2}$ minutes & poſitif, & que le coëfficient $\mathfrak{e}$ eſt négatif & d'environ 2 minutes.

XXX.

Cette valeur de $\mathfrak{d}$ ne convient pas avec ce que M. *Euler* a trouvé, par la théorie, dans la Piece qui a remporté le prix propoſé par l'Académie des Sciences de Paris pour l'année 1748. Suivant cette théorie on auroit

$$\mathfrak{d} = - 4'.\ 3''$$
$$\mathfrak{e} = - 4.17.$$

M. *Euler* comparant enſuite ſa théorie avec les obſervations, trouve également que la valeur de $\mathfrak{e}$ y répond aſſez bien, mais celle de $\mathfrak{d}$, au lieu d'être négative, doit être poſitive, & même plus grande. Il fait donc

$$\mathfrak{d} = + 4'.\ 57''$$

uniquement pour ſatisfaire en quelque ſorte aux obſervations. Je dis *en quelque ſorte;* car dans la comparaiſon fort détaillée qu'il a jointe à ſon Mémoire, il ſe trouve que ſes formules s'écartent quelquefois de 8 minutes & d'avantage. Du reſte, de ce que la valeur de $\mathfrak{d}$ ne répond point aux obſervations, M. *Euler* conclud que la théorie de *Newton* eſt inſuffiſante pour expliquer les irrégularités du mouvement de Saturne. Du moins je dirois, que ſi la valeur $\mathfrak{d} = - 4'.\ 3''$ eſt bien déterminée par l'action de Jupiter, cette action ne ſera pas la ſeule cauſe perturbatrice du mouvement de Saturne.

XXXI.

Avec tout cela je trouve que les valeurs

$$\mathfrak{d} = -4'.\ 3'' = -243''$$
$$\mathfrak{e} = -4.\ 17 = -257$$

répondent aſſez bien à la courbe GH pour ce qui regarde les ordonnées, de ſorte qu'elles ne manquent que par rapport aux abſciſſes. Subſtituons ces valeurs dans l'équation

$$+\ 2\mathfrak{d}.\ \text{coſ}\,(2\lambda - A + 88^\circ.\ 5')$$
$$+\ 2\mathfrak{e}.\ \text{coſ}\,(\lambda - a + 88.\ 7)$$

& nous aurons

$$-\ 486''.\ \text{coſ}\,(2\lambda - A + 88.\ 5)$$
$$-\ 514.\ \text{coſ}\,(\lambda - a + 88.\ 7).$$

Or les périodes $2\lambda - A$, $\lambda - a$ étant les mêmes, cette expreſſion peut être changée en une autre de la forme

$$-\ m.\ \text{coſ}\,(2\lambda - A + n).$$

Car on a

$$\lambda - a = 2\lambda - A + 78^\circ.$$

Cette valeur étant ſubſtituée, on aura l'équation

$$\begin{aligned} 0 = &- 486.\ \text{coſ}\,(2\lambda - A + 88^\circ.\ 5') \\ &- 514.\ \text{coſ}\,(2\lambda - A + 166.\ 7) \\ &+ m.\ \text{coſ}\,(2\lambda - A + n) \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$m = 777''$$
$$n = 128^\circ.\ 24'$$

ce qui donne l'équation qu'il s'agiſſoit de trouver

$$-\ 777''.\ \text{coſ}\,(2\lambda - A + 128^\circ.\ 24')$$

ou bien

$$+\ 777''.\ \text{coſ}\,(2\lambda - A - 51^\circ.\ 36').$$

Le coëfficient $777'' = 12'.\ 57''$ déſigne la plus grande ordonnée de la courbe GH, & répond très bien à ce que donne la Figure. Il n'en eſt pas de même des abſciſſes. Car pour l'automne 1727 on trouve

$$2\lambda - A - 51^\circ.\ 36' = 270^\circ$$

ce

ce qui donne

$$777''.\ \mathrm{cof}\,(2\lambda - A - 51^\circ\,36') = 0.$$

Ainsi l'ordonnée de la courbe GH, qui répond à l'année $1727\frac{2}{3} + 29\frac{3}{4} = 1757\frac{5}{12}$, ou bien au mois d'Août 1757, devroit être $= 0$. Mais la Figure fait voir que bien loin d'être $= 0$, elle est tout près de son *maximum*, de sorte qu'au lieu de

$$2\lambda - A - 51^\circ.\,36' = 270^\circ$$

la Figure demande

$$2\lambda - A - 51^\circ.\,36' = 0$$

ce qui differe de 90 degrés, ou d'environ 15 ans. Il faut donc, ou que les coëfficiens $\mathfrak{d} = -243''$, $\mathfrak{e} = -257''$ ne soient pas bien déterminés par la théorie, ou qu'il y ait quelque cause inconnue qui influe dans les perturbations du mouvement de Saturne. Dans ce dernier cas il faudra néanmoins qu'entre les périodes qui dépendent de cette cause inconnue, il y en ait une d'environ $60\frac{3}{4}$ ans.

XXXII.

Les inflexions anomales que la courbe GH offre près des sommets G, g, paroissent ne s'y rencontrer qu'une seule fois dans l'intervalle de $60\frac{3}{4}$ ans, puisque ce n'est que près des sommets qu'elles sautent le plus aux yeux. Mais ces inflexions anomales ne sont pas les seules. C'est ce que la courbe hl fait voir. Car toutes les petites inflexions que cette courbe présente, se rencontrent encore nécessairement dans la courbe GH. Aussi voit-on sans peine que les parties de cette courbe qui sont au dessus de l'axe xv, sont beaucoup plus larges que celles qui sont au dessous. Elle passe cet axe là où ses ordonnées répondent aux années 1672, 1708, 1734, 1769, & ces années different de 36, 26, 35. Prenant entre ces nombres 1672, 1708, 1734, 1769 le terme moyen, on tombe sur l'année 1721; & c'est à très peu près à cette année qu'on pourra attacher l'époque du *minimum* de l'équation

$$+\ 2\,\mathfrak{d}.\ \mathrm{cof}\,(2\lambda - A + 88^\circ.\,5')$$
$$+\ 2\,\mathfrak{e}.\ \mathrm{cof}\,(\lambda - a + 88.\ 7).$$

Car ce terme moyen eſt tel, que les effets des petites inflexions anomales ſe compenſent, du moins en grande partie. Ajoutant à cette époque 15 ans, on tombe ſur l'année 1736, qui peut ſervir d'époque pour les cas où l'effet de cette équation eſt $= 0$. Or j'ai déjà remarqué que les deux périodes $2\lambda - A$, $\lambda - a$ peuvent ſe confondre en une ſeule de la forme

$$2\,m.\ \mathrm{cof}\ (\Phi + n).$$

Cette équation pourra donc tenir lieu des deux autres, en faiſant $m = 7'$, $n = 88°.\,6'$ & Φ un arc tel, qu'il ſoit $= 0$ en 1736, & qu'il devienne $= 360°$ en $60\frac{3}{4}$ ans. Cette équation ſera donc

$$14'.\ \mathrm{cof}\,(\Phi + 88°.\,6').$$

Et comme la courbe GH eſt la différence de la courbe AB, il s'enſuit que pour la courbe AB cette équation devient ſimplement

$$-\ 7'.\ \mathrm{fin}\ \Phi$$

l'époque de Φ tombant en 1706.

XXXIII.

Quoique le coëfficient de cette équation ſoit déjà fort conſidérable, il s'en faut de beaucoup qu'elle ſuffiſe pour réduire les autres irrégularités de Saturne à peu de choſe. Car ces irrégularités vont à 22 minutes & au delà. Cette équation ne les diminue donc que tout au plus d'un tiers. Or j'ai déjà remarqué ci-deſſus (§. 22.), à l'occaſion de la courbe LO, qu'il nous reſte encore à chercher une équation dont la période n'eſt que la moitié de $60\frac{3}{4}$ ans. C'eſt ce que je pourrai maintenant faire voir d'une autre maniere & plus en détail. Pour cet effet j'ai conſtruit ſur une ſeconde Planche la courbe principale AB de la même maniere qu'elle ſe trouve ſur la premiere Planche. J'ai ſouſtrait de ſes ordonnées l'effet de l'équation

Pl. V.

$$7'\ \mathrm{fin}\ \Phi$$

que nous venons de trouver. Cette ſouſtraction m'a fourni la courbe CD, dont par conſéquent les ordonnées expriment les perturbations de Saturne, à l'exception de celles qui reviennent après un intervalle de $60\frac{3}{4}$ ans. Or quoique les ordonnées de la courbe CD ſoient généralement parlant plus petites que celles de la courbe AB, cependant la courbe CD ne laiſſe pas de suivre d'assez près toutes les inflexions de la courbe AB, de sorte que c'est presque n'avoir encore rien fait que d'avoir diminué ces irrégularités de la quantité $7'. \sin \Phi$.

XXXIV.

Afin donc de voir plus clair, j'ai transféré la courbe CD en EF, en l'avançant de $15\frac{3}{16}$ ans, qui font le quart de la période de $60\frac{3}{4}$ ans, & la différence des ordonnées m'a donné la courbe GH. Cette courbe, à quelques petites anomalies près, est assez réguliere. Ses inflexions sont plus petites vers le milieu de la Planche, & vont en augmentant de côté & d'autre très considérablement. Elle coupe l'axe dans des points dont les intervalles sont plus grands vers le milieu que vers les extrémités de l'axe. Le premier *maximum* tombe sur l'année 1600, & le septieme sur l'année 1793. L'intervalle 193 étant divisé par 6, donne $32\frac{1}{6}$ ans pour la quantité moyenne de l'intervalle de deux *maximum* qui se suivent. Il est visible que cette courbe n'est pas dûe à une période simple, mais qu'elle dépend tout au moins de deux périodes peu différentes entr'elles, & même assez peu différentes d'un intervalle de 30 ans.

XXXV.

L'action de Jupiter nous offre des périodes de $29\frac{1}{2}$ ans, & d'autres dont la moitié est de $30\frac{3}{8}$ ans. C'est cette derniere que j'ai mise pour base, afin d'en séparer les effets. J'ai soustrait chaque ordonnée de la courbe GH de celle qui répond à $30\frac{3}{8}$ ans plus tard, & les résidus m'ont donné la courbe IK. Cette courbe, nonobstant quelques petites anomalies, conserve en gros assez de régularité. Son premier *maximum* tombe sur l'an 1631, & son septieme sur l'an $1807\frac{1}{2}$. Divisant l'intervalle $176\frac{1}{2}$ par 6, le quotient est $29\frac{5}{12}$, c'est à dire la période de $29\frac{1}{2}$ ans; de sorte que réellement la courbe GH est dûe aux périodes de $30\frac{3}{8}$ & $29\frac{1}{2}$ ans. Les petites anomalies proviennent des autres périodes, dont l'effet est très peu considérable.

XXXVI.

Il convient maintenant de faire aux formules générales (§. 26.) les mêmes changemens que nous venons de faire aux courbes. En écartant les termes $\mathfrak{d}.\sin(2\lambda - A)$, $\mathfrak{e}\sin(\lambda - a)$, nous aurons pour la courbe CD, l'expression. $\mathfrak{a}.\sin(3\lambda - a) + \mathfrak{b}\sin(3\lambda - A) + \mathfrak{c}.\sin(2\lambda - a) * * + \mathfrak{f}.\sin\lambda + \mathfrak{g}\sin 2\lambda + \mathfrak{h}\sin(\lambda + a) + \mathfrak{i}.\sin(\lambda + A) + \mathfrak{k}.\sin A + \mathfrak{l}.\sin a + \mathfrak{m}\sin(A - \lambda)$, à laquelle nous joindrons un terme $\mathfrak{n}.\sin\psi$, répondant à une période de $30\frac{3}{8}$ ans. Cette expression, après un intervalle de $15\frac{3}{16}$ ans, se change de maniere que la différence devient

$$\begin{array}{ll}
- 1{,}2766.\mathfrak{a}.\cos(3\lambda - a + & 39°.\ 40') \\
+ 0{,}0921.\mathfrak{b}.\cos(3\lambda - A + & 2.\ 40) \\
+ 0{,}0954.\mathfrak{c}.\cos(2\lambda - a + & 2.\ 44) \\
- 1{,}3460.\mathfrak{f}.\cos(\lambda - & 42.\ 18) \\
- 1{,}9911\ \mathfrak{g}.\cos(2\lambda - & 84.\ 36) \\
+ 1{,}5414.\mathfrak{h}.\cos(2\lambda - & 50.\ 25) \\
+ 0{,}2830\ \mathfrak{i}.\cos(\lambda + A + & 8.\ 8) \\
+ 1{,}5414.\mathfrak{k}.\cos(A + & 20.\ 25) \\
- 1{,}9978.\mathfrak{l}.\cos(a - & 87.\ 17) \\
- 1{,}9978.\mathfrak{m}.\cos(A - \lambda - & 87.\ 17) \\
- 2{,}0000.\mathfrak{n}.\cos(\psi + & 90.\ 0).
\end{array}$$

Or les coëfficiens numériques du second & du troisieme terme sont très petits en comparaison des autres. Et nous avons vu ci-dessus (§. 28.) que les coëfficiens $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$ ne sont pas non plus de grande conséquence. Nous pourrons également faire abstraction du septieme terme. Il ne nous restera donc que les trois termes

$$\begin{array}{ll}
- 1{,}9978\ \mathfrak{l}.\cos(a - & 87°.\ 17') \\
- 1{,}9978\ \mathfrak{m}\ \cos(A - \lambda - & 87.\ 17) \\
+ 2{,}0000.\mathfrak{n}.\cos(\psi + & 90.\ 0)
\end{array}$$

dont les deux premiers ont l'un & l'autre une période de 29,48 ans, & le troisieme une de $30\frac{3}{8}$ ans. Ce sont là précisément les périodes dont la courbe GH dépend principalement. Ses petites anomalies dépendent des termes que nous venons d'omettre.

XXXVII.

Les trois termes que nous avons retenus étant à peu de chose près

$$- 2 . \operatorname{cof} (a - 87^\circ . 17')$$
$$- 2 . \operatorname{cof} (A - \lambda - 87 . 17)$$
$$+ 2 . \operatorname{cof} (\psi + 90)$$

nous en déduirons ceux qui feront pour la courbe IK. Car ces termes, après un intervalle de $30\frac{3}{8}$ ans, changent de maniere que la différence fe réduit tout fimplement aux deux termes

$$0,3776 . \operatorname{fin} (a - 81^\circ . 51')$$
$$0,3799 . \operatorname{fin} (A - \lambda - 81 . 51).$$

Et comme la période eft la même, nous pourrons en faire un feul terme, qui fera

$$0,7566 . \operatorname{fin} \left(\frac{A - \lambda - a}{2}\right) . \operatorname{cof} \left(\frac{A - \lambda + a}{2} - 81^\circ . 51'\right)$$

où le fin $\left(\frac{A - \lambda - a}{2}\right)$ eft une quantité conftante. Ou bien faifons, pour plus de briéveté, pour la courbe CD,

$$\mathfrak{l} . \operatorname{fin} a + \mathfrak{m} \operatorname{fin} (A - \lambda) = p . \operatorname{fin} \omega$$

& nous aurons pour la courbe GH

$$- 2 p . \operatorname{fin} 87^\circ . 17' . \operatorname{cof} (\omega - 87 . 17)$$
$$+ 2 . \mathfrak{n} . \operatorname{cof} (\psi + 90)$$

& pour la courbe IK

$$- 4 p . \operatorname{fin} 87^\circ . 17' . \operatorname{fin} 5^\circ . 26' . \operatorname{fin} (\omega - 81^\circ . 51')$$
$$= - 0,3783 . p \operatorname{fin} (\omega - 81^\circ . 51').$$

XXXVIII.

Ce coëfficient $0,3783\, p$ pourra être déterminé par les plus grandes ordonnées de la courbe IK. Mais la Figure fait voir qu'elles font affez inégales. Celles qui font pofitives different affez peu entr'elles, mais les négatives different entr'elles presque du double. Elles font alternativement plus grandes & plus petites, de forte qu'il y a encore à cet égard quelque régularité, qui peut provenir des périodes que nous avons omifes à caufe de la petiteffe de leurs effets. En mefurant ces plus grandes ordonnées je trouve

les positives	= 5',9,	les négatives	= 9,1
	7,9		5,4
	6,5		11,4
	5,5		5,1
	5,9		11,0
	6,5		4,3
	6,8	Somme	= 46,3
Somme	= 45,0 - - - - - -		= 45,0
		Somme totale	= 91,3

Cette somme étant divisée par le nombre des ordonnées 13, donne pour quotient 7'. Ainsi en supposant que toutes les autres petites anomalies se compensent, ces 7 minutes peuvent être regardées comme la plus grande ordonnée, entant qu'elle dépend simplement de l'expression $0,3783 . p .$ $\sin(\omega - 81° 51')$. Je dois remarquer que l'axe de la courbe GH doit être un peu incliné par la même raison que l'axe des courbes CD, GH de la premiere Planche. Cependant ici cette inclinaison est beaucoup plus petite, & l'erreur qui résulte de ce que j'en ai fait abstraction, ne va pas à un quart de minute. Et comme l'effet en est que toute la courbe est plus basse qu'elle ne devroit être, cela contribue à en rendre les ordonnées négatives plus grandes & les positives plus petites, d'une même quantité. Ainsi cette erreur n'influe dans la somme totale des 13 ordonnées qu'entant qu'il y a une ordonnée positive de plus. Cette somme totale devroit donc être augmentée d'un quart de minute, ce qui pour le terme moyen de toutes produit à peine une différence d'une seconde.

XXXIX.

En prenant de la même maniere le terme moyen entre les années

1632	1644
1654	1670
1687	1703
1719	1736
1747	1763
1777	1793
1807	

auxquelles dans la Figure répondent les plus grandes & les plus petites ordonnées de la courbe IK, je trouve la somme de ces années $= 22332$, laquelle étant divisée par 13 donne pour quotient $1717\frac{11}{13}$; de sorte que c'est au commencement du mois de Novembre 1717 que tombe une des plus grandes ordonnées de la courbe

$$0{,}3783\, p \,.\, \sin(\omega - 81^\circ.\, 51')$$

ainsi

$$\omega - 81^\circ.\, 51' = 90^\circ$$
$$\omega = 171^\circ.\, 51'.$$

Et comme nous avons (§. 38.)

$$0{,}3783\; p = 7'$$

cette équation donne la valeur

$$p = 18',5$$

& par conséquent nous aurons pour la courbe GH

$$-\ 37'.\, \cos(\omega - 87.\, 17) + 2\,\text{Ⅱ}.\, \cos(\psi + 90)$$

& pour la courbe CD

$$18',5 \,.\, \sin\omega - \text{Ⅱ}.\, \sin\psi.$$

XL.

Or pour ramener l'époque $1717\frac{11}{13}$ à la courbe CD, il faut en soustraire $15\frac{3}{16} + 30\frac{3}{8} = 45\frac{9}{16}$ ans, puisque c'est au moyen de ces intervalles que la courbe IK a été déduite de la courbe CD. Le résidu sera $1672\frac{59}{208}$. C'est donc vers le milieu du mois d'Avril 1672 que la valeur de ω pour la courbe CD est $= 171^\circ.\, 51'$. Or la période ω étant $= 29\frac{1}{2}$ ans, cet arc de $171^\circ.\, 51'$ répond à 14 ans 1 mois, lesquels étant soustraits de 1672 ans $3\frac{1}{2}$ mois, donnent pour résidu 1658 ans 3 mois; de sorte que c'est vers le premier Avril 1658 qu'on a $\omega = 0$. Or pour ce tems on trouve

$$a = 9^{s}.\ 10^\circ.\ 38'$$
$$A - \lambda = 0.\quad 0.\ 33.$$

Ces valeurs étant ſubſtituées dans l'équation

$$\mathfrak{l}.\ \sin a + \mathfrak{m}.\ \sin(A - \lambda) = p.\ \sin \omega$$

donnent

$$- 0{,}9828\ \mathfrak{l} - 0{,}0096.\ \mathfrak{m} = 0.$$

Ainſi le coëfficient $\mathfrak{l}$ doit être ſi petit qu'on pourra n'y pas avoir égard. J'en infere que M. *Halley* a déterminé l'excentricité de Saturne à moins d'une minute près, du moins pour le ſiecle où nous ſommes.

XLI.

Rappelons-nous maintenant que nous avons trouvé la courbe *CD* de la ſeconde Planche, en ce que de la courbe *AB* nous avons ſouſtrait l'équation

$$- 7'.\ \sin \Phi.$$

C'étoit ſimplifier la courbe *AB* en la déchargeant d'une de ſes principales anomalies. Nous pourrons maintenant continuer cette opération en ſouſtrayant de la courbe *CD* l'équation

$$18',5.\ \sin \omega$$

que nous venons de trouver. Ce ſera la décharger d'une anomalie encore beaucoup plus conſidérable. J'ai donc conſtruit de nouveau la courbe

Pl. VI. *CD* ſur la troiſieme Planche. J'ai encore conſtruit la courbe *LM*, que repréſente l'équation

$$18{,}5.\ \sin \omega$$

en ſorte que $\omega = 0$ réponde au 1 Avril 1658 (§. 40.). Les différences entre les ordonnées de ces courbes m'ont donné la courbe *NO*. Cette courbe eſt donc ce qui reſte après qu'on a déchargé la courbe *AB* des deux anomalies

$$7'.\ \sin \Phi$$
$$18{,}5\ \sin \omega.$$

Je l'ai pointée, afin de la faire mieux diſtinguer. On voit que ſes inflexions ont beaucoup de régularité. Mais il convient de l'examiner de plus près.

XLII.

XLII.

Je commence par les plus grandes ordonnées. Il y en a 8 poſitives & autant de négatives. Elles répondent aux années

1573	1588
1603	1618
1635	1649
1666	1681
1697	1711
1727	1742
1757	1772
1787	1802.

Ainſi les intervalles ſont aſſez égaux. Souſtrayant 1573 de 1802 & diviſant le réſidu 229 par le nombre des intervalles 15, on aura $30\frac{2}{15}$ pour quotient, ce qui differe très peu de $30\frac{3}{8}$, qui eſt la période ψ. Il n'y avoit gueres moyen de rendre la conſtruction plus exacte. D'ailleurs on ne ſait pas encore ce qui doit être attribué aux anomalies dont jusqu'à préſent nous n'avons pas tenu compte. Tout ce que nous pouvons dire maintenant, c'eſt que la ſomme de ces autres anomalies ne ſauroit plus être fort conſidérable. Il ſuffira d'abord de déterminer celle qui dans la courbe NO produit les grandes inflexions qu'elle a.

XLIII.

Pour cet effet je diviſe par 16 la ſomme des années que je viens d'expoſer, & le quotient 1688 que je trouve, eſt l'année qui nous ſervira d'époque, de ſorte que c'eſt au commencement de l'année 1688 qu'on a $\sin\psi = 0$, ou bien $\psi = 180°$. Et prenant encore le terme moyen entre les plus grandes ordonnées, je trouve $n = 21',5$, de ſorte que l'équation

$$21,5 \,.\, \sin\psi$$

exprimera à très peu près la nature de la courbe NO.

XLIV.

Voilà donc ce que j'ai pu trouver relativement aux périodes de $60\frac{3}{4}$, $29\frac{1}{2}$, $30\frac{3}{8}$ ans. Les perturbations de Saturne, entant qu'elles dépendent de ces trois périodes, ſont exprimées par

$$18',5 \sin \omega + 7'. \sin \phi + 21',5. \sin \psi.$$

Et en réduisant les époques à l'année 1688, on a pour le commencement de cette année

$$\omega = 3^\circ$$
$$\phi = 252$$
$$\psi = 182$$

& en général

$$\psi = 2\phi + 37^\circ.$$

Ces trois anomalies sont les plus considérables de toutes, au point que la somme de toutes les autres, entant qu'elles sont périodiques, se réduit à fort peu de chose. Je dis: *entant qu'elles sont périodiques;* car en considérant les courbes CD, NO de plus près, on voit qu'elles ont pour axe, non une ligne droite, mais une courbe telle que PQ. (§. 18. 19.) On voit que cette courbe passe à très peu près par les milieux de toutes les inflexions de la courbe CD. Je laisse indécis, si c'est une parabole dont les ordonnées croissent comme le quarré du tems, ou si c'est une petite partie d'une courbe périodique de la forme

$$A. \sin X + B. \sin Y + \&c.$$

ou si l'un & l'autre se trouve avoir lieu. J'observe seulement que la direction de cette courbe est parallele à l'axe vers l'an 1640, à un degré au dessus, & que ses ordonnées rapportées à l'axe peuvent assez bien être représentées par

$$1' - 6''. \frac{xx}{10000}$$

la lettre x désignant le nombre d'années à compter depuis 1640. Cette équation renferme en même tems ce qu'il pourroit y avoir à corriger dans le mouvement & le lieu moyen de Saturne que M. *Halley* a mis pour base dans ses Tables. Car on sait qu'une expression de la forme $a + bx + cx$ peut toujours être changée en une autre de la forme $A + B\xi\xi$, en faisant $x = X + d$, & déterminant les valeurs d, A, B en conséquence.

XLV.

Comme donc l'année 1640 peut tenir lieu d'époque pour l'équation

$$1' - 6' . \frac{xx}{10000},$$

nous l'établirons aussi pour les autres équations. Or je trouve pour cette année

$$\omega = 137°$$
$$\phi = 328$$
$$\psi = 333.$$

Je ne donne toutes ces valeurs qu'en degrés, puisque ce sera déjà beaucoup si la construction dont je me suis servi est exacte à un ou deux degrés près. C'est par la même raison & pour abréger les calculs, que j'ai cherché à exprimer en nombres entiers les mouvemens moyens de ω, ϕ, ψ. Je trouve qu'en 19 ans ω parcourt 230 degrés, & que ϕ demande 27 ans pour parcourir 160 degrés, & enfin que dans ce même intervalle de 27 ans ψ parcourt le double des 160, c'est à dire 320 degrés. Les perturbations de Saturne seront donc exprimées par

$$- 18',5 . \sin \omega$$
$$- 7' . \sin \phi - 21',5 . \sin \psi$$
$$- 1' + 6' . \frac{xx}{10000}$$

& j'entens que cette équation s'applique au *lieu elliptique* de Saturne que donnent les Tables de M. *Halley*. Mais on changera les signes, si l'on veut les rendre homologues à ceux que j'ai employés dans la liste des perturbations observées que j'ai donnée ci-dessus (§. 9.).

XLVI.

Il sera tems maintenant de comparer cette équation déduite des constructions avec les perturbations observées. A cet égard je suivrai l'exemple de M. *Halley* (§. 1.), c'est à dire que je ne me bornerai pas à calculer une ou deux perturbations pour les comparer avec celles qu'on a observées. Je les calculerai toutes, à commencer par celles d'*Hévélius*, qui en fait d'exactitude ne le cedent à aucune de toutes celles qu'on a observées depuis.

Pour faire ce calcul plus commodément j'ai commencé par calculer trois Tables, l'une pour $-18,5 . \sin \omega$, l'autre pour $-7' . \sin \phi - 21',5 . \sin \psi$, & la troisieme pour $-1' + 6' . \frac{xx}{10000}$. Ensuite j'ai dressé une Table des époques pour ω & ϕ, en me bornant aux degrés entiers, afin de m'épargner la peine de chercher des parties de minutes dans une matiere où il s'agit de 20 & plus de minutes entieres. J'ai donc calculé d'abord les perturbations pour les commencemens des années, & j'ai mesuré les ordonnées répondantes de la courbe AB, ces ordonnées tenant un certain milieu entre les erreurs auxquelles les observations elles-mêmes sont sujettes. La premiere page de la Table ci-jointe donne dans les colonnes O le nombre de minutes & de parties décimales qui répond aux perturbations déduites des observations. Les colonnes C donnent ces mêmes perturbations calculées. Enfin les colonnes D marquent les différences entre l'observation & le calcul. Quant à la colonne C, je l'ai continuée jusqu'à l'année 1817, pour que dans la suite on puisse voir si le calcul répondra aussi bien aux observations que jusqu'à présent.

XLVII.

Après avoir calculé les perturbations pour les commencemens des années, il n'étoit pas difficile de les trouver pour les tems des oppositions observées. La seconde page de la Table ci-jointe en fait voir le résultat. Les colonnes sont les mêmes. Les perturbations marquées dans les colonnes O sont celles qu'on a observées, ou qui répondent aux points marqués le long de la courbe AB dans la premiere Planche (§. 11.). Je pouvois prendre les ordonnées de cette courbe AB, mais j'ai mieux aimé laisser les observations telles qu'elles sont. On voit nonobstant cela dans les colonnes D, que les différences entre les observations & le calcul ne vont qu'assez rarement au delà de deux minutes. Je ne pouvois gueres attendre plus de précision de la maniere dont je suis parvenu à calculer ces perturbations. Il faudra même conclure que toutes les autres anomalies qui ne sont pas comprises dans la formule

Pl. IV.

$$— 18',5 . \sin \omega$$
$$— 7 . \sin \varphi — 21,5 . \sin \psi$$
$$— 1' + 6' . \frac{xx}{10000}$$

que j'ai employée dans ces calculs, ne sauroient être de grande conséquence.

XLVIII.

Cette formule paroît être assez exacte pour ce qui regarde les coëfficiens, mais elle pourra être en défaut par rapport aux époques, quoiqu'à cet égard encore l'erreur ne puisse être fort grande. L'argument ω, de même que l'argument ψ, parcourt environ 12 degrés par an. Cela fait qu'une année peut produire une différence de près de 4 minutes dans les perturbations pour chacun de ces argumens. Si donc je m'étois trompé pour l'époque de chacun d'une année entiere & en sens contraire, la différence iroit à 8 minutes. Mais aussi elle seroit très petite, si je m'étois trompé en même sens. Ce dernier cas paroît avoir lieu. .Car il arrive que depuis que nous avons des observations exactes des oppositions de Saturne, ces deux argumens s'entredétruisent toujours en grande partie, de sorte que jusqu'à présent on a observé la différence de leurs effets plutôt que leur somme. C'est ce qu'on voit sans peine dans la troisieme Planche, où la courbe *LM* se trouve presque entierement en opposition avec la courbe *NO*. Ce n'est qu'avant 1650 & après 1750 qu'elles commencent à s'écarter plus considérablement. Ce qu'il y a de singulier à cet égard c'est que c'est précisément pendant le siecle où l'on a commencé à rechercher les perturbations de Saturne, que ces mêmes perturbations étoient les plus petites, & par conséquent les moins perceptibles de toutes. Dans d'autres siecles la partie Pl. V.

$$— 18,5 \sin \omega — 7 \sin \Phi — 21,5 . \sin \psi$$

pouvoit aller à 46',3, ou bien au delà de $\frac{3}{4}$ degrés. Depuis 1650 jusqu'en 1740 elle ne monte pas à 12 minutes. Cependant son effet ira en augmentant, comme on le voit dans la Figure *GH* de la seconde Planche. Pl. V. Les argumens ω, ψ forment ensemble une période composée d'environ

994 ans, de ſorte qu'il faut près de 10 ſiecles avant que l'effet composé ait ſubi toutes ſes variations particulieres. Or je remarque que les différences entre les perturbations obſervées & celles que je viens de calculer, ſuivent un ordre aſſez ſemblable. Dans la premiere colonne elles ne vont gueres à 2 minutes. Dans la ſeconde cela arrive plus fréquemment. Dans la troiſieme elles paſſent déjà aſſez ſouvent les 3 minutes, de ſorte qu'à cet égard elles paroiſſent aller en augmentant. Je remarque auſſi que dans chacune des trois colonnes D les plus grandes différences ſont toujours négatives. Ce ſont même les ſeules qui aillent en augmentant. Car les plus grandes différences poſitives ſont partout à très peu près les mêmes, & au deſſous de 2 minutes. Si, au lieu de prendre $+ 6'. \frac{xx}{10000}$, on prenoit

$$+ 6',5. \frac{xx}{10000}$$

comme nous l'avions trouvé ci deſſus (§. 19.), alors les différences poſitives deviendroient un peu plus grandes & les négatives plus petites, ce qui, ſurtout dans la troiſieme des colonnes D, approcheroit les plus grandes différences poſitives & négatives un peu plus de l'égalité. Mais la courbe PQ dans la troiſieme Planche ne ſemble pas autoriſer ce changement, & c'eſt peut-être déjà beaucoup trop que d'avoir pris de 6 minutes cette équation, qui dans un intervalle de 2000 ans produiroit une différence de 40 degrés, tandis que la comparaiſon des obſervations anciennes avec les modernes ne la paroît donner que de 9 degrés, & même en ſens contraire. Voilà ce qui me fait plutôt croire que la courbe PQ eſt dûe à une ou à pluſieurs cauſes périodiques, qui ne ſont pas encore bien connues.

XLIX.

Les argumens ϖ, ϕ, ψ ne m'ont ſervi que pour abréger les calculs. Comme ils ſont composés des argumens λ, a, A, il s'agira de les y réſoudre. Or c'eſt ici qu'il ſeroit très néceſſaire de connoître exactement les époques des argumens ϖ, ϕ, ψ. Je les prendrai telles que je les ai employées dans les calculs précédens, en poſant pour

	ϖ	ϕ	ψ
1722	58	93	223

Les équations qui expriment le rapport entre ces argumens & les argumens λ, a, A, sont les suivantes:

$$\mathfrak{d}.\ \sin(2\lambda - A) + \mathfrak{e}.\ \sin(\lambda - a) = -\ 7'.\ \sin\varphi.$$
$$\mathfrak{l}.\ \sin a + \mathfrak{m}.\ \sin(A - \lambda) = -\ 18',5.\ \sin.\omega.$$
$$\mathfrak{p}.\ \sin(4\lambda - 2A) + \mathfrak{q}.\ \sin(2\lambda - 2a) = -\ 21,5.\ \sin\psi.$$

Or pour 1722 je trouve par les Tables de *Halley*

$$\begin{array}{rcl|rcl} 2\lambda - A & = & 9^s.\ 17^\circ.\ 56'.\ 4'' & 4\lambda - 2A & = & 7.\ 5.\ 52.\ 8 \\ \lambda - a & = & 0.\ 6.\ 58.\ 32 & 2\lambda - 2a & = & 0.\ 13.\ 57.\ 4 \\ a & = & 11.\ 8.\ 55.\ 38 & & & \\ A - \lambda & = & 1.\ 27.\ 58.\ 6 & & & \end{array}$$

& pour trouver encore de quelle conséquence pourra être l'erreur des époques, je poserai pour la même année

$$\omega = 58^\circ + \alpha$$
$$\varphi = 93 + \beta$$
$$\psi = 223 + \gamma.$$

Les valeurs α, β, γ sont assez petites pour qu'on en puisse omettre les puissances supérieures.

L.

Pour résoudre ces équations avec d'autant plus de facilité, j'observe à l'égard de la premiere, que les argumens $2\lambda - A$, $\lambda - a$, φ ayant une même période, ils augmentent ou diminuent d'une même quantité dans un même intervalle de tems. Je les changerai donc en sorte que d'abord $2\lambda - A$, ensuite $\lambda - a$ devienne $= 0$. Ce qui arrive en ajoutant $2^s.\ 12^\circ.\ 3'.\ 56''$ & en soustrayant $6^\circ.\ 58'.\ 32''$. Par là nous aurons les deux équations

$$* \quad + \mathfrak{e}.\ \sin(2^s.\ 19^\circ.\ 2'.\ 28'') = -7'.\ \sin(5^s.\ 15^\circ.\ 3'.\ 56'' + \beta)$$
$$+ \mathfrak{d}.\ \sin(9^s.\ 10^\circ.\ 57'.\ 32'') + \quad * \quad = -7.\ \sin(2.\ 26.\ 1.\ 28 + \beta)$$

d'où l'on déduit

$$\mathfrak{d} = +\ 7',11 + 0',07.\beta.$$
$$\mathfrak{e} = -\ 1,84 - 6,89\ \beta.$$

On voit par là que l'erreur qu'il pourroit y avoir dans l'époque de l'argument φ, n'influe presque point du tout dans la valeur $\mathfrak{d}$, mais que la valeur $\mathfrak{e}$ en souffre d'avantage. Si le coëfficient de sin ϕ, que j'ai posé $= 7'$, devoit être plus ou moins grand, les valeurs $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ en seroient augmentées ou diminuées proportionellement.

LI.

Quant à la seconde équation, les argumens a, $A - \lambda$, ω ayant une même période, je changerai leurs époques, d'abord en y ajoutant $21°.\ 4'.\ 22''$, ensuite en en retranchant $57°.\ 58'.\ 6''$. Par là nous aurons les deux équations

$$\begin{array}{rcl} * \ + 0{,}9818\,\mathfrak{m} & = & -\,18',5\ (0{,}9819 + 0{,}1894\,.\,\alpha) \\ -\,0{,}9904\,\mathfrak{l} \quad\quad * & = & -\,18{,}5\ (0{,}0006 + 1{,}0000\,.\,\alpha) \end{array}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{array}{l} \mathfrak{m} = -\ 18',50 - \ \ 3',57\,.\,\alpha. \\ \mathfrak{l} = +\ \ 0{,}11 + 18{,}68\,.\,\alpha. \end{array}$$

LII.

Enfin en ajoutant $4^s.\ 24°.\ 7'.\ 52''$ aux époques des argumens $4\lambda - 2A$, $2\lambda - a$, ψ, & en en retranchant $13°.\ 57'.\ 4''$, on parvient aux deux équations

$$\begin{array}{rcl} * \ + 0{,}3732\,\mathfrak{q} & = & -\,21',5\,.\,(0{,}1241 + 0{,}9923\,.\,\gamma) \\ -\,0{,}3732\,\mathfrak{p} \quad\quad * & = & +\,21{,}5\ (0{,}4855 + 0{,}8742\,.\,\gamma) \end{array}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{array}{l} \mathfrak{q} = -\ \ 7',15 - 57',16\,.\,\gamma. \\ \mathfrak{p} = -\ 27{,}97 - 50{,}36\,.\,\gamma. \end{array}$$

C'est donc ici que l'erreur des époques peut avoir la plus grande influence.

LIII.

Les coëfficiens $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ se trouvent donc être déterminés en sorte que si ceux des argumens répondans ϕ, ω, ψ ne sont pas suffisamment exacts, il faudra les augmenter ou diminuer proportionellement. Voici donc enfin les perturbations de Saturne entant qu'elles dépendent de ces argumens:

$$+ (0',11 + 18',68.\alpha)(1+\mu).\ \sin a$$
$$- (18,50 + 3,57.\alpha).(1+\mu).\ \sin(A-\lambda)$$
$$+ (7,11 + 0,07.\beta).(1+\nu).\ \sin(2\lambda - A)$$
$$- (1,84 + 6,89.\beta).(1+\nu).\ \sin(\lambda - a)$$
$$- (27,97 + 50,36.\gamma).(1+\rho).\ \sin(4\lambda - 2A)$$
$$- (7,15 + 57,16.\gamma).(1+\rho).\ \sin(2\lambda - 2a).$$

Les lettres μ, ν, ρ désignent des fractions très petites, & les lettres α, β, γ des arcs de cercle, le rayon étant $= 1$. Ces arcs de cercle ne paroissent gueres aller au delà de 1 ou 2 degrés. En faisant toutes ces valeurs μ, ν, ρ, α, β, $\gamma = 0$, cette formule se change en

$$+ 0',11.\ \sin a$$
$$- 18,50.\ \sin(A-\lambda)$$
$$+ 7,11.\ \sin(2\lambda - A) - 27',97.\ \sin 2(2\lambda - A)$$
$$- 1,84.\ \sin(\lambda - a) - 7,15.\ \sin 2(\lambda - a)$$

& cette expression est équivalente à

$$- 18',5.\ \sin\omega - 7'.\ \sin\Phi - 21',5.\ \sin\psi.$$

LIV.

Après avoir débarrassé les erreurs des Tables de M. *Halley* de la plus grande partie des irrégularités qui s'y trouvent, il reste à voir si nous pourrons encore tenir compte des minuties. C'est donc à la colonne D de la Table que je viens de donner pour les oppositions de Saturne, que nous pourrons nous en tenir. J'avoue qu'en considérant d'un côté que cette *liste réduite* (c'est ainsi que je l'appellerai pour plus de briéveté) ne va que rarement au delà de deux minutes, & que d'un autre côté les erreurs des observations elles-mêmes vont quelquefois à plus d'une minute, j'ai douté si je poursuivrois ces recherches, ou s'il ne valoit pas autant en rester à ce que j'ai déjà trouvé. Il ne s'agissoit cependant que d'essayer; & comme les échelles dont je me suis servi dans les constructions précédentes pouvoient être assez bonnes, tant qu'il étoit question de 20 minutes & plus, elles ne me paroissoient plus propres pour les constructions suivantes, où il s'agit de divifer une minute en parties décimales. Il convenoit d'en employer de plus grandes.

LV.

J'ai donc tiré au bas de la troifieme Planche une ligne droite qui pût me fervir d'axe. Je l'ai divifée en 120 parties, pour marquer le nombre des oppofitions de Saturne. Au deffus de cette ligne j'en ai tiré une autre parallele, où j'ai marqué les années répondantes à ces oppofitions. Sur le devant de ces lignes j'ai tiré une perpendiculaire, divifée en minutes & en parties décimales de minutes, qui fe comptent depuis l'axe. C'eft fur cette échelle que j'ai pris les nombres de la *lifte réduite*, pour en former autant d'ordonnées qu'il y a d'oppofitions. Ces ordonnées ne font pas tirées dans la Figure. Je n'en ai marqué que les extrémités par des points. Si les obfervations étoient exactes, tous ces points devroient former le contour d'une ligne courbe affez réguliere. Mais cela n'ayant pas lieu, il s'agiffoit de tirer cette ligne courbe de maniere qu'elle paffât entre ces points, comme tenant le milieu de toutes les petites aberrations. C'eft ce que je pouvois faire affez bien depuis *a* jusqu'en *b*, c'eft à dire précifément jusqu'à l'endroit où M. *Halley* lui-même a fourni la lifte des erreurs de fes Tables d'après les obfervations faites à *Danzic* & en *Angleterre*. Mais depuis 1720 jusqu'en 1763 ces points n'ont plus une pofition affez réguliere pour continuer cette ligne courbe avec quelque affurance. J'ai d'abord tiré *bien ou mal & avec peu de conviction* la courbe *bc*. Je ne pouvois gueres la faire monter de *b* en *d*, defcendre de *d* vers *e*, remonter de *e* vers *f*, redefcendre de *f* vers *g*, remonter de *g* vers *h* & enfin defcendre de *h* vers *c*. Ç'auroit été la faire paffer d'une extrémité à l'autre & la rendre entierement hétérogene à fa partie antérieure *ab*.

LVI.

Après avoir donc tiré la partie *bc* avec fi peu de certitude, il ne reftoit d'autre moyen que de l'affujettir à quelque examen. Nous avons vu cideffus que les perturbations périodiques de Saturne reviennent en $59\frac{1}{2}$ & $60\frac{3}{4}$ ans. J'ai donc transféré la courbe *ab* en *bk*, en l'avançant de

$60\frac{3}{4}$ ans, & j'ai vu que cette courbe *bk* affectoit tout aussi bien que la courbe *bc* de tenir quelque milieu entre les points qui devoient, pour ainsi dire, me servir de guide pour tirer cette courbe *bc*. Voilà donc une nouvelle incertitude. Mais tout bien considéré, je dois préférer la courbe *bk*, qui est en quelque sorte la continuation de la courbe *ab*. En effet ces deux courbes se joignent en *b* de telle maniere, que non seulement elles se touchent, mais qu'elles ont encore une même direction, & un même degré de courbure. Regardant donc les deux courbes *ab*, *bk* comme une même courbe *abk*, je passerai à un autre examen.

LVII.

J'ai soustrait chaque ordonnée de cette courbe *abk* de celle qui en est éloignée de $30\frac{3}{8}$ ans, & les différences m'ont donné la courbe *mn*, rapportée à la ligne où j'ai marqué les années, comme à un axe. Or j'ai vu sans peine que par les points d'inflexion de cette courbe *mn* je pouvois faire passer une courbe *pq*, dont la courbure est extremement simple, & qui laisse la courbe *mn* alternativement & à portions assez égales au dessus & au dessous d'elle. J'ai vu sans peine que ces deux courbes se croisent à des intervalles d'environ 10 ans. La premiere fois cela arrive vers 1695, & la sixieme vers 1744. Soustrayant 1695 de 1744, & divisant le résidu 49 par 5, le quotient est à très peu près 10. C'est donc à la période λ que la courbe *mn* se rapporte. Quant à la courbe *pq*, ses deux *maximum* sont près des points *p*, *q*, à une distance d'environ 61 ans, de sorte que cette courbe se rapporte à la période Φ, tout de même que la courbe *GH* dans la premiere Planche. J'observe même que ces deux courbes ne sont que le supplément l'une de l'autre. Car leurs sommets & les points où elles passent l'axe tombent à très peu près sur les mêmes années.

LVIII.

Cela m'a fait voir qu'en évaluant les plus grandes ordonnées de la courbe *GH* à 14 minutes (§. 33.), je les ai fait trop grandes de $1\frac{1}{2}$ minutes. Ainsi, au lieu du terme

$$-\ 7'.\ \sin\Phi$$

il faut prendre

$$- 6{,}25 \,.\, \sin \varphi.$$

ce qui donne (§. 53.)

$$1 - v = 1 - \tfrac{1}{25}$$

& par conſéquent on aura les deux termes

$$+ (6{,}35 + 0{,}06 \,.\, \beta) \,.\, \sin (2\lambda - A)$$
$$- (1{,}64 + 6{,}15 \,.\, \beta) \,.\, \sin (\lambda - a).$$

LIX.

Quant à la courbe mn, je trouve qu'elle répond à la période λ, non ſeulement en ce qu'elle croiſe la courbe pq (conſidérée comme ſon axe) de 10 en 10 ans, mais encore par rapport aux époques. Car en $1687\frac{3}{4}$ on a $\lambda = 84°. 36'$. Or après $30\frac{3}{8}$ ans, c'eſt à dire en $1718\frac{1}{4}$, on trouve $\lambda = 275°. 24'$. Or

$$\sin 275°. 24' - \sin 84°. 36' = 1{,}9912 \,.\, \cos 180°.$$

Si donc la courbe mn répond à l'expreſſion

$$\mathfrak{r} \,.\, \sin \lambda$$

il faut que ſon *minimum* tombe en $1718\frac{1}{4}$. Et c'eſt auſſi ce qui a lieu. Car c'eſt là qu'elle s'abaiſſe le plus au deſſous de la courbe pq, conſidérée comme ſon axe. La plus grande ordonnée ſe trouve être $= 1',04$. Cela donne

$$- 1{,}9912\ \mathfrak{r} = 1',05$$
$$\mathfrak{r} = 0{,}52.$$

Ainſi nous aurons pour les perturbations de Saturne l'équation

$$- 0',52 \,.\, \sin \lambda \quad .$$

qu'on pourra joindre à celles que nous avons déjà trouvées ci-deſſus.

LX.

Les deux corrections que je viens de trouver demandent encore que je corrige les perturbations calculées d'après les premieres formules. C'eſt ce que je n'ai pas manqué de faire, afin de voir quelles ſeront les perturbations réſidues. Je joins ici une ſeconde Table entierement analogue à la précédente. On verra dans les colonnes D, que les différences entre les

obſervations & les nouveaux calculs ne laiſſent pas d'être par ci-par là aſſez conſidérables, quoique généralement parlant elles ſoient plus petites que dans la Table précédente. Mais pour voir ce qui en eſt, j'ai conſtruit ſur la quatrieme Planche celles qui répondent aux obſervations, en me ſervant Pl. V.
des mêmes échelles que j'ai employées pour conſtruire les différences de la premiere Table. C'eſt encore ici que les obſervations fournies & comparées par M. *Halley* lui-même ont dû me ſervir de guide pour tirer la courbe *rs* en ſorte qu'elle tienne un certain milieu entre les points trouvés au moyen des différences. J'étois indécis ſi je la ferois monter d'avantage vers *t*, & baiſſer d'avantage vers *v* & *w*, parce que dans ces endroits il y a des points qui s'éloignent fort conſidérablement de l'axe. Cela pouvoit avoir lieu ſi cette courbe étoit dûe à deux périodes peu différentes l'une de l'autre, telles que ſont celles de $29\frac{1}{2}$ & de $30\frac{3}{8}$ ans. Mais dans ce cas la diſtance entre les points des plus grandes ordonnées ſeroit ou plus grande ou plus petite que n'eſt celle qui répond à un nombre de $29\frac{1}{2}$ ou de $30\frac{3}{8}$ ans. Mais je trouve que cette diſtance des plus grandes ordonnées répond aſſez exactement à $29\frac{1}{2}$ ans. Ainſi je pouvois regarder la courbe *rs* comme dépendant tout ſimplement des périodes a & $A - \lambda$, qui ſont de $29\frac{1}{2}$ ans. Elle offre encore toute la régularité requiſe pour cet effet; auſſi l'ai-je tirée en conſéquence de ces conſidérations. En tenant compte de cette courbe les différences diminueront conſidérablement. Car on voit que les points vers *t*, *v*, *w* qui s'éloignent le plus de la courbe, s'éloignent encore d'avantage de l'axe.

LXI.

Cette courbe *rs* s'abaiſſe au deſſous de l'axe plus qu'elle ne monte au deſſus. Je trouve que ſon véritable axe eſt $0',6$ au deſſous de celui qui a ſervi de baſe pour la conſtruction, ou bien que c'eſt la droite *rz*. Le point d'interſection répond au commencement du mois de Juin 1661, & la plus grande ordonnée eſt $= 1,2$ minute. Poſant donc

$$\delta . \sin a + \mathfrak{t} . \sin (A - \lambda) = - 1',2 . \sin \varkappa$$

on aura pour le premier Juin 1661

$$\varkappa = 0$$

&

$$a = 10^s.\ 19^\circ.\ 19'.$$
$$A - \lambda = 1.\ 8.\ 12.$$

Ajoutant à chacun de ses argumens $1^s.\ 10^\circ.\ 41'$, on aura

$$\varkappa = 1^s.\ 10^\circ.\ 41'$$
$$a = 0$$
$$A - \lambda = 2.\ 18.\ 53.$$

Otant des mêmes argumens $1^s.\ 8^\circ.\ 12'$, on aura

$$\varkappa = 10^s.\ 21^\circ.\ 48'$$
$$a = 9.\ 11.\ 7$$
$$A - \lambda = 0.$$

Par là on obtient les deux équations

$$* \quad + t.\,\sin(2^s.\,18^\circ.\,53') = -1',2.\,\sin(1^s.\,10^\circ.\,41')$$
$$+ \mathfrak{s}.\,\sin(9^s.\,11^\circ.\,7'(\quad * \quad = -1,2.\,\sin(10.\ 21.\ 48)$$

ou bien

$$+ 0,9812\ t = -0',78$$
$$- 0,9789\ \mathfrak{s} = +0,74$$

ce qui donne

$$t = \mathfrak{s} = -0',8.$$

Donc la nature de la courbe rs sera exprimée par

$$-0',8\ \sin a - 0,8.\ \sin(A - \lambda).$$

Et voilà la correction que demande l'équation

$$+ 0,11\ \sin a - 18,50\ \sin(A - \lambda)$$

que nous avions trouvée ci-dessus (§. 53.). Cette équation corrigée sera donc

$$- 0,7\ \sin a - 19,3.\ \sin(A - \lambda)$$

& au lieu de

$$- 1' + \frac{6'.\,xx}{10000}$$

on posera

$$- 0',4 + \frac{6.\,xx}{10000}.$$

LXII.

Me voici enfin parvenu à ces minuties où les erreurs des obſervations ſe confondent avec les perturbations de Saturne qu'il s'agiroit encore de trier. Il y a même les perturbations du mouvement de la Terre, qui ſe confondent avec celles de Saturne. J'ai cependant tiré une nouvelle ligne droite *ab* pour ſervir d'axe, & prenant les diſtances des points de la courbe *rs*, ces diſtances m'ont fourni les ordonnées, dont j'ai pareillement indiqué les extrémités par des points. C'étoit pour voir ſi ces points affecteroient encore de ſuivre les inflexions de quelque ligne courbe. Bien ou mal j'ai cru pouvoir faire paſſer entre ces points la courbe *cd* en ſorte qu'elle tint un certain milieu, & que ſes inflexions ne fuſſent pas trop anomales. La premiere moitié de cette courbe offroit beaucoup moins de difficultés que la ſeconde, où il y a des points qui ſemblent néceſſairement indiquer des obſervations aſſez peu exactes, témoin p. ex. les points *e*, *f*, qui ne different que d'une année, & qui nonobſtant cela different de plus de 3 minutes. Les points *g*, *h*, *i* paroiſſent également fort ſujets à caution.

LXIII.

La courbe *cd* a ſes plus grandes ordonnées aſſez régulierement diſtantes l'une de l'autre d'un intervalle d'environ 12 ans, quoique du reſte ces ordonnées ſoient d'une longueur fort inégale. Or l'argument $\lambda + a$ fournit une période de 11,87 ans. J'ai trouvé l'effet de cet argument

$$= 0',5 \,.\, \sin(\lambda + a).$$

Souſtrayant cet effet des ordonnées de la courbe *cd*, il m'eſt reſté la courbe *kl*, dont les ordonnées juſques vers l'an 1720 ne paſſent pas une minute, & je laiſſerai indécis ce qu'il faut conclure de ce que depuis l'année 1720 ces ordonnées commencent à être plus grandes. Mais je ne puis m'empêcher de répéter ce que j'ai déjà dit plus haut (§. 55.), que la liſte des perturbations de Saturne juſqu'à l'année 1720 a été fournie par M. *Halley* lui-même, & que les obſervations dont il a fait uſage, ſont celles qui ont été faites à *Danzic* & en *Angleterre*.

LXIV.

Parmi les argumens qui restent, il y en a deux dont l'effet paroit pouvoir être sensible. Le premier est $A + \lambda$, & sa période est de 7,4260 ans, de sorte qu'en moins de 4 ans il passe de son *maximum* à son *minimum*. L'autre argument est $3\lambda - A$, & sa période est de 14,9649 ans. Mais je ne trouve rien dans les dernieres courbes qui puisse indiquer quelque effet de ces périodes, de sorte que ces effets doivent être peu perceptibles.

LXV.

J'en viens donc à exposer le résultat des recherches précédentes. Ce résultat consiste briévement en ce que les perturbations du mouvement de Saturne en longitude, telles qu'elles ont été observées & comparées avec les Tables de M. *Halley*, peuvent être représentées par la formule

$$\begin{aligned}
&- 0',4 - 0',7 \,.\, \sin a - 0',5 \ \sin \lambda \\
&- 19,3 \,.\, \sin (A - \lambda) \\
&+ \ 6,3 \,.\, \sin (2\lambda - A) - 28',0 \,.\, \sin 2 (2\lambda - A) \\
&- \ 1,6 \,.\, \sin (\lambda - a) - \ 7,1 \,.\, \sin 2 (\lambda - a) \\
&+ \ 0,5 \,.\, \sin (\lambda + a) \\
&+ \ 6',0 \,.\, \frac{xx}{10000}.
\end{aligned}$$

Cette formule s'applique au lieu elliptique que donnent les Tables de M. *Halley*, pour avoir le vrai lieu ou la longitude héliocentrique de Saturne. La suite des tems fera voir jusqu'à quel point cette formule continuera de s'accorder avec les observations, & surtout si le terme $6' \,.\, \frac{xx}{10000}$ est réellement une équation séculaire, ou s'il est dû à quelque cause périodique. La courbe kl ne laisse pas de s'abaisser de plus en plus au dessous de son axe. Cela fait qu'au lieu de $6' \,.\, \frac{xx}{10000}$, il faudra plutôt poser $6,5 \,.\, \frac{xx}{10000}$, ou prendre ce coëfficient encore plus grand, pour que notre formule tienne d'autant plus le juste milieu entre les observations.

I. *Com-*

I. *Comparaison des Perturbations de Saturne observées & calculées pour les commencemens des années depuis 1658.*

O	C	D	O	C	D	O	C	D	O	C	D
+5,3	+ 6,1	−0,8	−9,7	−10,0	+0,3	− 8,0	− 6,3	−1,7		+ 7,7	
+3,9	+ 5,7	−1,8	−9,5	−10,1	+0,6	− 7,7	− 5,6	−2,1		+ 5,7	
+3,1	+ 5,3	−2,2	−9,3	− 9,9	+0.6	− 7,5	− 4,7	−2,8		+ 5,2	
+2,7	+ 3,7	−1,0	−8,8	− 8,2	−0,6	− 6,6	− 4,1	−2,5		+ 4,4	
+2,5	+ 3,6	−1,1	−8,1	− 7,2	−0,9	− 5,7	− 2,9	−2,8		+ 1,0	
+2,8	+ 3,7	−0,9	−7,1	− 6,0	−1,1	− 4,6	− 3,1	−1,5		− 1,7	
+3,1	+ 3,6	−0,5	−5,9	− 4,7	−1,2	− 3,4	− 3,1	−0,3		− 4,5	
+3,4	+ 3,7	−0,3	−4,3	− 3,2	−1,1	− 2,9	− 2,9	0		− 7,5	
+3,7	+ 3,9	−0,2	−2,8	− 2,0	−0,8	− 2,9	− 2,3	−0,6		−10,7	
+4,0	+ 4,1	−0,1	−1,3	− 0,5	−0,8	− 3,6	− 3,3	−0,3		−13,6	
+4,3	+ 4,0	+0,3	+0,4	+ 1,0	−0,6	− 5,1	− 4,8	−0,3		−16,0	
+4,5	+ 3,9	+0,6	+1,8	+ 1,9	−0,1	− 6,5	− 5,3	−1,2		−18,3	
+4,6	+ 3,9	+0,7	+2,9	+ 3,5	−0,6	− 8,0	− 6,8	−1,2		−20,5	
+4,5	+ 3,9	+0,6	+3,7	+ 4,8	−1,1	− 9,6	− 8,5	−1,1		−22,2	
+4,2	+ 3,6	+0,6	+4,5	+ 6,0	−1,5	−10,8	−10,4	−0,4		−23,1	
+3,8	+ 3,5	+0,3	+5,2	+ 6,9	−1,7	−12,2	−12,4	+0,4		−23,3	
+3,4	+ 3,4	0	+5,7	+ 7,5	−1,8	−13,4	−14,3	+0,9		−23,1	
+2,8	+ 3,2	−0,4	+6,2	+ 8,2	−2,0	−14,3	−16,1	+1,3		−22,4	
+2,2	+ 2,7	−0,5	+6,4	+ 8,4	−2,0	−16,3	−17,9	+1,6		−21,3	
+1,3	+ 2,1	−0,8	+6,5	+ 8,9	−2,4	−17,6	−19,2	+1,6		−19,8	
+0,5	+ 1,5	−1,0	+6,5	+ 7,9	−1,4	−19,4	−20,6	+1,2		−17,8	
−0,5	+ 0,8	−1,3	+6,2	+ 7,3	−1,1	−20,6	−21,4	+0,8		−15,7	
−1,4	− 0,1	−1,5	+5,5	+ 6,7	−1,2	−21,4	−21,7	+0,3		−13,7	
−2,4	− 0,8	−1,6	+4,6	+ 5,7	−1,1	−21,6	−21,6	0		−11,5	
−3,1	− 1,3	−1,8	+3,5	+ 5,0	−1,5	−21,4	−20,9	−0,5		− 9,6	
−3,4	− 2,1	−1,3	+2,3	+ 3,6	−1,3	−20,8	−21,0	+0,2		− 7,9	
−3,4	− 3,0	−0,4	+1,3	+ 2,1	−0,8	−20,2	−19,5	−0,7		− 6,5	
−3,3	− 3,8	+0,5	0,0	+ 0,5	−0,5	−18,7	−17,6	−1,1		− 5,7	
−3,6	− 4,9	+1,3	−0,9	− 1,0	+0,1	−17,5	−15,2	−2,3		− 5,6	
−4,3	− 5,8	+1,5	−2,0	− 2,4	+0,4	−15,7	−12,8	−2,9		− 6,0	
−5,1	− 6,4	+1,4	−2,8	− 3,6	+0,8	−13,5	−10,0	−3,5		− 7,2	
−6,4	− 7,3	+0,9	−3,7	− 5,1	+1,4	−11,2	− 7,2	−4,0		− 8,9	
−7,6	− 8,1	+0,5	−4,8	− 5,8	+1,0	− 8,4	− 4,4	−4.0		−10,9	
−8,4	− 8,7	+0,3	−5,5	− 6,8	+1,3	− 5,9	− 1,6	−4,3		−13,6	
−8,8	− 9,3	+0,5	−5,9	− 7,1	+1,2	− 3,2	+ 1,0	−4,2		−16,8	
−9,2	− 9,8	+0,6	−6,5	− 7,4	+0,9	− 1,2	+ 3,2	−4,4		−20,0	
−9,5	− 9,9	+0,4	−6,8	− 7,7	+0,9		+ 4,9			−23,5	
−9,7	−10,1	+0,4	−7,3	− 7,4	+0,1		+ 6,2			−26,8	
−9,8	−10,2	+0,4	−7,6	− 7,5	−0,1		+ 7,4			−29,3	
−9,8	−10,2	+0,4	−7,8	− 6,9	−0,9		+ 8,0			−33,2	

II. *Comparaison des Perturbations de Saturne observées & calculées pour la suite de ses oppositions depuis le 3 Avril 1658.*

O	C	D	O	C	D	O	C	D	O	C	D
+ 4,7	+ 6,0	− 1,3	− 9,4	− 10,0	+ 0,6	− 6,0	− 4,0	− 2,0			
+ 2,5	+ 5,6	− 3,1	− 8,7	− 8,8	+ 0,1	− 5,1	− 2,9	− 2,2			
+ 3,0	+ 4,9	− 1,9	− 8,0	− 7,9	− 0,1	− 4,2	− 3,1	− 1,1			
+ 2,6	+ 3,7	− 1,1	− 6,9	− 6,9	0	− 3,3	− 3,1	− 0,2			
+ 2,3	+ 3,6	− 1,3	− 4,9	− 5,0	+ 0,1	− 2,5	− 2,8	+ 0,3			
+ 3,1	+ 3,7	− 0,6	− 4,4	− 3,5	− 0,9	− 4,4	− 2,5	− 1,9			
+ 3,3	+ 3,6	− 0,3	− 2,7	− 2,2	− 0,5	− 4,7	− 3,7	− 1,0			
+ 3,6	+ 3,8	− 0,2	− 0,4	− 0,6	+ 0,2	− 5,0	− 5,0	0			
+ 3,7	+ 4,0	− 0,3	+ 0,8	+ 1,0	− 0,2	− 7,9	− 5,8	− 2,1			
+ 3,8	+ 4,0	− 0,2	+ 2,4	+ 1,9	− 0,5	− 9,7	− 7,5	− 2,2			
+ 4,3	+ 3,9	+ 0,4	+ 2,4	+ 3,5	− 1,1	− 12,2	− 9,1	− 3,2			
+ 4,7	+ 3,9	+ 0,8	+ 4,1	+ 4,9	− 0,8	− 12,0	− 10,9	− 1,1			
+ 4,7	+ 3,9	+ 0,8	+ 4,2	+ 6,1	− 1,9	− 13,1	− 13,3	+ 0,2			
+ 3,8	+ 3,7	+ 0,1	+ 4,8	+ 7,0	− 2,2	− 15,1	− 15,1	0			
+ 3,4	+ 3,5	− 0,[illegible]	+ 6,1	+ 7,6	− 1,5	− 15,8	− 17,0	+ 1,2			
+ 3,6	+ 3,4	+ 0,2	+ 6,2	+ 8,2	− 2,0	− 17,6	− 18,6	+ 1,0			
+ 3,2	+ 3,2	0	+ 6,3	+ 8,5	− 2,2	− 18,4	− 20,0	+ 1,6			
+ 2,5	+ 2,8	− 0,3	+ 6,8	+ 8,7	− 1,9	− 20,2	− 21,1	+ 0,9			
+ 1,5	+ 2,2	− 0,7	+ 6,0	+ 7,7	− 1,7	− 21,1	− 20,6	− 0,5			
+ 0,2	+ 1,6	− 1,4	+ 5,3	+ 7,1	− 1,8	− 22,0	− 21,6	− 0,4			
− 0,7	+ 0,9	− 1,6	+ 4,9	+ 6,1	− 1,2	− 20,9	− 21,0	+ 0,1			
− 1,9	− 0,1	− 1,8	+ 5,3	+ 5,4	− 0,1	− 20,9	− 21,0	+ 0,1			
− 3,1	− 0,8	− 2,3	+ 2,7	+ 4,4	− 1,7	− 19,8	− 19,9	+ 0,1			
− 3,0	− 1,4	− 1,6	+ 0,5	+ 2,9	− 2,4	− 19,0	− 17,9	− 1,1			
− 3,4	− 2,2	− 1,2	− 0,7	+ 1,3	− 2,0	− 17,2	− 15,3	− 1,9			
− 3,3	− 3,1	− 0,2	− 1,4	− 0,3	− 1,1	− 15,5	− 13,0	− 2,5			
− 3,7	− 4,0	+ 0,3	− 1,0	− 1,8	+ 0,8	− 13,2	− 10,1	− 3,1			
− 3,5	− 5,1	+ 1,6	− 2,2	− 3,1	+ 1,1	− 10,7	− 7,2	− 3,5			
− 4,9	− 5,9	+ 1,0	− 5,4	− 4,6	+ 1,2	− 8,0	− 4,3	− 3,7			
− 5,9	− 6,6	+ 0,7	− 4,7	− 5,5	+ 0,8	− 4,9	− 1,4	− 3,5			
− 7,5	− 7,6	+ 0,1	− 5,5	− 6,5	+ 1,0	− 0,1	+ 1,3	− 1,4			
− 8,0	− 8,3	+ 0,3	− 6,0	− 7,0	+ 1,0	− 1,2	+ 3,5	− 4,7			
− 8,8	− 9,0	+ 0,2	− 5,1	− 7,3	+ 1,2						
− 9,3	− 9,5	+ 0,2	− 7,2	− 7,6	+ 0,4						
− 9,3	− 9,8	+ 0,5	− 5,6	− 7,4	+ 1,8						
− 9,0	− 10,0	+ 1,0	− 6,2	− 7,5	+ 1,3						
− 9,2	− 10,2	+ 1,0		− 6,9							
− 9,7	− 10,2	+ 0,5	− 6,9	− 6,3	− 0,6						
− 9,6	− 10,1	+ 0,5	− 7,8	− 5,6	− 2,2						
− 9,4	− 10,1	+ 0,7	− 8,7	− 4,7	− 4,0						

III. *Comparaisons corrigées pour les commencemens des années.*

O	C	D	O	C	D	O	C	D
+5.3	+ 4,9	+0,4	−9,7	− 9,9	+0,2	− 8,0	− 6,7	−1,3
+3.9	+ 4.5	−0,6	−9.5	−10,1	+0,6	− 7.7	− 5,9	−1,8
+3.1	+ 4,1	−1,0	−9,3	− 9,7	+0,4	− 7,5	− 4,8	−2,7
+2,7	+ 2,6	+0,1	−8,8	− 8,0	−0,8	− 6,6	− 4,1	−2,5
+2,5	+ 2,7	−0,2	−8,1	− 6,9	−1,2	− 5,7	− 2,6	−3,1
+2,8	+ 3,0	−0,2	−7,1	− 5,6	−1,5	− 4,6	− 2,5	−2,1
+3,1	+ 3,0	+0,1	−5,9	− 4,2	−1,7	− 3,4	− 2,4	−1,0
+3.4	+ 3.3	+0,1	−4.3	− 2,7	−1,6	− 2,9	− 2,0	−0,9
+3.7	+ 3.7	o	−2,8	− 1,5	−1,3	− 2,9	− 2,2	−0,7
+4.0	+ 4.0	o	−1,3	− 0,1	−1,2	− 3.6	− 2,1	−1,5
+4.3	+ 4,0	+0,3	+0,4	+ 1,4	−1,0	− 5,1	− 3,6	−1,5
+4,5	+ 3,9	+0,6	+1,8	+ 2,1	−0,3	− 6,5	− 4,1	−2,4
+4,6	+ 3,9	+0,7	+2,9	+ 3,6	−0,7	− 8,0	− 5,7	−2,3
+4,5	+ 3,8	+0,7	+3,7	+ 4,7	−1,0	− 9,6	− 7,5	−2,1
+4,2	+ 3,5	+0,7	+4,5	+ 5,8	−1,3	−10,8	− 9,5	−1,3
+3,8	+ 3,3	+0,5	+5,2	+ 6,4	−1,2	−12,2	−11,8	−0,4
+3,4	+ 3,2	+0,2	+5,7	+ 6,8	−1,1	−13,4	−13,8	+0,4
+2,8	+ 2,8	o	+6,2	+ 7,4	−1,2	−14,8	−15,8	+1,0
+2,2	+ 2,3	−0,1	+6,4	+ 7,4	−1,0	−16,3	−17,7	+1,4
+1,3	+ 1,7	−0,4	+6,5	+ 7,7	−1,2	−17,6	−19,1	+1,5
+0,5	+ 1,2	−0,7	+6,5	+ 6,7	−1,2	−19,4	−20,5	+1,1
−0,5	+ 0,5	−1,0	+6,2	+ 6,1	+0,1	−20,6	−21,3	+0,7
−1,4	o	−1,4	+5,5	+ 5,6	−0,1	−21,4	−21,6	+0,2
−2,4	− 0,7	−1,7	+4,6	+ 4,6	o	−21,6	−21,4	−0,2
−3,1	− 1,0	−2,0	+3,5	+ 4,0	−0,5	−21,4	−20,6	−0,8
−3,4	− 1,6	−1,8	+2,3	+ 2,9	−0,6	−20,8	−20,6	−0,2
−3,4	− 2,2	−1,2	+1,3	+ 1,6	−0,3	−20,2	−19,1	−1,1
−3,3	− 2,9	−0,4	o	+ 0,1	−0,1	−18,7	−17,0	−1,7
−3,6	− 3,9	+0,3	−0,9	− 1,3	+0,4	−17,5	−14,6	−0,9
−4,3	− 4,6	+0,3	−2,0	− 2,5	+0,5	−15,7	−12,3	−3,4
−5,1	− 5,1	o	−2,8	− 3,7	+0,9	−13,5	− 9,6	−3,9
−6,4	− 6,1	−0,3	−3,7	− 5,1	+1,4	−11,2	− 6,9	−4,3
−7,6	− 7,0	−0,6	−4,8	− 5,9	+1,1	− 8,4	− 4,2	−4,2
−8,4	− 7,6	−0,8	−5,5	− 6,9	+1,4	− 5,9	− 1,7	−4,2
−8.8	− 8,3	−0,5	−5,9	− 7,4	+1,5	− 3,2	+ 0,7	−3,9
−9,2	− 9,1	−0,1	−6,5	− 7,7	+1,2	− 1,2	+ 2,7	−3,9
−9,5	− 9,0	−0,5	−6,8	− 8,1	+1,3		+ 4,2	
−9,7	− 9,8	+0,1	−7,3	− 7,8	+0,5		+ 5,3	
−9,8	−10,1	+0,3	−7,6	− 8,1	+0,5		+ 6,3	
−9,8	−10,1	+0,3	−7,8	− 7,4	−0,4		+ 6,9	

IV. *Comparaisons corrigées pour les oppositions.*

O	C	D	O	C	D	O	C	D
+4,7	+ 4,8	−0,1	− 9,4	−9,8	+0,4	− 6,0	− 4,0	−2,0
+2,5	+ 4,4	−1,9	− 8,7	−8,5	−0,2	− 5,1	− 2,6	−2,5
+3,0	+ 3,6	−0,6	− 8,0	−7,2	−0,8	− 4,2	− 2,5	−1,7
+2,6	+ 2,6	0	− 6,9	−6,0	−0,8	− 3,3	− 2,3	−1,0
+2,3	+ 2,8	−0,5	− 4,9	−4,4	−0,5	− 2,5	− 2,0	−0,5
+3,1	+ 3,0	+0,1	− 4,4	−2,9	−1,5	− 4,4	− 2,2	−2,2
+3,3	+ 3,1	+0,2	− 2,7	−1,7	−1,0	− 4,7	− 2,1	−2,6
+3,6	+ 3,5	+0,1	− 0,4	−0,2	−0,2	− 5,0	− 3,7	−1,3
+3,7	+ 3,9	−0,2	+ 0,8	+1,3	−0,5	− 7,9	− 4,5	−3,4
+3,8	+ 4,0	−0,2	+ 2,4	+2,0	+0,4	− 9,7	− 6,7	−3,0
+4,3	+ 3,9	+0,4	+ 2,4	+3,6	−1,2	−12,2	− 8,4	−3,8
+4,7	+ 3,9	+0,8	+ 4,1	+4,8	−0,7	−12,0	−10,6	−1,4
+4,7	+ 3,8	+0,9	+ 4,2	+5,8	−1,6	−13,1	−12,8	−0,3
+3,8	+ 3,6	+0,2	+ 4,8	+6,4	−1,6	−15,1	−14,8	−0,3
+3,4	+ 3,4	0	+ 6,1	+6,9	−0,8	−15,8	−16,8	+1,0
+3,6	+ 3,2	+0,4	+ 6,2	+7,4	−1,4	−17,6	−18,5	+0,9
+3,2	+ 2,9	+0,3	+ 6,3	+7,5	−1,2	−18,4	−19,9	+1,5
+2,5	+ 2,4	+0,1	+ 6,8	+7,2	−1,4	−20,2	−21,1	+0,9
+1,5	+ 1,8	−0,3	+ 6,0	+6,5	−0,5	−21,1	−21,5	+0,4
+0,2	+ 1,3	−0,1	+ 5,3	+5,9	−0,6	−22,0	−21,4	−0,6
−0,7	+ 0,6	−1,3	+ 4,9	+5,1	−0,2	−20,9	−20,8	−0,1
−1,9	0	−1,9	+ 5,3	+4,3	+1,0	−20,9	−20,6	−0,3
−3,1	− 0,7	−2,4	+ 2,7	+3,5	−0,8	−19,8	−19,3	−0,5
−3,0	− 1,0	−2,0	+ 0,5	+2,3	−1,8	−19,0	−17,3	−1,7
−3,4	− 1,6	−1,8	− 0,7	+0,8	−1,5	−17,2	−14,8	−2,4
−3,3	− 2,3	−1,0	− 1,4	−0,6	−0,8	−15,5	−12,5	−3,0
−3,7	− 3,1	−0,6	− 1,0	−2,0	+1,0	−13,2	− 9,9	−3,3
−3,5	− 4,0	+0,5	− 2,2	−3,2	+1,0	−10,7	− 6,9	−3,9
−4,9	− 4,7	−0,1	− 5,4	−4,5	−0,9	− 8,0	− 4,1	−3,9
−5,9	− 5,3	−0,6	− 4,7	−5,6	+0,9	− 4,9	− 1,6	−3,3
−7,5	− 6,4	−1,1	− 5,5	−6,6	+1,1	− 0,1	+ 0,9	−1,0
−8,0	− 7,2	−0,8	− 6,0	−7,2	+1,2	− 1,2	+ 2,9	−4,1
−8,8	− 7,9	−0,9	− 5,1	−7,6	+2,5			
−9,3	− 8,6	−0,7	− 7,2	−8,0	+0,8			
−9,3	− 9,2	−0,1	− 5,6	−7,8	+2,2			
−9,0	− 9,6	+0,6	− 6,2	−8,0	+1,8			
−9,2	− 9,9	+0,7		−7,4				
−9,7	−10,1	+0,4	− 6,9	−6,7	−0,2			
−9,6	−10,0	+0,4	− 7,8	−5,9	−1,9			
−9,4	−10,0	+0,6	− 8,7	−4,8	−3,9			